# Memòria

## Treball previ

Ens diuen que hem d'utilitzar el mètode de diferències finites Per resoldre:

*Equació de Poisson*

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y); \forall (x,y) \in D \equiv [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R} \quad (1)$$

El que hem de fer primer de tot és tractar el domini $D$, per tal de convertir-lo en un domini discretitzat, així doncs considerem la graella de punts $(x__i,y__j)$ resultants de dividir $[a,b]$ en $n $ subintervals de mida $hx$ i $[c,d]$ en $m$ de mida $hy$. D'aquesta manera trobarem només els $u__{i,j}=u(x__i,y__j)$, dels punts de la graella, amb $0<i<n $ , $0<j<m $ (no incloem els extrems ja que ja tenim els seus valors).

Fixem-nos amb quines són les variables i quines les incògnites del problema: coneixem la $f(x,y)$, l'interval $D$ i $u(x,y)$ a $\partial D$ i volem trobar tots els $u__{i,j}$ de la graella.

Tenim per una banda l'equació de Poisson que ens relaciona $u__{xx}, u__{yy}$ amb $f$ i per altra banda les diferències centrals finites que ens relacionen numèricament $f''$ amb $f$.

*Diferències centrals finites*

$$p''(x_0) \approx \frac{p(x_0+h) - 2p(x_0) + p(x_0-h)}{h^2} \quad (2)$$

Si apliquem això a les columnes de la nostra graella tindrem una aproximació a $u__{xx}$ en el punt $(x__i,y__j)$, en funció de $u__{i-1,j}$,$ u__{i,j}$ i $ u__{i+1,j}$, i si ho fem a les columnes tindrem $u__{yy}$ en funció de $u__{i,j-1}$,$ u__{i,j}$ i $ u__{i,j+1}$.

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i,y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \\ u_{yy}(x_i,y_j) &\approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \end{aligned} \quad (3)$$

i ara,

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y) \Rightarrow \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} \approx f(x_i,y_j) \quad (4)$$

Per tant tenim la següent equació de 5 incògnites, amb $h$ i $f$ coneguts.

$$\frac{1}{h_x^2}u_{i+1,j} + \frac{1}{h_x^2}u_{i-1,j} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right)u_{i,j} + \frac{1}{h_y^2}u_{i,j+1} + \frac{1}{h_y^2}u_{i,j-1} \approx f(x_i, y_j) \quad (1)$$

Ara si suposem que $m$ i $n$ són més grans de 5, tindrem un sistema d'equacions d'on podrem resoldre numèricament $u__{i,j} $ $\forall (i,j)$; $0<i<n$, $0<j<m$, amb $f(x__i,y__i)$ coneguda. Volem expressar aquest sistema d'equacions com un sistema de la forma, $A\cdot u=b$. Per fer-ho hem de posar els valors de la graella $(n-1)\times (m-1)$ que representa $D$ en format de vector. De manera que $u$:

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \cdots & u_{n-1,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \cdots & u_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,m-1} & u_{1,m-1} & \cdots & u_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ens quedarà com a vector $(m-1)\cdot(n-1)$:

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,m-1} & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,m-1} & \dots & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,m-1} \end{pmatrix}^\top \quad (6)$$

Definim el vector $b$ com el els valors de l'equació en cada una de les incògnites, que l'expressem en forma de matriu $(m-1)\times(n-1)$:

$$b = \begin{pmatrix} f_{1,1} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} & f_{2,1} - \frac{g_{2,0}}{h_y^2} & \cdots & f_{n-2,1} - \frac{g_{n-2,0}}{h_y^2} & f_{n-1,1} - \frac{g_{n-1,0}}{h_y^2} - \frac{g_{n,1}}{h_x^2} \\ f_{1,2} - \frac{g_{0,2}}{h_x^2} & f_{2,1} & \cdots & f_{n-2,2} & f_{n-1,2} - \frac{g_{n,2}}{h_x^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{1,m-2} - \frac{g_{0,m-2}}{h_x^2} & f_{2,m-2} & \cdots & f_{n-2,m-2} & f_{n-2,m-1} - \frac{g_{n,m-2}}{h_x^2} \\ f_{1,m-1} - \frac{g_{1,m}}{h_y^2} - \frac{g_{0,m-1}}{h_x^2} & f_{2,m-1} - \frac{g_{2,m}}{h_y^2} & \cdots & f_{n-2,m-1} - \frac{g_{n-2,m}}{h_y^2} & f_{n-1,m-1} - \frac{g_{n-1,m}}{h_y^2} - \frac{g_{n,m-1}}{h_x^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Veiem que a les vores tenim una incògnita resolta (o dues als extrems), ja que sabem el valor de la frontera $g$ en $\partial D$. També el convertim en vector $(m-1)\cdot(n-1)$:

$$b = \left( f_{1,1} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} \quad f_{1,2} - \frac{g_{0,2}}{h_x^2} \quad \dots \quad f_{2,1} - \frac{g_{2,0}}{h_y^2} \quad f_{2,2} \quad \dots \quad f_{n-1,m-1} - \frac{g_{n-1,m}}{h_y^2} - \frac{g_{n,m-1}}{h_x^2} \right)^\top \quad (8)$$

D'aquesta manera podem definir a partir de $(\ref{eq:1})$ la matriu $A$ que relaciona incògnites $u$ amb valors $f$ una matriu de $$(m-1)\cdot(n-1)\times(m-1)\cdot(n-1) $$. On tant $B$ i $I$ tenen $(m-1) $ columnes i $ (n-1)$ files.

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots & 0 \\ I & B & I & \dots & 0 \\ 0 & I & B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I & B \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_x^2}\right) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_y^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2} + \frac{2}{h_x^2}\right) \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_x^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h_x^2} \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar que $A\times u=b$, ho fem amb la primera fila de $A$:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ \vdots \\ u_{1,m-1} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{n-1,m-1} \end{pmatrix} = f_{1,1} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} \quad (9)$$

$$-\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right)u_{1,1} + \frac{u_{1,2}}{h_y^2} + \frac{u_{2,1}}{h_x^2} = f_{1,1} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} \quad (10)$$

Això és exactament el sistema que teniem.

## Anàlisi de resultats

A la pràctica s'ha implementat aquests vectors com a matrius $m-1\times n-1$ amb l'ennumeració natural $(1,...n-1)$. Els algoritmes són ja adaptats al problema i no funcionals per qualsevol matriu.La matriu d'incògnites és $w$. De manera que $u_{1,1}=w[1][1]$. El punt $u_{1,1}$ és l'extrem el punt més pròxim a $(a, c)$, $u_{1,j}$ recorra l'eix

## Proves

He comprovat amb la graella $n=6; m=5$ que el valor de $\omega=1.4$ és el que aconsegueix minimitzar l'error ($1\times10^{-10}$) i el nombre d'iteracions ($41$) fetes. Per tant farem les comprovacions modificant $n$ i $m$ amb aquest valor.

| | **5x6** | | **10x12** | | **25x30** | | **50x60** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| J | 145 | tolerance | 562 | tolerance | max | 0.0000463177 | max | 0.0010650960 |
| GS | 76 | tolerance | 291 | tolerance | max | 0.0000000008 | max | 0.0001008817 |
| SOR | 50 | tolerance | 195 | tolerance | - | - | - | - |