MÈTODES NUMÈRICS II. Curs 2018/19. Semestre de primavera

Exercici pràctic 1

Instruccions. Cal enviar el programa (fitxer nom.c) i l'informe amb les explicacions (en pdf), a les tasques respectives obertes al campus virtual. Temps límit: les 24h del 24 de març de 2019.

Enunciat. Es considera l'equació en derivades parcials de Poisson en un rectangle

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D \equiv [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \ ,$$

amb condicions de frontera

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \forall (x,y) \in S \equiv \partial D \ .$$

Els nombres reals a, b, c, d, i les funcions $f(x,y)$ i $g(x,y)$ són les dades conegudes. La incògnita és la funció $u(x,y)$ $\forall (x,y) \in$ interior$D$. Se suposa que les dades són adequades per tal que el problema tingui solució única.

S'ha de resoldre aproximadament aquest problema de la manera següent:

- Cal desenvolupar per escrit el mètode de les diferències finites per a transformar el problema anterior en el problema de resoldre un sistema lineal molt escàs (la matriu té molts zeros). S'usa:
  - Discretització del problema, partint $[a,b]$ en n subintevals d'amplada hx, i partint $[c,d]$ en m subintevals d'amplada hy. Així es genera una xarxa de punts (x_i, y_j). L'objectiu passa a ser el de trobar aproximacions u_{ij} dels valors buscats $u(x_i, y_j)$, només en un conjunt discret de punts (hi ha $(n-1) \times (m-1)$ valors u_{ij} que cal trobar).
  - Aproximació, en cada punt (x_i, y_j) de la xarxa que sigui interior, de les derivades parcials segones per diferències centrades de segon ordre. Així, $u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j)$ queda transformat en una combinació lineal dels cinc valors $u_{i-1,j}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i,j+1}$ i $u_{i,j}$.
  - Imposar les condicions de frontera adequadament (els valors $u_{0,j}$, $u_{n,j}$, $u_{i,0}$ i $u_{i,m}$ són coneguts i depenent de $g(x,y)$).
  - Donar amb detall l'estructura del sistema lineal resultant, tant de la matriu com del terme independent.

- Resoldre el sistema lineal resultant pels mètodes iteratius de Jacobi, de Gauss-Seidel i SOR. Cal fer-ho mitjançant un programa en C. No s'ha d'usar memòria per a la matriu del sistema ni per a les matrius d'iteració dels 3 mètodes. Només cal guardar vectors (millor matrius, ja que hi ha 2 subíndes) per al terme independent i per a les incògnites. Els valors de n i m s'han de llegir, així com el paràmetre de relaxació w en el cas SOR. Cal fer proves diverses, variant aquestes dades.

- Desenvolupar per escrit la interpretació dels resultats obtinguts; per exemple, sobre la dependència de la velocitat de convergència i de l'error de la solució obtiguda, respecte als valors de hx i hy.

Referència. Burden&Faires: Numerical Analysis, secció 12.1.

Useu el següent ordre per a les incògnites u_{ij}:

$$u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,m-1}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,m-1}, \dots, u_{n-1,1}, u_{n-1,2}, \dots, u_{n-1,m-1} \ .$$

Podeu usar les dades de l'exemple 2:

$$a = c = 0, \ b = 2, \ d = 1, \ f(x,y) = xe^y, \ u(0,y) = 0, \ u(2,y) = 2e^y, \ u(x,0) = x, \ u(x,1) = ex,$$

per a comprovar el funcionament del vostre programa (hi ha una taula de resultats per al cas $n = 6$, $m = 5$). Després, evidentment, cal usar valors elevats de n i m, i comparar els vostres resultats amb la solució exacta $u(x,y) = f(x,y)$ coneguda.