Memòria

`Bernat Esquirol Juanola`

Treball previ

Ens diuen que hem d'utilitzar el [mètode de diferències finites] Per resoldre:

Equació de Poisson

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=f(x,y);\forall(x,y)\in D\equiv[a,b]\times[c,d]\in\mathbb{R} \tag{1}$$

El que hem de fer primer de tot és tractar el domini D, per tal de convertir-lo en un domini discretitzat, així doncs considerem la graella de punts (x_i,y_j) resultants de dividir $[a,b]$ en n subintervals de mida hx i $[c,d]$ en m de mida hy. D'aquesta manera trobarem només els $u_{i,j}=u(x_i,y_j)$, dels punts de la graella, amb $0<i<n$, $0<j<m$ (no incloem els extrems ja que ja tenim els seus valors).

Fixem-nos amb quines són les variables i quines les incògnites del problema: coneixem la $f(x,y)$, l'interval D i $u(x,y)$ a ∂D i volem trobar tots els $u_{i,j}$ de la graella.

Tenim per una banda l'equació de Poisson que ens relaciona u_{xx},u_{yy} amb f i per altra banda les diferències centrals finites que ens relacionen numèricament f'' amb f.

Diferències centrals finites

$$p''(x_0)\approx\frac{p(x_0+h)-2p(x_0)+p(x_0-h)}{h^2} \tag{2}$$

Si apliquem això a les columnes de la nostra graella tindrem una aproximació a u_{xx} en el punt (x_i,y_j), en funció de $u_{i-1,j}$,$u_{i,j}$ i $u_{i+1,j}$, i si ho fem a les columnes tindrem u_{yy} en funció de $u_{i,j-1}$,$u_{i,j}$ i $u_{i,j+1}$.

$$\begin{aligned}u_{xx}(x_i,y_j)&\approx\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_x^2}\\u_{yy}(x_i,y_j)&\approx\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_y^2}\end{aligned} \tag{3}$$

i ara,

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=f(x,y)\Rightarrow\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_x^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_y^2}\approx f(x_i,y_j) \tag{4}$$

Per tant tenim la següent equació de 5 incògnites, amb h i f coneguts.

$$\frac{1}{h_x^2}u_{i+1,j}+\frac{1}{h_x^2}u_{i-1,j}-\left(\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}\right)u_{i,j}+\frac{1}{h_y^2}u_{i,j+1}+\frac{1}{h_y^2}u_{i,j-1}\approx f(x_i,y_j) \tag{1}$$

Ara si suposem que m i n són més grans de 5, tindrem un sistema d'equacions d'on podrem resoldre numèricament $u_{i,j}$ $\forall(i,j)$; $0<i<n$, $0<j<m$, amb $f(x_i,y_i)$ coneguda. Volem expressar aquest sistema d'equacions com un sistema de la forma, $A\cdot u=b$. Per fer-ho hem de posar els valors de la graella $(n-1)\times(m-1)$ que representa D en format de vector. De manera que u:

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \dots & u_{n-1,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \dots & u_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,m-1} & u_{1,m-1} & \dots & u_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ens quedarà com a vector $(m-1)\cdot(n-1)$:

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,m-1} & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,m-1} & \dots & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \dots & u_{n-1,m-1} \end{pmatrix}^\top \tag{6}$$

Definim el vector b com el els valors de l'equació en cada una de les incògnites, que l'expressem en forma de matriu $(m-1)\times(n-1)$:

$$b = \begin{pmatrix} f_{1,1} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} & f_{2,1} - \frac{g_{2,0}}{h_y^2} & \dots & f_{n-2,1} - \frac{g_{n-2,0}}{h_y^2} & f_{n-1,1} - \frac{g_{n-1,0}}{h_y^2} - \frac{g_{n,1}}{h_x^2} \\ f_{1,2} - \frac{g_{0,2}}{h_x^2} & f_{2,1} & \dots & f_{n-2,2} & f_{n-1,2} - \frac{g_{n,2}}{h_x^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{1,m-2} - \frac{g_{0,m-2}}{h_x^2} & f_{2,m-2} & \dots & f_{n-2,m-2} & f_{n-2,m-1} - \frac{g_{n,m-2}}{h_x^2} \\ f_{1,m-1} - \frac{g_{1,m}}{h_y^2} - \frac{g_{0,m-1}}{h_x^2} & f_{2,m-1} - \frac{g_{2,m}}{h_y^2} & \dots & f_{n-2,m-1} - \frac{g_{n-2,m}}{h_y^2} & f_{n-1,m-1} - \frac{g_{n-1,m}}{h_y^2} - \frac{g_{n,m-1}}{h_x^2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Veiem que a les vores tenim una incògnita resolta (o dues als extrems), ja que sabem el valor de la frontera g en ∂D. També el convertim en vector $(m-1)\cdot(n-1)$:

$$b = \left(f_{1,1} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} \quad f_{1,2} - \frac{g_{0,2}}{h_x^2} \quad \dots \quad f_{2,1} - \frac{g_{2,0}}{h_y^2} \quad f_{2,2} \quad \dots \quad f_{n-1,m-1} - \frac{g_{n-1,m}}{h_y^2} - \frac{g_{n,m-1}}{h_x^2} \right)^\top \tag{8}$$

D'aquesta manera podem definir a partir de (1) la matriu A que relaciona incògnites u amb valors f una matriu de $(m-1)\cdot(n-1)\times(m-1)\cdot(n-1)$. On tant B i I tenen $(m-1)$ columnes i $(n-1)$ files.

$$A = \begin{pmatrix} B & I & 0 & \dots & 0 \\ I & B & I & \dots & 0 \\ 0 & I & B & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I & B \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_y^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h_y^2} & -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_x^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h_x^2} \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar que $A\times u = b$, ho fem amb la primera fila de A:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\right) & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ \vdots \\ u_{1,m-1} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ \vdots \\ u_{n-1,m-1} \end{pmatrix} = f_{1,1} - \frac{g_{0,1}}{h_x^2} - \frac{g_{1,0}}{h_y^2} \tag{9}$$

$$-\Big(\frac{2}{h_y^2}+\frac{2}{h_x^2}\Big)u_{1,1}+\frac{u_{1,2}}{h_y^2}+\frac{u_{2,1}}{h_x^2}=f_{1,1}-\frac{g_{0,1}}{h_x^2}-\frac{g_{1,0}}{h_y^2} \tag{10}$$

Això és exactament el sistema que teniem.

Anàlisi de resultats

A la pràctica s'ha implementat aquests vectors com a matrius $m-1 \times n-1$ amb l'ennumeració natural $(1,\dots n-1)$. Els algoritmes són ja adaptats al problema i no funcionals per qualsevol matriu.La matriu d'incògnites és w. De manera que $u_{1,1}=w[1][1]$. El punt $u_{1,1}$ és l'extrem el punt més pròxim a (a,c), $u_{1,j}$ recorra l'eix

Proves

He comprovat amb la graella $n=6; m=5$ que el valor de $\omega=1.4$ és el que aconsegueix minimitzar l'error (tolerance=1×10^{-10}) i el nombre d'iteracions (max=1000) fetes. Per tant farem les comprovacions modificant n i m amb aquest valor.

	5x6		**10x12**		**25x30**		**50x60**	
J	145	tolerance	562	tolerance	max	0.0000463177	max	0.0010650960
GS	76	tolerance	291	tolerance	max	*0.0000000008*	max	*0.0001008817*
$SOR_{1,4}$	*41*	tolerance	*208*	tolerance	max	0.0000000033	max	0.0001877131
	6x5		**12x10**		**30x25**		**60x50**	
J	116	tolerance	455	tolerance	max	0.0000138072	max	0.0008877161
GS	61	tolerance	237	tolerance	max	0.0000000195	max	0.0002667446
$SOR_{1,4}$	*41*	tolerance	*169*	tolerance	*987*	tolerance	max	*0.0000864609*

	$SOR_{1,4}$
8x25	754
10x20	508
14x14	299
20x10	*247*
25x8	273

Conclusions

Si mirem els resultats obtinguts en podem treure dos conclusions:

1. $SOR_{1,4}$ és clarament l'algoritme més eficient, només en el cas concret de tenir una m gran i una n més petita està per sota de GS, com veiem a la primera taula.
2. Tots els algoritmes tendeixen a tenir menys error quan la n i m provoquen una graella de quadrats enlloc de rectangles. És a dir, com que tenim un rectangle de 2×1 a l'exemple, el més eficient possible és triar una $n=2m$. A la segona taula podem veure com de totes les combinacions que tenen el

mateix nombre de caselles dins la graella (≈ 200) la que troba la solució amb menys iteracions és la que compleix $n = 2m$.

Per tant per tenir màxima rapidesa de convergència hauriem d'utilitzar el mètode SOR amb $\omega = 1.4$ en una graella de $2m \times m$, en l'exemple donat.