APÉNDICE A

# Sistemas de numeración

## A.1. SISTEMA DECIMAL

A diario utilizamos un sistema basado en los dígitos decimales (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) para representar los números; es el denominado sistema decimal. Considere lo que significa el número 83. Significa ocho veces diez, más tres:

$$83 = (8 \times 10) + 3$$

El número 4728 significa cuatro veces mil, siete veces cien, dos veces diez, más ocho:

$$4728 = (4 \times 1000) + (7 \times 100) + (2 \times 10) + 8$$

El sistema decimal se dice que usa la **base** 10. Esto significa que cada dígito del número se multiplica por diez elevado a la potencia correspondiente a la posición de dicho dígito. Así:

$$83 = (8 \times 10^1) + (3 \times 10^0)$$

$$4728 = (4 \times 10^3) + (7 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (8 \times 10^0)$$

Los valores fraccionarios se representan de la misma manera, pero utilizando potencias negativas de diez. Así, el numero 0,256 significa dos décimas más cinco centésimas más seis milésimas:

$$0{,}256 = (2 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-2}) + (6 \times 10^{-3})$$

Un número con parte entera y parte fraccionaria tiene dígitos ponderados por potencias positivas y negativas de 10:

$$472{,}256 = (4 \times 10^2) + (7 \times 10^1) + (2 \times 10^0) + (2 \times 10^{-1}) + (5 \times 10^{-2}) + (6 \times 10^{-3})$$

En general, para la representación decimal de $X = \{\ldots\ d_2 d_1 d_0 \,.\, d_{-1} d_{-2} d_{-3} \ldots\}$, el valor de $X$ es:

$$X = \sum_i (d_i \times 10^i)$$

## A.2. SISTEMA BINARIO

En el sistema decimal se emplean diez dígitos diferentes para representar números en base diez. En el sistema binario se tienen solo los dígitos 1 y 0. Por tanto, los números en el sistema binario se representan en base 2.

Para evitar confusiones pondremos a veces un subíndice en los números que indica su base. Por ejemplo, $83_{10}$ y $4728_{10}$ son números representados en notación decimal, o simplemente números decimales. El 1 y el 0 en notación binaria tienen el mismo significado que en notación decimal:

$$0_2 = 0_{10}$$

$$1_2 = 1_{10}$$

Para representar números mayores, como ocurre en la notación decimal, cada dígito de un número binario tiene un valor que depende de su posición:

$$10_2 = (1 \times 2^1) + (0 \times 2^0) = 2_{10}$$
$$11_2 = (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) = 3_{10}$$
$$100_2 = (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (0 \times 2^0) = 4_{10}$$

y así sucesivamente. De forma similar, los valores fraccionarios se representan con potencias negativas de la base:

$$1001{,}101 = 2^3 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = 9{,}625_{10}$$

En general, para la representación binaria de $Y = \{\dots b_2 b_1 b_0 \,.\, b_{-1} b_{-2} b_{-3} \dots\}$, el valor de $Y$ es:

$$Y = \sum_i (b_i \times 2^i)$$

## A.3. CONVERSIÓN ENTRE BINARIO Y DECIMAL

Es fácil convertir un número de notación binaria a decimal. En la subsección anterior hemos mostrado diversos ejemplos. Todo lo que se necesita es multiplicar cada dígito binario por la potencia de 2 apropiada y sumar los resultados.

Para convertir de decimal a binario, las partes entera y fraccionaria se tratan por separado.

### ENTEROS

Para la parte entera, recuerde que en notación binaria un entero representado mediante:

$$b_{m-1} b_{m-2} \dots b_2 b_1 b_0 \qquad b_i = 0 \text{ ó } 1$$

tiene el valor:

$$(b_{m-1} \times 2^{m-1}) + (b_{m-2} \times 2^{m-2}) + \dots + (b_1 \times 2^1) + b_0$$

Suponga que se quiere convertir un entero decimal $N$ a forma binaria. Si dividimos $N$ entre dos en el sistema decimal, y obtenemos un cociente $N_1$ y un resto $R_0$, podemos escribir:

$$N = 2 \times N_1 + R_0 \qquad R_0 = 0 \text{ ó } 1$$

A continuación dividimos el cociente $N_1$ entre dos. Suponga que el nuevo cociente es $N_2$ y el nuevo resto es $R_1$. Entonces:

$$N_1 = 2 \times N_2 + R_1 \qquad R_1 = 0 \text{ ó } 1$$

de manera que:

$$N = 2 \times (2\,N_2 + R_1) + R_0 = (N_2 \times 2^2) + (R_1 \times 2^1) + R_0$$

Si sustituimos

$$N_2 = 2\,N_3 + R_2$$

tenemos:

$$N = (N_3 \times 2^3) + (R_2 \times 2^2) + (R_1 \times 2^1) + R_0$$

Continuando este proceso, ya que $N > N_1 > N_2 \ldots$, llegará a producirse un cociente $N_{m-1} = 1$ (excepto para los enteros decimales 0 y 1, cuyos equivalentes binarios son 0 y 1 respectivamente), y un resto $R_{m-2}$, que es 0 o 1. Entonces

$$N = (1 \times 2^{m-1}) + (R_{m-2} \times 2^{m-2}) + \ldots + (R_2 \times 2^2) + (R_1 \times 2^1) + R_0$$

que es la forma binaria de N. Es decir, convertimos de base 10 a base 2 mediante divisiones repetidas por dos. Los restos y el cociente final, 1, nos dan los dígitos binarios de $N$ en orden de importancia creciente. La Figura A.1 muestra un par de ejemplos.

## FRACCIONARIOS

Para la parte fraccionaria recuerde que, en notación binaria, un número con un valor entre 0 y 1 se representa mediante:

$$0.\,b_{-1}b_{-2}b_{-3}\ldots \qquad b_i = 0 \text{ ó } 1$$

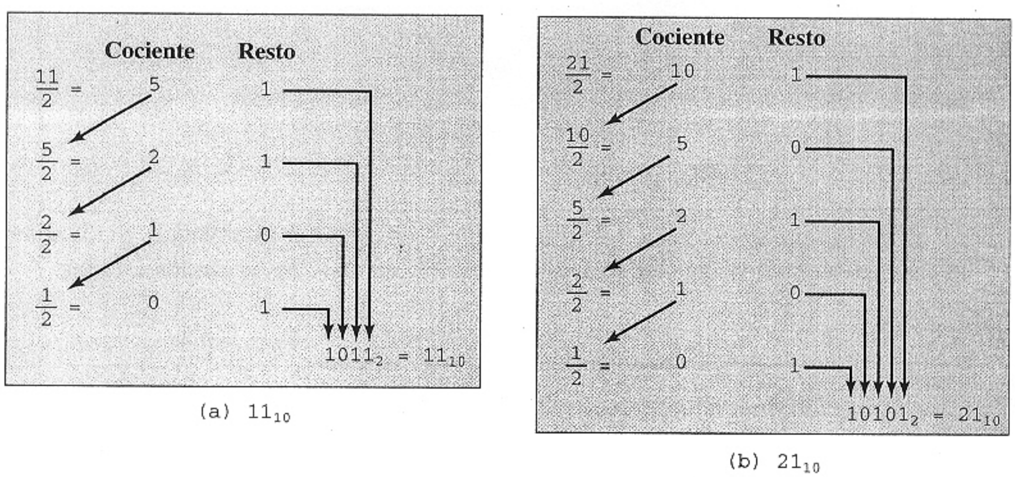



**Figura A.1.** Ejemplos de conversión de números enteros de la notación decimal a la binaria.

y tiene el valor:

$$(b_{-1} \times 2^{-1}) + (b_{-2} \times 2^{-2}) + (b_{-3} \times 2^{-3}) \dots$$

Esto puede rescribirse como:

$$2^{-1} \times (b_{-1} + 2^{-1} \times (b_{-2} + 2^{-1} \times (b_{-3} + \dots$$

Esta expresión sugiere un procedimiento para la conversión. Suponga que queremos convertir el número $F$ $(0 < F < 1)$ de notación decimal a binaria. Sabemos que F puede expresarse en la forma:

$$F = 2^{-1} \times (b_{-1} + 2^{-1} \times (b_{-2} + 2^{-1} \times (b_{-3} + \dots$$

Si multiplicamos $F$ por 2, obtenemos:

$$2\,(F = b_{-1} + 2^{-1} \times (b_{-2} + 2^{-1} \times (b_{-3} + \dots$$

De esta ecuación vemos que la parte entera de $(2 \times F)$, que debe ser 0 o 1 ya que $0 < F < 1$, es simplemente $b_{-1}$. Por lo tanto, podemos decir $(2 \times F) = b_{-1} + F_1$, en donde $0 < F_1 < 1$ tiene la expresión:

$$F_1 = 2^{-1} \times (b_{-2} + 2^{-1} \times (b_{-3} + 2^{-1} \times (b_{-4} + \dots$$

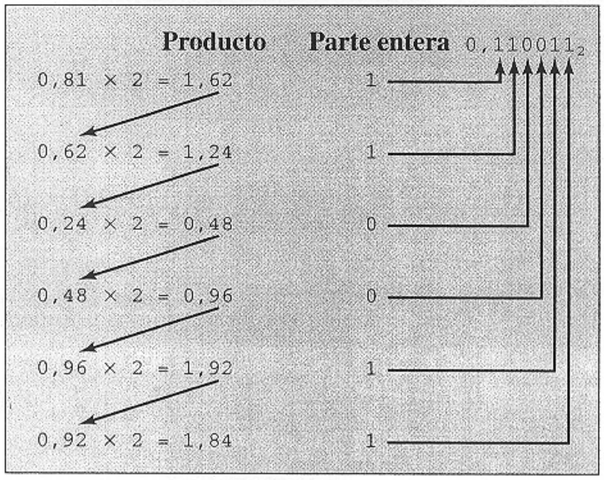
Para encontrar $b_{-2}$ se repite el proceso. En consecuencia, el algoritmo de conversión implica repetidas multiplicaciones por dos. En cada paso se multiplica por dos la parte fraccionaria del número del paso anterior. En el producto resultante, el dígito a la izquierda de la coma decimal será 0 o 1, y pasa a formar parte de la representación binaria, empezando con el dígito más significativo. La parte fraccionaria del producto resultante se usa como multiplicando en el siguiente paso. La Figura A.2 muestra dos ejemplos.

Este proceso no es necesariamente exacto; es decir, una parte fraccionaria decimal con un número finito de dígitos puede requerir una parte fraccionaria binaria con infinitos dígitos. En tales casos, el algoritmo de conversión es normalmente interrumpido después de un número de pasos preestablecido, que depende de la precisión deseada.

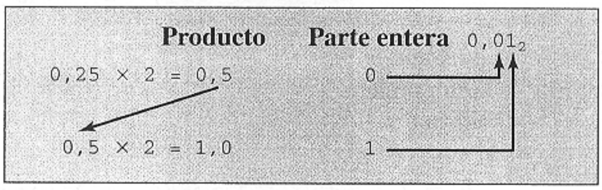
## A.4. NOTACIÓN HEXADECIMAL

Dada la naturaleza binaria de los componentes de los computadores digitales, todos los tipos de datos son representados en los computadores mediante diversos códigos binarios. Sin embargo, aunque el sistema binario sea tan adecuado para los computadores, para los humanos resulta altamente engorroso. Como consecuencia, la mayoría de los profesionales de la informática que tienen que trabajar a menudo con los datos en bruto del computador prefieren una notación más compacta.

¿Qué notación utilizar? Una posibilidad es la decimal. Esta es ciertamente más compacta que la notación binaria, pero es engorroso por lo tedioso de convertir entre base 2 y base 10.




(a) $0.81_{10} = 0.11011_2$ (aproximado)




(b) $0.25_{10} = 0.01_2$ (exacto)

**Figura A.2.** Ejemplos de conversión de números fraccionarios de la notación decimal a la binaria.

En su lugar se ha optado por una notación conocida como hexadecimal. Los dígitos binarios son agrupados en conjuntos de cuatro. A cada combinación posible de cuatro dígitos binarios se asocia un símbolo de la siguiente manera:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0000 = 0 | 0100 = 4 | 1000 = 8 | 1100 = C |
| 0001 = 1 | 0202 = 5 | 1001 = 9 | 1101 = D |
| 0010 = 2 | 0110 = 6 | 1010 = A | 1110 = E |
| 0011 = 3 | 0111 = 7 | 1011 = B | 1111 = F |

La notación se denomina **hexadecimal** por utilizar 16 símbolos, y a cada uno de ellos se le llama **dígito hexadecimal**.

Una secuencia de dígitos hexadecimales puede considerarse como un entero representado en base 16. Así:

$$2C_{16} = (2_{16} \times 16^1) + (C_{16} \times 16^0) = (2_{10} \times 16^1) + (12_{10} \times 16^0) = 44$$

Pero la notación hexadecimal no se utiliza solo para representar enteros. Se emplea como notación concisa para representar cualquier secuencia de dígitos binarios, ya represente texto, números o cualquier otro tipo de datos. Las razones para utilizar la notación hexadecimal son:

1. Es más compacta que la notación binaria.
2. En la mayoría de los computadores, los datos binarios ocupan múltiplos de cuatro bits, y por tanto múltiplos de un dígito decimal.
3. Es extremadamente fácil convertir entre binario y hexadecimal.

Como ejemplo del último punto, considere la cadena binaria 110111100001. Su equivalente es:

$$\begin{array}{cccl} 1101 & 1110 & 0001 & = DE1_{16} \\ D & E & 1 & \end{array}$$

Este proceso se realiza de forma tan natural que un programador experimentado puede convertir mentalmente las representaciones visuales de los datos binarios a su equivalente hexadecimal sin necesidad de escribirlos.

## A.5. PROBLEMAS

**A.1.** Convierta los siguientes números binarios a sus equivalentes decimales:
a. 001100 b. 000011 c. 011100 d. 111100 e. 101010

**A.2.** Convierta los siguientes números binarios a sus equivalentes decimales:
a. 11100,011 b. 110011,10011 c. 1010101010,1

**A.3.** Convierta los siguientes números decimales a sus equivalentes binarios:
a. 64 b. 100 c. 111d. 145 e. 255

**A.4.** Convierta los siguientes números decimales a sus equivalentes binarios:
a. 34,75 b. 25,25 c. 27,1875

**A.5.** Exprese los siguientes números octales en notación hexadecimal:
a. 12 b. 5655 c. 2550276 d. 76545336 e. 3726755

**A.6.** Convierta los siguientes números hexadecimales a sus equivalentes decimales:
a. C b. 9F c. D52 d. 67E e. ABCD

**A.7.** Convierta los siguientes números hexadecimales a sus equivalentes decimales:
a. F,4 b. D3,E c. 1111,1 d. 888,8 e. EBA,C

**A.8.** Convierta los siguientes números decimales a sus equivalentes hexadecimales:
a. 16 b. 80 c. 2560 d. 3000 e. 62.500

**A.9.** Convierta los siguientes números decimales a sus equivalentes hexadecimales:
a. 204,125 b. 255,875 c. 631,25 d. 10000,00390625

**A.10.** Convierta los siguientes números hexadecimales a sus equivalentes binarios:
a. E b. 1C c. A64 d. 1F,C e. 239,4

**A.11.** Convierta los siguientes números binarios a sus equivalentes hexadecimales:
a. 1001,1111 b. 11010,011001 c. 10100111,11011

**A.12.** Demuestre que todo número real con una representación binaria limitada (con un número finito de dígitos a la derecha de la coma binaria) tiene también una representación decimal limitada (número finito de dígitos a la derecha de la coma decimal).