Clase 5

I Longitud de una curva y parametrización en longitud de arco

⇒ DEF:

sea $r: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$), la parametrización de una curva $\mathcal{C}$. (r es de clase $\mathcal{C}^1$)
(i.e., $r([a,b]) = \mathcal{C}$). Asumimos que r es inyectiva (1 a 1) y que $\frac{dr}{dt}$ es continua.

- Recuerdo: $r(t) = (x(t), y(t))$, $\frac{dr}{dt}(t) = r'(t) = (x'(t), y'(t))$.

⇒ Queremos parametrizar de manera especial: en longitud de arco.
⇒ Definimos el largo de la curva $\mathcal{C}$ como:

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt$$

$$\left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| = \|(x'(t), y'(t))\| \text{ si } r: [a,b] \to \mathbb{R}^2 = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

- Si $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$

$$\left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| = \|(x'(t), y'(t), z'(t))\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

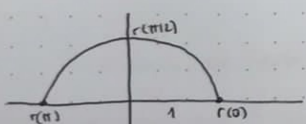
Entonces:

1) Si $r: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$
2) Si $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

EJ

calcular el largo de la curva dada por la parametrización siguiente:

$r: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$
$\quad t \to (\cos t, \sin t)$



$r(t) = (x(t), y(t))$
$x(t) = \cos(t) \Rightarrow x'(t) = -\sin(t)$
$y(t) = \sin(t) \Rightarrow y'(t) = \cos(t)$

⇒ cómo calcular el largo de la curva? vemos extremos $a = 0$, $b = \pi$.

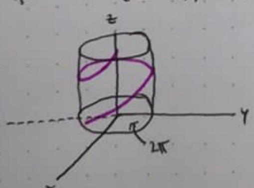
$$L(\mathcal{C}) = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2}\, dt = \int_0^\pi 1\, dt = \pi$$

- Resultado tiene sentido, pq el largo de la circunferencia, perímetro, es $2\pi r$. Y acá el largo de la circunferencia completa, con $r = 1$, sería 2π, por lo que como es la mitad, sería π. calza.

EJ

Encontrar el largo de la curva dada por la parametrización siguiente:

$r: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$
$\quad t \to (\cos(t), \sin(t), t)$



⇒ No es necesario graficar. Lo hacemos para visualizar no más.

$\frac{dr}{dt}(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$

$$L(\mathscr{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2}_{1} + 1^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \rightarrow \text{el largo será } 2\pi\sqrt{2}$$

⇒ El largo no parece depender de la parametrización de esta. Debe tener = largo, independiente de la parametrización.

Obs:

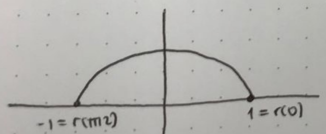
El largo de una curva no depende de la parametrización que se use. Pero sí debe ser inyectiva. Si tengo $\cos(2t)$, $\operatorname{sen}(2t)$, que es igual a $\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t)$, debo transformarla a inyectiva, acotando el intervalo en ese caso a $[0, \pi]$, no $[0, 2\pi]$ como para $\cos(t)$, $\operatorname{sen}(t)$.

* siempre que la parametrización sea inyectiva y <u>de clase $\mathscr{C}^1$</u> → derivadas continuas
* clase $\mathscr{C}^2$ es 2nda derivada continua, clase $\mathscr{C}^0$ es zero derivada continua, etc.

Ej

$r: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \rightarrow (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$



$$\ell(\mathscr{C}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-2\operatorname{sen}(2t))^2 + (2\cos(2t))^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4}\, dt = 2 \cdot \pi/2 = \pi$$

⇒ Es inyectiva pero va un poco + rápido.

⇒ velocidad es vector tangente y rapidez es su módulo.

⇒ No es necesario graficar. Lo hacemos para visualizar no más.

$\frac{dr}{dt}(t) = (-sen(t), cos(t), 1)$

$$L(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\underbrace{(-sen(t))^2 + (cos(t))^2}_{1} + 1^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \rightarrow \text{el largo será } 2\pi\sqrt{2}$$

⇒ El largo no puede depender de la parametrización de esta. Debe tener = largo, independiente de la parametrización.

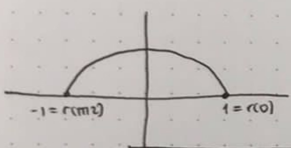
Obs:

El largo de una curva no depende de la parametrización que se use. Pero r debe ser inyectiva.
Si tengo $cos(2t)$, $sen(2t)$, que es igual a $cos(t)$, $sen(t)$, debo transformarla a inyectiva, acotando el intervalo en ese caso a $[0, \pi]$, no $[0, 2\pi]$ como para $cos(t)$, $sen(t)$.

* Siempre que la parametrización sea inyectiva y de clase $\mathcal{C}^1$ → derivadas continuas
* clase $\mathcal{C}^2$ es 2nda derivada continua, clase $\mathcal{C}^0$ es cero derivada continua, etc.

Ej

$r: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$
$\quad t \rightarrow (cos(2t), sen(2t))$

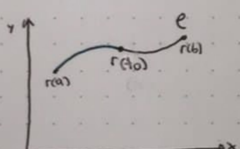


$$\ell(\mathcal{C}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-2sen(2t))^2 + (2cos(2t))^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4}\, dt = 2 \cdot \pi/2 = \pi$$

⇒ Es inyectiva pero va un poco + rápido.
⇒ velocidad es vector tangente y rapidez es su módulo.

PARAMETRIZACIÓN EN LONGITUD DE ARCO

$r: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ * Puede ser $\mathbb{R}^3$ tb. sirve para $\mathbb{R}^n$.



⇒ Si quiero calcular el largo del pedazo de curva de color celeste, entre r(a) y $r(t_0)$:

$$\int_a^{t_0} \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt$$

⇒ Podemos, entonces, calcular el largo de pedazos de curva. No solo el de la curva completa.
⇒ DEF:

Al largo de la curva entre r(a) y r(t) lo anotamos como:

$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt$ * r parametrización de la curva $\mathcal{C}$.

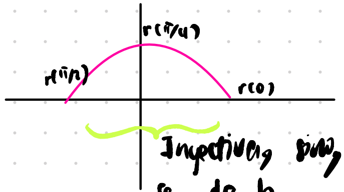
⇒ Para cada "t", tengo un valor s(t). "s" es una función.

$s: [a,b] \rightarrow [0, L(\mathcal{C})]$ → es un intervalo que va a parar al largo de la curva, de extremos r(a) y r(t).
$\quad t \rightarrow s(t)$

Ejemplo

$r : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$

$t \to (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$



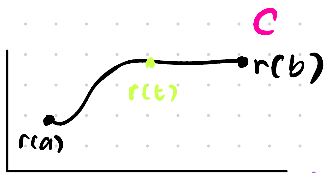
Inyectiva, sino, se da la vuelta

$$\ell(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-2\operatorname{sen}(2t))^2 + (2\cos(2t))^2}$$

$$\ell(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4}\, dt = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi.$$

Parametrización en longitud de arco

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$



↳ largo de curva entre $r(a)$ y $r(t)$

$$\int_a^t \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt$$

Def: Al largo de la curva entre $r(a)$ y $r(t)$ lo vamos a anotar como

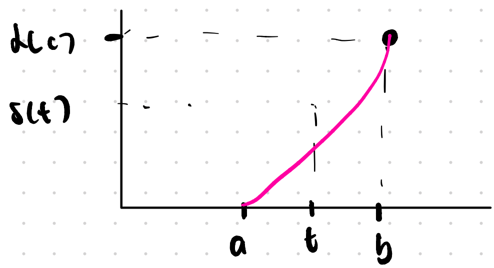
$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt$$

r parametrización de curva C.

$s : [a,b] \to [0, L(C)]$

$t \to s(t)$

$s(a)=0$ $\quad$ $s(b)=\ell(C)$



La función s es biyectiva (con imagen en $[0, \ell(C)]$)

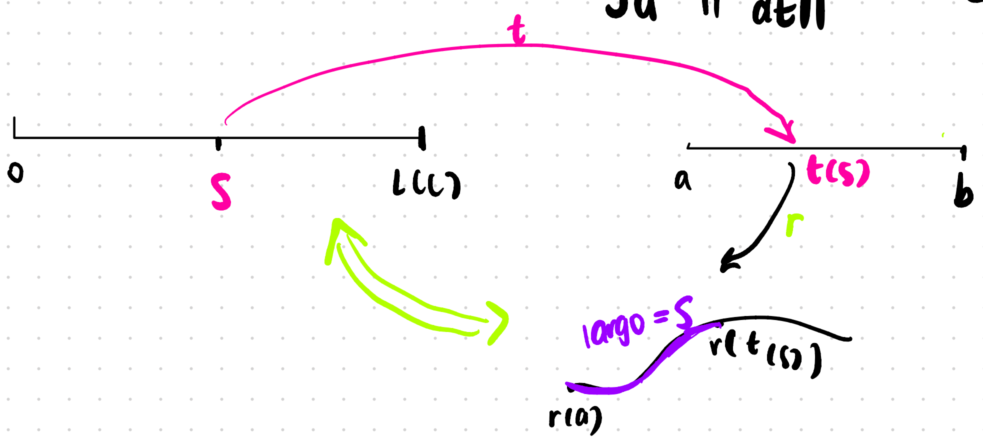
Es decir, tiene inversa.

La inversa de s es una función

$$t : [0, \ell(C)] \to [a,b]$$

$s \to t(s)$ es el real en $[a,b]$

tq $\displaystyle\int_a^{r(s)} \left\| \frac{dr}{dt} \right\| dt = s$



Parametrización en longitud de arco

Def: Sea C una curva con parametrización $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) inyectiva y de clase C^1 Derivadas continuas

Se define la parametización de C en longitud de arco de la manera siguiente:

$$r_0 : [0, l(C)] \to \mathbb{R}^2 \ (o \ \mathbb{R}^3)$$

$$s \to r(t(s))$$

Ejemplo: Encontrar parametrización en longitud de arco de la hélice

$$r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$t \to (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$$

sol

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2 + t^2)} \, dt$$

$$= \int_0^t \sqrt{2} \, dt = t\sqrt{2}$$

$$s(t) = t\sqrt{2} \Rightarrow t(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$r_0 = [0, 2\pi\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3$$

$$s \to r(t(s)) = r\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$