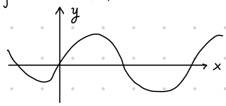
Clase 30: Delta de Dirac.

Características de la transformada de Laplace

dominio de tiempo	dominio de Laplace
función $f(t)$ para $t \geq 0$	función $F(s)$ para $s > a$
derivación en t: $f'(t)$	multiplicación con s: $sF(s) - f(0)$
integración en t: $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	división por s: $\frac{F(s)}{s}$
convolución: $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	multiplicación: $F(s)\cdot G(s)$
traslación sobre eje t: $H(t-a)f(t-a)$	multiplicación con e^{-as}: $e^{-as}F(s)$
multiplicación con e^{at}: $e^{at}f(t)$	traslación sobre eje s: $F(s-a)$
multiplicación con $-t$: $-tf(t)$	derivación en s: $F'(s)$
periódica: $f(t+p) = f(t)$	integración definida: $\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt$

Funciones periódicas

$y(x) = \operatorname{sen}(x)$



El seno tiene un periodo de 2π

$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x) \quad x \in \mathbb{R}$

$f(t)$ es una función periódica con periodo p y es continua por tramos. Entonces, $f(t)$ también es de orden exponencial.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^p e^{-s(\tau+np)} f(\tau+np)\,d\tau$$

$f(t)$ periódico

$\boxed{t = \tau + np}$

f per

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snp}\right) \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sp})^n\right) \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sp}} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau$$

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1 \implies$$

$x = 1/2$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

$|e^{-sp}| = e^{-sp} < 1 \quad$ si $s > 0$

Ejemplo 1

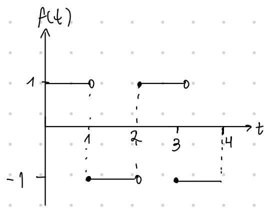
$f(t) = (-1)^{\lfloor t \rfloor}$

$\lfloor t \rfloor$ significa redondear resultados hacia abajo

$\lceil t \rceil$ " " " " arriba

$f(t)$ es periódica con periodo 2.

$$f(t+2) = f(t)$$

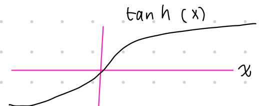


$$\mathcal{L}\{(-1)^{\lfloor t \rfloor}\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st} \cancelto{1}{f(t)}\,dt + \int_1^2 e^{-st} \cancelto{-1}{f(t)}\,dt\right) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=0}^{1} - \left[\frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=1}^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{e^{-s}}{-s} - \frac{1}{-s} - \frac{e^{-2s}}{-s} + \frac{e^{-s}}{-s}\right) = \frac{e^{-2s} - 2e^{-s} + 1}{(1-e^{-2s})s} = \frac{(e^{-s}-1)(e^{-s}-1)}{s(1-e^{-s})(1+e^{-s})}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} \cdot \frac{e^{s/2}}{e^{s/2}} = \frac{1}{s}\,\frac{e^{s/2} - e^{-s/2}}{e^{s/2} + e^{-s/2}} = \frac{1}{s}\tanh\left(\frac{s}{2}\right)$$



Impulso:

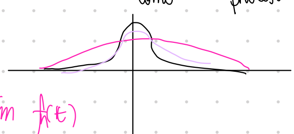
Definimos la delta de Dirac como $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

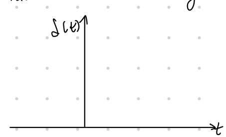
No es una función sino una distribución.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Se puede definir la delta de dirac como proceso de límite con funciones como siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$





$$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

La delta de Dirac es la "derivada" de la función de Heaviside

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

Para

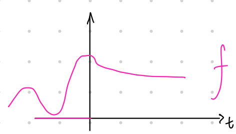
$$= \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Heaviside

Otra característica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$$

con $f(t)$ continua



Para $a > 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\delta(t-a)\,dt = e^{-as}$$