Problema 1 (Ayudantía 1 2022-2)

Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim}$ Exponencial con parámetro $\lambda > 0$. Se define una muestra $\mathbf{X}$ como el vector $= (X_1, \ldots, X_n)$.

a) Encuentre el espacio muestral, espacio paramétrico y la función de densidad de probabilidad de la muestra

b) Especifique el modelo estadístico para la muestra

c) ¿Es el modelo paramétrico?

d) ¿Es el modelo identificable?

a) $X \in \mathbb{R}_+^n$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$f_\lambda(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$

b) $M = \{ f_\lambda(\underset{\sim}{x}) : x \in \mathbb{R}_+^n, \lambda \in \mathbb{R}_+ \}$

c) Si, $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k \to$ di m paramétro

espacio paramétrico

Problema 2 (Casella y Berger, 2002)

a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución Gamma(α, β). Encuentre un estadístico suficiente de 2 dimensiones para (α, β).

Nota: Si X distribuye Gamma(α, β), entonces tiene la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad \alpha, \beta > 0$$

→ Factorizando

→ Test de la razón para probar

$$\Rightarrow f_\theta(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad ; \quad \alpha, \beta > 0$$

$$= \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\beta \sum x_i}$$

$g(\underset{\sim}{x})\ h_\theta(T(x))$

$$= \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\beta \sum x_i}$$

$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = T(\underset{\sim}{x})$

$f_\theta(\underset{\sim}{x}) = g(x)\ h_\theta(T(x))$

b) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de la siguiente distribución

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{\{0<x<1\}}(x) \quad \theta \in \mathbb{R}^+$$

Encuentre un estadístico suficiente minimal para θ.

$$f_\theta(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{\{0<x<1\}}(x)$$

$$= \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$= \frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = C \iff T(\underset{\sim}{x}) = T(\underset{\sim}{y})$$

$$\frac{f_\theta(\underset{\sim}{x})}{f_\theta(\underset{\sim}{y})} = \frac{\cancel{\theta^n} \left(\prod x_i\right)^{\theta-1} \prod \cancel{\mathbb{1}_{(0,1)}(x_i)}}{\cancel{\theta^n} \left(\prod y_i\right)^{\theta-1} \prod \cancel{\mathbb{1}_{(0,1)}(y_i)}}$$

$\theta = 1$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i = 1\ (*)$$

Problema 3 (Casella y Berger, 2002)

Sean X_1, X_2 observaciones iid provenientes de la siguiente distribución:

$$f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\exp\{-x^\alpha\}\mathbb{1}_{\{x>0\}}(x) \quad \alpha > 0$$

Muestre que $(\log X_1)/(\log X_2)$ es un estadístico ancilar para α.

↳ su distribución no depende del parámetro

$\left(\frac{\gamma}{\gamma}\right)^{\theta-1} = 1$

$g(x) = \log(x) = y$

$g^{-1}(y) = e^y$

$\log x = y$

Sea $g(x) = y$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right]\cdot\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|}$$

$$f_\theta(y) = f_\theta(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$$

$$= \alpha\, e^{y(\alpha-1)} \exp\{-e^{y\alpha}\}\, e^y$$

$$= \alpha \exp\{y\alpha - y - e^{y\alpha} + y\}$$

$$= \alpha\, e^{y\alpha} e^{-e^{y\alpha}}$$

$$= \frac{1}{1/\alpha} e^{y/1/\alpha} \quad e^{-e^{y/1/\alpha}}$$

$\frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right)$

$\theta\ \frac{1}{\alpha} \quad f(z) = e^z e^{-e^z}$

$e^z - e^z$

$\log X_i = y_i = -\alpha z_i$

$\underbrace{z_i \sim f(z)}_{\text{demostre que no depende de } \alpha}$

$g(y) = \frac{1}{\alpha} y \qquad g^{-1}(y) = \alpha y$

$f(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$

$= e^{\alpha y} - e^{\alpha y} \quad \alpha$

$\alpha = \frac{1}{1/\alpha}$

$\frac{\log X_1}{\log X_2} = \frac{\alpha z_1}{\alpha z_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Problema 4 (Guía 2022-2)

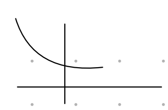
Considere una muestra aleatoria desde una distribución exponencial trasladada, es decir $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f_\mu(x)$, donde

$$f_\mu(x) = e^{-(x-\mu)}\mathbb{1}_{\{x>\mu\}}(x)$$

Muestre que $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ es un estadístico suficiente para μ y estudie su ancilaridad.

$$f_\mu(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^n e^{-(x-\mu)} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x>\mu\}}(x) = \underbrace{e^{-\sum x_i}}_{g(x)} \cdot e^{\mu n} \underbrace{\prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i>\mu\}}(x_i)}_{(*)}$$

$(*) = 1 \iff x_i > \mu \ \forall_i$



$\iff X_{in} = \min\{X_{n-1}, X_n\} > \mu$