Clase 23 EDO

Sistemas lineal no-homogéneo

$\frac{d}{dx}\vec{x}(t) = A\vec{x} + f(t)$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante y f continua tiene solución general

$\vec{x}(t) = \phi(t)\vec{C} + \phi(t)\int(\phi(t))^{-1}\vec{f}(t)\,dt$, ϕ la matriz fundamental del sist. no homogéneo asociado

se calcula por método valor y vector propio, o por e^{At}.

x: # conejos

y: # zorros

$\Delta x = \underline{a}x\Delta t - \underline{p}xy\Delta t$

constante natalidad — de constante interacciones mortalidad

$\Delta y = \underline{q}xy\Delta t - \underline{b}y\,\Delta t$

const — const. natural mortalidad

$\Delta t \to 0$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - pxy = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = qxy - by = g(x,y) \end{cases}$$

Sistemas de EDO's no-lineal, homogéneo y autónomo.

Puntos críticos: (x_c, y_c) tal que

$f(x_c,y_c) = 0$ y $g(x_c,y_c) = 0$

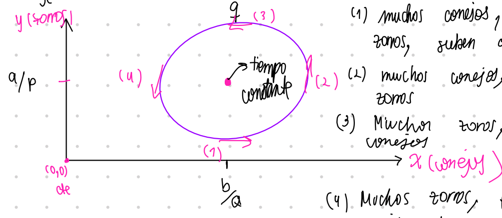
$f(x_c,y_c) = x_c(a - py_c) = 0 \iff x_c = 0$

$a - py_c = 0$

$\frac{a}{p} = y_c$

$g(x_c,y_c) = y_c(qx_c - b) = 0$

si $y_c = 0$ ó $x_c = \frac{b}{q}$



(1) muchos conejos, pocos zorros, suben conejos

(2) muchos conejos, suben zorros

(3) Muchos zorros, bajan conejos

(4) Muchos zorros, pocos conejos, bajan zorros

Se puede demostrar demostrar que las curvas son cerradas

Ejemplo 2: k_1, T cte

en friamiento.

$$\frac{dx}{dt} = -k_1(x(t) - T)$$

$$\frac{dy}{dt} = -k_2(y(t) - T)$$

autónomo

Puntos críticos

(T,T) sol de equilibrio

$$\begin{cases} x(t) = T \\ y(t) = T \end{cases}$$

Vamos a asumir que $T = 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Asumimos que $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$. Además, $x(0) \neq 0$ $y(0) \neq 0$

En general, no tenemos la solución pero en este ejemplo sabemos que

$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}$

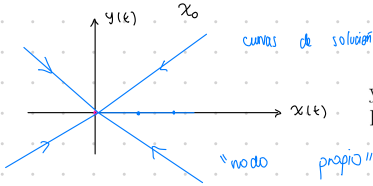
$y(t) = y_0 e^{-k_2 t}$

Observamos:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0 e^{-k_2 t}}{x_0 \cdot e^{-k_1 t}} = \frac{y_0}{x_0} e^{-(k_2 - k_1)t} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{x_0 e^{(k_1-k_2)t}} x(t) \;//$$

Caso 1

$0 < k_1 = k_2$ $\quad y(t) = \frac{y_0}{x_0} x(t)$



y las trayectorias son líneas rectas en el plano (x, y). El punto crítico se llama un *nodo propio*.

Caso 2: $0 < k_1 < k_2$

$$y(t) = \frac{y_0}{x_0} e^{\underbrace{(k_1-k_2)}_{<0} t} x(t)$$

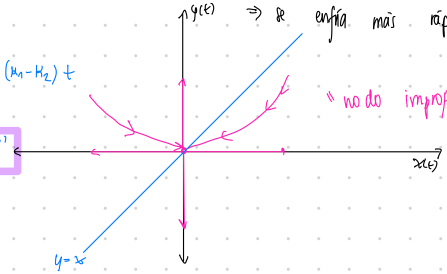
$$\lim_{t\to\infty} \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_0}{x_0} e^{(k_1-k_2)t}$$

$$\boxed{(k_1-k_2)x'}$$

$\Rightarrow$ se enfría más rápido

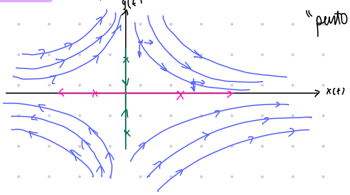
"nodo impropio"



$y=x$ debe estar la t° de equilibrio.

Caso 3: $k_1 < 0 < k_2$

"punto silla"



"se aleja del cero ya que su k_1 es negativa" (excepto si $x_0=0$)

y si tiende a cero, $t\to\infty$.

Ejemplo 3

$$mx'' + kx = 0$$

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \alpha\right)$$

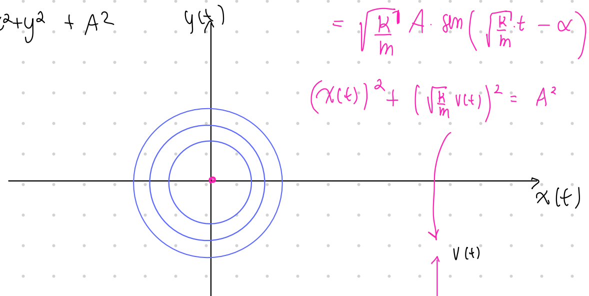
$$y'(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, x(t)$$

$$y(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}} \int x(t)\, dt$$

$$= -\sqrt{\frac{k}{m}}\, A\sqrt{\frac{m}{k}}\, \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \alpha\right)$$

$$= A\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \alpha\right)$$

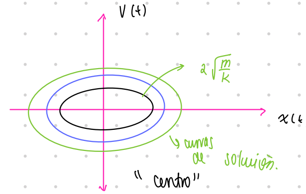
$$x^2+y^2 + A^2$$



$$v(t) = x'(t)$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}}\, A \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \alpha\right)$$

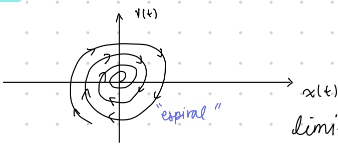
$$(x(t))^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, v(t)\right)^2 = A^2$$



"centro" $\rightsquigarrow$ estable

Ejemplo 4:

$$mx'' + cx' + kx = 0$$



límite tiende a cero, Estable y asintóticamente estable

$k_1 < 0$, $k_2 \leq 2 \Rightarrow$ inestable

Estabilidad de puntos críticos

El punto crítico $\mathbf{x}_\star$ es *estable* siempre que, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $||\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\star|| < \delta$ implica que $||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_\star|| < \epsilon$ para toda $t > 0$. En caso contrario, se llama el punto crítico *inestable*.

El punto crítico se llama *asintóticamente estable* si existe $\delta > 0$ tal que $||\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\star|| < \delta$ implica que $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\star$.

Tenemos las siguientes características:

- Un punto crítico asintóticamente estable es también estable.
- Un nodo convergente es asintóticamente estable.
- Un nodo divergente es inestable.
- Un punto silla es inestable.
- Un centro es estable pero no asintóticamente estable
- Un espiral convergente es asintóticamente estable.
- Un espiral divergente es inestable.