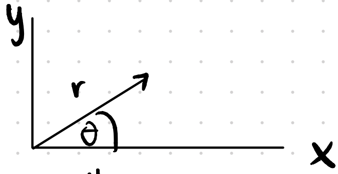
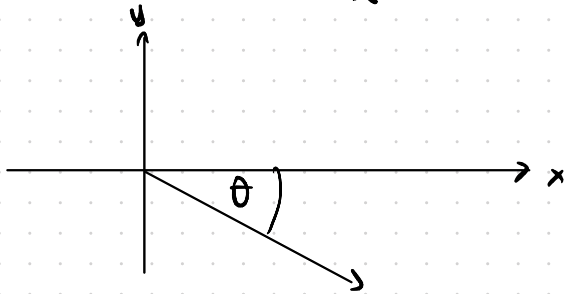
Parametrización de curvas en coordenadas polares

Recuerdo: Una curva es un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ tq $C = f(I)$, con $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$

Recuerdo: coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$



(r, θ) coordenadas de P.



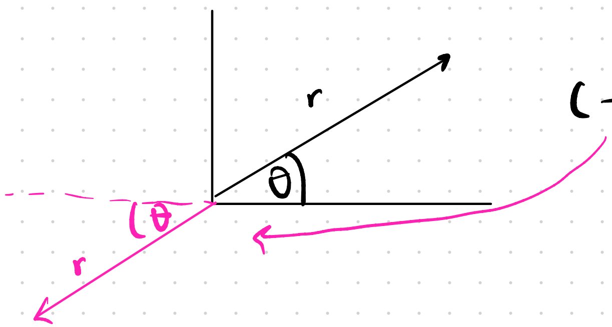
$(r, -\theta)$

$(r, 2\pi - \theta)$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$

$(0, \theta)$ representa el origen.

Sea $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$



$(-r, \theta)$

Curvas y coordenadas polares.

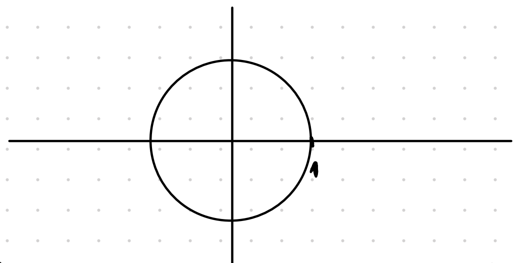
→ $f(\theta) = r$ (o una ecuación que depende de ambas variables)

$\rightarrow$ $F(r,\theta) = 0.$

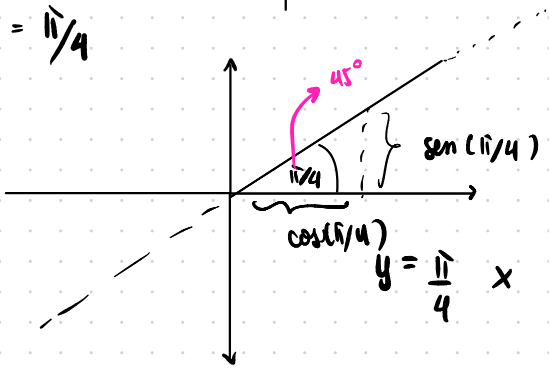
Una curva polar en $\mathbb{R}^2$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de todos los (r,θ) que satisfagan $F(r,\theta) = 0$

Ejemplo Qué curva representa la siguiente ecuación

$r = 1$



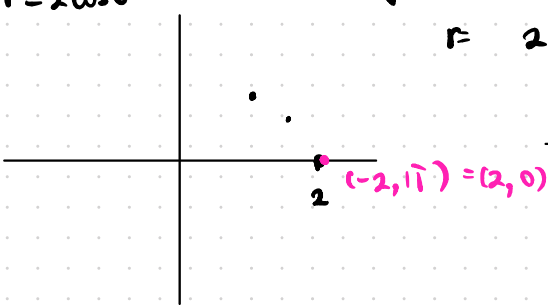
Ejemplo: $\theta = \pi/4$



$y = \frac{\pi}{4} x$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$

Ejemplo $r = 2\cos\theta$



$r = 2\cos\theta$

r	θ
2	0
$\sqrt{3}$	$\pi/6$
1	$\pi/3$
$\sqrt{2}$	$\pi/4$
0	$\pi/2$
-2	π

Transformemos a cartesianas

$r = 2\cos\theta$

$x = r\cos\theta$ (1)

$x^2+y^2 = r^2$ (2)

Remplacemos (1) en

$r = 2\cos\theta$

$\Rightarrow r = \frac{2r\cos\theta}{r} = \frac{2x}{r} \Rightarrow r^2 = 2x \rightarrow$ Usando (2) $x^2+y^2 = 2x$

$$\underbrace{(x-1)^2+y^2=1}$$

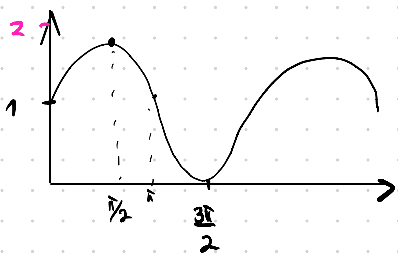
circunferencia centrada en $(1,0)$ y $r=1$

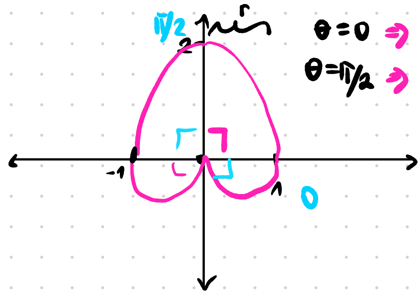
$r = 2\cos\theta$

$r = \frac{x}{\cos\theta}$

Ejemplo: $r = 1+\operatorname{sen}\theta$

$f(x) = 1+\operatorname{sen}(\theta)$





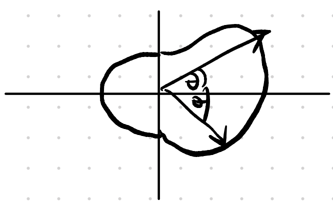
$\theta = 0 \Rightarrow r = 1$

$\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 2$

cardioide

Simetrías

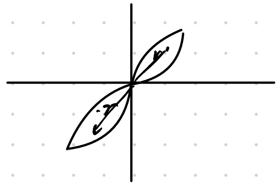
1) cuando $r = f(\theta)$ vale lo mismo si remplazamos θ por $-\theta$.



curva es simétrica respecto a x.

2) Cuando la ecuación vale lo mismo si reemplazo r por $-r$. curva simétrica respecto al origen.

$F(r,\theta)=0$



3) Cuando la ecuación vale lo mismo si se reemplaza por $\pi-\theta$, la curva es simétrica respecto a y.