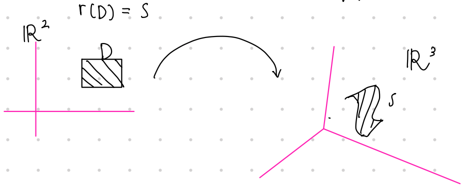
Clase 22

Superficies en $\mathbb{R}^3$

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie si existe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $r(D) = S$



Def: Si decimos que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie suave en (u_0, v_0) o $r(u_0, v_0)$ si existe una parametrización de S $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$ existen y además $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$ son L.I.

Se dice que S es suave si es suave en todo $(u_0, v_0) \subseteq D$

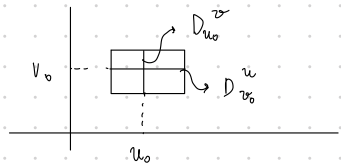
Plano tangente a un punto en la superficie

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie suave con parametrización $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Sea $(u_0, v_0) \in D$

Sean $D^v_{u_0} = \{ v \in \mathbb{R} : (u_0, v) \in D \}$

$D^u_{v_0} = \{ u \in \mathbb{R} : (u, v_0) \in D \}$

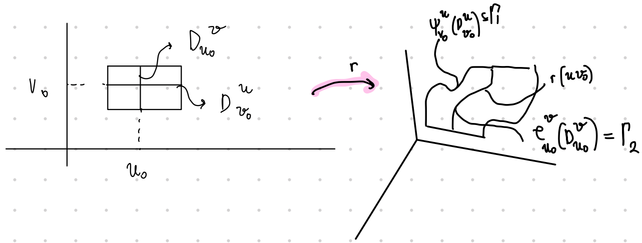


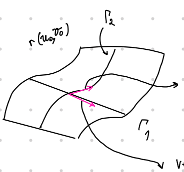
Definimos $\varphi^v_{u_0} : D^v_{u_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$v \longrightarrow r(u_0, v)$

$\Psi^u_{v_0} : D^u_{v_0} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$u \longrightarrow r(u, v_0)$

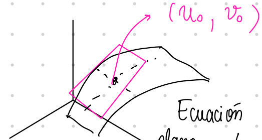




vector tangente a la curva Γ_2 en $r(u_0, v_0)$ $= \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$

vector tangente a la curva Γ_1 en $r(u_0, v_0)$ $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$

El plano tangente a S en $r(u_0, v_0)$ es el plano que pasa por $r(u_0, v_0)$ con vectores directores $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$

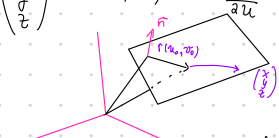


Ecuación del plano tangente a S en $r(u_0, v_0)$:

Plano que pasa por (u_0, v_0) con vectores directores $\frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - r(u_0, v_0) = \alpha \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



Ec. paramétrica del plano tangente a S en $r(u_0, v_0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(u_0, v_0) + \alpha \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$\Rightarrow$ Ec. normal

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - r(u_0, v_0), \vec{n} \right\rangle$$

Usando $\vec{n} = \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - r(u_0, v_0), \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle = 0$$

Obs: En general, se dice que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a S en $r(u_0, v_0)$ si $\exists\, f: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Gamma = f([a,b])$ es una curva que yace sobre S, pasa por el pto $r(u_0, v_0)$ y tq existe $c \in [a,b)$ tq $f'(c) = v$

OBS: en general, se dice que $v \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente a S en $r(u_0, v_0)$ si existe $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tq $\Gamma = f([a,b])$ es una curva que yace sobre S, que pasa por el punto $r(u_0, v_0)$ y tq existe $c \in [a,b]$ tq $f'(c) = v$.

OBS: al espacio de todos los vectores tangentes a S en $r(u_0, v_0)$ se le llama espacio tangente a S en $r(u_0, v_0)$ y se anota $T_{r(u_0,v_0)}(S)$

Se puede probar que $T_{r(u_0,v_0)}(S)$ es exactamente el plano tangente a S en $r(u_0, v_0)$

Ejemplo: Sea $S \in \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la parametrización

$$R: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longrightarrow (u^2, v^2, u+2v)$$

Encontrar plano tangente a S en punto $(1, 1, 3)$

Sol: $(1, 1, 3)$ es imagen por r de algún $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Debemos encontrar (u_0, v_0)

tenemos que $r(u_0, v_0) = (u_0^2, v_0^2, u+2v_0) = (1, 1, 3)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_0^2 = 1 \\ v_0 = 1 \\ u_0 + 2v_0 = 3 \end{array} \Rightarrow u_0 = v_0 = 1 \qquad (1, 1, 3) = r(1,1)$$

Para obtener los vectores directores del plano

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u, v) = (2u, 0, 1) \qquad \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = (0, 2v, 2)$$

Luego, los vectores directores del plano tangente a S en el punto $(1, 1, 3)$ son

$$\frac{\partial r}{\partial u}(1,1) = (2, 0, 1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}(1,1) = (0, 2, 2)$$

Vamos a encontrar la ec. normal al plano:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(1,1) \times \frac{\partial r}{\partial v}(1,1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -4, 4)$$

Ec normal: ortogonales al vector normal

$$\Rightarrow 0 = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = -2(x-1) - 4(y-1) + 4(z-3) = 0$$

$$= 4z - 4y - 2x - 6$$

$$= 2z - 2y - x - 3$$

Ec del plano tangente a S en $(1, 1, 3)$