Intervalos de Confianza y Test de Hipótesis

Lorena Correa Arratia
Departamento de Estadística
Facultad de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile

27 de abril de 2017

PARTE I Consideremos una muestra aleatoria $X_1, ..., X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$

[**1**]. Intervalos de confianza para la media:

a.- Cuando la varianza es conocida

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

b.- Cuando la varianza es desconocida

$$\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

[**2**]. Intervalo de confianza para la proporción:

$$\left(\hat{\pi} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}},\ \hat{\pi} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right)$$

[**3**]. Intervalo de confianza para la varianza:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$$

[4]. Test de hipótesis para la media:

a.- Cuando la varianza es conocida

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert Z_c \rvert = \lvert \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rvert > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2P(Z > Z_c)$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{1-\alpha}$	$P(Z > Z_c)$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$Z_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha}$	$P(Z < Z_c)$

b.- Cuando la varianza es desconocida

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\lvert T_c \rvert = \lvert \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rvert > t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$	$2P(T_{n-1} > T_c)$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$T_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha,n-1}$	$P(T_{n-1} > T_c)$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$T_c = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha,n-1}$	$P(T_{n-1} < T_c)$

[**5**]. Test de hipótesis para la proporción:

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \pi = \pi_0$ $H_1 : \pi \neq \pi_0$	$\lvert Z_c\rvert = \lvert\frac{\hat{\pi}-\pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}\rvert > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2P(Z > Z_c)$
$H_0 : \pi \leq \pi_0$ $H_1 : \pi > \pi_0$	$Z_c = \frac{\hat{\pi}-\pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} > Z_{1-\alpha}$	$P(Z > Z_c)$
$H_0 : \pi \geq \pi_0$ $H_1 : \pi < \pi_0$	$Z_c = \frac{\hat{\pi}-\pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} < Z_{\alpha}$	$P(Z < Z_c)$

[**6**]. Test de hipótesis para la varianza:

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_c^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ ó $\chi_c^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$	$2P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c)$
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_c^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{1-\alpha,n-1}$	$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c)$
$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_c^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha,n-1}$	$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c)$

PARTE II Consideremos dos muestras aleatorias independientes

$$
\begin{array}{ll}
X_1, \ldots, X_{n_1} & \text{i.i.d.} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\
Y_1, \ldots, Y_{n_2} & \text{i.i.d.} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)
\end{array}
$$

[**1**]. Intervalo de confianza para la diferencia de medias:

a.- Cuando las varianzas son conocidas

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

b.- Cuando las varianzas son desconocidas pero iguales

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$$

donde,

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

[**2**]. Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones:

$$\left(\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\pi}_p (1 - \hat{\pi}_p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} \right),$$

donde,

$$\hat{\pi}_p = \frac{n_1 \hat{\pi}_1 + n_2 \hat{\pi}_2}{n_1 + n_2}$$

[**3**]. Intervalo de confianza para la razón de varianzas:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}}, \frac{S_1^2}{S_2^2 F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}} \right)$$

[4]. Test de hipótesis para la diferencia de medias:

a.- Cuando las varianzas son conocidas

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\|Z_c\| = \|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\| > Z_{1-\alpha/2}$	$2P(Z > Z_c)$
$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$Z_c = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_{1-\alpha}$	$P(Z > Z_c)$
$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$Z_c = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{\alpha}$	$P(Z < Z_c)$

b.- Cuando las varianzas son desconocidas pero iguales

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\|T_c\| = \|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\| > t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}$	$2P(T_{n_1+n_2-2} > T_c)$
$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$T_c = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{1-\alpha,n_1+n_2-2}$	$P(T_{n_1+n_2-2} > T_c)$
$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$T_c = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < t_{\alpha,n_1+n_2-2}$	$P(T_{n_1+n_2-2} < T_c)$

[**5**]. Test de hipótesis para la diferencia de proporciones:

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : \pi_1 = \pi_2$ $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$	$\|Z_c\| = \|\frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2}{\sqrt{\hat{\pi}_p(1-\hat{\pi}_p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}\| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2P(Z > Z_c)$
$H_0 : \pi_1 \leq \pi_2$ $H_1 : \pi_1 > \pi_2$	$Z_c = \frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2}{\sqrt{\hat{\pi}_p(1-\hat{\pi}_p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} > Z_{1-\alpha}$	$P(Z > Z_c)$
$H_0 : \pi_1 \geq \pi_2$ $H_1 : \pi_1 < \pi_2$	$Z_c = \frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2}{\sqrt{\hat{\pi}_p(1-\hat{\pi}_p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} < Z_{\alpha}$	$P(Z < Z_c)$

[**6**]. Test de hipótesis para la razón de varianzas:

Hipótesis	Región de Rechazo	Valor - p
$H_0 : {\sigma^2}_1 = {\sigma^2}_2$ $H_1 : {\sigma^2}_1 \neq {\sigma^2}_2$	$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$ ó $F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$	$2P(F_{n_1-1,n_2-1} > F_c)$
$H_0 : {\sigma^2}_1 \leq {\sigma^2}_2$ $H_1 : {\sigma^2}_1 > {\sigma^2}_2$	$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$	$P(F_{n_1-1,n_2-1} > F_c)$
$H_0 : {\sigma^2}_1 \geq {\sigma^2}_2$ $H_1 : {\sigma^2}_1 < {\sigma^2}_2$	$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$	$P(F_{n_1-1,n_2-1} < F_c)$

PARTE III Tamaños de Muestra

[1]. Determinación del tamaño de muestra en un test de hipótesis para la media

a.- Cuando la hipótesis alternativa es unilateral. Es decir:

$$H_1 : \mu > \mu_0(\ igual \ a \ \mu_1)$$

o bien,

$$H_1 : \mu < \mu_0(\ igual \ a \ \mu_1)$$

Entonces,

$$n = \left(\frac{(Z_\alpha + Z_\beta)\sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2$$

b.- Cuando la hipótesis alternativa es bilateral. Es decir:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0(\ igual \ a \ \mu_1)$$

Entonces,

$$n = \left(\frac{(Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_\beta)\sigma}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2$$

[2]. Determinación del tamaño de muestra en un test de hipótesis para la proporción

a.- Cuando la hipótesis alternativa es unilateral. Es decir:

$$H_1 : \pi > \pi_0(\ igual \ a \ \pi_1)$$

o bien,

$$H_1 : \pi < \pi_0(\ igual \ a \ \pi_1)$$

Entonces,

$$n = \left(\frac{Z_\alpha \sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)} + Z_\beta \sqrt{\pi_1(1 - \pi_1)}}{\pi_1 - \pi_0} \right)^2$$

b.- Cuando la hipótesis alternativa es bilateral. Es decir:

$$H_1 : \pi \neq \pi_0(\, igual \; a \; \pi_1)$$

Entonces, si $n_1 = n$ y $n_2 = cn$,

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)} + Z_\beta \sqrt{\pi_1(1 - \pi_1)}}{\pi_1 - \pi_0} \right)^2$$

[**3**]. Determinación del tamaño de muestra en un test de hipótesis para la diferencia de medias

a.- Cuando la hipótesis alternativa es unilateral. Es decir:

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

o bien,

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

Entonces, si $n_1 = n$ y $n_2 = cn$,

$$n = \left(\frac{(Z_\alpha + Z_\beta)(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{c})}{\mu_1 - \mu_2} \right)^2$$

b.- Cuando la hipótesis alternativa es bilateral. Es decir:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Entonces, si $n_1 = n$ y $n_2 = cn$,

$$n = \left(\frac{(Z_{\frac{\alpha}{2}} + Z_\beta)(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{c})}{\mu_1 - \mu_2} \right)^2$$

[**4**]. Determinación del tamaño de muestra en un test de hipótesis para la diferencia de proporciones

a.- Cuando la hipótesis alternativa es unilateral. Es decir:

$$H_1 : \pi_1 > \pi_2$$

o bien,

$$H_1 : \pi_1 < \pi_2$$

Entonces, si $n_1 = n$ y $n_2 = cn$,

$$n = \left(\frac{Z_\alpha \sqrt{\frac{(\frac{1-\pi_1}{c}+1-\pi_2)(\pi_1+c\pi_2)}{c+1}} + Z_\beta \sqrt{\pi_1(1-\pi_1)+\pi_2(1-\pi_2)}}{\pi_1 - \pi_2} \right)^2$$

b.- Cuando la hipótesis alternativa es bilateral. Es decir:

$$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$$

Entonces, si $n_1 = n$ y $n_2 = cn$,

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(\frac{1-\pi_1}{c}+1-\pi_2)(\pi_1+c\pi_2)}{c+1}} + Z_\beta \sqrt{\pi_1(1-\pi_1)+\pi_2(1-\pi_2)}}{\pi_1 - \pi_2} \right)^2$$