Clase 22

Ejemplo 1 Calcular matriz fundamental

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B \text{ es nilpotente}}$$

$$= 3I + B \qquad e^{3I+B} = e^{3I} \cdot e^{B}$$

Tenemos $(3I)B = B(3I)$

conmutables

$$e^{At} = e^{BI + Bt} = e^{3It} \cdot e^{Bt} \qquad B^3 = 0$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{e^{3It}} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Bt} + \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\frac{B^2t^2}{2}} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2te^{3t} & t^2e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Sol general de $x'(t) = Ax(t)$ es:

$$x(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

Sist. lineal no homogéneo.

La sol. complementaria $\vec{x}_1$:

$$\vec{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}_1(t)$$

Valores propios $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

Vectores propios $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{x}_c(t) = c_1 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

coeficientes indeterminados: Buscar en la forma: $\vec{x}_p(t) = \vec{a} e^{2t}$, $\vec{a}$ constante

Sustituir x_p en la EDO:

$$2\vec{a}\cancel{e^{2t}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\cancel{e^{2t}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cancel{e^{2t}}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 \\ -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 + 2a_2 + 1 = 2a_1$$
$$2a_2 + 1 = a_1$$
$$1 - a_2 = 2a_2$$
$$1 = 3a_2$$
$$1/3 = a_2$$

$$\frac{5}{3} = a_1$$

Entonces la sol. de la EDO es $\vec{x}(t) = \vec{x}_c + x_p$

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

La matriz exponencial

La definición de la matriz exponencial es

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

La matriz exponencial tiene las propiedades siguientes.

- Si las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son conmutables, es decir, $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.
- La matriz exponencial de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible. Además, el inverso está dado por $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- La matriz exponencial satisface $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ y la solución del problema de valor inicial
$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$
está dado por
$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0.$$

Existen varias maneras de calcular la matriz exponencial para casos especiales.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal, entonces, la matriz exponencial es la matriz diagonal cuyas elementos son las exponenciales de los elementos en la diagonal de A.
2. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente, es decir $A^k = 0$ para algún número entero $k > 0$, entonces $e^A = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{A^n}{n!}$.
3. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de proyección, es decir $A^2 = A$, entonces $e^{At} = I + (e^t - 1)\,A$.
4. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema lineal $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante, entonces, $e^{At} = \Phi(t)\,(\Phi(0))^{-1}$.

Soluciones de sistemas lineales homogéneos

Dado es el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante.

La solución general es una combinación lineal de n vectores linealmente independientes:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t).$$

La solución particular está dado por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\,(\Phi(0))^{-1}\,\mathbf{x}_0$$

en lo cual

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

es la matriz fundamental.

Soluciones de sistemas lineales no homogéneos

Un sistema lineal no homogéneo está dado por

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = P(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

con $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz conocida y $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ un vector conocido.

Si los coeficientes de $P(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas en un intervalo abierto I, entonces el teorema de existencia y unicidad dice que existe una única solución en el intervalo I.

La solución $\mathbf{x}(t)$ tiene dos componentes:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

donde $\mathbf{x}_c(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$ es la solución complementaria (la solución del problema homogéneo asociado $\mathbf{x}'(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$) y $\mathbf{x}_p(t)$ es la solución particular.

Coeficientes indeterminados

Si la función $\mathbf{f}(t)$ es en una forma de expresiones estándares, busca la solución particular en la misma forma.

- Si $\mathbf{f}(t)$ un polinomio del grado n, busca en la forma
$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}_0 t^n + \mathbf{a}_1 t^{n-1} + \cdots + \mathbf{a}_{n-1}t + \mathbf{a}_n.$$
- Si $\mathbf{f}(t)$ una función trigonométrica, busca en la forma
$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}\cos(t) + \mathbf{b}\,\mathrm{sen}(t).$$
- Si $\mathbf{f}(t)$ una función exponencial, busca en la forma
$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}e^{ct}.$$
Si c es un valor propio del sistema homogéneo, busca en la forma
$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}te^{ct} + \mathbf{b}e^{ct}.$$
- Si $\mathbf{f}(t)$ es una combinación lineal de las funciones anteriores, busca en la combinación de estas formas.

Ejemplo 3

$\boxed{\vec{x}_c(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}$

$x'(t) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}e^t\\e^t\end{bmatrix}$

coef ind. $\vec{x}_p(t) = \vec{a}\, e^t$ no sirve

$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\vec{a}te^t + \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\vec{b}e^t + \begin{bmatrix}e^t\\e^t\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_p(t) = \vec{a}\,te^t + \vec{b}\,e^t$

$\vec{a}e^t + \vec{a}te^t + \vec{b}e^t$

$e^t(1+t)\vec{a}$

$\begin{bmatrix}a_1+2a_2\\-a_2\end{bmatrix}te^t + \begin{bmatrix}b_1+2b_2\\-b_2\end{bmatrix}e^t + \begin{bmatrix}e^t\\e^t\end{bmatrix}$

Sustituir en la EDO: $x'(t) =$

$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}(t+1)e^t + \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}e^t =$ { Lado izquierdo

Lado derecho

$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}te^t + \begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}e^t + \begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}e^t = \begin{bmatrix}a_1+2a_2\\-a_2\end{bmatrix}te^t + \begin{bmatrix}b_1+2b_2\\-b_2\end{bmatrix}e^t + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t$

$a_1t + a_1 + b_1 = a_1t + 2a_2t + b_1 + 2b_2 + 1$

$a_1 - 2a_2t - 2b_2 = 1$

$a_2t + a_2 + b_2 = -a_2t - b_2 + 1$

$2a_2t + a_2 + 2b_2 = 1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a_1 - 2a_2t - 2b_2\\2a_2t + a_2 + 2b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$

$-2a_2t = 0$

$\Rightarrow a_2 = 0$

$a_1 - 2b_2 = 1$

$a_2 + 2b_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 2b_2 + 1$ {

0

$b_2 = 1/2$

$a_1 = 2$

$b_1 = b_1$

La sol. general

$\vec{x}(t) = C_1 e^t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}te^t + \begin{bmatrix}b_1\\1/2\end{bmatrix}e^t$

b_1 se puede elegir libremente porque es parte de la sol. complementaria

$(C_1+b_1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^t + C_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2te^t\\ \underbrace{\frac{1}{2}e^t}_{b_2}\end{bmatrix}$

$\underbrace{\Phi'(t)}_{P(t)\Phi(t)}u(t) + \Phi(t)u'(t) = P(t)\Phi\cdot u(t) + f(t)$

Variación de parámetros

Dado un sistema

$x'(t) = p(t)x(t) + f(t)$

La sol compl. $\vec{x}_c(t) = \underbrace{\Phi(t)}_{\text{matriz fundamental}}\vec{c}$

Busca la sol. particular con la forma:

$\vec{x}_p(t) = \Phi(t)\vec{u}(t)$

Sustituir en la EDO:

$\Phi(t)\vec{a}(t) + \Phi(t)\vec{a}(t) = P(t)\Phi(t)u(t) + f(t)$

$\Phi(t)$ matriz fundamental $\rightarrow \frac{d}{dt}\Phi(t) = P(t)\Phi(t)$

$\Phi(t)u'(t) = f(t)$

$\vec{u}'(t) = (\Phi(t))^{-1}f(t)$

el inverso existe siempre al ser matriz fundamental

$\vec{u}(t) = \int(\Phi(t))^{-1}\vec{f}(t)\,dt$

$x_p(t) = \Phi(t)\int(\Phi(t))^{-1}\vec{f}(t)\,dt$

La sol general:

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\vec{C} + \Phi(t)\int(\Phi(t))^{-1}\vec{f}(t)\,dt) = \Phi(t)\left(\int(\Phi(t))^{-1}f(t)\,dt + \vec{C}\right)$$

Ejemplo 4:

$$x'(t) = \begin{bmatrix}5 & 3\\ -6 & -4\end{bmatrix}\vec{x}(t) + \begin{bmatrix}1\\ e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\vec{x_1}(t) = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

coef. ind.

$$x_p(t) = a + \vec{b}e^{2t} + \vec{c}\,te^{2t}$$

↳ ya que f(t) incluye un número 1.

$$\vec{x_p}(t) = \Phi(t)\int(\Phi(t))^{-1} f(t)\,dt$$

$$= \Phi(t)\int\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{-t}\\ -e^{2t} & -2e^{-t}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ e^{2t}\end{bmatrix}dt$$

$$= \Phi(t)\int\frac{1}{-2e^{t}+e^{t}}\begin{bmatrix}-2e^{-t} & -e^{-t}\\ e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ e^{2t}\end{bmatrix}dt = \Phi(t)\int -e^{-t}\begin{bmatrix}-2e^{-t} & -e^{t}\\ e^{2t} & +e^{4t}\end{bmatrix}dt = \Phi(t)\int -e^{-t}\begin{bmatrix}-2e^{-t}-e^{t}\\ e^{2t}+e^{4t}\end{bmatrix}dt$$

$$= \Phi(t)\int\begin{bmatrix}2e^{-2t}+1\\ -e^{t}-e^{3t}\end{bmatrix}dt$$

$$\begin{bmatrix}e^{2t} & e^{-t}\\ -e^{2t} & -2e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-e^{-2t}+t+C_1\\ -e^{t}-\frac{1}{3}e^{3t}+C_2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1+te^{2t}+c_1e^{2t}-1-\frac{1}{3}e^{3t}+c_2e^{-t}\\ 1-te^{2t}-c_1e^{2t}+2+3e^{2t}-2c_2e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$= C_1\begin{bmatrix}e^{2t}\\ -e^{2t}\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}e^{-t}\\ -2e^{-t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}-1/3\\ 2/3\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$= C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix} + e^{2t}\left(\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}1/3\\ 2/3\end{bmatrix}\right)$$