

Prof: Lorena Correa A.
Ay: Catalina Vallejos M.
Segundo Semestre 2009

GUIA 3 EYP2405 - METODOS ESTADISTICOS

1. Sea Y_1, \dots, Y_n una muestra de la distribución Normal con media μ y varianza σ^2 . La varianza de la distribución es conocida. Considere las hipótesis

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

- (a) Determine el valor de k en función de un nivel de significancia α^* predeterminado si se rechaza H_0 para $\bar{Y} > k$. Muestre que este valor de k puede obtenerse al definir la región de rechazo como

$$Z_c = \frac{\bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > Z_{1-\alpha^*}.$$

- (b) Mediante gráficos de la distribución Normal con medias μ_0 y $\mu > \mu_0$ represente los errores tipo I y tipo II.
(c) Muestre que, para un nivel de significancia predeterminado, el error tipo II disminuye cuando aumenta n .
(d) Calcule el valor de n necesario para que el error tipo II sea igual al nivel de significancia.
2. Para hacer un test de las hipótesis

$$H_0 : \lambda \geq 5, \quad H_1 : \lambda < 5$$

se dispone de una muestra de tamaño 10 de la distribución Poisson con parámetro λ .

- (a) Calcule el error tipo I para los valores $\lambda = 5, 6, 7$ correspondientes a las regiones de rechazo de H_0 de la forma $\bar{Y} < k$, $k = 1, 2, 3$. Calcule el error tipo II para los valores $\lambda = 3, 4, 5$.
(b) Determine el valor de k de manera que el nivel de significancia sea menor que 0.10.
(c) Si el error tipo I máximo aceptado es 0.10, ¿Porqué se debe tomar el valor de k que hace máximo este error bajo la condición que sea menor que 0.10?.
3. La variabilidad de un proceso en condiciones correctas, y medida en términos de la desviación estandar, es de 3 unidades. Se dispone de una muestra de tamaño 15, con los valores siguientes: 27, 17, 18, 30, 17, 22, 16, 23, 26, 20, 22, 16, 23, 21 y 17.
- (a) ¿Se puede decir, con un nivel de significancia igual a 0.05, que el proceso está en condiciones correctas? Calcule el valor p del test.
(b) ¿Con que frecuencia se acepta que el proceso está funcionando en condiciones correctas si la desviación estandar efectiva es 4, 6, 8, 10? Grafique la función potencia.
4. Una muestra de 10 piezas de acero del proveedor A ha dado una resistencia media a la tracción de 54.000 unidades con $s = 2.100$, mientras que otra muestra de 12 piezas del proveedor B ha resuelto en una media de 49.000 unidades y $s = 1.900$. Las piezas B son más baratas que las A y éstas últimas sólo serían rentables si tuviesen una resistencia media de al menos 2.000 unidades mayor que B sin tener mayor variabilidad. En caso contrario sería mejor comprar a B . ¿Qué decisión se tomaría?.
5. Se desea comparar dos tipos de ampolletas que difieren en el material de su filamento. Para ello se toma una muestra aleatoria de cada material y se mide el tiempo de duración de cada ampolleta. Suponga que para el primer tipo de ampolletas se toma una muestra de tamaño 30 obteniéndose que el promedio de las observaciones es 10 unidades de tiempo con 12 observaciones superiores a 8. Para el segundo tipo de ampolletas se toma una muestra de tamaño 60 obteniéndose una media igual a 15 y 33 observaciones superiores a 8. Suponiendo que las observaciones tienen distribución Exponencial,

- (a) ¿Puede concluirse que el material del segundo tipo de ampollitas es mejor que el de las primeras?. Use 5% de significancia.
- (b) Sean π_1 y π_2 las probabilidades de que una ampollita dures más de 8 unidades de tiempo. Desarrolle un test para la hipótesis $\pi_1 < \pi_2$ determinando el valor p . ¿Puede concluir que el material del segundo tipo de ampollitas es mejor?.
6. Se han tomado datos de estaturas de 500 estudiantes de 18 y 19 años en una Universidad, con los resultados siguientes:

| Frecuencia | 6 | 17 | 51 | 119 | 149 | 96 | 48 | 12 | 2 |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Intervalo en cms. | 150 | 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | 185 | 190 |
| | 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | 185 | 190 | 195 |

- ¿Puede aceptarse, con niveles razonables de confianza, que los datos provienen de una distribución Normal?. ¿Cuál es la conclusión si la muestra consiste de los siguientes 8 datos solamente : 172, 170, 139, 192, 191, 175, 169, 168 ?.
7. La legislación impone a los aeropuertos ciertas normas con respecto al ruido emitido por los aviones en el despegue y aterrizaje. En los alrededores, el límite aceptado es de 80 decibeles. Más allá de este límite el aeropuerto debe pagar una multa. Los habitantes aseguran que el ruido en dicha zona sobrepasa el valor límite. El aeropuerto, que asegura que no es cierto, decide contratar un grupo de expertos, quienes para concluir asumen que la intensidad del ruido sigue una distribución $N(\mu, 49)$. Si se considera

$$H_0 : \mu = 80, \quad H_1 : \mu = 78,$$

encuentre la región crítica de Neyman-Pearson para un nivel de significación del 5%. ¿Qué decisión tomarán los expertos si se obtiene un promedio de 79.1 decibeles en una muestra de 100 aviones?. Encuentre el error tipo II y la potencia del test.

8. Use el lema de Neyman-Pearson para establecer la región crítica al hacer un test de

$$H_0 : \lambda = \lambda_0, \quad H_1 : \lambda < \lambda_0$$

con un nivel de significancia igual a 0.05 y a partir de una muestra aleatoria (Y_1, \dots, Y_n) de una población con función densidad

$$f(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & , y > 0 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}.$$

9. Se desea realizar una prueba de las hipótesis

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p \neq p_0,$$

donde p es la proporción de elementos con una determinada característica. Para ello se observan n elementos, registrándose si cada uno posee la característica y el número total (de entre los n) que la presenta. Encuentre la regla de decisión mediante el método de razón de verosimilitud.