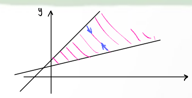
Resumen Teoría Poliedral

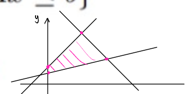
def) Poliedro: Es un conjunto convexo y cerrado $P \subset \mathbb{R}^n$ representable por una cantidad finita de desigualdades lineales irrestrictas:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x + y \leq 3, \quad 3x - y \geq 5$



$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

def) Polítopo = poliedro necesariamente acotado (convexo y compacto).



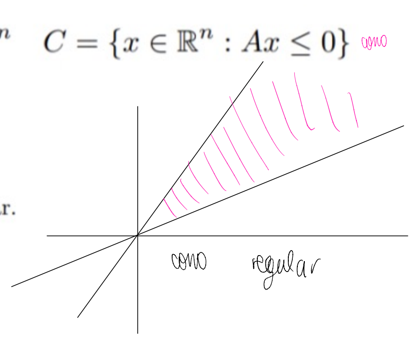
def) Vértice: solución factible que no puede ser expresada como punto intermedio de otras dos soluciones factibles distintas.

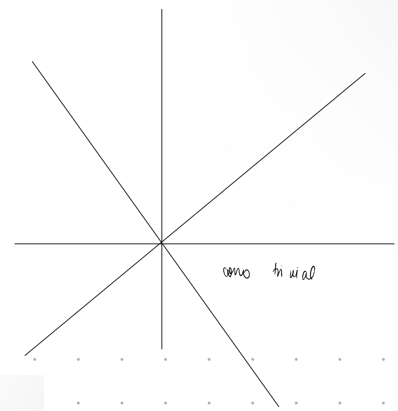
$$\boxed{\text{Cantidad de vértices} = \binom{m}{n}}$$

def) Cono: poliedro representable por desigualdades lineales homogéneas:

$$C \subset \mathbb{R}^n \quad C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$$ cono reg

- Todo cono contiene al origen.
- El punto origen se llama cono trivial.
- Si el cono contiene un $x \neq 0$, se llama cono regular.
- Si $x \in C \Rightarrow \lambda x \in C \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
- El único vértice posible de un cono es el origen.





teo) Sea P un poliedro no vacío y $C(P)$ su cono recesivo. Se cumple que:

P es no acotado	$\Leftrightarrow$	$C(P)$ es un cono regular
P es acotado	$\Leftrightarrow$	$C(P)$ es un cono trivial

teo) Un problema factible $\{\min c^T x : Ax \leq b\}$ es no acotado $\Leftrightarrow$ el sistema $\{Ah \leq 0 : c^T h < 0\}$ tiene solución. h es un rayo de escape.

def) Poliedro = polítopo + cono: toda solución factible del poliedro P $x \in P$ se descompone en una suma entre un punto x_1 del polítopo asociado a P y un punto x_2 del cono $C(P)$:

$$x = x_1 + x_2$$

¿Es el siguiente conjunto un poliedro?

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{máx}[z - \text{mín}(x+3, 2y), |2x+3y|] \leq 5\}$$

**Hint*: un conjunto es un poliedro si es representable mediante restricciones lineales

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max[z - \min(x+3, 2y), |2x+3y|] \leq 5$

$\max[z - \min(x+3, 2y), |2x+3y|] \leq 5$

$\downarrow$

(1) $z - \min(x+3, 2y) \leq 5$

(2) $|2x + 3y| \leq 5$

$2x + 3y \leq 5$

$-(2x+3y) \leq 5$

$2x + 3y \geq -5$

(1) $z - \min(x+3, 2y) \leq 5$

$z - (x+3) \leq 5$

$z - 2y \leq 5$

Existencia de vértices

Teorema:

Sea $P = \{x \in R^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ — Existe $h \neq 0$ tal que $Ah = 0$.

P no tiene vértices — (subespacio recesivo no trivial)

Corolarios:

- $P = \{x \in R^n_+ : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ tiene vértices
- Si el cono recesivo $C(P)$ es trivial (P acotado), entonces posee vértices

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -3x_1 + x_2 \\ s.a \quad & -x_1 + 3x_2 \geq -15 \\ & x_2 \geq 5 \\ & -2x_1 + x_2 \leq -5 \\ & x_1 - x_2 \geq -10 \end{aligned}$$

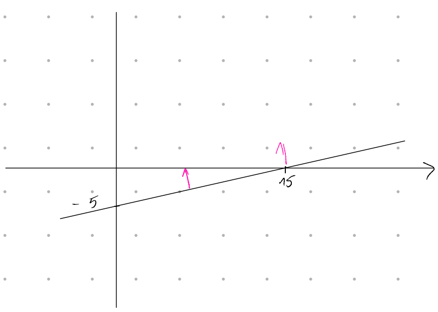
(i) Grafique el problema e identifique la región factible. Encuentre gráficamente la solución óptima al problema P) e indique qué restricciones son activas (en el punto óptimo).

(ii) Represente el dominio de P como la descomposición de un cono y un polítopo, es decir, que cualquier punto perteneciente a P pueda ser escrito como la suma de un vector perteneciente al cono y un vector perteneciente al polítopo.

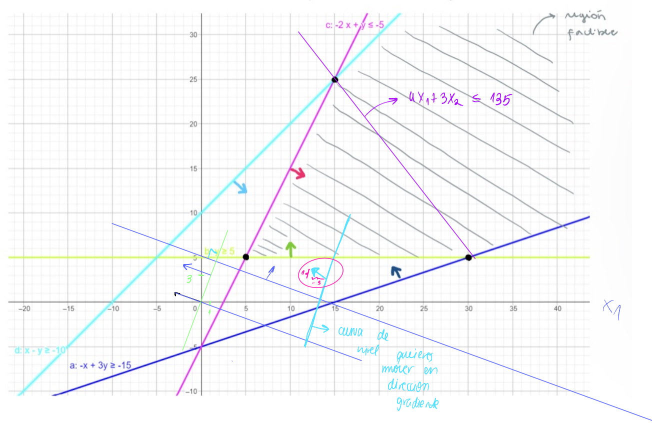
(i) $-x_1 + 3x_2 = -15$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = -5 \quad (0, -5)$

$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 15 \quad (15, 0)$



Graficando nuestras restricciones estas quedan de la siguiente manera:



$\max -3x_1 + x_2$

$\nabla f = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

curva nivel $-3x_1 + x_2 = 0$

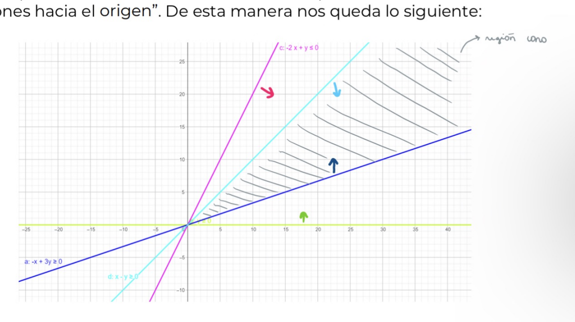
$x_2 = 3x_1$

(ii) Represente el dominio de P como la descomposición de un cono y un polítopo, es decir, que cualquier punto perteneciente a P pueda ser escrito como la suma de un vector perteneciente al cono y un vector perteneciente al polítopo.

Dominio polítopo $\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_2 \geq 5, \ -2x_1 + x_2 \leq -5, \ x_1 + 3x_2 \leq 135 \}$

Dominio cono $\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ \cancel{x_2 \geq 0} \\ \cancel{-2x_1 + x_2 \leq 0} \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{array} \right.$

Ahora, nos piden describir el cono. Para esto lo que hacemos es "llevar todas las restricciones hacia el origen". De esta manera nos queda lo siguiente:



Resumen Simplex

Sea el problema en forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

máx $-3x + y$

$\hookrightarrow$ min $3x - y$

s.a $x + 2y - z = 5$

$3x + y + w = 3$

$\hookrightarrow$ variables holgura

Su forma canónica es:

$$\begin{array}{ll} \min & c_B^T x_B + \bar{c}_R^T x_R \\ \text{s.a.} & x_B + \bar{R} x_R = \bar{b} \\ & x_B \geq 0 \end{array}$$

Algoritmo Simplex Fase 2

1. Definir variables básicas (x_B) y variables no básicas (x_R)

   $X_B = \{x, y\}$

   $X_R = \{z, w\}$

2. Encontrar matrices:
   - $B =$ constantes en restricciones junto a x_B

     $B = \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

   - $R =$ constantes en restricciones junto a x_R

     $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   - B^{-1}

     $B^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

   - $\bar{R} = B^{-1} R$

     $3x - y = FO$

     $C_B^t = (3 \quad -1)$ $\qquad \bar{R} = B^{-1} \cdot R$

     $C_R^t = (0 \quad 0)$ $\qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Criterio de factibilidad: $\bar{b} = B^{-1} b = x_B \geq 0$
4. Criterio de optimalidad: $\bar{c}_R^T = c_R^T - c_B^T \bar{R} \geq 0$
5. Criterio de entrada: entra a la base la variable con el menor costo reducido.
6. Criterio de salida: $\min_{\mu > 0} \left\{ \frac{\bar{b}}{\mu} \right\}$, con $x_B = \bar{b} - \bar{R} x_R$.

3. Criterio de factibilidad

$\bar{b} = B^{-1} b \geq 0$

$\underbrace{\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}}_{}$ ≥ 0 $\qquad X_B$

$\begin{bmatrix} 11/5 \\ 12/5 \end{bmatrix} \geq 0$, funciona

$\hookrightarrow$ Cambiar de base si no funciona

4: $\bar{C}_R^t = C_R^t - C_B^T \bar{R} \geq 0$

$\hookrightarrow B^{-1} \cdot R$

$= (0,0) - (3,-1)\begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= (x_1, x_2) \geq 0$

$= (0, -1)$

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & 7x_1 + 3x_2 \\ & s.a & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Grafique el problema anteriormente descrito y analice sus soluciones básicas factibles. Luego, realize una iteración de Simplex partiendo del punto $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$. Al realizar esta iteración, ¿Qué sucedió en el gráfico?

$\hookrightarrow \neq 0$, básicas

Propuesto: Siga desarrollando el problema hasta que encuentre la solución óptima del problema P). Indique claramente sus pasos en cada iteración del algoritmo de Simplex, e informe al final de su desarrollo cuál es el valor de las variables y de la función objetivo en el óptimo.