CAPÍTULO V

DÓCIMAS O TEST DE HIPÓTESIS

Como se señaló en el capítulo anterior, las inferencias estadísticas catalogadas como dócimas o test de hipótesis, se refieren a escoger entre la veracidad o falsedad de una hipótesis de trabajo referida a la Población, a base de una muestra aleatoria (seleccionada por un procedimiento aleatorio) proveniente de dicha Población

ELEMENTOS BÁSICOS: HIPÓTESIS, ERRORES Y PROBABILIDADES DE ERROR

Las Hipótesis

Las hipótesis se refieren a propiedades de una población las cuales se pueden expresar función de parámetros de la población (media, varianza, proporción perteneciente a una clase etc.) o simplemente referirse a característica no expresables en términos paramétricos (independencia estocástica; ajuste a una Normal, etc.) En el primer caso dice que las hipótesis (y sus dócimas o test), son *paramétricas*; en otro caso se dice que son *no paramétricas*.

Por otra parte, el problema de Dócima de Hipótesis supone que existen sólo dos Hipótesis que pueden ser sobre parámetro de la Población o bien sobre propiedades de la distribución de probabilidad en la población (.)

Hipótesis Nula o de Nulidad, llamada H_0, generalmente se refiere a la hipótesis que indica que la situación “no ha cambiado”, o “todo sigue igual” (tiene efecto “nulo” sobre la situación).

Hipótesis Alternativa, llamada H_1, que generalmente se encuentra asociada a que la situación efectivamente ha cambiado

La forma de denotar cada una de estas dos hipótesis es $H_i : (propiedad \ \ poblacional)$

Es importante destacar que **una y sólo una de estas dos hipótesis es verdadera**. Esta condición justifica el nombre de “Alternativa” a la hipótesis y tiene consecuencias importantes al momento de definir ambas hipótesis en una aplicación práctica.

Ejemplo 1

Supongamos que en un estudio sobre asociación de dos variables se postulan las siguientes hipótesis:

H_0 : No existe asociación estadística entre las dos variables $\rho_{XY} = 0$

H_1 : Existe asociación estadística positiva entre las dos variables $\rho_{XY} > 0$

En este caso las hipótesis son paramétricas (se refieren a valores de un parámetro poblacional ρ_{XY}). Nótese que si H_0 : “existe independencia entre X e Y” y H_1 : “no existe independencia entre X e Y” las hipótesis serían no paramétricas.

Por otra parte, supongamos que se toma una muestra aleatoriamente y que el coeficiente de correlación en la muestra vale $\rho_{XY} = -0,86$

Aunque el resultado en la muestra arroja claras evidencias de asociación negativa entre X e Y, frente a las dos hipótesis consideradas toda dócima o test de hipótesis bien estructurada escogerá que no hay asociación entre las variables (H_0) porque de las dos hipótesis la “menos mala” es H_o (sería peor sostener que hay asociación positiva).

Por ello en la elaboración de estas hipótesis debe asegurarse que la Hipótesis Alternativa es precisamente la única alternativa y que consecuentemente una y sólo una de estas hipótesis puede ocurrir.

Tal vez en el ejemplo presentado hubiera sido mejor escoger:

H_0 : No existe asociación estadística entre las dos variables
H_1 : Existe asociación estadística entre las dos variables.

De esta forma cualquiera sea la conclusión basada en una muestra, una y sólo una de estas dos hipótesis necesariamente sería verdadera.

Hipótesis simple e Hipótesis Compuesta

Si una hipótesis considera una única situación posible se llama *hipótesis simple*; si en cambio permite más de una situación posible se dice que es *compuesta*[1]. En el ejemplo, H_0 es simple pero H_1 es compuesta pues considera muchas situaciones (infinitas) en las cuales hay asociación (cualquier valor negativo o positivo de ρ_{XY})

Los Errores

Por las características de las dócimas de hipótesis es claro que en la inferencia inductiva consistente en elegir una de ellas basadas en una particular muestra, sólo será posible cometer dos tipos de errores:

Error tipo I que consiste en **Rechazar** H_0 cuando esta hipótesis es verdadera o su equivalente, aceptar H_1 cuando esta hipótesis es falsa.

Error tipo II que consiste en **Aceptar** H_0 cuando esta hipótesis es falsa o su equivalente, rechazar H_1 cuando esta hipótesis es verdadera.

Para evitar confusiones de lenguaje en la presentación de las dócimas o test de hipótesis se ha decidido hablar exclusivamente en términos de H_0.

Así, se dirá que:

Error Tipo I = **rechazar** H_0 cuando es verdadera o cierta

Error Tipo II = **aceptar** H_0 cuando es falsa.

En el ejemplo de la página anterior se tendría que:

Error Tipo I = Suponer que existe asociación (rechazar H_0) cuando no existe (H_0 es verdadera)

Error Tipo II = Suponer que no existe asociación (aceptar H_0) cuando existe (H_0 es falsa).

Veamos otros ejemplos:

---

[1] Si las hipótesis son paramétricas una hipótesis simple es la que afirma que el parámetro tomo un único y particular valor mientras que una hipótesis compuesta indica que el parámetro puede tomar más de un valor.

H_0: No hay necesidad de hacer cambios
H_1: Hay necesidad de hacer cambios

Error Tipo I = Hacer cambios (rechazar H_0) cuando no es necesario (H_0 es verdadera)

Error Tipo II = No hacer cambios (aceptar H_0) cuando deben ser realizados (H_0 es falsa).

Obsérvese que una persona "conservadora" es aquella que, en este caso, le parece más grave cometer un Error Tipo I que un Error Tipo II.

Si en cambio otra persona se encuentra en una posición muy difícil actualmente le importará mucho más cometer un Error Tipo II que un Error Tipo I.

H_0: La persona es inocente
H_1: La persona es culpable

Error Tipo I = Decir que es culpable (rechazar H_0) cuando es inocente (H_0 es verdadera)

Error Tipo II = Decir que es inocente (aceptar H_0) cuando es culpable (H_0 es falsa).

Obsérvese que, a pesar de que formalmente las sociedades dicen dar mayor importancia al Error Tipo I que al Error Tipo II, existen circunstancias (generalmente asociadas a "emergencias") en las que invierten estas valoraciones.

Las Probabilidades de cometer errores.

Como ya se ha dicho, el propósito de la inferencia estadística es controlar el error asociado a la particular inferencia inductiva que se realiza. Por lo tanto, en el caso de las inferencias inductivas catalogadas como dócimas o test de hipótesis, el control del error inferencial se reduce a controlar la posibilidad de cometer el Error Tipo I o el Error Tipo II.

El control de estos errores se realizará mediante la determinación de las probabilidades de cometer Error Tipo I y Error Tipo II que resultan del *procedimiento* que se utilizará para la elección de una de las hipótesis a base de la particular muestra observada.

PROCEDIMIENTO PARA EFECTUAR LA DÓCIMA O TEST DE HIPÓTESIS

Dócimas No Aleatorizadas: Región Crítica

Dada una Población, un Conjunto de Muestras Posibles y Probabilidades Asociadas al conjunto de muestras posibles, se define el siguiente procedimiento para llevar a cabo una dócima o test de hipótesis:

Sea C un subconjunto del conjunto de muestras posibles. *Si una particular muestra aleatoria pertenece a C se rechaza H_0; en otro caso se acepta H_0.*

Este conjunto C se llama **Región Crítica**[2]. También C se dice que es la dócima o test.

Entonces, en términos de la región crítica, las probabilidades de cometer Error Tipo I o Error Tipo II serán las siguientes:

[2] A veces también se llama "Región de Rechazo"

Nivel de Significación

Se define el *nivel de significación* de una dócima o test C, y se representa por α, a la "máxima" probabilidad de cometer Error Tipo I. Formalmente:

$\alpha = \sup\left\{P_h(C)\middle| h \in H_o\right\}$ = supremo de las probabilidades de la región crítica (rechazar H_0) calculadas bajo las diferentes situaciones que presenta H_0 (supuesto H_o es cierta), es por lo tanto la *cota superior* de la probabilidad de cometer un Error de Tipo I.

Si la dócima es paramétrica del tipo $H_0 : \theta \in \Theta_0 \ vs\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$ entonces:

$\alpha = \sup\left\{P_\theta(C)\middle| \theta \in H_o\right\} = \sup\left\{P_\theta(C)\middle| \theta \in \Theta_o\right\}$. Si además de paramétrica H_0 es simple:

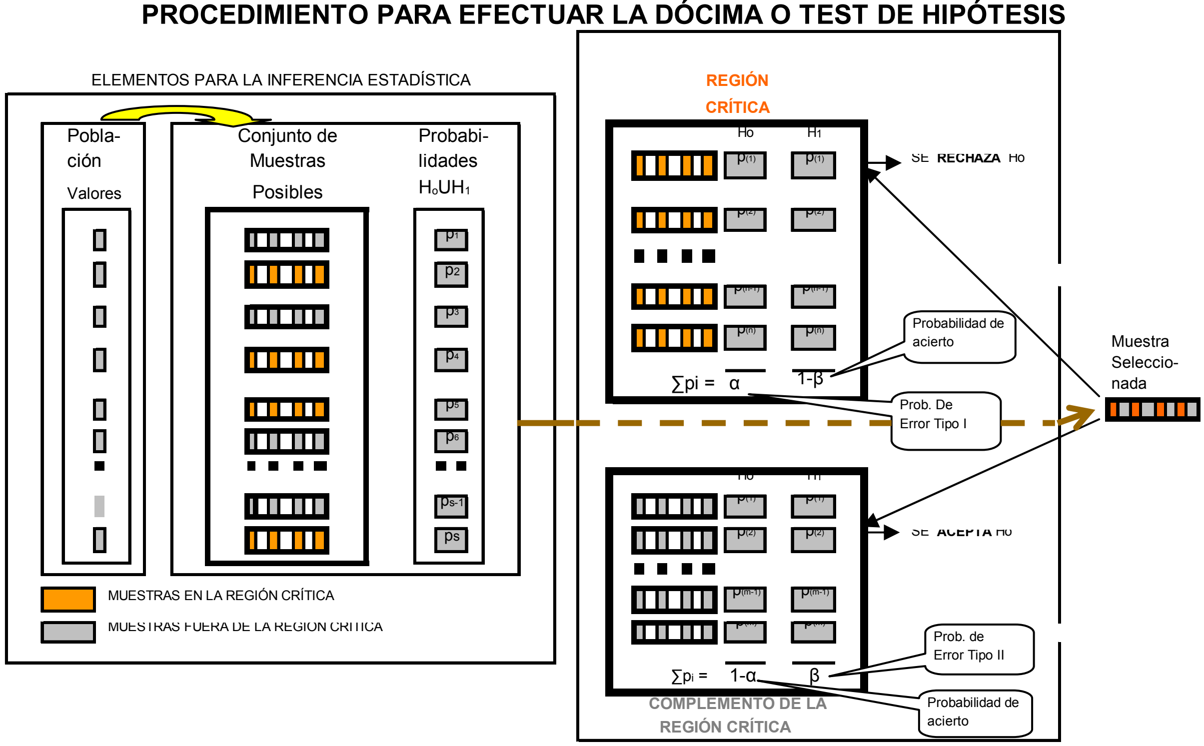
$\alpha = P_{\theta_0}(C);\ \theta_0 \in H_0$

Por otra parte, la probabilidad de un Error Tipo II será: $\beta(h) = P_h\left(C^c\right);\ h \in H_1$. Nótese que $1-\beta(h) = P_h(C)\ h \in H_1$ es la probabilidad de un acierto.

Si H_1 es paramétrica $\beta(\theta) = P_\theta\left(C^c\right);\ \theta \in \Theta_1$

Lo anterior se resume en el siguiente gráfico:

PROCEDIMIENTO PARA EFECTUAR LA DÓCIMA O TEST DE HIPÓTESIS



En lo que sigue, mientras no se indique lo contrario supondremos que todas las dócimas o test son paramétricos.

Función de Potencia

Consideremos ahora una función que a cada situación o valor del parámetro en H_o o en H_1 ($H_o \cup H_1$), le asocia P($\mathcal{C}$) bajo la respectiva situación o valor del parámetro. Esta función se llama se llama **función de potencia** de la dócima o test $\mathcal{C}$. es decir la función de potencia $\pi_C : \Theta \rightarrow [0,1]$ de una Región Crítica C está definida por:

$$\pi_C(\theta) = P_\theta(C) = \begin{cases} \alpha & si\ \theta \in H_0 \\ \\ 1-\beta & si\ \theta \in H_1 \end{cases}$$

Entonces la función de potencia será la probabilidad de Error Tipo I si el parámetro se encuentra en H_0 (H_0 verdadera) y será la probabilidad de un acierto si el parámetro se encuentra en H_1 (H_0 falsa).

Veamos un ejemplo de los conceptos presentados.

Consideremos el ejemplo 2.1 donde el conjunto de muestras posibles y sus probabilidades están dadas en la siguiente tabla:

Muestras Posibles	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
Probabilidades c/muestra	$(1-p)^3$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p^2(1-p)$	$p^2(1-p)$	p^3

Supongamos que se plantea la siguiente dócima o test de hipótesis:

$$H_0 : p = \frac{1}{3}$$

$$H_1 : p \neq \frac{1}{3}$$

Consideremos una región crítica definida por

$\mathcal{C}_1$ = $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid \sum_{i=1}^{3} x_i \leq 1\right\}$ Entonces:

El nivel de significación de $\mathcal{C}_1$ será:

P_{Ho} ($\mathcal{C}_1$) = P({(0,0,0) } + P({(1,0,0) } + P({(0,1,0) } + P({(0,0,1) } = $(⅔)^3$+3x⅓ $(⅔)^2$ = **20/27 ≈ 0,741**, lo que muestra que $\mathcal{C}_1$ tiene una probabilidad alta de cometer Error Tipo I.

Por ser H_1 una hipótesis compuesta, la función de potencia deberá considerar la probabilidad de la región crítica $\mathcal{C}_1$ bajo los distintos valores de p (p<⅓ o p>⅓).

Como función de p, estos valores serán: P($\mathcal{C}_1$) = $(1-p)^3 + 3p(1-p)^2$. En la siguiente tabla se presentan algunos valores de esta función de potencia

ALGUNOS VALORES DE LA FUNCIÓN DE POTENCIA DE C_1

Valor p	0,010	0,020	0,050	0,100	0,200	0,250	0,333	0,350	0,400	0,500	0,700	0,900	0,990
Prob.C_1	1,000	0,999	0,993	0,972	0,896	0,844	0,741	0,718	0,648	0,500	0,216	0,028	0,000

Probabilidad Acierto

Probabilidad de Acierto

Prob E.T.I

Consideremos otra región crítica $\mathcal{C}_2$ definida por

$$\mathcal{C}_2 = \{(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\} = \left\{(x_1,x_2,x_3) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} x_i \neq 1\right\}$$

Entonces $P(\mathcal{C}_2) = P(\sum_{i=1}^{3} x_i \neq 1) = 1 - P(\sum_{i=1}^{3} x_i = 1) = 1 - 3p(1-p)^2$

La siguiente tabla permite comparar la función de potencia de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$

ALGUNOS VALORES DE LA FUNCIÓN DE POTENCIA DE C_1 Y C_2

Valor p	0,010	0,020	0,050	0,100	0,200	0,250	0,333	0,350	0,400	0,500	0,700	0,900	0,990
Prob.C_1	1,000	0,999	0,993	0,972	0,896	0,844	0,741	0,718	0,648	0,500	0,216	0,028	0,000
Prob.C_2	0,971	0,942	0,865	0,757	0,616	0,578	0,444	0,556	0,568	0,625	0,811	0,973	1,000

Probabilidad Acierto (pε H_1)

Probabilidad de Acierto (pε H_1)

Prob E.T.I (pε H_0)

Como se puede observar, $\mathcal{C}_1$ tiene mejor comportamiento en H_1 que $\mathcal{C}_2$, pero el nivel de significación de $\mathcal{C}_2$ (probabilidad de Error Tipo I) es menor que el correspondiente nivel de significación (probabilidad de E.T.I) de $\mathcal{C}_1$.

Una tabla comparativa, que se deduce de las presentadas, se refiere a las probabilidades de Error Tipo I y Error Tipo II. En efecto, observando que:

$P(E.T.II) = P_{H1}(\mathcal{C}^c) = 1 - P_{H1}(\mathcal{C}) = 1 -$ Función de Potencia en H_1, se tendrá que:

ALGUNAS PROBABILIDADES DE ERRORES TIPO I Y II DE C_1 Y C_2

Valor p	0,010	0,020	0,050	0,100	0,200	0,250	0,333	0,350	0,400	0,500	0,700	0,900	0,990
Prob. Error C1	0,000	0,001	0,007	0,028	0,104	0,156	0,741	0,282	0,648	0,500	0,216	0,028	0,000
Prob. Error C2	0,029	0,058	0,135	0,243	0,384	0,422	0,444	0,444	0,432	0,375	0,189	0,027	0,000

Probabilidad Error Tipo II (E.T. II)

Probabilidad Error Tipo II (E.T. II)

Prob E.T.I (pε H_0)

Con la información de cualquiera de las dos tablas se concluye que C_1 y C_2 no son comparables y por lo tanto no se puede afirmar que una dócima sea mejor que la otra. En efecto C_1 tiene mejor comportamiento C_2, para valores de p menores que ⅓; sin embargo en H_0 (p=⅓) C_2 tiene una probabilidad de Error Tipo I (α) un 40% menor que C_1. Además a partir de p = 0,4 el comportamiento de C_2 es mejor que el de C_1.

Ejemplo 2

Se supone que la nota de un examen tienen distribución Normal con media μ y varianza σ^2=0,36 (N(μ, 0,36)). Se considera la dócima o test de hipótesis:

H_0: μ = 5
H_1: μ ≠ 5

Para una muestra de 25 participantes se define la región crítica:

$C=\left\{(x_1,x_2,....,x_{25}) \middle| \overline{x}\le 4,82 \vee \overline{x}\ge 5,18\right\}$ donde $\overline{x}$ es un valor particular de la v. a. $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Sabemos que si X_1, X_2, …, X_n es una muestra aleatoria proveniente de X~N(μ,0,36), entonces:

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu,0,0144)$$

Por lo tanto, para calcular el nivel de significación de C debemos calcular

$$\alpha=P_{H_0}(C)=P_{H_0}(\overline{X}\le 4,82 \vee \overline{X}\ge 5,18)=P_{H_0}(\overline{X}\le 4,82)+P_{H_0}(\overline{X}\ge 5,18)=P_{H_0}(Z\le\frac{4,82-5}{\sqrt{0,0144}})+P_{H_0}(Z\ge\frac{5,18-5}{\sqrt{0,0144}})=$$

$$=P_{H_0}(Z\le -1,5)+P_{H_0}(Z\ge 1,5)=0,0668+(1-P_{H_0}(Z\le 1,5))=0,0668+0,0668=0,1336$$ donde Z~N(0,1)

La probabilidad de Error Tipo II para μ =4,7 será

$$\beta=P_{\mu=4,7}(C^c)=P_{\mu=4,7}(4,82\le\overline{X}\le 5,18)=P_{\mu=4,7}(\frac{4,82-4,70}{\sqrt{0,0144}}\le Z\le\frac{5,18-4,70}{\sqrt{0,0144}})=P(Z\le\frac{5,18-4,70}{\sqrt{0,0144}})-P(Z\le\frac{4,82-4,70}{\sqrt{0,0144}})=1-0,8413=0,1587$$

La función de potencia para μ =4,7 será: $P_{\mu=4,7}(C)=1-P_{\mu=4,7}(C^c)=1-\beta=1-0,1587=0,8413$. En forma similar se puede calcular valores de la función de potencia de C para otros valores de μ (μ =μ_0) mediante la fórmula:

$$P_{\mu=\mu_0}(C)=P_{\mu=\mu_0}(\overline{X}\le 4,82 \vee 5,18\le\overline{X})=P_{\mu=\mu_0}\left(Z\le\frac{4,82-\mu_0}{\sqrt{0,0144}}\right)+\left[1-P_{\mu=\mu_0}\left(Z\le\frac{5,18-\mu_0}{\sqrt{0,0144}}\right)\right]$$

La tabla siguiente nos da esta probabilidad de acierto (bajo H_1) para distintos valores de μ en esta Hipótesis Alternativa:

Valores de μ	4	4,5	4,6	4,7	4,8	5	5,2	5,3	5,4	5,5	6
Función. de Potencia	1	0,996	0,967	0,841	0,747	0,134	0,747	0,841	0,967	0,996	1

α=Nivel de Significación

DETERMINACIÓN DE UNA REGIÓN CRÍTICA

Tomando en consideración este comportamiento, la Inferencia Estadística clásica, ofrece al usuario "buenas" dócimas bajo el siguiente procedimiento:

1- Se solicita al usuario cuál es la máxima probabilidad de Error Tipo I (α) que está dispuesto a aceptar. Para ello se deberá explicar este error en términos de la particular dócima que considera.

2- Si el usuario indica que no quiere correr el riesgo de cometer Error Tipo I ($\alpha = 0$), se le debe recordar que en ese caso la probabilidad de Error Tipo II será 1 ($\beta = 1$). En estas circunstancias es importante para el usuario conocer qué significa el β en términos de la particular dócima de hipótesis que se plantea.

3- Una vez determinado el nivel de significación α, los métodos de Inferencia Estadística permiten construir dócimas (regiones críticas) $\mathcal{C}_o$ tal que:

   a. Tienen como probabilidad de Error Tipo I el nivel de significación α indicado.

   b. Bajo ciertas condiciones de H_1 cualquier otra región crítica $\mathcal{C}$ con nivel de significación menor o igual que α, tendrá probabilidad de Error Tipo II (β) mayor o igual a la correspondiente probabilidad de para $\mathcal{C}_o$ cualquiera sea la hipótesis considerada en H_1. En tal caso la Función de Potencia de cualquier otra $\mathcal{C}$, **con el mismo nivel de significación α**, será menor o igual a la función de potencia de $\mathcal{C}_o$ cualquiera sea la hipótesis considerada en H_1. En estos casos se dice que $\mathcal{C}_o$ es **uniformemente más potente.**

   c. En caso en que H_1 no cumpla las condiciones necesarias mencionadas en b) los métodos de Inferencia Estadística permiten construir dócimas "razonables" en el sentido de que tienen el nivel de significación convenido y no presentan Errores de Tipo II muy grandes.

4- A base de una particular muestra, su pertenencia o no pertenencia a la Región Crítica seleccionada determinará, respectivamente, si se rechaza o se acepta H_0. Según sea el caso:

   a. Si se rechaza H_0, entonces el único error que se puede cometer es el Error Tipo I y su probabilidad estará dada por el nivel de significación α normalmente conocido.

   b. Si se acepta H_0, el único error que se puede cometer es el Error Tipo II. En este caso las distintas probabilidades de cometer Error Tipo II se puede explicitar a través de la función de potencia, la cual generalmente se podrá calcular mediante la aplicación (o desarrollo) de un programa computacional especialmente preparado para estos propósitos.

"BUENAS" REGIONES CRÍTICAS O DÓCIMAS

Dado una particular dócima de hipótesis, la Inferencia Estadística ofrece métodos para la construcción de "buenas" regiones críticas. El estudio de estos métodos escapa el alcance del Curso. No obstante es necesario referirse brevemente al criterio que establece la "bondad" de una dócima.

La dócima (o región crítica) **ideal** es aquella que tendría $\alpha = \beta = 0$ cualquiera sea H_0 y H_1.

Este ideal es imposible de conseguir. En efecto, la única manera de obtener α = 0 (para cualquier H_0) es considerando $\mathcal{C} = \varnothing$ (nunca se rechaza H_0). Pero si $\mathcal{C} = \varnothing$ entonces $\mathcal{C}^c = \mathcal{M}$ conjunto de todas las muestras posibles. En consecuencia $\beta = P_{H1}(\mathcal{M}) = 1$ cualquiera sea H_1.

En general, en la medida en que se obtienen regiones críticas $\mathcal{C}$ con menor α, éstas presentan mayor β. Por lo tanto cualquier solución "buena" exige un balance entre α y β de tal forma que α no sea muy pequeño a efectos de no incrementar de manera importante la probabilidad β.

Dócimas Uniformemente Más Potentes

Se dice que C^* es uniformemente más potente si para un nivel de significación α si:

i) $\sup\limits_{\theta \in H_0} \pi_{C^*}(\theta) = \alpha$

ii) $\sup\limits_{\theta \in H_0} \pi_C(\theta) \leq \sup\limits_{\theta \in H_0} \pi_{C^*}(\theta) \Rightarrow \pi_C(\theta) \leq \pi_{C^*}(\theta)\ \forall \theta \in H_1$

Las dócimas uniformemente más potentes no siempre existen.

MÉTODOS PARA CONSTRUIR REGIONES CRÍTICAS

Al igual que en el caso de Estimación existen métodos para construir Estimadores, en el caso de Dócima o Teste de Hipótesis también existen métodos para construir Regiones Críticas "buenas" o, al menos, "aceptables".

Uno de estos métodos es el de Razón de Verosimilitud.

Razón de Verosimilitud

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X \sim f(x;\theta)$ y sea $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)$ la función de verosimilitud de θ. Se define la Razón de Verosimilitud λ mediante

$$\lambda = \lambda_n(x_1, x_2, ...x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in H_0} L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)}{\sup\limits_{\theta \in H_0 \cup H_1} L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)}$$

Es claro que $0 \leq \lambda \leq 1$. Además se designa por Λ a la variable aleatoria $\Lambda = \lambda(X_1, X_2, ..., X_n)$.

En forma intuitiva, el numerador se interpreta como el valor de θ que hace máxima la "probabilidad" de observar $(x_1, x_2, ...x_n)$ bajo la hipótesis nula (H_0) mientras que el denominador es el valor de θ que hace máxima la "probabilidad" de observar $(x_1, x_2, ...x_n)$ sin restricción sobre sus valores ($\theta \in H_0 \cup H_1$). De esta forma, si el numerador se parecido al denominador, deberíamos pensar que H_0 es cierta.

Entonces la Región Crítica definida por el Método de Razón de Verosimilitud será:

$$C = \left\{ \lambda(x_1, x_2, ...x_n) \middle| \lambda(x_1, x_2, ...x_n) \leq k \right\} \text{ donde } P(\Lambda \leq k) = \alpha$$

Lema de Neyman Pearson

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X \sim f(x;\theta)$ Sean $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ (ambas hipótesis simples) y sean $0 \le \alpha \le 1;\ 0 \le k^* \le 1$ y la región crítica C^* tales que:

$$\lambda = \lambda_n(x_1, x_2, ...x_n) = \frac{L(\theta_0; x_1, x_2, ..., x_n)}{L(\theta_1; x_1, x_2, ..., x_n)}$$

$$C^* = \left\{\lambda(x_1, x_2, ...x_n) \middle| \lambda(x_1, x_2, ...x_n) \le k^*\right\}$$

$$P\left(\Lambda \le k^*\right) = \alpha$$

Entonces, si C es otra región crítica tal que $P_{\theta_0}(C) \le \alpha$ se tiene que $P_{\theta_1}(C) \le P_{\theta_1}\left(C^*\right)$ es decir, C^* tiene mayor función de potencia en H_1 (se dice que C^* es más potente que C).

Demostración

Lo demostraremos para el caso en que $f(x;\theta)$ es una función de densidad. En forma similar se demuestra cuando es función de cuantía (se cambian las integrales por sumatorias).

Para simplificar la notación designemos a $L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)$ mediante $L\left(\theta; \vec{x}\right)$

Supongamos que C es otra región crítica tal que $P_{\theta_0}(C) = \alpha_C \le \alpha$.

$$\pi_{C^*}(\theta_1) - \pi_C(\theta_1) = \int ... \int_{C^*} f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1)\, d\vec{x} - \int ... \int_C f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta_1)\, d\vec{x} =$$

$$= \int ... \int_{C^*} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} - \int ... \int_C L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x}$$

Pero

$$\int ... \int_{C^*} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} = \int ... \int_{C^* \cap C} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} + \int ... \int_{C^* \cap C^c} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x}$$

$$\int ... \int_C L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} = \int ... \int_{C \cap C^*} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} + \int ... \int_{C \cap C^{*c}} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x}$$

Por lo tanto

$$\pi_{C^*}(\theta_1) - \pi_C(\theta_1) = \int ... \int_{C^* \cap C} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} - \int ... \int_{C \cap C^*} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x}$$

Puesto que $L\left(\theta_1; \vec{x}\right) \ge \frac{1}{k^*} L\left(\theta_0; \vec{x}\right)\ \forall \vec{x} \in C^*$ y $L\left(\theta_1; \vec{x}\right) \le \frac{1}{k^*} L\left(\theta_0; \vec{x}\right)\ \forall \vec{x} \in C^{*c}$ se tiene que

$$\pi_{C^*}(\theta_1) - \pi_C(\theta_1) \ge \frac{1}{k^*} \int ... \int_{C^* \cap C} L\left(\theta_0; \vec{x}\right) d\vec{x} - \frac{1}{k^*} \int ... \int_{C \cap C^*} L\left(\theta_0; \vec{x}\right) d\vec{x} =$$

$$= \frac{1}{k^*}\left(\int ... \int_{C^* \cap C} L\left(\theta_0; \vec{x}\right) d\vec{x} + \int ... \int_{C^* \cap C^c} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} - \int ... \int_{C^* \cap C^c} L\left(\theta_1; \vec{x}\right) d\vec{x} - \int ... \int_{C \cap C^*} L\left(\theta_0; \vec{x}\right) d\vec{x}\right) =$$

$$= \int ... \int_{C^*} L\left(\theta_0; \vec{x}\right) d\vec{x} - \int ... \int_C L\left(\theta_0; \vec{x}\right) d\vec{x} = \alpha - \alpha_C \ge 0$$

Ejemplo:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X \sim f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$ y sean $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ (supongamos $\theta_1 > \theta_0$). Entonces

$$L(\theta_0; x_1, x_2, ..., x_n) = \theta_0^n \exp\left(-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \text{ y } L(\theta_1; x_1, x_2, ..., x_n) = \theta_1^n \exp\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

En consecuencia

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{L(\theta_0; x_1, x_2, ..., x_n)}{L(\theta_1; x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{\theta_0^n \exp\left(-\theta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\theta_1^n \exp\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i\right)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left(-(\theta_0 - \theta_1)\right) \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Por lo tanto la Región Crítica más potente para su nivel de significación α será

$$C = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) \le k^*\right\} \text{ y } \alpha = P\left(\Lambda \le k^*\right)$$

Pero $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) \le k^* \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{1}{\theta_1 - \theta_0} \ln\left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k^*\right] = k'$ y en consecuencia

$$C^* = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) \le k^*\right\} = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i \le k'\right\} \text{ y } \alpha = P\left(\Lambda \le k^*\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le k'\right)$$

Dado que en este ejemplo $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma(n, \theta)$ se tiene que

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le k'\right) = \int_0^{k'} \frac{1}{\Gamma(n)} \theta_o^n x^{n-1} e^{-\theta_0 x} dx$$

En resumen, dado α se obtiene k' como el percentil de orden α en la $\gamma(n, \theta_0)$ (hipótesis nula) y dada una particular muestra $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se rechaza H_0 si $\sum_{i=1}^{n} x_i \le k'$.

La función de potencia de esta dócima C^* será:

$$\pi_{C^*}(\theta) = \begin{cases} \alpha & si\ \theta = \theta_0 \\ \int_0^{k'} \frac{1}{\Gamma(n)} \theta_1^n x^{n-1} e^{-\theta_1 x} dx & si\ \theta = \theta_1 \end{cases}$$

Nota: *Si sólo se consideran dócimas no aleatorizadas, si* $f(x;\theta)$ *no es función de densidad (por ejemplo es una función de cuantía) dado* α *pueden no existir* k^* *y* C^**.*

El criterio de la razón de verosimilitud que establece el lema de Neyman Pearson para el caso de hipótesis simple vs. hipótesis simple, se extiende para el caso de hipótesis compuesta. En estos casos, en general, no se podrá probar que el criterio conduce a dócimas uniformemente más potentes. Sin embargo esto puede ocurrir en casos especiales como el que se presenta a continuación:

Ejemplo:

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X \sim f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$ como en el ejemplo anterior y sean $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$.

Por el Lema de Neyman Pearson sabemos que $C^* = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i \le k' \right\}$ cumple las siguientes propiedades:

i) $\sup_{\theta \in H_0} \pi_{C^*}(\theta) = P_{\theta_0}(C^*) = \alpha$

ii) $\sup_{\theta \in H_0} \pi_C(\theta) = P_{\theta_0}(C) \le \sup_{\theta \in H_0} \pi_{C^*}(\theta) = P_{\theta_0}(C^*) \Rightarrow \pi_C(\theta) \le \pi_{C^*}(\theta)\ \forall \theta \in H_1\ (\theta > \theta_0)$

Entonces C^* es uniformemente más potente para esta dócima de hipótesis. Sin embargo puede comprobarse fácilmente que esta misma dócima no es uniformemente más potente para las hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0 \ vs \ H_1 : \theta \ne \theta_0$.

Dócimas de Razón de Verosimilitud Generalizada.

Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X \sim f(x;\theta)$ Sean $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs. $H_1 : \theta \in \Theta_1$ y sean $0 \le \alpha \le 1;\ 0 \le k^* \le 1$ y la región crítica C^* definidas mediante:

$$\lambda = \lambda_n(x_1, x_2, ...x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)}{\sup_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1} L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n)}$$

$$C^* = \left\{ \lambda(x_1, x_2, ...x_n) \middle| \lambda(x_1, x_2, ...x_n) \le k^* \right\}$$

$$\sup\left(P_\theta\left(\Lambda \le k^*\right) \middle| \theta \in \Theta_0 \right) = \alpha$$

Entonces se dice que λ es la **Razón de Verosimilitud Generalizada** y que C^* es **la Dócima (o Región Crítica) de Razón de Verosimilitud Generalizada.**

Ejemplo:

Como en el ejemplo anterior sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X \sim f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$ y consideremos ahora $H_0 : 0 < \theta \le \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$ es decir, $\Theta_0 = \left\{ \theta \middle| 0 < \theta \le \theta_0 \right\}$; $\Theta_1 = \left\{ \theta \middle| \theta > \theta_0 \right\}$ y $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 = \left\{ \theta \middle| 0 < \theta \right\}$

$$\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = \sup_{\theta\in\Theta}\left[\theta^n \exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n x_i\right)\right] = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}\right)^n e^{-n}$$ puesto que $\frac{1}{\overline{\overline{X}}}$ es el estimador máximo verosímil de θ. Por otra parte

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta; x_1, x_2, ..., x_n) = \sup_{0<\theta<\theta_0}\left[\theta^n \exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n x_i\right)\right] = \begin{cases} \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n} & si\ \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \le \theta_0 \\ \theta_0 \exp\left(-\theta_0\sum_{i=1}^n x_i\right) & si\ \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} > \theta_0 \end{cases}$$

en consecuencia

$$\lambda_n(x_1, x_2, ...x_n) = \begin{cases} 1 & si\ \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \le \theta_0 \\ \frac{\theta_0 \exp\left(-\theta_0\sum_{i=1}^n x_i\right)^n \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) e^{-n}}{n^n} & si\ \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} > \theta_0 \end{cases}$$

Entonces se rechaza H_0 si $\lambda_n \le k^*$ es decir

$$C^* = \left\{(x_1, x_2, ...x_n) \middle| \lambda(x_1, x_2, ...x_n) \le k^*\right\} = \left\{(x_1, x_2, ...x_n) \middle| \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} > \theta_0 \wedge \frac{\theta_0\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n e^{-n} \exp\left(-\theta_0\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n^n} \le k^*\right\} =$$

$$= \left\{(x_1, x_2, ...x_n) \middle|\ \theta_0\bar{x} < 1 \wedge \left(\theta_0\bar{x}\right)^n \exp\left(-n\left(\theta_0\bar{x}-1\right)\right) \le k^*\right\}$$

Haciendo $y = \theta_0\bar{x}$ se nota que $y^n \exp(-n(y-1))$ tiene valor máximo para $y = 1$. Entonces, dado α la Región Crítica será $C^* = \left\{(x_1, x_2, ...x_n) \middle| \theta_0\bar{x} \le k'\right\}$ donde k' es tal que

$$\sup\left\{P_\theta\left(C^*\right)\middle|\theta\le\theta_0\right\}=P_{\theta_0}\left(C^*\right)=P_{\theta_0}\left(\theta_0\overline{X}\le k^*\right)=P_{\theta_0}\left(\theta_0\sum_{i=1}^n X_i\le nk^*\right)=\int_0^{nk^*}\frac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t}dt=\alpha$$

puesto que $\theta\le\theta_0 \Rightarrow P_\theta\left(\theta_0\overline{X}\le k^*\right)\le P_{\theta_0}\left(\theta_0\overline{X}\le k^*\right)$

La función de potencia de esta dócima será:

$$\pi_{C^*}(\theta)=P_\theta\left(\sum_{i=1}^n X_i\le\frac{nk^*}{\theta_0}=k'\right)=\int_0^{k'}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\theta t}dt \quad \theta>0$$

Se propone como ejercicio demostrar que esta dócima es Uniformemente Más Potente.

Teorema (Distribución Asintótica de la Razón de Verosimilitud Generalizada)

Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X\sim f(x;\boldsymbol{\theta})$; $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$
Dadas las hipótesis $H_0:\theta_1=\theta_1^0;\theta_2=\theta_2^0;...;\theta_r=\theta_r^0$ *vs* $H_0:\theta_1\ne\theta_1^0;\theta_2\ne\theta_2^0;...;\theta_r\ne\theta_r^0$ $(r\le k)$

sea λ definida como: $\lambda=\lambda_n(x_1,x_2,...x_n)=\dfrac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta}\in H_0} L(\boldsymbol{\theta};x_1,x_2,...,x_n)}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta}\in H_0\cup H_1} L(\boldsymbol{\theta};x_1,x_2,...,x_n)}$ Entonces

$$-2\ln\Lambda=-2\ln\lambda(X_1,X_2,...,X_n)\xrightarrow{D}\chi^2_{(r)}$$

La demostración de este teorema no forma parte de este curso. Sin embargo como se verá más adelante utilizaremos este resultado para establecer Regiones Críticas para "muestras grandes".

Teorema
Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X\sim f(x;\theta)$ donde
i) $f(x;\theta)=a(\theta)b(x)\exp\left(c(\theta)d(x)\right)$
ii) $\theta\in\Theta$ y Θ es un intervalo.

y sea $T(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^n d(x_i)$ Entonces:

a) Si $c(\theta)$ es monótona creciente y existe k^* tal que $P_{\theta_0}\left(T(X_1,X_2,...,X_n)>k^*\right)=\alpha$ se tiene que $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|T(x_1,x_2,...,x_n)>k^*\right\}$ es una dócima Uniformemente Más Potente con nivel de significación α para las hipótesis: $H_0:\theta\le\theta_0$ *vs* $H_1:\theta>\theta_0$ o $H_0:\theta=\theta_0$ *vs* $H_1:\theta>\theta_0$

b) Si $c(\theta)$ es monótona decreciente y existe k^* tal que $P_{\theta_0}\left(T(X_1,X_2,...,X_n)>k^*\right)=\alpha$ se tiene que $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|T(x_1,x_2,...,x_n)<k^*\right\}$ es una dócima Uniformemente Más

Potente con nivel de significación α para las hipótesis: $H_0: \theta \le \theta_0$ *vs* $H_1: \theta > \theta_0$ o $H_0: \theta = \theta_0$ *vs* $H_1: \theta < \theta_0$

La demostración se propone como ejercicio.

Corolario: Si $H_0: \theta \ge \theta_0$ *vs* $H_1: \theta < \theta_0$ o $H_0: \theta = \theta_0$ *vs* $H_1: \theta > \theta_0$ entonces si $c(\theta)$ es monótona creciente $C^* = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| T(x_1, x_2, ..., x_n) < k^*\right\}$ y si $c(\theta)$ es monótona decreciente $C^* = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| T(x_1, x_2, ..., x_n) > k^*\right\}$

Ejemplo

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ y $X \sim f(x;\theta)$ como en el ejemplo anterior. Entonces:
$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x) = a(\theta) b(x) \exp\left(c(\theta) d(x)\right)$ donde
$d(x) = x;\ T(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i;\ c(\theta) = -\theta$ Como c es monótona decreciente se tiene que

$C^* = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i < k^*\right\}$ es Uniformemente Más Potente para las Hipótesis: $H_0: \theta \le \theta_0$ *vs* $H_1: \theta > \theta_0$ o $H_0: \theta = \theta_0$ *vs* $H_1: \theta > \theta_0$

Definición

Una familia de funciones de densidad $\left\{f(x;\theta) \middle| \theta \in \Theta\right\}$ donde Θ es un intervalo se dice que tiene Razón de Verosimilitud Monótona si existe una estadística $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ tal que si $\theta' < \theta''$ se tiene que el cociente $L(\theta'; x_1, x_2, ..., x_n) \big/ L(\theta''; x_1, x_2, ..., x_n)$ es una función monótona (no creciente o no decreciente) de $T(x_1, x_2, ..., x_n)$

Ejemplos

i) Si $\left\{f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x) \middle| \theta > 0\right\}$ entonces

$\dfrac{L(\theta'; x_1, x_2, ..., x_n)}{L(\theta''; x_1, x_2, ..., x_n)} = \dfrac{(\theta')^n \exp\left(-\theta' \sum x_i\right)}{(\theta'')^n \exp\left(-\theta'' \sum x_i\right)} = \left(\dfrac{\theta'}{\theta''}\right)^n \exp\left(-(\theta' - \theta'') \sum x_i\right)$ es una función monótona (decreciente) de $\sum x_i$

ii) Si $\left\{f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) \middle| \theta > 0\right\}$ entonces

$$\frac{L(\theta';x_1,x_2,...,x_n)}{L(\theta'';x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{\left(1/\theta'\right)^n\prod I_{(0,\theta')}(x_i)}{\left(1/\theta''\right)^n\prod I_{(0,\theta'')}(x_i)}=\frac{\left(1/\theta'\right)^n I_{(0,\theta')}\left(y_{(n)}\right)}{\left(1/\theta''\right)^n I_{(0,\theta'')}\left(y_{(n)}\right)}=\begin{cases}\left(\dfrac{\theta''}{\theta'}\right)^n & si\ 0<y_{(n)}<\theta' \\ 0 & si\ \theta'\le y_{(n)}<\theta''\end{cases}$$

que es una función monótona no creciente de $y_{(n)}=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}$

Teorema

Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X\sim f(x;\theta)$ donde $\theta\in\Theta$ y Θ es un intervalo. Supongamos que $\{f(x;\theta)|\theta\in\Theta\}$ tiene razón de verosimilitud monótona para la estadística $T(X_1,X_2,...,X_n)$. Entonces para $H_0:\theta\le\theta_0\ \ vs\ \ H_1:\theta>\theta_0$:

a) Si la razón de verosimilitud es monótona no decreciente en $T(X_1,X_2,...,X_n)$ y k^* es tal que $P_{\theta_0}\left(T(X_1,X_2,...,X_n)>k^*\right)=\alpha$ la Región Crítica $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|T(x_1,x_2,...,x_n)<k^*\right\}$ es Uniformemente Más Potente para el nivel de significación α.

b) Si la razón de verosimilitud es monótona no creciente en $T(X_1,X_2,...,X_n)$ y k^* es tal que $P_{\theta_0}\left(T(X_1,X_2,...,X_n)>k^*\right)=\alpha$ la Región Crítica $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|T(x_1,x_2,...,x_n)>k^*\right\}$ es Uniformemente Más Potente para el nivel de significación α.

La demostración se propone como ejercicio

Corolario: Si $H_0:\theta\ge\theta_0\ vs\ H_1:\theta<\theta_0$ o $H_0:\theta=\theta_0\ vs\ H_1:\theta>\theta_0$ entonces si $c(\theta)$ es monótona no decreciente $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|T(x_1,x_2,...,x_n)>k^*\right\}$ y si $c(\theta)$ es monótona no creciente $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|T(x_1,x_2,...,x_n)<k^*\right\}$

Ejemplo

Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X\sim f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x);\ \theta>0$ y considere las hipótesis: $H_0:\theta\le\theta_0\ \ vs\ \ H_1:\theta>\theta_0$.Puesto que $\left\{f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x)\middle|\theta>0\right\}$ tiene razón de verosimilitud monótona no creciente para la estadística $Y_{(n)}=\max\{X_1,X_2,...,X_n\}$ entonces dado α la Región Crítica $C^*=\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\middle|y_{(n)}=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}>k^*\right\}$ es Uniformemente Más Potente para el nivel de significación α donde k^* es tal que

$P_{\theta_0}\left(C^*\right)=P_{\theta_0}\left(Y_{(n)}>k^*\right)=\int_{k^*}^{\theta_0} n\left(\frac{y}{\theta_0}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta_0}dy=\frac{1}{\theta_0^n}\left(\theta_0^n-\left(k^*\right)^n\right)=1-\left(\frac{k^*}{\theta_0}\right)^n=\alpha$. Por lo tanto $k^*=\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}$. La Función de Potencia de esta dócima será

$$\pi_{C^*}(\theta)=P_\theta\left(C^*\right)=\int_{k^*}^{\theta} n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(y)\,dy=\begin{cases}\int_{k^*}^{\theta} n\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dy & si\ k^*\le\theta\\ 0 & si\ k^*>\theta\end{cases}$$

Si se consideran las hipótesis fuesen: $H_0:\theta\ge\theta_0\ vs\ H_1:\theta<\theta_0$ o bien $H_0:\theta=\theta_0\ vs\ H_1:\theta<\theta_0$ entonces $C^*=\left\{\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\middle|\,y_{(n)}=\max\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}<k^*\right\}$ donde ahora k^* es tal que

$$P_{\theta_0}\left(C^*\right)=P_{\theta_0}\left(Y_{(n)}<k^*\right)=\int_0^{k^*} n\left(\frac{y}{\theta_0}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta_0}dy=\frac{1}{\theta_0^n}\left(k^*\right)^n=\alpha\Rightarrow k^*=\theta_0\sqrt[n]{\alpha}$$

Se han obtenido dócimas Uniformemente Más Potentes para el caso de Hipótesis “unilaterales” es decir del tipo $H_0:\theta\le\theta_0\ vs\ H_1:\theta>\theta_0$ o $H_0:\theta=\theta_0\ vs\ H_1:\theta<\theta_0$ o $H_0:\theta\ge\theta_0\ vs\ H_1:\theta<\theta_0$ o $H_0:\theta=\theta_0\ vs\ H_1:\theta>\theta_0$. Pero no es posible en general encontrar dócimas de esta características para, por ejemplo Hipótesis “bilaterales” del tipo: $H_0:\theta=\theta_0\ vs\ H_1:\theta\ne\theta_0$ o $H_0:\theta_0<\theta\le\theta_1\ vs\ H_1:\theta\le\theta_0\vee\theta_1<\theta_0$ etc.

Otros Métodos

Cuando no es posible encontrar dócimas Uniformemente más Potentes se pueden aplicar distintos métodos.

1- <u>Método “intuitivo”</u>

Consiste en encontrar una estadística cuyos valores tienen diferente comportamiento bajo H_0 y H_1. La Región Crítica se define en términos de valores de la estadística que “intuitivamente” hacen poco probable que puedan ser observados bajo H_0 y debe ser expresada en términos de una variables aleatoria con distribución conocida (independiente del parámetro) bajo H_0

Esta estadística puede ser, por ejemplo, un buen estimador del parámetro sobre el cual se establecen las hipótesis y la Región Crítica definirla a base de los valores (posibles estimaciones) que hacen más creíble que H_1 es verdadera en lugar de H_0.

Por ejemplo, supongamos que se cuanta con una muestra aleatoria $X_1,X_2,...,X_n$ una muestra aleatoria proveniente de $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ y se desea docimar las hipótesis: $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2\ vs\ H_1:\sigma^2\ne\sigma_0^2$ Sabemos que $\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ es el estimador máximo verosímil de σ^2. Si H_0 es cierta es de esperar que $\widehat{\sigma^2}$ tome valores "cercanos" a σ_0^2 por lo que una Región Crítica "intuitivamente" válida será $C^* = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) | \widehat{\sigma^2} < k_1 \vee \widehat{\sigma^2} > k_2 \right\}$.

Dado α el cálculo de k_1, k_2 requiere expresar C^* en función de una variable aleatoria con distribución conocida bajo H_0 y H_1. En este caso se observa que:

$$C^* = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) | \widehat{\sigma^2} < k_1 \vee \widehat{\sigma^2} > k_2 \right\} = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) | \frac{n\widehat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} < \frac{nk_1}{\sigma_0^2} = a \vee \frac{n\widehat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} > \frac{nk_1}{\sigma_0^2} = b \right\}$$

Puesto que bajo H_0 $\frac{n\widehat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ se tiene que la Región Crítica puede ser expresada como: $C^* = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) | \frac{n\widehat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} < a \vee \frac{n\widehat{\sigma^2}}{\sigma_0^2} > b \right\}$ donde a, b son tales que

$$P\left(\chi^2_{(n-1)} < a\right) = \alpha/2 \qquad ; P\left(\chi^2_{(n-1)} < b\right) = 1 - \alpha/2$$

2- <u>Método de la Razón de Verosimilitud Generalizado</u>

Cuando este método no conduce a dócimas Uniformemente Más Potente, suele conducir de todas formas a dócimas "aceptables". La mayor parte del problema en este caso consiste en encontrar la distribución de Λ o bien expresar la Región Crítica obtenida mediante este método en términos de una estadística con distribución conocida bajo H_0.

Sin embargo, si es posible suponer que n es "grande" entonces la construcción de la dócima se simplifica por cuanto, por ser una Razón de Verosimilitud Generalizada, la Región Crítica es de la forma

$$C^* = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) | \lambda(x_1, x_2, ...x_n) < k^* \right\} = \left\{ (x_1, x_2, ...x_n) | -2\ln\lambda(x_1, x_2, ...x_n) > -2\ln k^* = k' \right\}$$

y k' es tal que $P\left(\chi^2_{(n-1)} < k'\right) = 1 - \alpha$

Veremos ejemplos de aplicación de este método en los casos que se presentan a continuación

PRESENTACIÓN DE DÓCIMAS DE USO FRECUENTE

En el siguiente capítulo se presentarán dócimas de usos frecuente. Para ello se indicará:

1- La población sobre la cual se desea efectuar una dócima de hipótesis a base de una muestra aleatoria de tamaño n.

2- Las respectivas hipótesis nula (H_0) y alternativa (H_1)

3- Dado un nivel de significación α, se dará una Región Crítica $\mathcal{C}_\alpha$ "recomendada" por los métodos de Inferencia Estadística, con indicación del procedimiento para determinar correctamente la región crítica que tiene el α especificado ($\mathcal{C}_\alpha$).

4- Generalmente no se indican las probabilidades de Error Tipo II, o su equivalente, la función de potencia), debido a que, como se indicó en el acápite anterior exige aplicar (o desarrollar), en cada caso, un programa computacional. Sin embargo, todo profesional estadístico debe estar capacitado para ofrecer a los usuarios esta función de potencia cuando así se requiera.

5- En cada caso se presentará uno o más ejemplos para una mejor comprensión de los conceptos y operaciones involucrados en los mismos.

1. DÓCIMAS SOBRE PARÁMETROS DE POBLACIONES NORMALES

En todos los casos que consideraremos bajo este acápite se supondrá que se cuenta con una muestra aleatoria $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ proveniente de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y que se establece un nivel de significación α para las hipótesis que se consideren. Como antes, un valor particular de la muestra aleatoria será representado por $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Una función g de $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ (o de $\vec{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$) la designaremos por $g(\vec{x})$ (o $g(\vec{X})$. Por ejemplo, $g(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$ o $g(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

Dócimas sobre μ

Puesto $f(x;\mu,\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2}x\right)$ se tiene que:

i) Si σ^2 se supone conocido, $f(x;\mu,\sigma^2)$ pertenece a la familia exponencial con $a(\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$ $b(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$; $c(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2}$; $d(x) = x$ como $c(\mu)$ es monótona creciente, Regiones Críticas unilaterales basadas en $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ del tipo $C = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k^*\right\}$ serán Uniformemente Más Potentes para Hipótesis de la forma $H_0 : \mu \leq \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu > \mu_0$ o $H_0 : \mu = \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu > \mu_0$ y Regiones Críticas unilaterales basadas en $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ del tipo $C = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k^*\right\}$ serán UMP para hipótesis de la forma $H_0 : \mu \geq \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu < \mu_0$ o $H_0 : \mu = \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu > \mu_0$

Si σ^2 es desconocido, se puede utilizar la Razón de verosimilitud Generalizada. Supongamos que se considera la hipótesis $H_0 : \mu \leq \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu > \mu_0$. Entonces:

$$\sup\left\{L\left(\mu,\sigma^2;\vec{\mathbf{x}}\right)\middle|\left(\mu,\sigma^2\right)\in H_0\cup H_1\right\}=\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\right)=\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

puesto que $\hat{\mu}=\overline{X};\ \widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ son los EMV de μ y σ^2 respectivamente.

Por otra parte,

$$\sup\left\{L\left(\mu,\sigma^2;\vec{\mathbf{x}}\right)\middle|\left(\mu,\sigma^2\right)\in H_0\right\}=\begin{cases}\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_0\right)^2\right) & si\ \ \mu_0<\overline{x}\\ \left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\right)=\left(2\pi\widehat{\sigma^2}\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2}\right) & si\ \ \mu_0>\overline{x}\end{cases}$$

En consecuencia

$$\lambda\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{\sup\left\{L\left(\mu,\sigma^2;\vec{\mathbf{x}}\right)\middle|\left(\mu,\sigma^2\right)\in H_0\right\}}{\sup\left\{L\left(\mu,\sigma^2;\vec{\mathbf{x}}\right)\middle|\left(\mu,\sigma^2\right)\in H_0\cup H_1\right\}}=\begin{cases}\exp\left(\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_0\right)^2\right)\right) & si\ \ \mu_0<\overline{x}\\ 1 & si\ \ \mu_0>\overline{x}\end{cases}$$

La Región Crítica será:

$C^*=\left\{\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\mid\lambda\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\le k^*\right\}$ Puesto que $0<k^*<1$ se tiene que si $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ es tal que $\mu_0>\overline{x}$ entonces $\lambda=1$ y por lo tanto $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\notin C^*$

$$\lambda\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\le k^*\Leftrightarrow\exp\left(\frac{1}{2\widehat{\sigma^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_0\right)^2\right)\right)\le k^*\wedge\mu_0<\overline{x}\Leftrightarrow$$

Pero

$$\Leftrightarrow\exp\left(\frac{n}{2}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_0\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\right)\right)\le k^*\wedge\mu_0<\overline{x}\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_0\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}>\frac{2\ln k^*}{n}+1=k'\wedge\mu_0<\overline{x}$$

En consecuencia

$C^*=\left\{\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\ \middle|\ \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu_0\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}>k'\wedge\mu_0<\overline{x}\right\}$. Recordando que, si $X_1,X_2,...,X_n$ es una m. a. proveniente de $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ entonces si $\mu=\mu_0$ se tiene que $Z=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sqrt{\sigma^2}}\sim N\left(0,1\right)$;

$Y = Z^2 \sim \chi_1^2$; y $W = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$ donde Z e Y son independientes de W se tiene que $\dfrac{Z}{\sqrt{W/(n-1)}} \sim t_{(n-1)}$ y $t_{(n-1)}^2 = \dfrac{Y}{W/(n-1)} \sim F(1, n-1)$, la Región Crítica C^* se puede

$$C^* = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \;\middle|\; (n-1)\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 \Big/ \sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \Big/ n\sigma^2} = t^2(\vec{x}) > \frac{(n-1)k'}{n} = k'' \wedge \mu_0 < \overline{x} \right\}$$ donde t^2 es un

Entonces, puesto que bajo H$_0$ $t^2(\vec{\mathbf{X}}) \sim F(1, n-1)$ y bajo H$_1$ $t^2(\vec{\mathbf{X}}) \sim F'\left(1, n-1, \lambda = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\right)$

(distribución F no central con parámetro de excentricidad $\lambda = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)^2$) se tiene que:

- Dado α el valor de k'' es tal que $P\left(t^2(\vec{\mathbf{X}}) \leq k''\right) = 1 - \alpha$;
- La Función de Potencia $\pi_{C^*}(\mu) = P_\mu\left(t^2(\vec{\mathbf{X}}) > k''\right)$ donde $t^2(\vec{\mathbf{X}}) \sim F'\left(1, n-1, \lambda = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)\right)$

Una forma alternativa de expresar C^* es la siguiente

Puesto que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 + n\left(\overline{x} - \mu_0\right)^2$ se tiene que

$$C^* = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \;\middle|\; \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} > k' \wedge \mu_0 < \overline{x} \right\} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \;\middle|\; 1 + \frac{n\left(\overline{x} - \mu_0\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} > k' \wedge \mu_0 < \overline{x} \right\} =$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \;\middle|\; \frac{\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\right)^2}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{(n-1)\sigma^2}} > (n-1)(k'-1) \wedge \mu_0 < \overline{x} \right\} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \;\middle|\; \frac{\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}\right)}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{(n-1)\sigma^2}}} = t > \sqrt{(n-1)(k'-1)} \wedge \mu_0 < \overline{x} \right\}$$

donde t es el valor particular de una “t de Student” con n-1 grados de libertad definida como

$$t_{(n-1)} = \frac{\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{n}\right)}} \right)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{(n-1)\sigma^2}}}$$

En resumen, la Región Crítica será: $C^* = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \mid t > k \wedge \mu_0 < \overline{x} \right\}$ donde $t_{(n-1)} = \frac{\left(\sqrt{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0) \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}}$ y k es tal que, dado α, $P\left(t_{(n-1)} < k\right) = 1 - \alpha$

ii) Si las hipótesis son "bilaterales" (por ejemplo $H_0 : \theta = \theta_0 \; vs \; H_1 : \theta \neq \theta_0$) no será posible encontrar una dócima UPM. En estos casos se proponen dócimas por el "método intuitivo" o bien las razón de verosimilitud generalizada.

En lo que sigue se presentan algunas soluciones para dócimas de hipótesis desde un punto de vista práctico.

1.1. DÓCIMAS SOBRE μ SUPUESTO CONOCIDA σ^2 (σ^2_o)

a) Hipótesis bilateral

H_o: μ = μ_o
H_1: μ ≠ μ_o

Para definir la Región Crítica con un nivel de significación α, consideremos la variable aleatoria $Z(\overrightarrow{X}) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma_0^2}}$. Si H_0 es cierta, $Z(\overrightarrow{X}) \sim N(0,1)$. Además si H_0 es verdadera, y $z(\vec{x}) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma_0^2}}$ es un valor particular de $Z(\overrightarrow{X})$ deberíamos esperar que $\overline{X}$ tome valores cercanos a μ_0 por lo que $z(\vec{x})$ tomaría valores "alrededor" de cero (valor esperado de $Z(\overrightarrow{X})$).

Por lo anterior escogeremos una Región Crítica de la forma:

Dado que el nivel de significación debe ser α el valor $z_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla N(0,1) y es tal que $P(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

La función de potencia de C será:

$$\pi_C(\mu) = P_\mu(C) = P\left(\overline{X} \le \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \vee \overline{X} \ge \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \right) \text{ donde } \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n} \right) \; y \;\; \mu \in H_0 \cup H_1$$

Por lo tanto si llamamos $k_1 = \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}$ y $k_2 = \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}$

$$\pi_C(\mu) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \le \frac{\sqrt{n}(k_1-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \vee \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \ge \frac{\sqrt{n}(k_2-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \right) \text{donde } \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \sim N(0,1) \;\forall\; \mu \in H_0 \cup H_1$$

Es fácil comprobar que

$\mu = \mu_0 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(k_1-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} = -z_{\alpha/2} ; \frac{\sqrt{n}(k_2-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} = z_{\alpha/2}$ y por lo tanto: $\pi_C(\mu) = \alpha$

$\mu \to \infty \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(k_1-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \to -\infty \wedge \frac{\sqrt{n}(k_2-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \to -\infty$ por lo tanto $\pi_C(\mu) \to 1$

$\mu \to -\infty \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(k_1-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \to \infty \wedge \frac{\sqrt{n}(k_2-\mu)}{\sqrt{\sigma_0^2}} \to \infty$ por lo tanto $\pi_C(\mu) \to 1$

Además, dado $\mu \ne \mu_0$ si $n \to \infty \Rightarrow \pi_C(\mu) \to 1$

Por lo anterior la función de potencia tiene una “forma” que se aproxima a la “ideal” en la medida en que se aumenta el tamaño de muestra.

Ejemplo:

Supongamos que las ventas semanales en millones de pesos de un producto pueden ser aproximadas por una distribución normal con media μ y desviación estándar 10.

Para efectos de preparar un informe sobre el comportamiento de la empresa, el gerente comercial informa que el promedio mensual de estas ventas es $60.000.000. Sin embargo la gerencia general desea chequear este pronóstico para lo cual se observan el comportamiento de estas ventas durante 16 semanas, obteniéndose que el total de las ventas en dichas semanas fueron $ 876.800.000

a) *¿Cuál es la población?*
   La población es una v.a. X~N(μ, 100) donde X representa las ventas semanales del producto.

b) *¿Bajo qué condiciones las 16 observaciones semanales constituyen una muestra aleatoria proveniente de una población?*

   Se supone que las 16 observaciones semanales son independientes (por ejemplo, se supone que el valor de las ventas en una semana no es “influenciado” por el valor de las ventas en la semana anterior) y que todas las observaciones provienen de una normal con la misma media μ (constate) sobre la cual se realizan las hipótesis (por ejemplo, no hay semanas con ventas esperadas menores que otras semanas).

c) *¿Cuáles son las hipótesis?*

   H_o: μ = 60 (las ventas promedio semanales son las que indica el gerente)
   H_1: μ ≠ 60 (las ventas promedio semanales no son las que indica el gerente)

d) *¿Cuál es el Error Tipo I?*

Suponer que las ventas promedio semanales no son $60.000.000 (rechazar H_0) cuando en realidad lo son. Las consecuencias de este error se deben medir en términos de las decisiones que puedan ser adoptadas a base de un informe que descarta la opinión del gerente comercial.

e) *¿Cuál es el Error Tipo II?*

Suponer que las ventas promedio semanales son $60.000.000 (aceptar H_0) cuando no es cierto. Las consecuencias de este error serán las que correspondan a decisiones que se adopten por adoptar un estimación equivocada del gerente comercial.

f) *¿Qué es y cómo se determina el nivel de significación?*

El nivel de significación (α) es la probabilidad de adoptar el supuesto de que el promedio de las ventas semanales es $60.000.000 cuando en realidad no lo es. Para su determinación se debería consultar al gerente general (o a quien tome las decisiones finales a base del informa) cuál es la máxima probabilidad que está dispuesto a aceptar para cometer el error de adoptar que el promedio de las ventas semanales no es $60.000.000, cuando en realidad lo es (Error Tipo I).

Para evitar respuestas extremas, se debe recordar que cuanto menor sea la probabilidad de cometer Error Tipo I, mayor será la probabilidad de cometer Error Tipo II.

Supongamos que luego de sopesar las consecuencias de ambos Errores, se indica que se desea un nivel de significación de 2% ($\alpha = 0{,}02$)

g) *Determinación de la Región Crítica y realización de la Dócima o Test de Hipótesis*

Primeramente se debe determinar $z_{1-\alpha/2} = z_{1-0{,}02/2} = z_{0{,}99}$. Para ello en la tabla de la N(0,1) se busca un valor de tal que $P(Z \le z_{0{,}99}) = 0{,}99$ encontrándose $z_{0{,}99} \approx 2{,}33$

Luego

$$C_{0{,}02} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \bar{x} \le \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \vee \bar{x} \ge \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \bar{x} \le 60 - 2{,}33\sqrt{\frac{100}{16}} \vee \bar{x} \ge 60 + 2{,}33\sqrt{\frac{100}{16}} \right\}$$

de donde

$$C_{0{,}02} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \bar{x} \le 54{,}175 \vee \bar{x} \ge 65{,}825 \right\}$$

Dado que en la muestra $\bar{x} = \dfrac{876{,}8}{16} = 54{,}8$, $\vec{x} \notin C$ y por lo tanto se acepta H_0.

Nótese que con esta decisión NO es posible cometer Error Tipo I y en consecuencia el nivel de significación de 0,02 carece de importancia.

Si se desea usar la otra forma de expresar la Región Crítica se tiene que

$$C_{0,02} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \le -z_{1-\alpha/2} \vee z(\vec{x}) \ge z_{1-\alpha/2} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \le -2,33 \vee z(\vec{x}) \ge 2,33 \right\}$$

Luego se calcula $z(\vec{x}) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma_0^2}} = \dfrac{\sqrt{16}(54,8 - 60)}{\sqrt{100}} = -2,08$ y por lo tanto $\vec{x} \notin C$

h) Cálculo de valores de la Función de Potencia

Sabemos que el valor de la Función de Potencia para μ = 60 es 0,02. Para el cálculo de esta función en otros valores, por ejemplo para μ = 55 se procede como sigue:

Ya se habían calculado $k_1 = \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_0^2}{n}}$ y $k_2 = \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_0^2}{n}}$ mediante

$$k_1 = 60 - 2,33\sqrt{\frac{100}{16}} = 54,175 \;\; y \;\; k_2 = 60 + 2,33\sqrt{\frac{100}{16}} = 65,825$$

Entonces

$\pi_C(55) = P\left(\bar{X} \le 54,175 \vee \bar{X} \ge 65,825\right)$ $donde$ $\bar{X} \sim N(55, \dfrac{100}{16})$. Por lo tanto

$$\pi_C(55) = P\left(Z \le \frac{54,175 - 55}{\sqrt{6,25}} \vee Z \ge \frac{65,825 - 55}{\sqrt{6,25}}\right) = P\left(Z \le -0,33 \vee Z \ge 4,33\right) = 0,3707$$

Para el cálculo de la función de potencia para otros valores de μ se procede en forma similar.

i) Cambio en el nivel de significación

Supongamos ahora que se desea resolver la dócima de hipótesis con un nivel de significación del 5% (α = 0,05).

En tal caso, $z_{1-\alpha/2} = z_{1-0,05/2} = z_{0,975} = 1,96$ y la Región Crítica será:

$$C_{0,05} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \bar{x} \le 60 - 1,96\sqrt{6,25} \vee \bar{x} \ge 60 + 1,96\sqrt{6,25} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \bar{x} \le 55,1 \vee \bar{x} \ge 64,9 \right\}$$

Considerando la misma muestra aleatoria se tiene que $\bar{x} = 54,8$ y por lo tanto $\vec{x} \in C$ por lo que con este nivel de significación del 5% se rechaza H_o. Dado que en este caso el único error que se puede cometer es el Error Tipo I no es necesario investigar la Función de Potencia.

Si se considera la otra forma de la Región Crítica $C_{0,05} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \le -1,96 \vee z(\vec{x}) \ge 1,96 \right\}$ entonces $z(\vec{x}) = -2,08$ continua siendo el mismo pero se observa ahora que $\vec{x} \in C$ por lo que se rechaza H_0.

j) Nuevo cálculo de la Función de Potencia

Como se indicó, si se utiliza una Región Crítica con α = 0,05 se concluye en que H_0 debe ser rechazada y por lo tanto no sería necesario calcular la Función de Potencia. Sin embargo procederemos a su cálculo en el mismo punto μ = 55 para comprobar que, cuando se aumenta el nivel de significación la probabilidad de Error Tipo II $\left(1 - \pi_C(\mu)\right)$ disminuye.

En efecto para α = 0,05 los valores de k_1 y k_2 son:

$$k_1 = 60 - 1{,}96\sqrt{\frac{100}{16}} = 55{,}1 \; y \; k_2 = 60 + 1{,}96\sqrt{\frac{100}{16}} = 64{,}9$$

En consecuencia

$\pi_{C_{0,05}}(55) = P\left(\overline{X} \leq 55{,}1 \vee \overline{X} \geq 64{,}9\right)$ *donde* $\overline{X} \sim N(55, 6{,}25)$. Por lo tanto

$\pi_C(55) = P\left(Z \leq \frac{55{,}1 - 55}{\sqrt{6{,}25}} \vee Z \geq \frac{64{,}9 - 55}{\sqrt{6{,}25}} \right) = P\left(Z \leq -0{,}04 \vee Z \geq 3{,}96\right) = 0{,}6554$. Por lo tanto la probabilidad de Error Tipo II para μ = 55 y α = 0,05 será: 1-0,6554 = 0,3445 que es menor que 1-0,3707 = 0,6269 que corresponde a μ = 55 y α = 0,02

b) Hipótesis unilateral

H_o: μ = μ_o
H_1: μ > μ_o

Como antes, consideremos la variable aleatoria $Z(\overrightarrow{X}) = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma_0^2}}$. Si H_0 es cierta, $Z(\overrightarrow{X}) \sim N(0,1)$. Además si H_0 es verdadera, y $z(\vec{x}) = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma_0^2}}$ es un valor particular de $Z(\overrightarrow{X})$ deberíamos esperar valores de $z(\vec{x})$ "alrededor" de cero (valor esperado de $Z(\overrightarrow{X})$).

Por lo anterior y dado que μ no es menor que μ_0 escogeremos una Región Crítica de la forma:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \geq z_{1-\alpha} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \right\}$$

Consecuentemente, el valor $z_{1-\alpha}$ se obtiene de una tabla N(0,1) y es tal que $P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$. De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

Ejemplo:

Consideremos el mismo ejemplo anterior pero supongamos que el gerente comercial informa que el valor de las ventas semanales promedio es, **por lo menos**, $60.000.000

En este caso las hipótesis serían:

H_o: μ = 60
H_1: μ > 60

Si se desea un nivel de significación de 5% entonces $z_{0,95}$ = 1,645 y la Región Crítica será:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \geq 60 + 1{,}645\sqrt{6{,}25} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \geq 64{,}1125 \right\}$$

o bien

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \geq 1{,}645 \right\}$$

Si se considera que $\overline{x} = 54{,}8$ y que $z(\vec{x}) = -2{,}08$ es claro que por cualquiera de las formas de la Región Crítica $\vec{x} \notin C$ y por lo tanto se acepta H_0.

Como antes se debe calcular al menos algunos puntos de la Función de Potencia para formarse una idea del riesgo de cometer Error Tipo II (el único posible según el resultado de la dócima).

Se nota además que un valor de $\overline{x} = 54,8$ en la muestra hace pensar que tal vez el promedio de ventas semanales **sería menor** que $60.000.000. Sin embargo dado que esta posibilidad **no está contemplada** en las hipótesis se elige **la menos mala** de las dos posibles

c) Hipótesis unilateral

H_o: μ = μ_o
H_1: μ < μ_o

Mediante un razonamiento similar al caso anterior, la Región Crítica propuesta será:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \le z_\alpha \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \le \mu_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}} \right\}$$

donde $z(\vec{x})$ es el valor particular de la v. a. $Z(\overrightarrow{X}) = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0,1)$ y $z_{1-\alpha}$ se obtiene de una tabla N(0,1) tal que $P(Z \le z_\alpha) = \alpha$. De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el ejemplo de las ventas semanales, pero supongamos que el gerente comercial informa que el valor de las ventas semanales promedio es, **a lo más**, $60.000.000

En este caso las hipótesis serían:

H_o: μ = 60
H_1: μ < 60

Si se desea un nivel de significación de 2% entonces $z_{0,02}$ = -2,0555 y la Región Crítica será:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \le 60 - 2,055\sqrt{6,25} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \le 54,8625 \right\}$$

o bien

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| z(\vec{x}) \le -2,055 \right\}$$

Si se considera que $\overline{x} = 54,8$ y que $z(\vec{x}) = -2,08$ es claro que por cualquiera de las formas de la Región Crítica $\vec{x} \in C$ y por lo tanto se rechaza H_0.

Dado que con este resultado el único error posible el Error Tipo I, el riesgo de cometerlo está controlado por el nivel de significación y no es necesario recurrir a la Función de Pontencia.

1.2. DÓCIMAS SOBRE μ CUANDO SE DESCONOCE σ^2

En estos casos se procede en forma similar a los casos presentados anteriormente (varianza conocida σ_o^2) con las siguientes modificaciones:

- σ_0^2 se sustituye por $\widehat{\sigma^2} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$;

– Si n ≤ 30 z_γ se sustituye por $t_{(n-1),\gamma}$ donde el valor de $t_{(n-1),\gamma}$ se busca en una tabla de la "t" con n-1 grado de libertad y es tal que $P(t_{(n-1)} \le t_{(n-1),\gamma}) = \gamma$
– Si n > 30 se utiliza z_γ porque su valor es aproximado al de $t_{(n-1),\gamma}$

Veamos cada caso

a) Hipótesis bilateral

H_o: μ = μ_o
H_1: μ ≠ μ_o

Consideremos la variable aleatoria $t(\vec{X}) = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}} = \dfrac{\sqrt{n(n-1)}(\overline{X} - \mu_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}}$. Si H_0 es cierta, $t(\vec{X}) \sim t_{(n-1)}$ Además si H_0 es verdadera, y $t(\vec{x}) = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}}$ es un valor particular de $t(\vec{X})$ deberíamos esperar que $\overline{X}$ tome valores cercanos a μ_0 por lo que $t(\vec{x})$ tomaría valores "alrededor" de cero (valor esperado de $t(\vec{X})$).

Como antes escogeremos una Región Crítica de la forma:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| t(\vec{x}) \le -t_{1-\alpha/2} \vee t(\vec{x}) \ge t_{1-\alpha/2} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \overline{x} \le \mu_0 - t_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \vee \overline{x} \ge \mu_0 + t_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \right\}$$

Dado un nivel de significación α el valor $t_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla "t" con n-1 grado de libertad y es tal que $P(t_{(n-1)} \le t_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

La función de potencia de C será:

$\pi_C(\mu) = P_\mu(C) = P\left(t(\vec{X}) \le -t_{1-\alpha/2} \vee t(\vec{X}) \ge t_{1-\alpha/2} \right) = P(t^2(\vec{X}) \ge t^2_{1-\alpha/2})$ $\mu \in H_0 \cup H_1$ donde $t^2 \sim F_{(1.n-1;\lambda)}$ es una F no central con grados de libertad 1 y (n-1) y parámetro de excentricidad $\lambda = \dfrac{n}{2}(\mu - \mu_0)^2$. El cálculo de probabilidades específicas para una F no central requiere de programas computacionales por lo que su utilización escapa los propósitos de un curso destinado a usuarios de metodología estadística.

Sin embargo, es derecho del usuario **exigir** estos valores de la Función de Potencia y es **deber** de todo estadístico profesional identificar procedimientos (programas computacionales) para encontrar dichos valores y ofrecerlo al usuario el único aporte de la Inferencia Estadística cual es **controlar el error** asociado a esta particular inferencia inductiva.

Ejemplo:

Supongamos el mismo ejemplo de las ventas semanales en el cual se desconoce la varianza de la población y supongamos que, como antes, se considera una muestra de tamaño 16 de la cual se sabe que: $\sum_{i=1}^{16} x_i = 876{,}8$ (millones) $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 49345{,}99$ (millones^2).

En primer lugar calculamos $\widehat{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\left(\bar{x}\right)^2}{16-1} = \dfrac{49345{,}99 - 16 \times 54{,}8^2}{15} = 86{,}49$.

Luego, si se considera un α = 0,05 obtenemos $t_{1-\alpha/2} = t_{1-0{,}05/2} = t_{0{,}975}$ buscando en la tabla de la $t_{(n-1)}$ el valor de tal que $P(t_{(15)} \le t_{0{,}975}) = 0{,}975$ encontrándose $t_{0{,}975} \approx 2{,}131$

Luego

$$C_{0{,}05} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, \bar{x} \le \mu_0 - t_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \vee \bar{x} \ge \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, \bar{x} \le 60 - 2{,}131 \sqrt{\frac{86{,}49}{16}} \vee \bar{x} \ge 60 + 2{,}131 \sqrt{\frac{86{,}49}{16}} \right\}$$

de donde

$$C_{0{,}05} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, \bar{x} \le 55{,}0454 \vee \bar{x} \ge 64{,}9546 \right\}$$

Dado que en la muestra $\bar{x} = \dfrac{876{,}8}{16} = 54{,}8$, $\vec{x} \in C$ y por lo tanto se rechaza H_0, con una probabilidad de cometer error (Tipo I) de 0,05.

Si en cambio el nivel de significación es 2%, $P(t_{(15)} \le t_{0{,}99}) = 0{,}99$ implica $t_{0{,}99} \approx 2{,}602$

$$C_{0{,}05} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, \bar{x} \le 60 - 2{,}602 \sqrt{\frac{92{,}16}{16}} \vee \bar{x} \ge 60 + 2{,}602 \sqrt{\frac{92{,}16}{16}} \right\} = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, \bar{x} \le 53{,}7552 \vee \bar{x} \ge 66{,}2448 \right\}$$

Puesto que $\bar{x} = 54{,}8$ se tiene que $\vec{x} \notin C$ y por lo tanto se acepta H_0.

Nuevamente se nota que el nivel de significación de 2% se refiere al Error Tipo I y que, en este caso, al aceptar H_0 el único error posible que se puede cometer es el Error Tipo II y en consecuencia se debería calcular la Función de Potencia para controlar el riesgo de cometer los errores de este Tipo.

b) Hipótesis unilateral

H_o: μ = μ_o
H_1: μ > μ_o

Como antes, consideremos la variable aleatoria $t(\vec{X}) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}}$. Si H_0 es cierta, $t(\vec{X}) \sim N(0,1)$. Además si H_0 es verdadera, y $t(\vec{x}) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}}$ es un valor particular de $t(\vec{X})$ deberíamos esperar valores de $t(\vec{x})$ “alrededor” de cero (valor esperado de $t(\vec{X})$).

Por lo anterior y dado que μ no es menor que μ_0 escogeremos una Región Crítica de la forma:

$$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle| t(\vec{x})\geq t_{1-\alpha}\right\}=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle|\bar{x}\geq \mu_0+t_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}\right\}$$

Consecuentemente, el valor $t_{1-\alpha}$ se obtiene de una tabla "t" con n-1 grados de libertad y es tal que

$P(t_{(n-1)}\leq t_{1-\alpha})=1-\alpha$. De esta forma $P_{H_0}(C)=\alpha$

Ejemplo:

Consideremos el mismo ejemplo anterior pero supongamos que el gerente comercial informa que el valor de las ventas semanales promedio es, **por lo menos**, $60.000.000

En este caso las hipótesis serían:

H_o: μ = 60
H_1: μ > 60

Si se desea un nivel de significación de 5% entonces $t_{0,95}$ = 1,753 (con 15 grados de libertad) y la Región Crítica será:

$$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle| t(\vec{x})\geq 1,753\right\}$$

Para calcular $t(\vec{x})$ se tiene que $t(\vec{x})=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}}=\dfrac{4(54,8-60)}{\sqrt{86,49}}\approx -2,237$

Es claro que por cualquiera de las formas de la Región Crítica $\vec{x}\notin C$ y por lo tanto se acepta H_0.

Como antes se debe solicitar el cálculos de algunos puntos de la Función de Potencia para formarse una idea del riesgo de cometer Error Tipo II (el único posible según el resultado de la dócima).

Se nota además que un valor de $\bar{x}=54,8$ en la muestra hace pensar que tal vez el promedio de ventas semanales **sería menor** que $60.000.000. Sin embargo dado que esta posibilidad **no está contemplada** en las hipótesis se elige **la menos mala** de las dos posibles

c) Hipótesis unilateral

H_o: μ = μ_o
H_1: μ < μ_o

Mediante un razonamiento similar al caso anterior, la Región Crítica propuesta será:

$$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle| t(\vec{x})\leq t_{\alpha}\right\}=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle|\bar{x}\leq \mu_0+t_{\alpha}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}\right\}$$

donde $t(\vec{x})$ es el valor particular de la v. a. $t(\vec{x})=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{\widehat{\sigma^2}}}$ y t_α se busca en una "t" con n-1 grados de libertad y es tal que $P(t_{(n-1)}\leq t_{\alpha})=\alpha$. De esta forma $P_{H_0}(C)=\alpha$

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el ejemplo de las ventas semanales, pero supongamos que el gerente comercial informa que el valor de las ventas semanales promedio es, **a lo más**, $60.000.000

En este caso las hipótesis serían:

H_o: μ = 60
H_1: μ < 60

Si se desea un nivel de significación de 1% entonces $t_{0,01} = -t_{0,99} = -2,602$ (con 15 grados de libertad) y la Región Crítica será:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| t(\vec{x}) \leq -2,602 \right\}$$

Sabemos que $t(\vec{x}) = -2,237$ por lo que $\vec{x} \notin C$ y por lo tanto se acepta H_0.

Con este resultado el único error posible el Error Tipo II, y el riesgo de cometerlo está controlado por la Función de Potencia.

Si en cambio el nivel de significación es α = 0,05, entonces $t_{0,05} = -t_{0,95} = 1,753$ la Región Crítica es: $C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| t(\vec{x}) \leq -1,753 \right\}$ y dado que $t(\vec{x}) = -2,237$ se tiene que $\vec{x} \notin C$ y por lo tanto se acepta H_0. El nivel de significación α = 0,05 es precisamente la probabilidad de cometer el único error posible (Error Tipo I).

1.3. DÓCIMA SOBRE σ^2 SUPUESTO CONOCIDO μ (μ_0)

Aunque en la práctica es difícil que se presente esta situación, en todo caso es más probable que suponer que se desconoce μ pero se conoce σ^2

a) Hipótesis bilateral

H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

Consideremos la variable aleatoria $\chi^2(\vec{X}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}$ donde μ_0 es el valor conocido de μ y σ_0^2 es el valor de σ^2 bajo la Hipótesis Nula. Si H_0 es cierta $\chi^2(\vec{X}) \sim \chi^2_{(n)}$. Además si H_0 es verdadera, y si $\chi^2(\vec{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}$ es un valor particular de $\chi^2(\vec{X})$ deberíamos esperar valores de $\chi^2(\vec{x})$ "alrededor" de n (grados de libertad = valor esperado de $\chi^2(\vec{X})$).

Por lo anterior escogeremos una Región Crítica de la forma:
$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \chi^2(\vec{x}) \leq \chi^2_{\alpha/2} \vee \chi^2(\vec{x}) \geq \chi^2_{1-\alpha/2} \right\}$ donde los valores de $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ se obtienen de una tabla $\chi^2_{(n)}$ (ji-cuadrado con n grados de libertad) y son tales que:

$P(\chi^2_{(n)} \leq \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$ y $P(\chi^2_{(n)} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

Ejemplo:

Supongamos que los saldos promedio de las cuentas de cierto tipo de clientes en una institución financiera es de 15 millones de pesos ($15.000.000) con un coeficiente de variación de 0,08. Se ha adoptado una política para captar mayores clientes y la gerencia piensa entonces que, por tal motivo, que el promedio de saldos es el mismo pero la dispersión actual de los mismos pudo haber cambiado y, en consecuencia, el saldo promedio de las cuentas podría representar en forma inadecuada la situación general de los saldos de estos clientes.

Para resolver sobre este particular, se toma una muestra de saldos de 26 clientes obteniéndose los siguientes resultados (en millones de pesos):

$$\sum_{i=1}^{26} x_i = 385; \quad \sum_{i=1}^{26} x_i^2 = 6010,96$$

La hipótesis de que el CV = 0,08 se traduce en que $\sigma^2 = (CV \times \mu)^2 = (0,08 \times 15)^2 = 1,44$ En consecuencia el problema de dócima de hipótesis es equivalente a:

H_o: σ^2 = 1,44
H_1: $\sigma^2 \neq$ 1,44

Si se desea un nivel de significación de 10% (α = 0,1), en la tabla de la $\chi^2_{(26)}$ encontramos que:

$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0,05} = 15,4$ y $\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0,95} = 38,9$ En consecuencia la región crítica será:

$$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \chi^2(\vec{x}) \leq 15,4 \vee \chi^2(\vec{x}) \geq 38,9 \right\}$$

Calculamos ahora $\chi^2(\vec{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{26} (x_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{26} x_i^2 - 26 \times 15^2}{1,44} = \dfrac{6010,96 - 5850}{1,44} \approx 111,78$.

Claramente $\chi^2(\vec{x}) \in C$ por lo cual se rechaza H_o.

El riesgo está controlado por el nivel de significación (10%). Al parecer la media podría no representar bien a los saldos porque la varianza ha cambiado. Lo que se debería hacer entonces es tomar una **nueva** muestra y con ella estimar la nueva varianza. Luego calcular el coeficiente de variación para finalmente resolver si se continua o no se continua usando $15.000.000 como un buen resumen de los saldos.

b) Hipótesis unilateral

H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 > \sigma_o^2$

Manteniendo la misma notación que en el caso anterior:

$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \chi^2(\vec{x}) \geq \chi^2_{1-\alpha} \right\}$ donde ahora $P(\chi^2_{(n)} \leq \chi^2_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$

Ejemplo:

Si en el ejemplo inmediato anterior se sostiene que la dispersión es **por lo menos** la misma entonces

H_o: σ^2 = 1,44
H_1: σ^2 > 1,44

Si se mantiene el nivel de significación (10%) el valor de $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0,90}$ se busca en la tabla $\chi^2_{(26)}$ y se tiene $\chi^2_{0,90} = 35,6$

Entonces

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle|\chi^2(\vec{x})\geq 35,6\right\}$ y puesto que $\chi^2(\vec{x})\approx 111,78$ se tiene que $\chi^2(\vec{x})\in C$ y por lo tanto se rechaza H_0

c) Hipótesis unilateral

H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$

Manteniendo la misma notación que en el caso anterior:

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle|\chi^2(\vec{x})\leq \chi^2_\alpha\right\}$ donde ahora $P(\chi^2_{(n)}\leq \chi^2_\alpha)=\alpha$

Ejemplo:

Si en el ejemplo inmediato anterior se sostiene que la dispersión es **a lo más** la misma entonces

H_o: σ^2 = 1,44
H_1: σ^2 < 1,44

Si se mantiene el nivel de significación (10%) el valor de $\chi^2_\alpha=\chi^2_{0,10}$ se busca en la tabla $\chi^2_{(26)}$ y se tiene $\chi^2_{0,10}=17,3$

Entonces

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle|\chi^2(\vec{x})\leq 17,3\right\}$ y puesto que $\chi^2(\vec{x})\approx 111,78$ se tiene que $\chi^2(\vec{x})\notin C$ y por lo tanto se acepta H_0

Se nota que el valor estimado de la varianza mediante los resultados de la muestra es:

$\widehat{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{26}(x_i-\mu_0)^2}{26}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-26\times 15^2}{26}=6,19$ que resulta un valor bastante mayor que el de la hipótesis nula (1,44). Sin embargo dada la hipótesis alternativa, H_0 resulta ser la “menos mala”.

Además, como se acepta H_0, el control del error está dado por la Función e Potencia asociada a la Región Crítica considerada.

Para el cálculo de esta función de potencia se requiere calcular probabilidades de una distribución “ji-cuadrado no-central con n grados de libertad y ½nμ como parámetro de excentricidad”. El cálculo de esta Función de Potencia puede ser provisto por un estadístico profesional.

1.4. DÓCIMA SOBRE σ^2 SUPUESTO DESCONOCIDO μ

a) Hipótesis bilateral

H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_o^2$

Consideremos la variable aleatoria $\chi^2_{(n-1)}(\vec{X})=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}$ donde σ_0^2 es el valor de σ^2 bajo H_0 .

Si H_0 es cierta $\chi^2_{(n-1)}(\vec{X})\sim\chi^2_{(n-1)}$. Además si H_0 es verdadera, y si $\chi^2_{(n-1)}(\vec{x})=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sigma_0^2}$ es un valor particular de $\chi^2_{(n-1)}(\overrightarrow{X})$ deberíamos esperar valores de $\chi^2_{(n-1)}(\vec{x})$ "alrededor" de (n-1) (grados de libertad = valor esperado de $\chi^2(\overrightarrow{X})$).

Por lo anterior escogeremos una Región Crítica de la forma:

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n) \middle| \chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) \leq \chi^2_{\alpha/2} \vee \chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) \geq \chi^2_{1-\alpha/2}\right\}$ donde los valores de $\chi^2_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{1-\alpha/2}$ se obtienen de una tabla $\chi^2_{(n)}$ (ji-cuadrado con (n-1) grados de libertad) y son tales que:

$P(\chi^2{}_{(n-1)} \leq \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$ y $P(\chi^2{}_{(n-1)} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$ De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

Ejemplo:

Supongamos el mismo ejemplo de la institución financiera con un saldo promedio de las cuentas de clientes desconocido. Se ha adoptado una política para captar mayores clientes y, por experiencia en otras instituciones del ramo se sabe que la desviación estándar antes de implementar esta política es de 1,2. Piensa que la nueva política debería modificar esta desviación estándar.

Para resolver sobre este particular, se toma una muestra de saldos de 20 clientes obteniéndose los siguientes resultados (en millones de pesos):

$\sum_{i=1}^{26} x_i = 296; \quad \sum_{i=1}^{26} x_i^2 = 4423,55$

La hipótesis de que el DE = 1,2 se traduce en que $\sigma^2 = (DE)^2 = (1,2)^2 = 1,44$ En consecuencia el problema de dócima de hipótesis es equivalente a:

H_o: σ^2 = 1,44
H_1: $\sigma^2 \neq$ 1,44

Si se desea un nivel de significación de 5% (α = 0,05), en la tabla de la $\chi^2_{(19)}$ encontramos que:

$\chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0,025} = 8,91$ y $\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0,975} = 32,9$ En consecuencia la región crítica será:

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n) \middle| \chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) \leq 8,91 \vee \chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) \geq 32,9\right\}$

Calculamos ahora $\chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{20}(x_i - \overline{x})^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{26} x_i^2 - 20 \times 14,8^2}{1,44} = \dfrac{4423,55 - 4380,8}{1,44} \approx 29,69$.

Claramente $\chi^2(\vec{x}) \notin C$ por lo cual se acepta H_o.

El riesgo está controlado por la Función de Potencia la cual puede ser explicitada por un estadístico profesional.

b) Hipótesis unilateral

H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 > \sigma_o^2$

Manteniendo la misma notación que en el caso anterior:

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n) \middle| \chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) \geq \chi^2_{1-\alpha}\right\}$ donde ahora $P(\chi^2{}_{(n-1)} \leq \chi^2_{1-\alpha}) = 1-\alpha$

Ejemplo:

Si en el ejemplo inmediato anterior se sostiene que la dispersión es **por lo menos** la misma que la de antes de iniciar la nueva campaña. Entonces:

H_o: σ^2 = 1,44
H_1: σ^2 > 1,44

Si se cambia el nivel de significación para el 10%)el valor de $\chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{0,90}$ se busca en la tabla $\chi^2_{(19)}$ y se tiene $\chi^2_{0,95} = 27,2$

Entonces

$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \chi^2(\vec{x}) \geq 27,2 \right\}$ y puesto que $\chi^2(\vec{x}) \approx 29,69$ se tiene que $\chi^2(\vec{x}) \in C$ y por lo tanto se rechaza H_0 y el control del error inferencial está dado por el nivel se significación.

c) Hipótesis unilateral

H_o: $\sigma^2 = \sigma_o^2$
H_1: $\sigma^2 < \sigma_o^2$

Manteniendo la misma notación que en el caso anterior:

$C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \chi^2_{(n-1)}(\vec{x}) \leq \chi^2_{1-\alpha} \right\}$ donde ahora $P(\chi^2_{(n-1)} \leq \chi^2_{\alpha}) = \alpha$

Ejemplo:

Si en el ejemplo inmediato anterior se sostiene que la dispersión es **a lo más** la misma entonces

H_o: σ^2 = 1,44
H_1: σ^2 < 1,44

Si se mantiene el nivel de significación (10%) el valor de $\chi^2_{\alpha} = \chi^2_{0,10}$ se busca en la tabla $\chi^2_{(19)}$ y se tiene $\chi^2_{0,10} = 11,7$.

Entonces $C = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \chi^2(\vec{x}) \leq 11,7 \right\}$ y puesto que $\chi^2(\vec{x}) \approx 29,69$ se tiene que $\chi^2(\vec{x}) \notin C$ y por lo tanto se acepta H_0

En tal condición, el control del error está dado por la Función de Potencia asociada a la Región Crítica considerada. Para el cálculo de esta función de potencia se requiere nuevamente calcular probabilidades de una distribución “ji-cuadrado no-central con (n-1) grados de libertad y con parámetro de excentricidad ½nμ”.

1.5. DÓCIMAS PARA DOS POBLACIONES NORMALES: DIFERENCIA DE MEDIAS

En este acápite se consideran dos poblaciones normales $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ y sendas m. a. $X_1, X_2, ..., X_m$ y $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ de tamaño m y n respectivamente, independientes entre sí.

Además se recuerda el uso de las siguientes notaciones:

$$\overline{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i \ ; \ \overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2}{m-1} ; \ S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (Y_i - \overline{Y})^2}{n-1} ; \ S_{m,n}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}{m+n-2} = \frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}$$

y las letras minúsculas $\overline{x};\ \overline{y};\ s_1^2;\ s_2^2;\ s_{m,n}^2$ son los correspondientes valores de las v.a. $\overline{X};\ \overline{Y};\ S_1^2;\ S_2^2;\ S_{m.n}^2$ para un valor particular de la muestra $(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)$

Las dócima de hipótesis a considerar son:

H_o: μ_1-μ_2 = μ_o o bien **H_o: μ_1-μ_2 = μ_o** o bien **H_1: μ_1-μ_2 = μ_o**
H_1: μ_1-μ_2 ≠ μ_o **H_1: μ_1-μ_2 > μ_o** **H_1: μ_1-μ_2 < μ_o**

Este tipo de dócimas son utilizadas principalmente para resolver sobre si las medias de dos poblaciones normales son iguales o son distintas. En este caso, **μ_o = 0** y la dócima toma la forma:

H_o: μ_1-μ_2 = 0 o bien **H_o: μ_1-μ_2 = 0** o bien **H_1: μ_1-μ_2 = 0**
H_1: μ_1-μ_2 ≠ 0 **H_1: μ_1-μ_2 > 0** **H_1: μ_1-μ_2 < 0**

y se les llama: "dócimas sobre igualdad de medias"

1.5.1.DÓCIMAS DE DIFERENCIA DE MEDIAS SUPUESTO CONOCIDAS $\sigma_1^2\,(\sigma_{1o}^2)$ y $\sigma_2^2\,(\sigma_{2o}^2)$

Sabemos que $\overline{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_{1o}^2}{m})$ y $\overline{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_{2o}^2}{n})$ y $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ son v. a. independientes. Por lo tanto $\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)\sim N\left((\mu_1-\mu_2),\frac{\sigma_{1o}^2}{m}+\frac{\sigma_{2o}^2}{n}\right)$. En consecuencia, si H_0 es cierta, **μ_1-μ_2 = μ_o** y la variable aleatoria:

$$Z(\vec{X},\vec{Y})=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{1o}^2}{m}+\frac{\sigma_{2o}^2}{n}\right)}}$$ tiene distribución $Z\sim N(0,1)$.

Por lo tanto el problema es equivalente al tratado en 1.1 (página 1 de este capítulo) donde:

$\mu=\mu_1-\mu_2$; $\sigma_0^2=\frac{\sigma_{10}^2}{m}+\frac{\sigma_{20}^2}{n}$ y $Z(\vec{X})$ es ahora $Z(\vec{X},\vec{Y})$

En consecuencia si se considera la dócima bilateral, la Región Crítica será:

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| z(\vec{x},\vec{y})\le -z_{1-\alpha/2}\vee z(\vec{x},\vec{y})\ge z_{1-\alpha/2}\right\}$$ donde, $$z(\vec{x},\vec{y})=\frac{(\overline{x}-\overline{y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_{1o}^2}{m}+\frac{\sigma_{2o}^2}{n}\right)}}$$

y, dado un nivel de significación α ,el valor $z_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla N(0,1) y es tal que $P(Z\le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C)=\alpha$

De igual manera las Regiones Críticas unilaterales serán

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle|\ z(\vec{x},\vec{y})\ge z_{1-\alpha}\right\},\ P(Z\le z_{1-\alpha})=1-\alpha$$

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| z(\vec{x},\vec{y})\le z_{\alpha}\right\},\ P(Z\le z_{\alpha})=\alpha$$

Ejemplo:

Consideremos el ejemplo presentado en el capítulo sobre intervalos confidenciales respecto de las ventas a clientes en dos filiales A y B de una determinada empresa los que se supone que pueden ser aproximadas por una distribución Normal. Para el caso de la filial A las ventas pueden ser representadas por X ~ N(μ_1,8.100) y las ventas de la filial 2, por Y ~ N(μ_2,144).

Para conocer si ambas filiales tienen ventas promedio iguales, en la filial A se encuesta a 100 clientes obteniéndose un gasto medio de 215. A su vez una encuesta similar a 36 clientes de la filial B arroja un gasto medio de 195. Entonces:

H_o: μ_1-μ_2 = 0
H_1: μ_1-μ_2 ≠ 0

Si se determina un nivel de significación de 2% $z_{1-\alpha/2} = z_{0,99} = 2,33$ y en consecuencia

$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \middle| z(\vec{x},\vec{y})\leq -2,33 \vee z(\vec{x},\vec{y})\geq 2,33\right\}$. Por otra parte:

$z(\vec{x},\vec{y}) = \dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma^2_{1o}}{m}+\dfrac{\sigma^2_{2o}}{n}\right)}} = \dfrac{(215-195)-0}{\sqrt{\left(\dfrac{8.100}{100}+\dfrac{144}{36}\right)}} = 2,169$ Por lo tanto $(\vec{x},\vec{y}) \notin C$ se acepta H_0

y la Función de Potencia determina el control del error inferencial.

Si en cambio el nivel de significación es 5% $z_{1-\alpha/2} = z_{0,99} = 1,96$ y se rechaza H_0 y el error inferencial es el Error Tipo I y la probabilidad de cometer este error es 0,05.

Si en cambio se postula que las ventas de la filial A son **al menos iguales** (iguales o mayores) que las de la filial B, y se considera un nivel de significación de 10% las hipótesis serían:

H_o: μ_1-μ_2 = 0
H_1: μ_1-μ_2 > 0

La Región Crítica será: $C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \middle| z(\vec{x},\vec{y})\geq z_{1-\alpha}\right\}$ con $z_{1-\alpha} = z_{0,90} = 1,645$

y, dado que $z(\vec{x},\vec{y}) = 2,169$, se rechaza H_0 con una probabilidad de cometer error inferencial de 0,1.

1.5.2. DÓCIMAS DE DIFERENCIA DE MEDIAS CON VARIANZAS DESCONOCIDAS IGUALES

En este caso $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Sabemos que si $S^2_{m,n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{m+n-2}$ entonces

$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(1/m+1/n\right)S^2_{m,n}}}$ tiene distribución "t" con (m+n-2) grados de libertad. En consecuencia, si H_0

es verdadera, $t(\vec{X},\vec{Y}) = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\mu_0}{\sqrt{\left(1/m+1/n\right)S^2_{m,n}}} \sim t_{(m`n-2)}$ Para determinar la Región Crítica con un nivel de significación α, se procede en forma similar a la a la empleada en el punto 1.2 (página 6 de este Capítulo) es decir, para

H_1: μ_1-μ_2 = μ_o
H_2: μ_1-μ_2 ≠ μ_o

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| t(\vec{x},\vec{y})\leq -t_{1-\alpha/2} \vee t(\vec{x},\vec{y})\geq t_{1-\alpha/2}\right\}$$ donde, $$t(\vec{x},\vec{y})=\frac{(\bar{x}-\bar{y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)s^2_{m,m}}}$$

y, dado un nivel de significación α ,el valor $t_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla "t" con (m+n-2) grados de libertad y es tal que $P(t_{(m+n-2)} \leq t_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C)=\alpha$

Si en cambio

H_1: μ_1-μ_2 = μ_o

H_2: μ_1-μ_2 > μ_o

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| t(\vec{x},\vec{y})\geq t_{1-\alpha}\right\},\ P(t_{(m+n-2)} \leq t_{1-\alpha})=1-\alpha$$

Si las hipótesis son de la forma:

H_1: μ_1-μ_2 = μ_o

H_2: μ_1-μ_2 < μ_o

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| t(\vec{x},\vec{y})\leq t_{\alpha}\right\},\ P(t_{(m+n-2)} \leq t_{\alpha})=\alpha$$

Ejemplo:

Suponga nuevamente que las gastos de los clientes de una empresa tiene distribución normal dada por X~N(μ_1,σ^2). Mediante una encuesta a 50 clientes, una empresa obtiene la siguiente información:

Ventas Medias (50 clientes): 2.500; Cuasivarianza de la muestra $s_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{50}(x_i-\bar{x})^2}{49}=14.400$

Para incrementar los gastos de los clientes contrata una empresa de marketing quien diseña un nuevo plan de atención. Suponga que con el nuevo plan, los gastos de los clientes tendrá una distribución normal dada por Y ~N(μ_2,σ^2). Nótese que se supone que la varianza no cambia por la aplicación del plan. Al cabo de tres meses de aplicación del plan se toma una nueva muestra a 40 clientes con los resultados siguientes:

Ventas Medias: 2.550 (40 clientes); Cuasivarianza de la muestra $s_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{50}(x_i-\bar{x})^2}{39}=10000$

Se desea conocer, con un nivel de significación del 1%, si existe diferencia entre las ventas medias antes y después del plan. Entonces las hipótesis serán:

H_o: μ_1-μ_2 = 0 (no hay diferencia entre las ventas)

H_1: μ_1-μ_2 ≠ 0 (hay diferencia entre las ventas)

Las varianzas se suponen iguales aunque desconocidas y m = 50 y n = 40. Entonces $C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| t(\vec{x},\vec{y})\leq -t_{1-\alpha/2} \vee t(\vec{x},\vec{y})\geq t_{1-\alpha/2}\right\}$. Dado que los grados de libertad de la "t" son 88 (50+40-2) los valores de la Tabla en esta distribución pueden ser aproximados por una Z~N(0,1) y por lo tanto:

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})\middle| t(\vec{x},\vec{y})\leq -z_{0,995} \vee t(\vec{x},\vec{y})\geq z_{0,995}\right\}=\left\{(\vec{x},\vec{y})\middle| t(\vec{x},\vec{y})\leq -2,575 \vee t(\vec{x},\vec{y})\geq 2,575\right\}$$

Se debe calcular ahora el valor de $t(\vec{x},\vec{y})$ en la particular muestra obtenida. Para ello calculamos

$$s_{m,n}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{m+n-2} = \frac{49s_1^2 + 39s_2^2}{88} = \frac{705600 + 390000}{88} = 12450$$. Entonces

$t(\vec{x},\vec{y}) = \dfrac{(\overline{x}-\overline{y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)s_{m,m}^2}} = \dfrac{2500-2550}{\sqrt{\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{40}\right)\times 12.450}} \approx -2,112$. Entonces $t(\vec{x},\vec{y}) \notin C$ y por lo tanto se acepta H₀. Para controlar el error inferencial se debe calcular puntos de la Función de Potencia para lo cual es necesario el uso de la distribución "F no central", lo cual está fuera de los propósitos de estas notas.

Si, en cambio se sostiene que luego de aplicado el plan las ventas promedio son, al menos iguales que antes, las hipótesis serán:

H_o: μ_1-μ_2 = 0
H_1: μ_1-μ_2 < 0

En consecuencia la Región Crítica es $C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| t(\vec{x},\vec{y})\le t_\alpha\right\}$. Para un nivel de significación de 5%, los valores de la Tabla de la "t" con 88 grados de libertad pueden ser aproximados por una Z~N(0,1) y en consecuencia:

$C = \left\{(\vec{x},\vec{y})\middle| t(\vec{x},\vec{y}) \le -z_{0,95}\right\} = \left\{(\vec{x},\vec{y})\middle| t(\vec{x},\vec{y}) \le -1,645\right\}$. Puesto que $t(\vec{x},\vec{y}) = -2,112$ se tiene que $t(\vec{x},\vec{y}) \in C$ y por lo tanto se rechaza H_0 y el nivel de significación es precisamente la probabilidad de cometer el único error inferencial posible.

1.5.3. DÓCIMAS SOBRE DIFERENCIA DE MEDIAS CON VARIANZAS DESCONOCIDAS CUALESQUIERA

Por el capítulo 4 sabemos que $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m}+\frac{S_2^2}{n}}} \sim t_{(g)}$ donde los grados de libertad g es

$$g = ENT\left(\frac{\left(s_1^2/m + s_2^2/n\right)^2}{\left[\left(s_1^2/m\right)^2\Big/(m-1)\right] + \left[\left(s_2^2/n\right)^2\Big/(n-1)\right]}\right)$$

Para determinar la Región Crítica con un nivel de significación α, nuevamente se procede en forma similar a la a la empleada en el punto 1.2 (página 6 de este Capítulo) es decir, para

H_1: μ_1-μ_2 = μ_o
H_2: μ_1-μ_2 ≠ μ_o

$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| t(\vec{x}, \vec{y}) \leq -t_{1-\alpha/2} \vee t(\vec{x}, \vec{y}) \geq t_{1-\alpha/2} \right\}$ donde, $t(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}}}$ y,

dado un nivel de significación α ,el valor $t_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla "t" con g grados de libertad y es tal que $P(t_{(g)} \leq t_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

Si en cambio

H_1: μ_1-μ_2 = μ_o
H_2: μ_1-μ_2 > μ_o

$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| t(\vec{x}, \vec{y}) \geq t_{1-\alpha} \right\}$, $P(t_{(g)} \leq t_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$

Si las hipótesis son de la forma:

H_1: μ_1-μ_2 = μ_o
H_2: μ_1-μ_2 < μ_o

$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| t(\vec{x}, \vec{y}) \leq t_{\alpha} \right\}$, $P(t_{(g)} \leq t_{\alpha}) = \alpha$

Ejemplo:

Consideremos la muestra del ejemplo anterior y supongamos que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ entonces:

$$\bar{x} = 2.500;\ \bar{y} = 2.600;\ \frac{s_1^2}{m} = \frac{14.400}{50} = 280;\ \frac{s_2^2}{n} = \frac{10.000}{40} = 250;\ g = ENT\left[\frac{280 + 250}{280/49 + 250/39} \right] = ENT[43,713] = 43$$

Puesto que los grados de libertad de la distribución t son mayores que 30 esta distribución se puede aproximar por una Z ~ N(0,1).

Si se considera un nivel de significación de 10% y las hipótesis son:

H_o: μ_1-μ_2 = 0
H_1: μ_1-μ_2 ≠ 0

Entonces

$$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| t(\vec{x}, \vec{y}) \leq -z_{0,95} \vee t(\vec{x}, \vec{y}) \geq z_{0,95} \right\} = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) \middle| t(\vec{x}, \vec{y}) \leq -1,645 \vee t(\vec{x}, \vec{y}) \geq 1,645 \right\}$$

Calculando el valor de $t(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y}) - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}}} = \dfrac{2500 - 2550}{\sqrt{280 + 250}} \approx -2,172$ se tiene que $t(\vec{x}, \vec{y}) \in C$

y por lo tanto se rechaza H_0 con una probabilidad de cometer el error inferencial de 0,1.

Si en cambio se supone que las ventas con el nuevo plan son mayores o iguales que las anteriores las hipótesis serán:

H_o: μ_1-μ_2 = 0
H_1: μ_1-μ_2 < 0

En consecuencia la Región Crítica es: $C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| t(\vec{x}, \vec{y}) \leq t_{\alpha} \right\}$

Puesto que g es 43, el valor de t_α puede ser aproximado por una Z~N(0,1). La Región Crítica para un nivel de significación de 1% será

$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \mid t(\vec{x},\vec{y})\le z_{0,01}\right\}=\left\{(\vec{x},\vec{y}) \mid t(\vec{x},\vec{y})\le -2,33\right\}$. Dado que $t(\vec{x},\vec{y})=-2,172$ se tiene $t(\vec{x},\vec{y})\notin C$ y en consecuencia se acepta H_0. El control del error inferencial está dado por la Función de Potencia.

1.5.4. DÓCIMAS SOBRE IGUALDAD DE VARIANZAS CON MEDIAS CONOCIDAS $\mu_{1O};\mu_{2O}$

Consideremos la v.a. $\dfrac{\sigma_2^2\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_{1o})^2}{\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_{2o})^2}\sim F(m,n)$ que tiene distribución "F" con m grados de libertad en el numerador y n grados de libertad en el denominador.

Entonces, si H_0 es cierta $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ y $F(\vec{X},\vec{Y})=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_{1o})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_{2o})^2}\sim F(m,n)$

Para determinar la Región Crítica con un nivel de significación α, se procede de la siguiente manera según la forma de las hipótesis:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$
$$H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$$

$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \mid F(\vec{x},\vec{y})\le a \vee F(\vec{x},\vec{y})\ge b\right\}$ donde, $F(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_{1o})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_{2o})^2}$ y,

dado un nivel de significación α ,el valor $F_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla F(m,n) y es tal que $P(F(m,n)\le a)=\alpha/2$ $\quad P(F(m,n)\le b)=1-\alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C)=\alpha$

Si en cambio

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$
$$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$
$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \mid F(\vec{x},\vec{y})\ge b\right\};\ P(F(m,n)\le b)=1-\alpha$$

Si las hipótesis son de la forma:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$
$$H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$$
$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \mid F(\vec{x},\vec{y})\le a\right\};\ P(F(m,n)\le a)=\alpha$$

Ejemplo

Consideremos el ejemplo de las ventas a los clientes en dos filiales A y B de una empresa y supongamos que en ambas filiales estas ventas pueden ser aproximadas por distribuciones normales X~N(μ_1,σ_1^2) para la filial A y X~N(μ_2,σ_2^2) para la filial B con μ_1 = 2450 y μ_2 = 2500. Mediante una encuesta a 60 clientes, de la filial A se obtiene la siguiente información:

$$\sum_{i=1}^{60} x_1 = 62.500\,;\ \sum_{i=1}^{60} x_i^2 = 156.595.600$$

A su vez otra encuesta a 40 clientes de la filial B ofrece la información siguiente

$$\sum_{i=1}^{40} y_1 = 63.750\,;\ \sum_{i=1}^{60} y_i^2 = 162.802.500$$

Se desea conocer, con un nivel de significación del 10%, si existe diferencia entre las dispersiones de las ventas entre las respectivas filiales. Entonces las hipótesis serán:

H$_o$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (las dispersiones son iguales)
H$_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (las dispersiones son diferentes)

Entonces la Región Crítica es $C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \middle| F(\vec{x},\vec{y})\leq a \vee F(\vec{x},\vec{y})\geq b\right\}$. Como se desea un nivel de significación de 10% a y b se obtienen de una Tabla de F (Central) con 60 grados de libertad en el numerador y 40 grados de libertad en el denominador y son tales que $P(F(m.n) \leq a) = 0,05 \quad P(F(m.n) \leq b) = 0,95$ y por lo tanto

$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n) \middle| F(\vec{x},\vec{y})\leq 0,062763 \vee F(\vec{x},\vec{y})\geq 1,6373\right\}$. Para los valores en la muestra:

$$F(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu_{1o})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_{2o})^2} = \frac{156.595.600 - 60\times 2.450^2}{162.802.500 - 40\times 2.500^2} = 2,334$$

Como $F(\vec{x},\vec{y}) \in C$ se rechaza H$_0$ con u n nivel de significación de 10%

1.5.5. DÓCIMAS SOBRE IGUALDAD DE VARIANZAS CON MEDIAS DESCONOCIDAS

Consideremos ahora la v.a. $F(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = \dfrac{\sigma_2^2\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_1^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2} \sim F(m-1,n-1)$ que tiene distribución "F" con (m-1) grados de libertad en el numerador y (n-1) grados de libertad en el denominador.

Entonces, si H$_0$ es cierta $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y $F(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2} \sim F(m-1,n-1)$

Para determinar la Región Crítica con un nivel de significación α, se procede de la siguiente manera según la forma de las hipótesis:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| F(\vec{x}, \vec{y}) \leq a \vee F(\vec{x}, \vec{y}) \geq b \right\}$ donde, $F(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$ y, dado un nivel de significación α ,el valor $F_{1-\alpha/2}$ se obtiene de una tabla F(m-1,n-1) y es tal que $P(F(m-1, n-1) \leq a) = \alpha/2 \quad P(F(m-1, n-1) \leq b) = 1 - \alpha/2$. De esta forma $P_{H_0}(C) = \alpha$

Si en cambio

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| F(\vec{x}, \vec{y}) \geq b \right\}$; $P(F(m-1, n-1) \leq b) = 1 - \alpha$

Si las hipótesis son de la forma:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

$C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| F(\vec{x}, \vec{y}) \leq a \right\}$; $P(F(m-1, n-1) \leq a) = \alpha$

Ejemplo

Consideremos el ejemplo anterior de las ventas a los clientes en dos filiales A y B de una empresa y supongamos que en ambas filiales estas ventas pueden ser aproximadas por distribuciones normales $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ para la filial A y $X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ para la filial B donde se desconoce μ_1 y μ_2. Mediante una encuesta a 60 clientes, de la filial A se obtiene la siguiente información:

Ventas Medias (50 clientes): 2.500; Cuasivarianza de la muestra $s_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2}{59} = 14.400$

A su vez otra encuesta a 40 clientes de la filial B ofrece la información siguiente

Ventas Medias: 2.550 (40 clientes); Cuasivarianza de la muestra $s_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{40} (x_i - \bar{x})^2}{39} = 10000$

Se desea conocer, con un nivel de significación del 1%, si existe diferencia entre las dispersiones de las ventas entre las respectivas filiales. Entonces las hipótesis serán:

H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (las dispersiones son iguales)
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (las dispersiones son diferentes)

Entonces la Región Crítica es $C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \middle| F(\vec{x}, \vec{y}) \leq a \vee F(\vec{x}, \vec{y}) \geq b \right\}$. Como se desea un nivel de significación de 1% a y b se obtienen de una Tabla de F (Central) con 60 grados de libertad en el numerador y 40 grados de libertad en el denominador y son tales que $P(F(m.n) \leq a) = 0,05 \quad P(F(m.n) \leq b) = 0,95$ y por lo tanto

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle| F(\vec{x},\vec{y})\leq 0{,}048102 \vee F(\vec{x},\vec{y})\geq 2{,}1838\right\}$$

Para los valores en la muestra $F(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}=\dfrac{59\times 14.400}{39\times 10.000}=2{,}178$. Por lo tanto $F(\vec{x},\vec{y})\notin C$ y en consecuencia el error inferencial estará controlado por la Función de Potencia de esta dócima la cual se calcula mediante una distribución F no central.

1.6.

1.7.

2. DÓCIMAS PARA MUESTRAS “GRANDES”

Estas dócimas están basadas en una variable aleatoria (función de la muestra aleatoria) cuya distribución puede ser aproximada por una normal mediante la aplicación del Teorema Central del Límite. De allí la condición de que el tamaño de muestra sea “grande”

2.1. DÓCIMA SOBRE p EN UNA BERNOULLI

Sea $X\sim b(1,p)$ y una muestra aleatoria $\vec{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ proveniente de la población X. Supongamos que n es “grande”. En la práctica se considera n “grande” si min{np, n(1-p)} > 5

En tales condiciones, por el Teorema Central del Límite, la distribución de $\overline{X}$ puede ser aproximada por una normal con media p y varianza p(1-p)/n, vales decir: $\overline{X}\sim N\left(p,\dfrac{p(1-p)}{n}\right)$

Entonces la dócima de hipótesis bilateral:

H_o: p = p_o
H_1: p ≠ p_o

Puede ser resuelta como en el caso:
H_o: μ = μ_o
H_1: μ ≠ μ_o
donde si H_0 es cierta $\mu_0=p_0$ y $\sigma^2=p_0(1-p_0)$. Si $\min\{np_0,n(1-p_0)\}>5$ se tiene que

$Z(\vec{X})=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sqrt{\sigma^2}}=\dfrac{\sqrt{n(n-1)}\left(\overline{X}-p_0\right)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$ es aproximada por $Z\sim N(0,1)$. En tal caso, la Región Crítica será:

$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle| z(\vec{x})\leq -z_{1-\alpha/2} \vee z(\vec{x})\geq z_{1-\alpha/2}\right\}$ donde $P(Z\leq z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$

Para las dócimas unilaterales se procede en forma similar y su desarrollo se deja como ejercicio.

Ejemplo:

La proporción de artículos defectuosos (no cumplen las especificaciones) en una industria es 1,5%. Se ofrece un nuevo sistema de procesamiento que se supone más confiable. Una demostración de este nuevo sistema muestra que en 5000 artículos producidos 60 de ello fueron defectuosos. ¿Es conveniente adoptar el nuevo sistema?

En términos de dócima de hipótesis el problema se formula de la siguiente manera:

H_0: p = 0,015 (no es conveniente adoptar el nuevo sistema)
H_1: p < 0,015 (es conveniente adoptar el nuevo sistema)

Además $\min\left\{5000\times 0,015\,, 5000\times 0,985\right\} = 75 > 5$ por lo tanto el problema se resuelve como en el caso 1.1 donde, si H_0 es cierta:

$\overline{X} \sim N\left(0,015,\dfrac{0,015\times 0,985}{5000}\right) = N\left(0,015, 0,000002955\right)$ y $Z(\overline{X}) = \dfrac{\overline{X} - 0,015}{\sqrt{0,000002955}}$

Entonces, si se desea un nivel de significación de 2% la Región Crítica será

$$C=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle| z(\vec{x})\le z_{0,02}\right\}=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,....,x_n)\middle| z(\vec{x})\le -2,055\right\}$$

Calculando $z(\vec{x}) = \dfrac{\overline{x} - 0,015}{\sqrt{0,000002955}} = \dfrac{60/5000 - 0,015}{0,001719} = -1,7452$. Por lo tanto $z(\vec{x}) \notin C$ y en consecuencia se acepta H_0 por lo cual el error inferencial está controlado por la Función de Potencia.

Se deja como ejercicio comprobar que si el nivel de significación es 5% entonces se rechaza H_0 en cuyo caso el error inferencial esta controlado por el nivel de significación.

2.2. DÓCIMA SOBRE DIFERENCIAS DE p_1 Y p_2 EN DOS POBLACIONES DE BERNOULLI

Sean X~b(1,p_1) y Y~b(1,p_2) y sean X_1, X_2, …X_m y Y_1, Y_2, …Y_n muestras aleatorias provenientes de X e Y respectivamente

Entonces, si $\text{Min}\ \left\{\text{mp}_1,\ \text{m(1-p}_1\text{)},\ \text{np}_2,\ \text{n(1-p}_2\text{)}\right\}\ \ge\ 5$ sabemos que:

$\overline{X} \sim N\left(p_1, \dfrac{p_1(1-p_1)}{m}\right)$ y $\overline{Y} \sim N\left(p_2, \dfrac{p_2(1-p_2)}{n}\right)$ respectivamente y, por lo tanto $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(p_1 - p_2, \dfrac{p_1(1-p_1)}{m} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$. En consecuencia la variable aleatoria

$t(\overline{X},\overline{Y}) = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{m}+\dfrac{S_2^2}{n}}} = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(p_1-p_2)}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{m}+\dfrac{\overline{Y}(1-\overline{Y})}{n}}} \sim t_{(g)}$ Puesto que g generalmente es mayor que 30 $t(\vec{X},\vec{Y})$ se aproxima por una $Z \sim N(0,1)$

En consecuencia, en tales condiciones, las dócimas de hipótesis:

H_0: $p_1 - p_2 = p_0$	**o bien**	**H_0: $p_1 - p_2 = p_0$**	**o bien**	**H_0: $p_1 - p_2 = p_0$**
H_1: $p_1 - p_2 \ne p_0$		**H_0: $p_1 - p_2 = p_0$**		**H_0: $p_1 - p_2 = p_0$**

se resuelven como en el caso de diferencias de medias de normales con varianzas desconocidas. Es decir dado un α, se consideran, según el caso, las Regiones Críticas:

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle|t(\vec{x},\vec{y})\le -z_{1-\alpha/2}\vee t(\vec{x},\vec{y})\ge z_{1-\alpha/2}\right\},\ P(Z\le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$$

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle|\ t(\vec{x},\vec{y})\ge z_{1-\alpha}\right\},\ P(Z\le z_{1-\alpha})=1-\alpha$$

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle|t(\vec{x},\vec{y})\le z_{\alpha}\right\},\ P(Z\le z_{\alpha})=\alpha$$

donde $t(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\bar{x}(1-\bar{x})}{m}+\dfrac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n}\right)}}$

Ejemplo

En una encuesta a 200 clientes se tiene que 15 no están satisfechos con el servicio. Se decide aplicar medidas tendientes a disminuir el nivel de clientes insatisfechos y luego de implementar tales medidas se vuelve a tomar una muestra a 100 clientes y se encuentra que 5 clientes no están satisfechos con el servicio. ¿Las medidas adoptadas han sido exitosas?

Si $X\sim b(1,p_1)$ representa la satisfacción (X = 0) o no satisfacción (X = 1)de un cliente antes de adoptar las medidas y $Y\sim b(1,p_2)$ representa su satisfacción o insatisfacción después de implementar dichas medidas, el problema se puede plantear mediante la siguiente dócima de hipótesis:

H_0: $p_1 - p_2 = 0_0$ (las medidas no han tenido efecto)
H_1: $p_1 - p_2 > 0$ (las medidas han tenido efecto positivo)

Si se desea un nivel de significación de 5% la Región Crítica será:

$$C=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle|t(\vec{x},\vec{y})\ge z_{0,95}\right\}=\left\{(\vec{x},\vec{y})=(x_1,x_2,....,x_n;y_1,y_2,....,y_n)\middle|t(\vec{x},\vec{y})\ge 1,96\right\}$$

Puesto que $\bar{x}=\dfrac{15}{200}=0,075$ y $\bar{y}=\dfrac{5}{100}=0,05$ se tiene que:

$t(\vec{x},\vec{y})=\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-\mu_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\bar{x}(1-\bar{x})}{m}+\dfrac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n}\right)}}=\dfrac{0,075-0,06}{\sqrt{\left(\dfrac{0,075\times 0,925}{200}+\dfrac{0,05\times 0,95}{100}\right)}}=0,872$ por lo tanto

$t(\vec{x},\vec{y})\notin C$ y en consecuencia se acepta H_0. El usuario debería conocer la Función de Potencia para evaluar las probabilidades de cometer el error inferencial (Error Tipo II).

Nota: Si $p_0 = 0$ entonces, si H_0 es cierta $p_0(1-p_0) = p_1(1-p_1)$ y la dócima de hipótesis se basaría en

la v.a. $t(\vec{X},\vec{Y})=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-p_0}{\sqrt{\left(1/m+1/n\right)\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{m+n-2}}}=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\left(1/m+1/n\right)\dfrac{m\bar{X}(1-\bar{X})+n\bar{Y}(1-\bar{Y})}{m+n-2}}}\sim t_{(m+n-2)}$

DÓCIMAS O TEST DE HIPÓTESIS NO-PARAMÉTRICAS

Hasta ahora hemos visto dócimas o test de hipótesis referidas a parámetros de distribuciones de probabilidad. A continuación presentaremos dócimas referidas a propiedades de distribuciones de probabilidad que no están vinculadas a parámetros de las mismas.

3. DÓCIMAS DE BONDAD DE AJUSTE

Estas dócimas sirven para establecer si un conjunto de observaciones (muestra) proviene o no proviene de una población dada mediante una particular variable aleatoria. La dócima que se presenta en estas notas es la llamada "Dócima de Pearson" [3].

Ejemplo de tales dócimas son los supuestos que hemos formulado respecto de que, por ejemplo, el número de pedidos diarios en una empresa de entrega a domicilio tiene una distribución de Poisson (X). Para aceptar tales supuestos, previamente deberíamos responder a la pregunta ¿los datos observados se **ajustan** a una Poisson?

Sean $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria de n observaciones provenientes de una variable aleatoria desconocida y sea X una variable aleatoria dada. La dócima de hipótesis de bondad de ajuste está definida por las siguientes hipótesis:

H_0: Las observaciones provienen de la población X
H_1: Las observaciones no provienen de X

Sea $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots \mathcal{P}_k\}$ una partición de los valores de la v. a. X. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ es un valor particular de la muestra aleatoria $\overrightarrow{X}$, sea O_i a **frecuencia observada** de $\mathcal{P}_i$, es decir, el número de los valores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ que pertenecen a $\mathcal{P}_i$ $(\sum_{i=1}^{k} O_i = n)$.

Sea $p_i = P_X\left(x \in \mathcal{P}_i\right)$ $i = 1, 2, ..., k$ y sea $E_i = np_i$ la **frecuencia esperada** de $\mathcal{P}_i$ si las observaciones provienen de una población dada por la particular variable aleatoria X.

Consideremos la variable aleatoria $\chi^2(\overrightarrow{X}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ Entonces se H_0 es verdadera, se tiene que $\chi^2(\overrightarrow{X}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{(k-1)}$. Además si H_0 es cierta y $\vec{x}$ es un valor particular de $\overrightarrow{X}$ se espera $\chi^2(\vec{x})$ tome valores "pequeños".

En consecuencia, dado un nivel de significación α, la Región Crítica será de la forma:

$C = \left\{ \vec{x} \mid \chi^2(\vec{x}) \geq b \right\}$ donde b es tal que $P\left(\chi^2_{(k-1)} \leq b\right) = 1 - \alpha$

Ejemplo:

Las ventas semanales de una empresa se suponen que tienen una distribución $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Se toma una muestra de 100 semana de las ventas de esta empresa y se obtiene la siguiente información (en millones de pesos):

---

[3] Se usa principalmente para variables aleatorias discretas. Para variables aleatorias continuas existen otras dócimas con mejor comportamiento (a igual nivel de significación, mejor Función de Potencia).

Ventas medias en la muestra: 45;   Cuasivarianza en la muestra: 256

Distribución de Frecuencia:

Ventas	Frecuencias
Menos de 10	1
10 – 20	5
20 – 30	14
30 – 40	18
40 – 50	24
50 – 60	19
60 – 70	13
70 – 80	5
80 o más	2
	100

Por otra parte si H_0 es cierta, la media y la cuasivarianza de la muestra son estimadores de μ y σ^2 respectivamente. En consecuencia dado que $\widehat{\mu} = 45$ y $\widehat{\sigma^2} = 256$ si H_0 es verdadera supondremos que $X \sim N(45, 256)$. Usando la tabla de la normal se tienen las siguientes probabilidades para los respectivos 9 elementos de la partición de los valores de X:

Ventas	Prob(a<X<b)	$E_i = np_i$
Menos de 10	0,0146	1,46
10 – 20	0,0448	4,48
20 – 30	0,1168	11,68
30 – 40	0,2021	20,21
40 – 50	0,2434	24,34
50 – 60	0,2021	20,21
60 – 70	0,1168	11,68
70 – 80	0,0448	4,48
80 o más	0,0146	1,46

Entonces dado que la partición tiene 9 elementos (k = 9) si se desea un nivel de significación del 10% la Región Crítica será: $C = \left\{\vec{x} \mid \chi^2(\vec{x}) \geq 13,4\right\}$ puesto que $P\left(\chi^2_{(k-1)} \leq 13,4\right) = 0,99$

Por otra parte, $\chi^2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(1-1,46)^2}{1,46} + \frac{(5-4,48)^2}{4,48} + \frac{(14-11,68)^2}{11,68} + \ldots + \frac{(5-4,48)^2}{4,48} + \frac{(2-1,46)^2}{1,46} \simeq 1,3942$

y por lo tanto $\chi^2(\vec{x}) \notin C$ por lo que se acepta H_0 es decir, se acepta la hipótesis de normalidad para la distribución de las ventas semanales. El usuario debería solicitar la Función de Potencia de esta dócima para conocer las probabilidades de cometer el error inferencial (Tipo II).

4. DÓCIMAS DE INDEPENDENCIA O TABLAS DE CONTINGENCIA

Estas dócimas de hipótesis constituyen en realidad un caso particular de las dócimas de ajuste y se presentan cuando se considera una distribución conjunta bivariada para categorías vinculadas a dos variables y se desea estudiar si estas variables categóricas presentan alguna relación entres sí o tienen comportamientos independientes. Veamos algunos ejemplos

¿Fumar produce cáncer?

Sea X una variable dicotómica con valores “fuma”; “no fuma” y sea Y otra variable dicotómica con valores “padece cáncer”; “no padece cáncer”. Resolver sobre la independencia entre X e Y nos permitirá responder a la anterior pregunta.

¿Las horas de Estudio influyen en los rendimientos académicos?

Sea X una variable definida mediante las siguientes categorías (o grupos) de horas de estudio semanales: (0 a 4): (4 a 8); (8 a 12); (12 a 20); (20 o más).

Sea Y una variable definida mediante las siguientes categorías (o grupos) de notas promedio en cada ronda de evaluaciones: (0 a 3): (3 a 4); (4 a 5); (5 a 6); (6 a 7). Si resolvemos respecto de la independencia o dependencia entre X e Y podemos dar respuesta a la última pregunta.

La preferencia por un producto ¿depende del sector socioeconómico?

Sea X una variable definida mediante las siguientes categorías (o grupos) correspondientes a sectores socio-económicos: A, B; C.
Sea Y una variable definida mediante las siguientes categorías (o grupos) de apreciación del producto: Malo, Bueno, Muy bueno. La independencia o dependencia entre X e Y nos permitirá opinar sobre esta última interrogante.

En términos generales consideremos una variable X con k_1 categorías o grupos de clasificación y una variable Y con k_2 categorías y sea p_{ij} la probabilidad de que una unidad pertenezca **simultáneamente** a la categoría “i” de la variable X y a la categoría “j” de la variable Y
La situación se muestra en la siguiente tabla:

	Variable Y						
Variable X	Categoría 1	Categoría 2		Categoría j		Categoría k_2	
Categoría 1	p_{11}	p_{12}	• • •	p_{1j}	• • •	p_{1k_2}	$\mathbf{p_{1\bullet}}$
Categoría 2	p_{21}	p_{22}	• • •	p_{2j}	• • •	p_{1k_2}	$\mathbf{p_{2\bullet}}$
	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	
Categoría i	p_{i1}	p_{i2}	• • •	p_{ij}	• • •	p_{ik_2}	$\mathbf{p_{i\bullet}}$
	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	
Categoría k_1	$p_{k_1 1}$	$p_{k_1 2}$	• • •	$p_{k_1 j}$	• • •	$p_{k_1 k_2}$	$\mathbf{p_{k_1\bullet}}$
	$\mathbf{p_{\bullet 1}}$	$\mathbf{p_{\bullet 2}}$	• • •	$\mathbf{p_{\bullet j}}$	• • •	$\mathbf{p_{\bullet k_2}}$	

Suma sobre columnas o Probabilidad Marginal de X

Suma sobre filas o Probabilidad Marginal de Y

Una muestra aleatoria de n observaciones de la distribución conjunta de X, e Y se puede expresar mediante la siguiente distribución bivariada de frecuencia:

Variable X	Variable Y						
	Categoría 1	Categoría 2		Categoría j		Categoría k_2	
Categoría 1	n_{11}	n_{12}	• • •	n_{1j}	• • •	n_{1k_2}	$n_{1\bullet}$
Categoría 2	n_{21}	n_{22}	• • •	n_{2j}	• • •	n_{1k_2}	$n_{2\bullet}$
	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	
Categoría i	n_{i1}	n_{i2}	• • •	n_{ij}	• • •	n_{ik_2}	$n_{i\bullet}$
	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	• • •	
Categoría k_1	$n_{k_1 1}$	$n_{k_1 2}$	• • •	$n_{k_1 j}$	• • •	$n_{k_1 k_2}$	$n_{k_1\bullet}$
	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	• • •	$n_{\bullet j}$	• • •	$n_{\bullet k_2}$	n

Suma sobre columnas o Distribución Marginal de Frecuencia de X

Suma sobre filas o Distribución Marginal de Frecuncia de Y

Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $p_{ij} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j} \quad \forall\, i = 1, 2, ..., k_1 \ \wedge \ j = 1, 2, ..., k$.

Puesto que $\widehat{p_{ij}} = \dfrac{n_{ij}}{n}$; $\widehat{p_{i\bullet}} = \dfrac{n_{i\bullet}}{n}$; $\widehat{p_{\bullet j}} = \dfrac{n_{\bullet j}}{n}$, si X e Y son independientes se espera que $\dfrac{n_{ij}}{n} \simeq \dfrac{n_{i\bullet}}{n} \times \dfrac{n_{\bullet j}}{n}$

Entonces, $n_{ij}^{e} = \dfrac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n}$ es una estimación del valor esperado de la celda (i, j) cuando X, Y, son independientes. Si denotamos por $\vec{n} = (n_{11}, n_{12}, ..., n_{1k_2}, n_{21}, n_{21}, ..., n_{2k_2}, ..., n_{k_1 1}, n_{k_1 2}, ..., n_{k_1 k_2})$ (vector de frecuencias bivariadas) la variable aleatoria:

$\chi^2(\vec{n}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \frac{(n_{ij} - n_{ij}^{e})^2}{n_{ij}^{e}} \sim \chi^2_{(k_1-1)\times(k_2-1)}$ es una “ji – cuadrado” con (k_1-1)(k_2-1) grados de libertad.

Si se consideran las hipótesis:

H_0: Hay independencia entre X e Y
H_1: No hay independencia entre X e Y (existe dependencia)

Si H_0 es cierta, se espera que $\chi^2(\vec{n})$ tome valores “pequeños” por lo que, dado un nivel se significación α, la Región Crítica será de la forma:

$C = \left\{ \vec{n} \mid \chi^2(\vec{n}) \geq b \right\}$ donde b es tal que $P\left(\chi^2_{(k_1-1)\times(k_2-1)} \leq b \right) = 1 - \alpha$

Ejemplos:

Una encuesta para estudio de mercado a 1600 consumidores presenta la siguiente tabla de frecuencia bivariada para las variables “Sector Socio-Económico (SSE)” y “Grado de Apreciación” de un producto

TABLA DE VALORES OBSERVADOS

SSE	Apreciación			
	Mala	Buena	Muy Buena	
A	140	100	45	**285**
B	50	225	350	**625**
C	15	175	500	**690**
	205	**599**	**895**	**1.600**

Para calcular cada uno de los 9 $n_{ij}^{e} = \frac{n_{i\bullet} \times n_{\bullet j}}{n}$. Por ejemplo, $n_{23}^{e} = \frac{625 \times 895}{1600} = 349,61$ La tabla siguiente presenta los nueve n_{ij}^{e}

TABLA DE VALORES ESPERADOS

	APRECIACIÓN		
SSE	Mala	Buena	Muy Buena
A	36,52	106,70	159,42
B	80,08	233,98	349,61
C	88,41	258,32	385,97

Si se desea un nivel de significación de 5% entonces la Región Crítica será: $C = \left\{ \vec{n} \mid \chi^2(\vec{n}) \geq 9,49 \right\}$ puesto que, de la Tabla de la ji-cuadrado con 4 grados de libertad se tiene $P\left(\chi_{(4)}^2 \leq 9,49\right) = 0,95$.

Calculamos $\chi^2(\vec{n}) = \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2} \frac{\left(n_{ij} - n_{ij}^{e}\right)^2}{n_{ij}^{e}} = \frac{(140-36,52)^2}{36,52} + \frac{(100-106,70)^2}{106,70} + \cdots + \frac{(100-106,70)^2}{106,70} = 521,46$

Puesto que $\chi^2(\vec{n}) \in C$ se rechaza H_0 (existe dependencia entra X e Y) con una probabilidad de cometer error inferencial de 0,05 (nivel de significación).