Resumen KKT

Sea $P)$ un problema no lineal con restricciones de igualdad y desigualdad:

$$
\begin{array}{lll}
P) & \min & f(x) \\
& \text{s.a.} & g(x) \leq a \\
& & h(x) = b
\end{array}
$$

Este problema se puede transformar a un problema irrestricto de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{lll}
P) & \min & f(x) \\
& \text{s.a.} & g(x) \leq a \\
& & h(x) = b
\end{array}
\quad \sim \quad \min \quad \mathcal{L}(x,\mu,\lambda) = f(x) + \mu(g(x)-a) + \lambda(h(x)-b)
$$

Regularidad y Singularidad

Lagrange y KKT solo encuentran puntos críticos regulares, no singulares. Para encontrar los puntos singulares hay que buscar puntos en los que el Jacobiano no es de rango completo.

Nota: Al resolver problemas se deben buscar puntos regulares con condiciones KKT y aparte puntos singulares analizando la matriz Jacobiana. El mejor valor en la función objetivo es el óptimo.

Matriz Jacobiana

$$
J(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_i(x) \end{pmatrix}
$$

Suficiencia

Supongamos que el problema $P)$ es convexo. Si x^* factible es un punto que satisface las condiciones de KKT (es regular), ese punto es mínimo global del problema.

Para que un punto crítico sea óptimo, se tienen que cumplir las condiciones de Lagrange y KKT:

Lagrange

(1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$

(2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$

(3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \leq 0$

(4) $\mu \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0$

(5) $\mu \geq 0$

Si, además, hay naturaleza de variables ($x \geq 0$), entonces se cambia esta restricción a una de $\leq$:

$$-x \leq 0$$

y se trabaja como una restricción más de desigualdad: $g(x) = -x \leq 0$

Problema 1

Considere el problema:

$$
\begin{array}{llll}
P) & \text{mín} & (x-12)^2 + (y+6)^2 + 10 & \\
& s.a. & 2x^2 + 6x + 2y^2 - 9y \leq 13 & \to \mu_1 \\
& & (x-9)^2 + y^2 \leq 64 & \to \mu_2 \\
& & 8x + 4y = 20 &
\end{array}
$$

a) Escriba las condiciones de KKT.

b) Verifique si el punto $(\overline{x}, \overline{y}) = (2, 1)$ cumple las condiciones de KKT.

c) ¿El punto $(\overline{x}, \overline{y})$ es óptimo?

$$\mathcal{L}(x) = (x-12)^2 + (y+6)^2 + 10 + \lambda(8x + 4y - 20) + \mu_1(2x^2 + 6x + 2y^2 - 9y - 13) + \mu_2((x-9)^2 + y^2 - 64)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dy} = 2(x-12) + 8\lambda + \mu_1 \cdot 4x + 6\mu_1 + 2\mu_2(x-9)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dy} = 2(y+6) + 4\lambda$$

$$
\begin{array}{rclcl}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = & 2(\overset{2}{x}-12) + 4\mu_1 x + 6\mu_1 + 2\mu_2(x-9) + 8\lambda & = & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = & 2(y+6) + 4\mu_1 y - 9\mu_1 + 2\mu_2 \overset{1}{y} + 4\lambda & = & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & 2x^2 + 6x + 2y^2 - 9y - 13 & \leq & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & (x-9)^2 + y^2 - 64 & \leq & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = & 8x + 4y - 20 & = & 0 \\
\mu_1 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & \mu_1(2x^2 + 6x + 2y^2 - 9y - 13) & = & 0 \\
\mu_2 \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & \mu_2((x-9)^2 + y^2 - 64) & = & 0 \\
& & \mu_1, \mu_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Verifique si el punto $(\overline{x}, \overline{y}) = (2, 1)$ cumple las condiciones de KKT.

$$
\begin{array}{rclcl}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = & -20 + 14\mu_1 - \cancel{14\mu_2} + 8\lambda & = & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = & 14 - 5\mu_1 + \cancel{2\mu_2} + 4\lambda & = & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} & = & 0 & \leq & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} & = & -14 & \leq & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = & 0 & = & 0
\end{array}
$$

$\mu_2 = 0$

$\mu_2 = 0$

$-20 + 14\mu_1 + 8\lambda = 0$

$-28 + 10\mu_1 - 8\lambda = 0$

$24\mu_1 = 48$

$\mu_1 = 2 \geq 0$

se cumple KKT

Solución 1.b

→ Polinomios convexos

→ 1era restricción

→ funciones típicas convexas.

Con las siguientes ecuaciones:

$$\mu_2 \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} = \mu_2(-14) = 0 \longrightarrow \mu_2 = 0$$

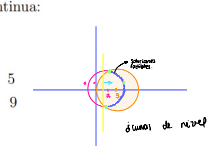
$$
\left.
\begin{array}{rclcl}
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = & -20 + 14\mu_1 - 14\mu_2 + 8\lambda & = & 0 \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = & 14 - 5\mu_1 + 2\mu_2 + 4\lambda & = & 0
\end{array}
\right\}
\quad
\begin{array}{l}
\mu_1 = 4 \\
\lambda = -1
\end{array}
$$

Por lo tanto, sí se cumplen las condiciones de KKT.

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización no lineal continua:

$$
\begin{array}{llll}
P) & \text{mín} & x_1 & \\
& s.a. & (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 & = 5 \\
& & (x_1-3)^2 + x_2^2 & \leq 9
\end{array}
$$



a) Muestre que el problema P admite solución óptima.

b) Grafique el problema P, indicando claramente cuál es el espacio de soluciones factibles y las curvas de nivel de la función objetivo.

c) Indique sobre el gráfico cuáles son los puntos críticos (singulares o que cumplen condiciones necesarias de primer orden) en este problema.

d) Verifique que efectivamente los puntos regulares indicados en (c) cumplen las condiciones de KKT.

e) Indique toda solución óptima del problema.

Bolzano Weirtrass

1) No vacío → (0,0) 5=5 9+0≤9

2) cerrado por ≤ y =

3) Acotado

4) F.O. continua

2) F.O continua → También se cumple, es más, la F.O es lineal.

3) Cerrado → Todas las restricciones son de igualdad o desigualdad, por lo tanto, es un espacio cerrado.

4) Acotado → Notamos que ambas restricciones son circunferencias, donde una considera solo el borde y otra el borde y su interior, por lo que todos los puntos dentro del dominio están acotados.

$$
\begin{array}{llll}
P) & \text{mín} & x_1 & \\
& s.a. & (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 & = 5 \\
& & (x_1-3)^2 + x_2^2 & \leq 9
\end{array}
$$

c) Indique sobre el gráfico cuáles son los puntos críticos (singulares o que cumplen condiciones necesarias de primer orden) en este problema.

Para poder ver esto, debemos revisar los puntos que están en la misma dirección de descenso y los puntos extremos.

Misma dirección de descenso

Tenemos que:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-1) \end{pmatrix}, \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Con el gráfico podemos notar que el único punto "no extremo" esta donde la dirección de descenso se intersecta con la primera restricción, entonces:

$$\nabla f(x) = \nabla h(x)$$

Con el gráfico podemos notar que el único punto "no extremo" esta donde la dirección de descenso se intersecta con la primera restricción, entonces:

$$\nabla f(x) = \nabla h(x)$$

$\nabla f(x) = \nabla h(x)$

$\nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) + \mu \nabla g(x)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-2) \end{pmatrix}$$

$$2(x_1-2) = 1 \to x_1 = \sqrt{5}+2$$

$$2(x_2-2) = 1 \to x_2 = 1$$

Por lo tanto, el punto $(\sqrt{5}+2, 1)$ es crítico

Puntos extremos

Estos puntos son:

$$(0{,}0)$$
$$(3{,}3)$$

d) Verifique que efectivamente los puntos regulares indicados en (c) cumplen las condiciones de KKT.

Solución 2.d

Para poder ver esto, debemos revisar que los puntos críticos encontrados cumplan la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punto (0,0)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(0-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2(0-3) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Despejando obtenemos que:

$$\lambda = 0$$
$$\mu = 1/6 \geq 0$$

Por lo que sí se cumple el KKT

Punto (3,3) → Restricciones 1 y 2 activas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(3-2) \\ 2(3-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2(3-3) \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Despejando obtenemos que:

$$\lambda = -1/2$$
$$\mu = 1/3$$

Por lo que sí se cumple el KKT

Punto $(\sqrt{5}+2, 1)$ → Solo restricción 1 está activa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(2+\sqrt{5}-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Despejando obtenemos que:

$$\lambda = -1/(2\sqrt{5})$$
$$\mu = 0$$

Por lo que sí se cumple el KKT

Para poder ver esto, debemos reemplazar los 3 puntos críticos en la F.O y ver cuál nos entrega el menor valor (al estar minimizando).

Nuestra F.O es:

$$P: \quad \text{mín} \quad x_1$$

Y nuestros puntos: $(\sqrt{5}+2, 1), (0{,}0), (3{,}3)$

Podemos notar que el **punto (0,0)** es el que nos entrega el mejor valor objetivo, por lo tanto, es el óptimo (mínimo global).