$$e^{At} = \varnothing(t)\,\varnothing^{-1}(0)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}\,x(0)}_{x_h} + \underbrace{e^{At}\int_0^t e^{-As} f(s)\,ds}_{x_p}$$

Sistemas de ecuaciones no homogéneos

1. Se tiene una matriz fundamental $\Phi(t)$ de un sistema $x' = Ax$. Calcule e^{At} y resuelva:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x' = Ax + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varnothing(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varnothing^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^{-t} - 3e^t \\ e^t - e^{-t} & 3e^{-t} - e^t \end{pmatrix}$$

$$e^{-As} f(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{-s} - e^s & 3e^s - 3e^{-s} \\ e^{-s} - e^s & 3e^s - e^{-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2s} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_p = e^{At}\int_0^t \frac{1}{2}\left(6e^s - e^{3s} + 3e^{-s}\right) ds \Rightarrow x_p = e^{At}\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6e^t - e^{3t}/3 + 3e^{-t} - 26/3 \\ 4e^t - e^{3t}/3 + e^{-t} - 14/3 \end{pmatrix}}_{M}$$

$$x(t) = e^{At}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{At} M$$

2. Utilice el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución del sistema

(a)

$$x' = 2x + 4y + 2, \quad y' = x + 2y + 3; \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} (\lambda-2)^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda = 0 \\ \lambda = 0 \quad \lambda = 4 \end{matrix}$$

$\underline{\lambda = 0}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a = -2b$, $b = b$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 4}$ $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a = 2b$, $b = b$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector

$$\vec{X}_c(t) = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\vec{x}_p(t) = \vec{a} \xrightarrow[\text{LD}]{\times} \vec{x}_p = \vec{a}\,t + \vec{b}$$

$$x_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad x_p' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 t + 2b_1 + 4a_2 t + 4b_1 \\ a_1 t + b_1 + 2a_2 t + 2b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2a_1 + 4a_2 = 0 \\ a_1 - 2b_1 - 4b_2 = 2 \\ a_2 - b_1 - 2b_2 = 3 \end{matrix}\right\} \infty \text{ sol.}$$

Debemos encontrar una

$a_1 = -2a_2$

$a_2 = a_2$

(b)

$$x' = x - 2y, \quad y' = 2x - y + e^t \operatorname{sen} t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)+4 = 0$$

$$\lambda^2 + 3 = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{3}\, i$$

$\lambda = \sqrt{3}\, i$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}i & -2 \\ 2 & -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2(1+\sqrt{3}i) \\ 2 & -(1+\sqrt{3}i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -(1+\sqrt{3}i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2a = (1+\sqrt{3}i)b \\ b = b \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} i$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3} \cdot t) - \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, t)$$

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\, t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, t)$$

$$X_n = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

$$\vec{x}_p = \vec{a}\, e^t \operatorname{sen}(t) + \vec{b}\, e^t \cos(t)$$

3. Resuelva el sistema mediante el método de variación de parámetros:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2)+4 = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \quad \lambda = 0 \ (\times 2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a = 2b \\ b = b \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Generalizado

$$(A - \lambda I)\, v_2 = v_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} a = 1+2b \\ b = b \end{array}$$

$$X_c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$x_p(t) = \phi(t) \int \phi^{-1}(t) f(t)\, dt$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2t+1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1} f(t) \quad \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} t & -2t-1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = \phi(t) \int \begin{pmatrix} -36t^3 + 12t^2 + 6t \\ 36t^2 - 12t \end{pmatrix} dt \qquad x_p = \begin{pmatrix} 6t^4 + 8t^3 \\ 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + x_p$$

4. Sea el PVI

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta que $A = I + N$, donde I es la matriz identidad y $N^3 = 0$, la solución del PVI es:

(a) $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 5t + 2t^2 \\ 1 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 4t + 4t^2 \\ 1 + 4t \\ 1 \end{pmatrix}$

$$N^3 = 0$$

$$e^{At} = e^{t(I+N)} = e^t e^{Nt} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \cancel{\frac{N^3 t^3}{6}} \qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t & 3t \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

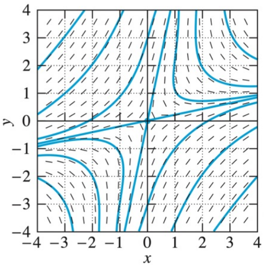
Estudio cualitativo de sistemas no lineales

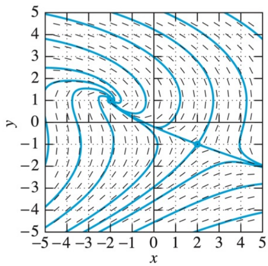
6. Encuentre los puntos críticos de los siguientes sistemas y determine a qué plano de fase corresponde:

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 2y$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 3y$

(c) $\dfrac{dx}{dt} = x - y - x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$





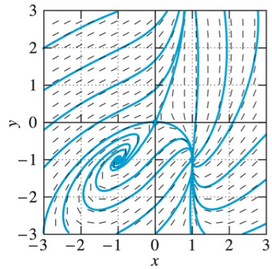


FIGURA 6.1.17. Punto espiral

$\dfrac{dx}{dt} = 1 - y^2 = 0$ (1)

(1) $(1+y)(1-y) = 0$

$y=-1 \quad y=1$ (2)

$y = -1 \rightarrow x - 2 = 0$

$y = 1 \rightarrow x + 2 = 0$

$x = -2$

$(-2, 1)$

$(2, -1)$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = J(u, v)$ Linealización sistema

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$(2, -1)$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \lambda(\lambda - 2) - 2 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$

$\left.\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right\}$ punto silla

$\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$ Fórmula cuadrática

6(c)

(c) $\dfrac{dx}{dt} = x - y - x^2 + xy$ (1), $\quad \dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$ (2)

(2) en (1) $\rightarrow$ $x + xy = 0$

$x(1 + y) = 0$

$x = 0 \quad y = -1$

$-y - x^2 = 0$

(2) $x = 0$ $\quad -y = 0$

$(0, 0)$

$y = -1$ $\quad 1 - x^2 = 0$

$x = \pm 1$

$(1, -1)$

$(-1, -1)$

8. Encuentre las trayectorias de los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 4y\left(1 + x^2 + y^2\right), \quad \dfrac{dy}{dt} = -x\left(1 + x^2 + y^2\right)$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = y^3 e^{x+y}, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x^3 e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Rightarrow \quad a) \quad \frac{dx}{dt} = 4y\,(1+x^2+y^2) \quad \frac{dy}{dt} = -x(1+x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x(1+x^2+y^2)}{4y(1+x^2+y^2)}$$

$$\int 4y\,dy = \int -x\,dx + C$$

$$2y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 + \frac{x^2}{4} = C$$

(elipse)

$$\frac{dx}{dt} = y^3 e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 e^{x+y}}{y^3 e^{x+y}}$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-t/10} & 0 \\ 2e^{-t/10} & e^{-t/20} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t/10} & 0 \\ -2e^{-t/10}+2e^{-t/20} & e^{-t/20} \end{pmatrix}$$

$$x_p = \int_0^t$$

$$\boxed{\begin{gathered} \emptyset(t) = \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{bmatrix} \\ \emptyset(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \emptyset^{-1}(0) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ e^{At} = \begin{bmatrix} 3e^{4t}-2e^{3t} & -3e^{4t}+3e^{3t} \\ 2e^{4t}-2e^{3t} & -2e^{-4t}+3e^{3t} \end{bmatrix} \end{gathered}}$$

$$e^{t} + e^{-4t} - (1+1)$$
$$-e^{2t} - 4e^{-3t} - (-1-4)$$

$$\begin{pmatrix} 3e^{4t} & e^{3t} \\ 2e^{4t} & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t}+e^{-4t}-2 \\ -e^{2t}-4e^{-3t}+5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3e^{4t}(e^{t}+e^{-4t}-2) + e^{3t}(-e^{2t}-4e^{-3t}+5) \\ 2e^{4t}(e^{t}+e^{-4t}-2) + e^{3t}(-e^{2t}-4e^{-3t}+5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3e^{5t} + 3 - \cancel{6e^{4t}} - e^{5t} - 4 + \cancel{5e^{3t}} \\ 2e^{5t} + 2 - \cancel{4e^{4t}} - e^{5t} - 4 + \cancel{5e^{3t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{5t} - 1 + \cancel{(5e^{3t} - 6e^{4t})} \\ e^{5t} - 2 + \cancel{(5e^{3t} - 4e^{4t})} \end{pmatrix}$$

e^{5t}

$$\uparrow \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 3e^{4t}-2e^{3t} & -3e^{4t}+3e^{3t} \\ 2e^{4t}-2e^{3t} & -2e^{-4t}+3e^{3t} \end{bmatrix}}^{e^{At}} x_0 + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27e^{4t} - 18e^{3t} - 12e^{4t} + 12e^{3t} \\ 18e^{4t} - 18e^{3t} - 8e^{4t} + 12e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15e^{4t} - 6e^{3t} \\ 10e^{4t} - 6e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{pmatrix}$$

$$\emptyset = \begin{pmatrix} -e^{-t/10} & 0 \\ 2e^{-t/10} & e^{-t/20} \end{pmatrix} \qquad \emptyset^{-1} = \underbrace{\frac{1}{+e^{-t/10-t/20}}} \begin{pmatrix} -e^{-t/20} & 0 \\ +2e^{-t/10} & +e^{-t/10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_p = \emptyset \int_0^t \overbrace{\emptyset^{-1} \underbrace{f(s)}_{\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}}}^{1} ds$$

$$1: \quad = e^{3t/20} \begin{pmatrix} -20e^{-t/20} \\ 40e^{-2t/20} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -20 \ {}^{t/10} \\ 40 e^{t/20} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \begin{pmatrix} -20e^{s/10} \\ 40e^{s/20} \end{pmatrix} ds = \begin{bmatrix} -200e^{s/10} \\ 800e^{s/20} \end{bmatrix}_0^t = \begin{pmatrix} -200e^{t/10} + 200 \\ 800e^{t/20} - 800 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -e^{-t/10} & 0 \\ 2e^{-t/10} & e^{-t/20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -200e^{t/10} + 200 \\ 800e^{t/20} - 800 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 200 - 200e^{-t/10} \\ -400 + 400e^{-t/10} + 800 - 800e^{-t/20} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -200 \\ 400 \end{pmatrix} e^{t/10} + \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix} e^{-t/20}$$

Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 12

Sistemas de ecuaciones no homogéneos

1. Se tiene una matriz fundamental $\Phi(t)$ de un sistema $x' = Ax$. Calcule e^{At} y resuelva:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x' = Ax + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Utilice el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución del sistema

   (a)
$$x' = 2x + 4y + 2, \quad y' = x + 2y + 3; \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

   (b)
$$x' = x - 2y, \quad y' = 2x - y + e^t \operatorname{sen} t$$

3. Resuelva el sistema mediante el método de variación de parámetros:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Sea el PVI

$$\vec{x}' = A\vec{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Tomando en cuenta que $A = I + N$, donde I es la matriz identidad y $N^3 = 0$, la solución del PVI es:

   (a) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t + 2t^2 \\ 1 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 5t + 4t^2 \\ 1 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 4t + 4t^2 \\ 1 + 4t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\vec{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 4t + 2t^2 \\ 1 + 4t \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Suponga que tiene dos tanques de salmuera conectados por una tubería. Los volúmenes de los dos tanques son $V_1 = 100$ y $V_2 = 200$ (L). Supóngase que los dos tanques contienen inicialmente agua fresca y el flujo que entra al tanque 1, a una velocidad de 10 L/min, tiene una concentración de sal de 2 kg/L.

   (a) Encuentre las cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los dos tanques después de t min.

   (b) Obtenga la cantidad de saturación (a largo plazo) de sal en cada uno de los tanques.

   (c) Determine cuánto tiempo tarda cada tanque en alcanzar la concentración de sal de 1 kg/L.

Estudio cualitativo de sistemas no lineales

6. Encuentre los puntos críticos de los siguientes sistemas y determine a qué plano de fase corresponde:

   (a) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 2y$

   (b) $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 3y$

   (c) $\dfrac{dx}{dt} = x - y - x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$

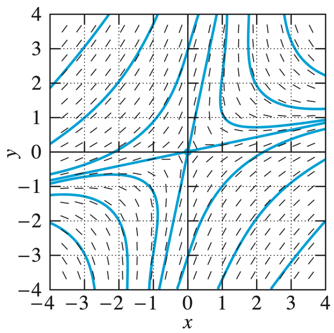


FIGURA 6.1.14. Punto silla (0, 0).

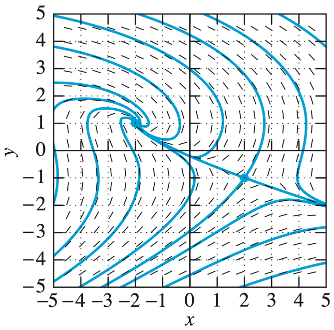


FIGURA 6.1.12. Punto espiral (−2, 1) y punto silla (2, −1).

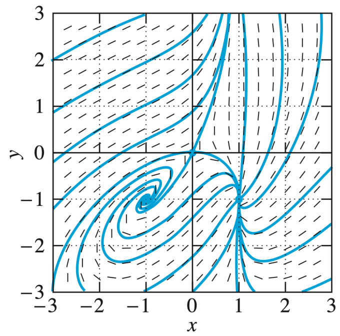


FIGURA 6.1.17. Punto espiral (−1, −1), punto silla (0, 0) y nodo (1, −1).

7. Encuentre las soluciones de equilibrio de las siguientes ecuaciones de segundo orden:

   (a) $x'' + 4x - x^3 = 0$

   (b) $x'' + 2x' + x + 4x^3 = 0$

   (c) $x'' + 3x' + 4\operatorname{sen} x = 0$

8. Encuentre las trayectorias de los siguientes sistemas de ecuaciones:

   (a) $\dfrac{dx}{dt} = 4y\left(1 + x^2 + y^2\right), \quad \dfrac{dy}{dt} = -x\left(1 + x^2 + y^2\right)$

   (b) $\dfrac{dx}{dt} = y^3 e^{x+y}, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x^3 e^{x+y}$