PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ESTRUCTURAL Y GEOTECNICA

Control 2, ICE1514 Dinámica

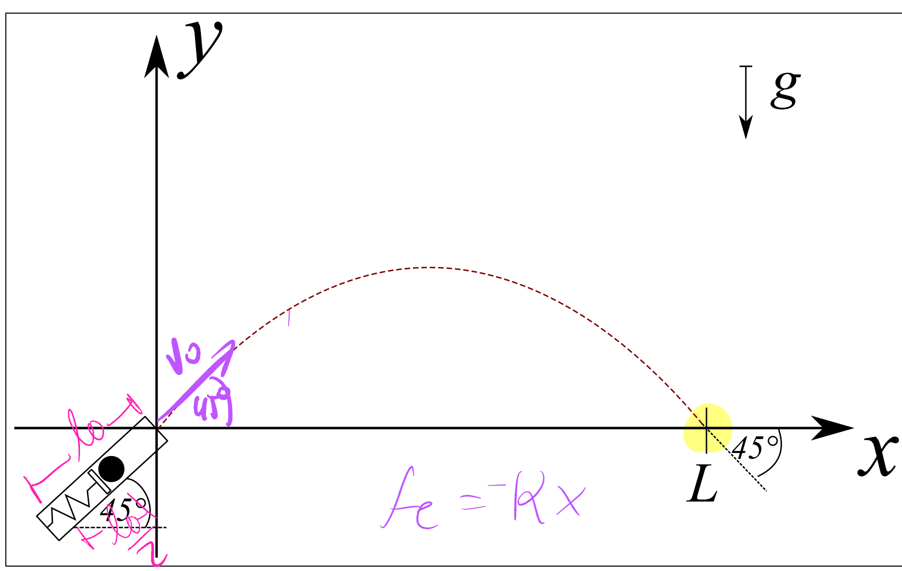
Entrega hasta las 13:00 hrs. Sin apuntes ni calculadoras, ni uso de teléfonos celulares.

Una partícula de m kg de masa, es lanzada desde un tubo inclinado a 45^o por sobre la horizontal, por el empuje ejercido por un resorte de constante elástica k y de largo natural l_o metros, el cual está anclado al fondo del tubo, y que se ha comprimido hasta la mitad de su largo natural. Inicialmente la partícula está en reposo y en contacto con el resorte comprimido, pero al salir del tubo la partícula deja de tener contacto con el resorte. La salida del tubo está al nivel del suelo y el largo del tubo es también l_o metros. Puede despreciar el roce viscoso con el aire y el efecto de la fuerza de gravedad al interior del tubo. Por último, suponemos que la partícula no roza con la pared del tubo.

El objetivo es determinar k de modo que la partícula recorra una distancia horizontal de L metros desde que sale del tubo y que impacte el suelo en un ángulo de 45^o por debajo de la horizontal. Se pide entonces:

i) (3 pts.) Mediante la resolución de su ecuación de movimiento (F=ma), determine la velocidad con que la partícula sale del tubo.

ii) (3 pts.) Resuelva las ecuaciones de movimiento de la partícula durante el recorrido fuera del tubo y obtenga una fórmula para k en términos de los demás datos del problema.



$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$

$y = 0$
$x = l.$

masa = m

$V_0 = 0$

$l = l_0/2$

Antes de salir del tubo: $u_0 = \frac{l_0}{2}$

$\hat{z}$ ⌋

$$K\left(\frac{l_0}{2} - u\right) = m\ddot{u}_x$$

$$K\left(\frac{l_0}{2} - u\right) = m\left[\frac{d\dot{u}}{du} \cdot \dot{u}\right]$$

$$\left[K\left(\frac{l_0}{2} - u\right)\right]du = m\dot{u}\,d\dot{u} \quad / \int$$

$$K\left(\frac{u l_0}{2} - \frac{u^2}{2}\right) = m\frac{\dot{u}^2}{2} + C$$

$$\boxed{u = 0 \Rightarrow \dot{u} = 0}$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{K\left(\frac{u l_0}{2} - \frac{u^2}{2}\right) = \frac{m\dot{u}^2}{2}}$$

$u = \frac{l_0}{2} \Rightarrow$ ¿$\dot{u}$?

$$\Rightarrow \frac{l_0^2}{4} - \frac{l_0^2}{8}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{K}{m}\frac{l_0^2}{8}} = \dot{u}$$

$$\sqrt{\frac{K}{m} \cdot \frac{l_0^2}{\cancel{8}\,4} \cdot \cancel{2}} = \dot{u}$$

$$\frac{l_0}{2}\sqrt{\frac{K}{m}} = \dot{u}_0$$

Respuestas:

i) La inclinación del tubo no afecta a la ecuación de movimiento al interior del mismo, por tanto, usando una coordenada auxiliar, que llamamos z, alineada con el resorte, con origen en la salida del tubo y creciendo hacia el exterior del tubo, y si llamamos T_1 al tiempo en que la partícula sale del tubo, se tiene el problema

$m\,\dot{z}^2 = -kz$

$$\left.\begin{array}{rl} m\,\frac{d^2 z}{d t^2}(t) = & -k\,z \quad \text{si } t \in (0, T_1) \\ z(0) = & -\frac{l_o}{2} \\ \dot{z}(0) = & 0 \end{array}\right\}$$

Luego

$$\frac{d^2 z}{d t^2}(t) = \frac{-k}{m}\,z$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2}(t)\,\frac{d z}{d t}(t) = \frac{-k}{m}\,z\,\frac{d z}{d t}(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d t}\left(\frac{d z}{d t}\right)^2(t) = \frac{-k}{2\,m}\,\frac{d\,z^2}{d t}(t), \qquad \textbf{1 pto.}$$

luego multiplicando por 2 e integrando definidamente entre 0 y $t \in (0, T_1)$, se tiene

$$\left(\frac{d z}{d t}\right)^2(t) = \frac{-k}{m}\,z^2(t) + \frac{k}{m}\frac{l_o^2}{4} = \frac{k}{m}\left(\frac{l_o^2}{4} - z^2(t)\right),$$

por tanto, evaluando en $t = T_1$, se tiene de inmediato que tiene

$$\frac{d z}{d t}(T_1) = \frac{l_o}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad \textbf{2 pts.}$$

Alternativamente, podemos hacer el cambio de variable $z(t) = \frac{l_o}{2}\sin\varphi(t)$ para tener que

$$\frac{d z}{d t}(t) = \frac{l_o}{2}\cos\varphi(t)\,\frac{d\varphi}{d t} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{l_o}{2}\,\cos\varphi(t),$$

por tanto

$$\frac{d\varphi}{d t}(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{luego} \qquad \varphi(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi(0),$$

pero

$$z(0) = \frac{-l_o}{2} = \frac{l_o}{2}\sin\varphi(0),$$

entonces $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$, y por tanto

$$z(t) = \frac{l_o}{2}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{l_o}{2}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

entonces $z(t) = \frac{-l_o}{2}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$. **1 pto.**

Luego $z(T_1)=0$ implica que $T_1=\sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{\pi}{2}$. Por tanto

$$\frac{d\,z}{d\,t}(t)=\frac{l_o}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right),$$

luego $\frac{d\,z}{d\,t}(T_1)=\frac{l_o}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ y, de vuelta en el plano $x-y$, la velocidad es

$$V(T_1)=\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}. \qquad \textbf{1 pto.}$$

ii) Sea T_2 el tiempo al que la partícula impacta el suelo, entonces debemos resolver para $t\in(T_1,T_2)$ los siguientes dos problemas:

$$\left.\begin{array}{rll} m\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2}(t) & =0 & \text{si } t\in(T_1,T_2)\\ x(T_1) & =0 & \\ \dot{x}(T_1) & =\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}, & \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rll} m\,\frac{d^2\,y}{d\,t^2}(t) & =-m\,g & \text{si } t\in(T_1,T_2)\\ y(T_1) & =0 & \\ \dot{y}(T_1) & =\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}, & \end{array}\right\} \qquad \textbf{1 pto.}$$

por tanto $x(t)=\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}(t-T_1)$ e $y(t)=\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}(t-T_1)-\frac{1}{2}\,g\,(t-T_1)^2$, por tanto al pedir que $x(T_2)=L$, se tiene que $T_2=T_1+\frac{2\sqrt{2}}{l_o}\sqrt{\frac{m}{k}}\,L$ y la condición $y(T_2)=0$ implica que

$$\frac{1}{2}\,g\,\frac{2\sqrt{2}}{l_o}\sqrt{\frac{m}{k}}\,L=\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

por tanto

$$k=\frac{4\,m\,g\,L}{l_o^2}. \qquad \textbf{1.5 pts.}$$

Además se tiene que

$$\dot{y}(T_2)=\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}-g(T_2-T_1)=\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}-g\,\frac{2\sqrt{2}}{l_o}\sqrt{\frac{m}{k}}\,L=-\frac{l_o}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}=-\dot{x}(T_2),$$

por lo cual el ángulo de impacto con el suelo es de -45^o, lo cual es natural por la simetría de la parábola. **0.5 pts.**