PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 11

Sistemas de ecuaciones homogéneos: caso no diagonalizable

1. Usando vectores generalizados resuelva el siguiente sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Determine todos los valores del parámetro α que hacen que la solución del sistema

$$\begin{aligned} x'(t) &= (5\alpha - 2)x + 4y \\ y'(t) &= -x + (5\alpha + 2)y, \quad x(0) = y(0) = 1 \end{aligned}$$

cumpla que $\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Matriz Fundamental

3. Para la matriz fundamental propuesta, encuentre para qué t puede corresponder a la de un sistema lineal homogéneo. Construya dicho sistema.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi/t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/t) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (a) Suponga que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$ son conmutativas; esto es, que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Pruebe que $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$. (Sugerencia: Agrupe los términos en el producto de las dos series del lado derecho para obtener la serie del lado izquierdo.)

   (b) Deduzca que, para cada matriz cuadrada $\mathbf{A}$, la matriz $e^{\mathbf{A}}$ es no singular con

$$\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$$

5. Suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}\cos 2t + \frac{1}{2}\mathbf{A}$ sen $2t$. Aplique este hecho para encontrar una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y verifique que es equivalente a la solución encontrada por el método del valor propio.

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones calculando la exponencial de matriz de coeficientes:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Calcule la matriz $\mathbf{B}$ si

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 5e^{2t} \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda I)\vec{V_2} = \vec{V_1}$

$(A-\lambda I)^2 V_2 = 0$

$x_2(t) = (\vec{V_1}t + \vec{V_2})e^{\lambda t}$

1. Usando vectores generalizados resuelva el siguiente sistema:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-7)(\lambda-1) + 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 + 9 = 0$$

$$(\lambda-4)^2 = 0$$

$$\lambda = 4 \quad (\times 2)$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = -b$
$b = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{vector propio}}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a = 1/3 - b$
$b = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w}$$

Sol. gen $\longrightarrow$ $x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e^{4t}$

2. Determine todos los valores del parámetro α que hacen que la solución del sistema

$$x'(t) = (5\alpha - 2)x + 4y$$
$$y'(t) = -x + (5\alpha + 2)y, \quad x(0) = y(0) = 1$$

cumpla que $\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

$$\begin{vmatrix} 5\alpha - 2 - \lambda & 4 \\ -1 & 5\alpha + 2 - \lambda \end{vmatrix} = ((\lambda - 5\alpha) + 2)((\lambda - 5\alpha) - 2) + 4 = 0$$

$$(\lambda - 5\alpha)^2 - 4 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 5\alpha \quad (\times 2)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = 2b$
$b = b$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & \vdots & 2 \\ -1 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$a = 2b - 1$

$b = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\alpha t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{5\alpha t}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 1$

$1 = 2 - c_2$

$c_2 = 1$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5\alpha t} + \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ t \end{pmatrix} e^{5\alpha t}$$

$$= \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t + 1 \end{pmatrix} e^{5\alpha t}$$

$\underline{\underline{\alpha > 0}}$

Matriz Fundamental

3. Para la matriz fundamental propuesta, encuentre para qué t puede corresponder a la de un sistema lineal homogéneo. Construya dicho sistema.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \sin(\pi/t) \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{y_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{y_2} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ \cos(\pi/t) \\ 1 \end{matrix}}_{y_3} \end{pmatrix}$$

Columnas LI $\longrightarrow$ $\det \phi \neq 0$

$\det \phi = -\text{sen}(\pi/t) \cos(\pi/t) \neq 0.$

$= -\frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{t}\right)$

$\frac{2\pi}{t} \neq k\pi$ $\quad t \neq \frac{2}{k}$ $\quad k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$\phi' = A \phi$ matriz del sistema

$$\boxed{A = \phi' \phi^{-1}}$$

$x' = A x$

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones calculando la exponencial de matriz de coeficientes:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

simetrica en este eje $\Rightarrow$ nilpotente

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} \cdots$$

$A = 3I + N$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 0 \\ 108 & 36 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 0 \\ 108 & 36 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 216 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = 0$$

$$\Rightarrow e^{Nt} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6t & 0 & 0 & 0 \\ 9t & 6t & 0 & 0 \\ 12t & 9t & 6t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 54t^2 & 18t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36t^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{3It} = Ie^{3t}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6t & 1 & 0 & 0 \\ 18t^2 + 9t & 6t & 1 & 0 \\ 36t^3 + 54t^2 + 12t & 18t^2 + 9t & 6t & 1 \end{pmatrix} \underset{e^{3It}}{\overset{}{\underset{\parallel}{e^{3t}}}}$$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

$$x(t) = e^{A} x(0) \Rightarrow X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 6t + 1 \\ 18t^2 + 15t + 1 \\ 36t^3 + 72t^2 + 27t + 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^{Int} = Ie^{nt} \quad n \text{ cte.}}$$

7. Calcule la matriz $\mathbf{B}$ si

$$e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 5e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{de^{Bt}}{dt} = Be^{Bt}\Big|_{t=0} = B$$

Evaluamos en 0 y al igualar
en 0 también
B'a

$$\frac{d}{dt} e^{Bt} = \begin{pmatrix} -3e^t + 8e^{2t} & 6e^t - 12e^{2t} & 6e^t - 12e^{2t} \\ e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 6e^{2t} & -2e^t + 4e^{2t} \\ -3e^t + 6e^{2t} & 6e^t - 12e^{2t} & 6e^t - 10e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

4. (a) Suponga que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $n \times n$ son conmutativas; esto es, que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Pruebe que $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$. (Sugerencia: Agrupe los términos en el producto de las dos series del lado derecho para obtener la serie del lado izquierdo.)

$$\frac{d}{dt} e^{t(A+B)} e^{-Bt} e^{-At} = (A+B)\, e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA} + e^{t(A+B)}(-B)\, e^{-Bt} e^{-At} + e^{t(A+B)} e^{-Bt} (-A) e^{-At}$$

$$= (A+B-B-A)\, e^{t(A+B)} e^{-Bt} e^{-At} = 0$$

$$e^{t(A+B)} e^{-Bt} e^{-At}\Big|_{t=0} = I$$

esto ya que

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \underset{\substack{\text{evaluado}\\ \text{en } n=0}}{I} + At + \frac{A^2t^2}{2}$$

evaluamos en $t=0$ $\Rightarrow I$

$$e^{3It} = I + 3It + \frac{9It^2}{2} + \frac{27t^3}{3} \cdots$$

$$e^{3t} = 1 + 3t + \frac{9t^2}{2} \Rightarrow e^{3t} = I e^{3t}$$

$$\Rightarrow e^{3t}$$

$$e^{t(A+B)} e^{-Bt} e^{-At}\Big|_{t=1} = I$$

$$e^{A+B} e^{-B} e^{-A} = I$$

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B}$$