Teorema de la divergencia

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$\operatorname{div}(F)(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z)$

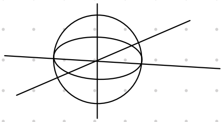
Teo (de la divergencia)

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ un sólido simple orientado positivamente (hacia afuera). Sea $F: M \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $E \subseteq M$ abierto, un campo vectorial tal que las derivadas parciales de F_1, F_2 y F_3 estén bien definidas en M y sean continuas. Entonces

$$\iiint_E \operatorname{div}(F)\, dv = \iint F \cdot ds$$

$dv = dx\, dy\, dz$ (es la combinación más apropiada)

→ Ejemplo: $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$



$\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$F: M \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$E \subseteq M$

obs: Se dice que $E \subseteq \mathbb{R}^3$ es un sólido simple, si existe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ de tipo 1 y 2 tal que:

$E = \{(x,y,z) : \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$

o $E = \{(x,y,z) : \tilde{\phi}_1(y,z) \le x \le \tilde{\phi}_2(y,z),\ (y,z) \in D\}$

o $E = \{(x,y,z) : \psi_1(x,z) \le y \le \psi_2(x,z),\ (x,z) \in D\}$

con $\phi_1, \phi_2 : D \to \mathbb{R}$ continuas

(o $\hat{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$

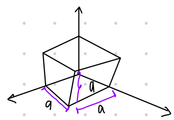
o ψ_1, ψ_2)

dem: (caso particular)

$E = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$

$= \{(x,y,z) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$

Sea F un campo de $\mathbb{R}^3$ que satisface las hipótesis del teorema de la divergencia.



$\partial E = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$

(Las 6 caras del cubo)

S_1	cara	con	vector	normal $(1,0,0)$
S_2	-	-	-	$(0,1,0)$
S_3	''	''	''	$(0,0,1)$
S_4	''	''	''	$(-1,0,0)$
S_5	''	''	''	$(0,-1,0)$
S_6	''	''	''	$(0,0,-1)$

$$\iiint_E \operatorname{div}(F)\, dv = \iint_{\partial E} F \cdot ds$$

$$\iint_{\partial E} F \cdot ds = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} F\, ds$$

$$\iint_{S_1} F \cdot ds = \iint_{S_1} \langle (F_1,F_2,F_3), (1,0,0) \rangle = \int_0^a \int_0^a F_1(a,y,z)\, dy\, dz$$

Parametrización de S_1

$(y,z) \longrightarrow (a,y,z)$

$0 \le y \le a,\quad 0 \le z \le a$

De igual forma se obtiene

$$\iint_{S_4} F \cdot ds = \iint_{S_4} \langle (F_1,F_2,F_3), (-1,0,0) \rangle = \int_0^a \int_0^a -F_1(0,y,z)\, dy\, dz$$

$S_4 : (y,z) \longrightarrow (0,y,z)$

$0 \le y \le a,\quad 0 \le z \le a$

$$\iint_{S_1} F \cdot ds + \iint_{S_4} F \cdot ds = \int_0^a \int_0^a F_1(a,y,z)\, dy\, dz - \int_0^a \int_0^a F_1(0,y,z)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^a \int_0^a (F_1(a,y,z) - F_1(0,y,z))\, dy\, dz$$

$$\int_0^a \frac{\partial F_1}{\partial x}(\underset{\text{variable}}{x}, y, z)\, dx = F_1(a,y,z) - F(0,y,z)$$

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

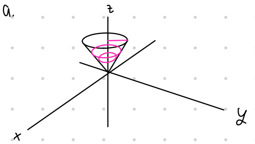
De igual forma se obtiene que

$$\iint_{S_2} F \cdot ds + \iint_{S_5} F \cdot ds = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$\iint_{S_3} F \cdot ds + \iint_{S_6} F \cdot ds = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (0,0,-1) \Rightarrow \mathrm{Div}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(0,0,-1) = 0$

Calcular $\iint_S F \cdot ds$ donde S es el cono invertido: sin tapa, con punta en el origen, de altura h, y radio máximo a.



Usaremos el teo de la divergencia para calcular $\iint_S F\cdot ds$

Para esto, agregaremos la "tapa" del cono al manto, para obtener la superficie del sólido E, que consiste del manto + la tapa + el interior.

$$\iiint_E \mathrm{div}(F) = \iint_S F\cdot ds + \iint_{Tapa} F\cdot ds \qquad \mathrm{div}(F) = 0$$

$$\Rightarrow \iint_S F\cdot ds + \iint_{Tapa} F\cdot ds = \iiint_E \underbrace{\mathrm{Div}(F)}_{0}\, dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint_S F\cdot ds = -\iint_{Tapa} F\cdot ds$$

Parametrizando la tapa

$$(r,\theta) \xrightarrow{\alpha} (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, h) \qquad 0 \le r \le a, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\frac{d\alpha}{dr}(r,\theta) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 0)$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta}(r,\theta) = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{d\alpha}{d\theta}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

"Hay que desnormalizar el vector"

$$-\iint_{Tapa} F\cdot ds = -\int_0^a\int_0^{2\pi} \langle (0,0,-1), (0,0,1)\rangle\, r \, d\theta\, dr = \int_0^a\int_0^{2\pi} -r \, d\theta\, dr = -a^2\pi$$