Ayudantía 9

Si F es un campo de componentes de Clase C^1: $\int_{\partial D} F\cdot n\, ds = \iint \operatorname{div}(F)\, dA$, n el vector normal unitario exterior a D.

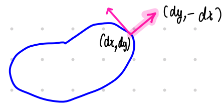
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\nabla\cdot F = P_x + Q_y + R_z$

$\nabla f = (f_x, f_y, \underbrace{f_z}_{\frac{\partial f}{\partial z}})$

$\nabla\times F = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) =$ rotor

$F = (P, Q, R)$



$\int_{\partial D} \Delta dx + \Box dy = \iint_D \Box_x - \Delta_y$

$P dy - Q dx$

$\int_{\partial D} \underbrace{-Q}_{\text{"}P\text{"}} dx + \underbrace{P}_{\text{"}Q\text{"}} dy = \iint_D P_x - (-Q_y) = \iint_D \underbrace{P_x + Q_y\, dA}_{\nabla F}$

Green $\iint Q_x - P_y\, dx dy$

Problema 1

Si f es un campo escalar y $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ son campos vectoriales, demuestre las siguientes identidades:

(a) $\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = f(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

(b) $\nabla\times(f\mathbf{F}) = f(\nabla\times\mathbf{F}) + (\nabla f)\times\mathbf{F}$

(c) $\nabla\cdot(f\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = f\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - f\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) + \nabla f\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$

escalar

$\nabla (fP, fQ, fR)$

$f_x P + f P_x + f_y Q + f Q_y + f_z R + R_z f = f(\nabla\cdot F) + F(\nabla f)$

(b) $\nabla\times(f\mathbf{F}) = f(\nabla\times\mathbf{F}) + (\nabla f)\times\mathbf{F}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ fP & fQ & fR \end{vmatrix} = \hat{i}\left((fR)_y - (fQ)_z\right) - \hat{j}\left((fR)_x - (fP)_z\right) + \hat{k}\left((fQ)_x - (fP)_y\right)$$

$$= \hat{i}\left(f_y R + f R_y - f_z Q - f Q_z\right) - \hat{j}\left(f_x R + f R_x - f_z P - f P_z\right) + \hat{k}\left(f_x Q + f Q_x - f_y P - f P_y\right)$$

$$= f(\nabla\times F) + (\nabla f)\times F$$

(c) $\nabla\cdot(f\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = f\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - f\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) + \nabla f\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$

$H \to$ variable auxiliar

$H = F\times G$

$\nabla\cdot(fH) = f(\nabla\cdot H) + (\nabla f)\cdot H = F(\nabla\cdot(F\times G)) + \nabla f\,(F\times G)$ } Demostrado en b.

$$F\times G = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(F_2G_3 - G_2F_3\right) - \hat{j}\left(F_1G_3 - G_1F_3\right) + \hat{k}\left(F_1G_2 - F_2G_1\right)$$

$$\nabla\cdot\left(F_2G_3 - G_2F_3,\ F_1G_3 - G_1F_3,\ F_1G_2 - F_2G_1\right)$$

$\left(F_{2x}G_3 + F_2G_{3x} - F_{3x}G_2 - F_3G_{2x}\right)$

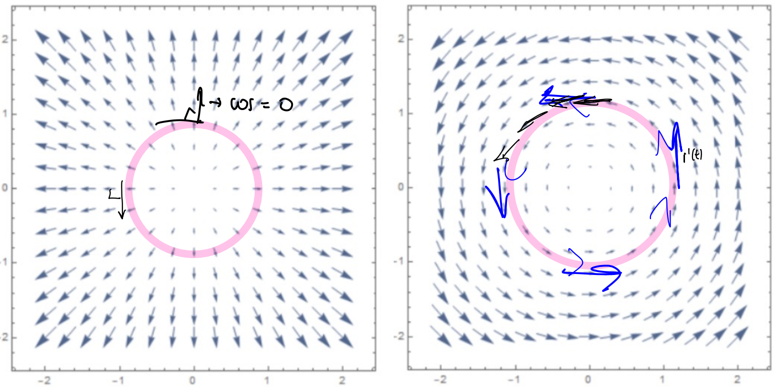
$+ F_{3y}G_y + F_3G_{3y} - F_{1y}G_3 - F_1G_{3y}$

$+ F_{1z}G_2 + F_1G_{2z} - F_{2z}G_1 - F_2G_{1z}$

$= G(\nabla\times F) - F(\nabla\times G)$

Problema 2

Considere los siguientes campos vectoriales:



(a) **F** (b) **G**

Y responda las preguntas:

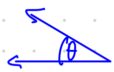
1. Si C_2 es una circunferencia centrada en el origen, de radio 2 y recorrida en sentido antihorario. La integral de línea $\int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ es:

(a) positiva

(b) negativa

(c) cero → Rotor no puede ser cero ya que el campo está

(d) no se puede determinar rotando



$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos\theta$

2. ¿Qué se puede afirmar con respecto a los campos?

$(F \cdot \nabla)$ ↗ si estamos "saliendo" de un punto, $\text{div}(F) > 0$

(a) El campo **F** tiene divergencia negativa

(b) El campo **F** podría ser conservativo, mientras que **G** no

(c) El campo **G** podría ser conservativo, mientras que **F** no

(d) No se puede concluir nada a partir de los gráficos

G rota, por lo que no puede ser conservctivo

Problema 3

Ocupe la forma vectorial del teorema de Green:

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA$$

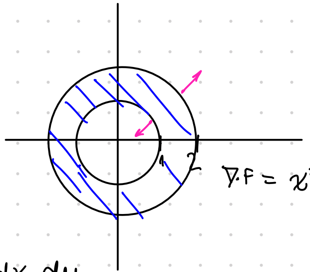
Para calcular el flujo normal exterior a ∂D del campo $\mathbf{F}(x, y) = (x^3/3 + 5y, e^x)$, donde $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

→ Parte izquierda

$$\int_{\partial D} F\cdot N\, ds = \iint_D \nabla\cdot f\, dA$$

$$F = \left(\frac{x^3}{3}+5y,\ e^x\right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)$$



$$\nabla\cdot F = x^2$$

$$= \iint x^2\, dx\, dy$$

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\cos^2(\theta)\cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\, d\theta \cdot \int_1^2 r^3\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \cdot \int_1^2 r^3\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{4}$$

Problema 5

Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial, cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas, tal que $2\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} + |\mathbf{r}|^2\mathrm{div}(\mathbf{F}) = 2$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector posición. Si C es una curva de longitud 8, cerrada simple, con vector unitario normal exterior $\mathbf{n}$, que encierra una región $D \subset \mathbb{R}^2$ cuya área es 4, calcule:

$|r|^2 F$ cumple las condiciones Green

$$\oint_C |\mathbf{r}|^2\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint \mathrm{div}(|r|^2 F)\, dA$$

$r = (x, y)$

$|r| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|r|^2 = x^2+y^2$

$$\boxed{\mathrm{div}\ (F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

$$\int_{\partial} F\cdot n\, ds = \iint \nabla\cdot F\, dA$$

(a) $\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = f(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla f$

$$\underset{f}{\nabla\cdot(|r|^2 F)} = |r|^2\,\nabla F + \underbrace{(\nabla|r|^2)}_{2r}\cdot F = 2$$

$|r|^2\,\nabla F = 2 - 2rF$

$$\nabla(fF) = f(\nabla F) + \nabla f\cdot F$$

$$\Rightarrow \nabla(x^2+y^2) = (2x, 2y) = 2(x,y) = 2r$$

$$\underbrace{\nabla\cdot(|r|^2 F)}$$

$$|r|^2\, \mathrm{dv}(F) + 2r\cdot F = 2$$

$$\iint 2\, dA = 2\iint 1\, dA = 2\cdot 4 = 8$$

$$\oint_C |r|^2 F \cdot n \; ds = \iint \nabla \cdot (|r|^2 F) \; dA$$

$$= \iint 2 \, dA = 2 \iint \underbrace{1 \, dA}_{4} = 8$$