Clase 5

Matemática de la Probabilidad

Probabilidad Condicional

Probabilidad Condicional

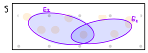
Cuando la ocurrencia de un evento (o no ocurrencia) depende de otro evento, es relevante ver la probabilidad como una probabilidad condicional.

Se define la probabilidad que un evento E_1 ocurra bajo el supuesto que otro evento E_2 ocurre con certeza a

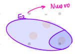
$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad (2)$$

En general, la probabilidad de un evento E ya está condicionada se condiciona a la ocurrencia del evento certeza S:

$$P(E \mid S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = P(E)$$



$P(E_1) = \frac{\# E_1}{\# S} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

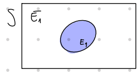


$P(E_1 \mid E_2) = \frac{\# E_1}{\# E_2} = \frac{1}{3} = \frac{\# E_1 \cap E_2 / \# S}{\# E_2}$

↓ probabilidad de E_1 dado E_2

$= \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$

Ley del complemento



$P(E_1 \mid E_2) = P(E_1 \cap E_2) / P(E_2)$

$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$

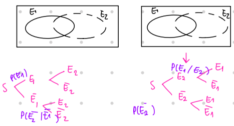
Notamos que

$E_2 = E_2 \cap S = E_2 \cap (E_1 \cup \bar{E_1})$

$= P((E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \bar{E_1}))$

$P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap \bar{E_1}) - \cancel{P(\text{inter})}$

Árbol de la probabilidad



Independencia estadística

Dos eventos E_1 y E_2 se dice que son estadísticamente independientes si la ocurrencia de un evento no depende de la ocurrencia o no ocurrencia del otro.

↳ Independencia para complementos

Es decir,

$$P(E_1 \mid E_2) = P(E_1) \quad \text{ó} \quad P(E_2 \mid E_1) = P(E_2)$$

A partir de la ecuación (2) se deduce que si E_1 y E_2 con eventos posibles entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \mid E_2) \cdot P(E_2) \quad \text{ó} \quad P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1)$$

Si E_1 y E_2 fuesen eventos estadísticamente independientes entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Ley Multiplicativa

Para tres eventos E_1, E_2 y E_3 la ley multiplicativa implica por ejemplo que

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \begin{cases} P(E_3 \mid E_1 \cap E_2) \cdot P(E_2 \mid E_1) \cdot P(E_1) \\ P(E_1 \cap E_2 \mid E_3) \cdot P(E_3) \end{cases}$$

2 caminos distintos

Independencia

Consideremos ahora los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Estos eventos se dicen mutuamente independientes si y solo si, cualquier sub-colección de eventos de ellos $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{im}$ cumple con la siguiente condición (**Rice, pág 22**)

$$P(E_{i1} \cap E_{i2} \cap \cdots \cap E_{im}) = P(E_{i1}) \times P(E_{i2}) \times \cdots \times P(E_{im})$$

Ilustración

Considere el lanzamiento de una moneda honesta dos veces y defina los siguientes eventos:

A: Obtener cara en el primer lanzamiento

B: Obtener cara en el segundo lanzamiento

C: Obtener solamente una cara. $A = \{cs, cc\}$ $B = \{sc, cc\}$ $C = \{cs, sc\}$

Muestre que los eventos A, B y C son independientes a pares, pero no mutuamente independientes.

↳ Regla multiplicativa

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$

$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$

$P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = (B)$

$\underbrace{P(A \cap B \cap C)}_{\emptyset} \neq \underbrace{P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}_{1/8}$

Independencia a pares, NO hay independencia de todos

① E_1 y E_2 indep ⟶ ¿ $\bar{E_1}$ y $\bar{E_2}$ son indep?

i) $P(\bar{E_1} \mid \bar{E_2}) = P(\bar{E_1})$

ii) $P(\bar{E_2} \mid \bar{E_1}) = P(\bar{E_2})$

iii) $P(\bar{E_1} \cap \bar{E_2}) = P(\bar{E_1}) \cdot P(\bar{E_2})$

ii) $P(\bar{E_1} \mid \bar{E_2}) = \frac{P(\bar{E_1} \cap \bar{E_2})}{P(\bar{E_2})}$ DEF

¡DE MORGAN

$= \frac{P(\overline{E_1 \cup E_2})}{P(\bar{E_2})}$

Ley complemento $= \frac{1 - P(E_1 \cup E_2)}{1 - P(E_2)}$

Ley aditiva $= \frac{1 - (P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2))}{1 - P(E_2)}$

$= \frac{1 - P(E_1) - P(E_1) + P(E_1) \cdot P(E_2)}{1 - P(E_2)}$

$= \{(1 - P(E_1)) - P(E_2)\}$

$= 1 - P$

∴ Terminar de copiar

∴ $\bar{E_1}$ y $\bar{E_2}$ son ind

¿Dónde es útil? ↳ Ley de morgan

$P(E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n) = 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n})$

$= 1 - \underbrace{P(\bar{E_1} \cap \bar{E_2} \cap \cdots \cap \bar{E_n})}_{P(\bar{E_1}) \cdot P(\bar{E_2}) \cdot P(\bar{E_3})}$

Eventos disjuntos v/s indep:

i) Eventos disjuntos $P(E_1 \cap E_2) = P(\emptyset) = 0$

ii) Indep: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Propiedades

- Si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes, entonces $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$ también lo son.
- Si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes dado un evento A, entonces

$$P(E_1 \cap E_2 \mid A) = P(E_1 \mid A) \cdot P(E_2 \mid A)$$

- Si que para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 se tiene que

$$P(E_1 \cup E_2 \mid A) = P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

$P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)$

$P(E_1 \mid E_2 \cap S) = P(E_1 \mid S)$

$P(E_1 \mid E_2 \cap A) = P(E_1 \mid A)$ IND BAJO

$\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap A) / P(A)}{P(E_2 \cap A) / P(A)} = P(E_1 / A)$

$\frac{P(E_1 \cap E_2 \mid A)}{P(E_2 \mid A)} = P(E_1 \mid A)$

$P(E_1 \cap E_2 | A) = P(E_1|A) \cdot P(E_2|A)$

Teorema de Probabilidades Totales

Considere n eventos posibles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir,

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S \quad \text{y} \quad E_i \cap E_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$$

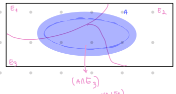
Entonces

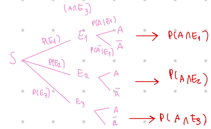
$$A = A \cap S = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i),$$

con $(A \cap E_1), \ldots, (A \cap E_n)$ eventos mutuamente excluyentes.

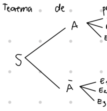
Por lo tanto, por axioma 3 y ley multiplcativa

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \,|\, E_i) \cdot P(E_i)}$$





Teorema de probabilidades totales



$$* \quad P(E_2|A) = \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A \cap E_1) + \cdots + P(A \cap E_3)}$$

$$= P(A|E_1$$

Teorema de Bayes

Si cada evento E_j de la partición de S y el evento A son posibles, entonces por la ley multiplicativa se tiene que

$$P(A \,|\, E_j) \cdot P(E_j) = P(E_j \,|\, A) \cdot P(A)$$

Es decir,

$$P(E_j \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, E_j) \cdot P(E_j)}{P(A)}$$

Aplicando el teorema de probabilidades totales se tiene que

$$P(E_j \,|\, A) = \frac{P(A \,|\, E_j) \cdot P(E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \,|\, E_i) \cdot P(E_i)}$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Bayes.

Pregunta 3

Según datos recogidos en la fabricación de vigas, el $80\,\%$ de éstas tienen la resistencia mínima que se requiere para su utilización. Diariamente se seleciona una muestra de vigas para ser evaluadas con un método de ensayo que mide la resistencia y da el visto buena de calidad para su venta. El método no es perfecto dado que, solo al $90\,\%$ de las vigas que cumplen con la resistencia mínima, les da el visto bueno de calidad. Se sabe además que, la probabilidad que una viga cualquiera reciba el visto bueno de calidad es de 0.73.

$\cap$

¿Cuál es la probabilidad que una viga no cumpla con la resistencia mínima y reciba el visto bueno de calidad?

A: "Viga tiene resistencia mínima"

$P(A) = 0.8 \Rightarrow P(\bar{A}) = 0,2$

B: "Ensayo da visto bueno"

$P(B) = 0.73 \qquad P(\bar{B}) = 0.27$

$P(VB) = 0.73$

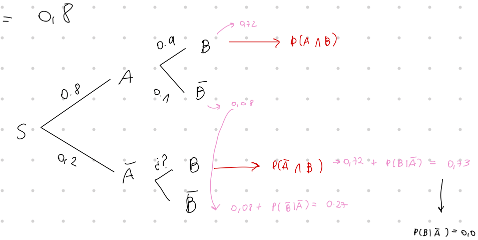
$P(R.M) = 0,8$

$P(B|A) = 0.9$

↓

ley de complemento

↪ $P(\bar{B}|A) = 0.1$



Teo PROB TOTALES

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$ → $P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$

$\therefore P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$

$= P(B) - P(B|A) \cdot P(A)$

$= 0,73 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,01$

Pregunta 4

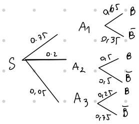
Como han de saber en la primera ronda de vacunación (dos dosis) se uso masivamente Coronavac (del laboratorio Sinovac) en el $75\,\%$ de las personas. Un $20\,\%$ recibió sus dos dosis de Pfizer y los restante otras (moderna, cancino, etc). Hoy, en el proceso de la 3era vacuna, los primeros (Sinovac) mayoritariamente han asistido, ya que el $65\,\%$ ha recibido su 3era vacuna. En cambio, la mitad de los pfizer han concurrido y de los que recibieron otras, solo 1 de cada 4 han concurrido. Si una persona llega a recibir su tercera dosis, ¿cuál es la probabilidad que en la primera ronda haya recibido Pfizer?

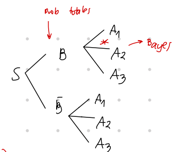
A_1 : " 1era ronda sinovac" $\longrightarrow$ $P(A_1) = 0.75$

A_2 : " 1era ronda pfizer $\longrightarrow$ $P(A_2) = 0{,}20$

A_3 : " 1era ronda otras " $\longrightarrow$ $P(A_3) = 0{,}05$

B: Recibir vacuna





$$\underbrace{P(A_2|B)}_{\frac{P(B\cap A_2)}{P(B)}} = \frac{\overbrace{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}^{P(B\cap A_2)}}{\underbrace{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}_{P(B\cap A_1)} + \underbrace{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}_{P(B\cap A_2)} + \underbrace{P(B|A_3)\cdot P(A_3)}_{P(B\cap A_3)}} \Big\} P(B)$$

$$= \frac{0{,}2\cdot 0{,}5}{0{,}75\cdot 0{,}65 + 0{,}2\cdot 0{,}5 + 0{,}05\cdot 0{,}25} = 0{,}1\overline{6}$$

Pregunta 4

Actualmente la población de cinco años o más ha tenido la oportunidad de inocularse (vacunarse) contra el COVID y según estadísticas provenientes del MINSAL el $10\,\%$ no se ha vacunado, el $5\,\%$ tiene una dosis, el $25\,\%$ dos dosis y el $60\,\%$ dos dosis + refuerzo. Suponga que independientemente del estado de vacunación, la exposición al COVID ocurre en el $20\,\%$ de los casos. La probabilidad de contagio en el caso que una persona este expuesta al virus es de `[B1]` si presenta dos dosis + refuerzo, `[B2]` si solo tiene dos dosis, `[B3]` cuando tiene una dosis y `[B4]` en el caso que no este vacunado.

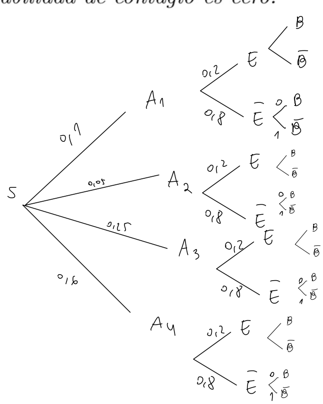
¿Cuál es la probabilidad que una persona se contagie de covid?

Nota: Si no hay exposición al COVID, entonces la probabilidad de contagio es cero.

Solución

Consideremos los siguientes eventos:

- A_1: No vacunado.
- A_2: Solo una dosis.
- A_3: Solo dos dosis.
- A_4: Dos dosis + refuerzo.
- E: Persona expuesta al virus.
- B: Persona se contagia.

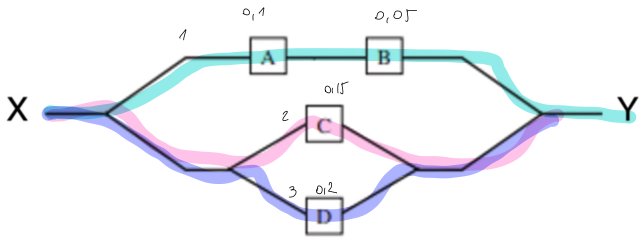


¿B?

$P(B) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4 + 0 + 0{,}05\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5 + 0 +$
$0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 + 0 + 0{,}6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1 + 0 = 0{,}05$

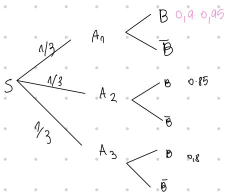
Pregunta 2

En tiempos de guerra, ir de una ciudad a otra es riesgoso. Suponga que desea ir de la ciudad X a la ciudad Y, para lo cual tiene tres vías alternativas, tal como se muestra en el esquema. En esas vías hay controles que se han identificado como A, B, C y D, los cuales funcionan en forma independiente. Suponga que los controles impiden el paso con probabilidad 0.10, 0.05, 0.15 y 0.20, respectivamente.



Si usted previamente escoge una ruta al azar, ¿cuál es la probabilidad de llegar a la ciudad Y?

A_i = "Ruta i" ; B: pasar



$P(B) = \frac{1}{3} \{ 0,9 \cdot 0,95 + 0,85 + 0,8 \}$