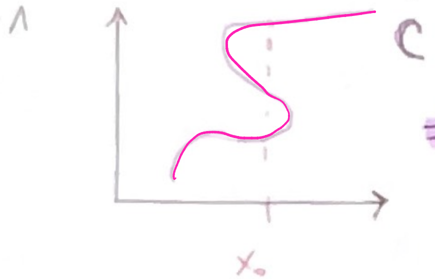
Funciones vectoriales

$f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow 2 \text{ ó } 3$

intervalo

⓪ - ②

$\Rightarrow f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \quad t \in I$ en $\mathbb{R}^2$



$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{Imagen}}_{\text{curva}}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$

c es una curva si $c = f(I)$

$\Rightarrow$ La función que describe una curva se conoce como parametrización. $\rightarrow$ Ej: $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \rightarrow (\cos(t), \text{sen}(t))$ (x, y, z)

DESPEJAR

ES importante dejar todo en $f(t)$

$\Rightarrow$ Esta nos permite definir continuidad si y solo si:

$r: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $a \in I$

$$\lim_{t \to a} r(t) = r(a)$$

$\Rightarrow$ Decimos que $c \subseteq \mathbb{R}^2$ es una curva si c es la imagen de una función vectorial.

Parametrización en coordenadas polares $f(\theta) = r \quad F(\theta, r) = 0$

Una curva polar en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto en $\mathbb{R}^2$ de todos los (r, θ) tal que $F(r, \theta) = 0$.

De polarea a coordenadas cartesianas $\Rightarrow$ dejar todo en x e y.

Simetrías

1) Con respecto al eje x: vale lo mismo si remplazamos θ por $-\theta$.
2) Con respecto al origen: vale lo mismo si remplazamos r por $-r$.
3) Con respecto a y: vale lo mismo si se remplaza $\pi - \theta$ por θ

Derivada

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, $t \in I$

$$r'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$ vector

$\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ corresponde al vector tgt. unitario a la curva r

"rapidez"

Ecuación de recta tangente a la curva r en r(t)

Por def: recta que pasa por r(t) tq

$P - r(t) = \lambda\, r'(t) \Rightarrow x = r_1(t) + \lambda y_1(t)$

$y = r_2(t) + \lambda y_2(t)$

$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (x_0', y_0', z_0')$

Teo: Sea $r: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) curva dada por

$r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ r_1, r_2 y r_3 $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow r'(t) = (r_1'(t), r_2'(t), r_3'(t))$ cuando las derivadas existen

Recordar r $\Rightarrow$ Paramétricas $\Rightarrow$ $x = a + b\lambda$ $z = e + f\lambda$

$y = b + d\lambda$

Reglas de derivación

Teo: Sea $u, v: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) curvas

1) $\frac{d}{dt}(u(t) + v(t)) = \frac{d}{dt} u(t) + \frac{d}{dt} v(t)$

2) $\frac{d}{dt} \lambda u(t) = \lambda \frac{d}{dt} u(t)$

3) $\frac{d}{dt}(f(t) \cdot u(t)) = f'(t) \cdot u(t) + f(t) \cdot u'(t)$

4) $\frac{d}{dt}(\langle v(t), u(t) \rangle) = \langle v'(t), u(t) \rangle + \langle v(t), u'(t) \rangle$

5) $\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$

P. punto $\to$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$x \circ y = \langle x, y \rangle$

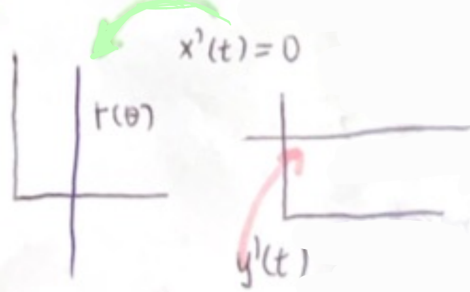
P. cruz $x \times y$

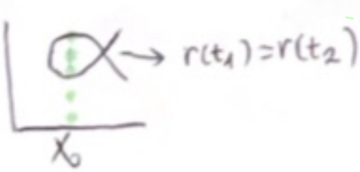
$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\hat{i} - (x_1 y_3 - x_3 y_1)\hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\hat{k}$

ecuación parametrizada de la recta tangente

$$\hat{y} = \underbrace{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}_{} \bar{x} + y(t) - x(t) \cdot \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

recordar, n se puede sacar por $mx + n = y$.





$r: I \subseteq \mathbb{R}$