$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{si } -p+1>0 \quad p<1 \\ +\infty & \text{si } -p+1<0 \quad p>1 \end{cases}$$

Proposición

La integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ es $\begin{cases} \text{convergente para } p>1 = \dfrac{1}{p-1} \\ \text{divergente para } p\le 1 \end{cases}$

Resumen

★ Definición sucesiones

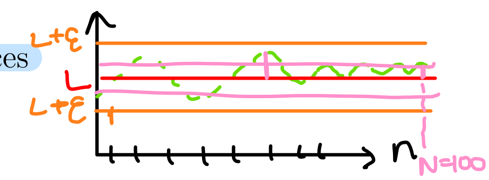
- Explícita: $a_n = f(n)$
- Recursiva: $a_{n+1} = f(a_n)$ a_1 dado → $a_1 = 1$ $a_{n+1} = 2a_n$

$a_{n+1} = f(a_n)$ → INDUCCIÓN

★ Convergencia

- Limite a un numero real: Una sucesion $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite L y lo anotamos como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ si se cumple que:
para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge N$ entonces

$$|a_n - L| < \epsilon.$$



- Limite al infinito: Decimos que una sucesion $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite infinito y lo anotamos como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ si se cumple que:
para todo $A \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge N$, entonces

$$a_n > A.$$

★ Propiedades

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ g función continua. lim a_n

g(a_n)

lim a_n = L

g(L)

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Cálculo II MAT1620 2º Semestre 2021 - Sección 7
Ayudante: Doménica Silva camila.silva@uc.cl

★ **Teo 1** Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $a_n = (-1)^n \cdot |algo|$

★ **Teo 2** Si una sucesión es acotada y monótona, entonces es convergente

creciente o decreciente

Resumen

★ **Series**

- $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, si la sucesión $\{S_n\}_n$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ con $S \in \mathbb{R}$, entonces la serie $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ es convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ o no existe, la serie es divergente → Prueba de la convergencia

  Contrarrecíproco falso.

★ **Prueba de la integral** Si $f(x)$ decreciente, continua y positiva en $[1, \infty[$ y $a_n = f(n)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si $\int_1^{\infty} f(x)dx$

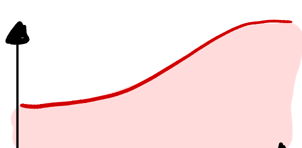
Demostrar

★ **Prueba por comparación** Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series con términos positivos.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $b_n \geq a_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $b_n \geq a_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente

★ **Prueba por comparación al límite** Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ series con términos positivos. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C$,

- Si C es finito y mayor que 0, ambas convergen o divergen.
- Si $C = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $C = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente



f(x) continua

Consideremos la sucesión $a_n = a r^n$.

$$\sum_{n=1}^{K} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \Leftrightarrow |r| < 1 \Rightarrow \underline{\underline{CV}}$$

Resumen

★ **Series alternantes:**

Para una serie alternante de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, con $b_n > 0$. Si $b_{n+1} \leq b_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, la serie es convergente

★ **Convergencia absoluta:**

- Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es llamada absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.
- Una serie se llama condicionalmente convergente si es convergente pero no absolutamente.
- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces tambien lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

★ **Prueba de la razón:**

- Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = L = 1$, la prueba de la razón no es concluyente.

★ **Prueba de la raíz:**

- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.