PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2022

Ecuaciones Diferenciales - MAT1640
Ayudantía 10

Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

1. (a) Resuelva el siguiente sistema con valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   (b) Resuelva el siguiente sistema con valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Considere un sistema de 3 tanques con una mezcla homogénea de sal con agua. Denote por $x_i(t)$, $V_i(t)$ la cantidad de sal y el volumen de agua de cada tanque respectivamente. Al primer tanque entran 10 [L/s] de agua fresca, éste conduce 10 [L/s] al segundo tanque. Este otro estanque libera 10 [L/s] al tercero, y se extraen 10 [L/s] de este último.

   Si las condiciones iniciales son:

$$\begin{array}{ccccc} V_1(0) = 30[L] & , & V_2(0) = 60[L] & , & V_3(0) = 30[L] \\ x_1(0) = 400[g] & , & x_2(0) = 200[g] & , & x_3(0) = 100[g] \end{array}$$

   Determine la concentración de sal en el tercer tanque pasados 5 minutos. Resuelva la concentración del segundo tanque en el momento en que el tercero se vacía.

3. Resolver

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

4. Consideremos la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = 0$$

   Resuélvala transformándola en un sistema para luego resolver dicho sistema por alguno de los métodos matriciales visto en clases. Indique también si existe alguna solución particular $x(t)$, que satisfaga $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \infty$

Repaso interrogación 2

5. Dado que $y = \operatorname{sen} x$ es una solución de la ecuación

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

encuentre la solución general de dicha ecuación.

6. Resuelva usando coeficientes indeterminados:

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + x^2$$

7. Resuelva usando variación de parámetros

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$$

8. Determine la ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado descrito por

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 9x = 2\cos(3t) \quad ; \quad x(0) = 1 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Describa (en palabras) el comportamiento del sistema cuando $t \to \infty$.

$x' = A x$ $\qquad$ $x(t) = v e^{\lambda t}$

$\lambda = p \pm q i$ $\Rightarrow$ $x_1 = e^{pt} \left(\vec{a} \cos(qt) - \vec{b} \operatorname{sen}(qt) \right)$

$\vec{v} = a \pm bi$ $\qquad$ $x_2 = e^{pt} (\vec{b} \cos(qt) + \vec{a} \sin(qt))$

Sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

1. (a) Resuelva el siguiente sistema con valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$
$$= (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$
$$\lambda = 4 \qquad \lambda = -1$$

$\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$-3a + 2b = 0$$
$$3a = 2b$$
$$b = b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3\, b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vector propio

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$a + b = 0$$
$$a = b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vector propio

$$x(t) = e^{4t} c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-t} c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 2 e^0 - c_2 e^0 = 0 \Rightarrow 2c_1 - c_2 = 0 \qquad -\frac{8}{5} - c_2 = 0$$
$$3 c_1 e^0 + c_2 e^0 = -4 \qquad 3c_1 + c_2 = -4$$
$$5c_1 = -4 \qquad c_1 = -\frac{4}{5} \Rightarrow c_2 = -\frac{8}{5}$$

(b) Resuelva el siguiente sistema con valor inicial

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 9 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -9 + \lambda^2 + 36$$
$$= \lambda^2 + 27 \Rightarrow \lambda = \pm 3\sqrt{3}\, i$$

elegimos positivo o negativo

Elegimos positivo.

$\lambda = 3\sqrt{3}\, i$

$$\begin{pmatrix} 3 - 3\sqrt{3} i & 9 \\ -4 & -3-3\sqrt{3} i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{3+3\sqrt{3}i}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 36 & 27 + 27\sqrt{3} i \\ -4 & -(3 + 3\sqrt{3} i) \end{pmatrix} \sim \overset{f_2 + \frac{1}{9} f_1}{\begin{pmatrix} 36 & 9(3 + 3\sqrt{3} i) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 + 3\sqrt{3} i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4a + (3 + 3\sqrt{3} i) b = 0$$
$$4a = (-3 - 3\sqrt{3} i) b$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-3-3\sqrt{3}\,i)\,b}{4} \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} \frac{-3-3\sqrt{3}\,i}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{3}}{4} \\ 0 \end{pmatrix} i \qquad b = b$$

La solución general está dado por la función real

$$\mathbf{x}(t) = c_1\Re(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1) + c_2\Im(e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1)$$

para toda t.

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{R} \;\; \underbrace{\begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{im} \right) \cdot e^{3\sqrt{3}\,i}$$

$$x_1(t) = C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\cos(3\sqrt{3}\,t) - \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{sen}(3\sqrt{3}\cdot t) \qquad = \cdot \cos(3\sqrt{3}) + \operatorname{sen}(3\sqrt{3}\,i)$$

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(3\sqrt{3}\,t) + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\operatorname{sen}(3\sqrt{3}\,t) \qquad \Rightarrow x_h(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

2. Considere un sistema de 3 tanques con una mezcla homogénea de sal con agua. Denote por $x_i(t)$, $V_i(t)$ la cantidad de sal y el volumen de agua de cada tanque respectivamente. Al primer tanque entran 10 [L/s] de agua fresca, éste conduce 10 [L/s] al segundo tanque. Este otro estanque libera 10 [L/s] al tercero, y se extraen 10 [L/s] de este último.

   Si las condiciones iniciales son:

$$\begin{array}{ccccc} V_1(0) = 30[L] & , & V_2(0) = 60[L] & , & V_3(0) = 30[L] \\ x_1(0) = 400[g] & , & x_2(0) = 200[g] & , & x_3(0) = 100[g] \end{array}$$

   Determine la concentración de sal en el tercer tanque pasados 5 minutos. Resuelva la concentración del segundo tanque en el momento en que el tercero se vacía.

3. Resolver

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \quad \lambda = -1, \quad \lambda = 5$$

$\boxed{\lambda = -1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a = b - c \\ b = b \\ c = c \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 5}$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a = c \\ b = -c \\ c = c \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

4. Consideremos la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = 0$$

Resuélvala transformándola en un sistema para luego resolver dicho sistema por alguno de los métodos matriciales visto en clases. Indique también si existe alguna solución particular $x(t)$, que satisfaga $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \infty$

$$x_1 = x =$$
$$x_2 = x' = x_1'$$
$$x_3 = x'' = x_2'$$

$$x_3' = x_3 - x_2 + x_1$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \quad \lambda = 1, \quad \lambda = \pm i$$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$a = b - c$
$b = b$
$c = c$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -1-i & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$

$a = -c$
$b = -ci$
$c = c$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}(V_1)} \quad \underbrace{i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{im(V_1)}$$

$-i \quad 1 \quad (-i)$
$-1 \quad -i$

$$e^{it}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow e^{it}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(\cos(t) + i\,sen(t))$$

$$e^{it}\, i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}(i\cos(x) - sen(t))$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} sen(t)$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} sen(t)$$

$$x(t) = c_1 \mathbb{R}(e^{\lambda_1 t} V_1) + C_2 \, Im(e^{\lambda_1 t} V_1)$$

$$= c_1\left(\cos(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - sen(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + C_2\underbrace{\left(\cos(x)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + sen(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{x_3}$$

$$x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$\lim_{t \to \infty} x = \infty$$

$$\lim_{t \to -\infty} \underbrace{C_1 e^{t}}_{0} + \underbrace{C_2 \cos(t)}_{\text{oscila}} + \underbrace{C_3\, sen(t)}_{\text{oscila}} \quad NE$$

$t \to -\infty$

6. Resuelva usando coeficientes indeterminados:

$y_p = Ae^{-2x} + (B + Cx + Dx^2)$
$= Axe^{-2x} + (B + Cx + Dx^2)$

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + x^2$$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+2)(r+1) = 0 \quad \Rightarrow r = -2 \quad r = -1$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$y_p = Ae^{-2x} + (Bx^2 + Cx + D)$

$y_p = Axe^{-2x} + Bx^2 + Cx + D$

7. Resuelva usando variación de parámetros

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3 \quad 2x \rightarrow \quad y'' - \frac{x(x+2)}{x^2} + \frac{(x+2)}{x^2}y = 0$$

$v = \ln(x)$

Por inspección:

$y = x$

$y' = 1$

$y'' = 0$

$-x^2 - 2x + x^2 + 2x = 0$

homogénea

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = xy_2' - y_2 = e^{-\int -\frac{x(x+2)}{x^2}\,dx}$$

$$\begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} \qquad = e^{\int \frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}\,dx}$$

$$xy_2' - y_2 = e^{\int 1 + \frac{2}{x}\,dx}$$

$$= e^{x + \ln(x^2)}$$

$$xy_2' - y_2 = e^x \cdot x^2$$

$$y_2' - \frac{y_2}{x} = xe^x$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{(y_1)^2}\,dx$$

$$= x \int \frac{x^2e^x}{x^2}\,dx = \underbrace{xe^x}_{y_2}$$

$$W = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & xe^x + e^x \end{vmatrix} = x^2e^x + xe^x - xe^x = x^2e^x$$

$$u_1 = -\int \frac{2\cancel{x} \cdot \cancel{xe^x}}{\cancel{x^2e^x}}\,dx = -2x$$

$$u_2 = \int \frac{x \cdot 2x}{x^2e^x} = \int 2e^{-x} = -2e^{-x}$$

$$y_p(x) = u_1 \cdot y_1 + u_2 y_2$$
$$= -2x \cdot x - 2e^{-x} \cdot xe^{x} = -2x^2 - 2x$$
$$y = C_1 x + C_2 x e^x - 2x^2 - 2x = C_1 x + C_2 x e^x - 2x^2$$

8. Determine la ecuación de movimiento para un sistema no amortiguado descrito por

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 9x = 2\cos(3t) \quad ; \quad x(0) = 1 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Describa (en palabras) el comportamiento del sistema cuando $t \to \infty$.

$$x'' + 9x = 2\cos(3t)$$
$$r^2 + 9 = 0$$
$$r = \pm 3i$$
$$\Rightarrow x_h(t) = c_1 \underbrace{\cos(3t)}_{y_1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen}(3t)}_{y_2}$$
$$x_p(t) = At\cos(3t) + Bt\operatorname{sen}(3t)$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(3t) & \operatorname{sen}(3t) \\ -3\operatorname{sen}(3t) & 3\cos(3t) \end{vmatrix} = 3\cos^2(3t) + 3\operatorname{sen}^2(3t) = 3$$

$$u_1 = -\int \frac{\operatorname{sen}(3t) \cdot 2\cos(3t)}{3}\, dt =$$
$$= -\frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(6t)\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{\cos(6t)}{6}\right] = \frac{\cos(6t)}{6}$$

$$u_2 = \int \frac{2\cos(3t)\cdot\cos(3t)}{3}\, dt = \frac{\cancel{2}}{3}\int \frac{1+\cos(6t)}{\cancel{2}}\, dt = \frac{1}{3}\left[t + \frac{\operatorname{sen}(6t)}{6}\right] = \frac{t}{3} + \frac{\operatorname{sen}(6t)}{18}$$

$$x_p = \frac{\cos(6t)}{6}\cdot\cos(3t) + \left[\frac{t}{3} + \frac{\operatorname{sen}(6t)}{18}\right]\operatorname{sen}(3t) \Rightarrow x_p = \frac{\cos 3t}{18} + \frac{t\sin 3t}{3}$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\frac{\cos(3t)}{18}}_{\text{periodica}} + \underbrace{\frac{t\operatorname{sen}(3t)}{3}}_{\text{entonces se va a infinito}} + \underbrace{c_1\cos(3t) + c_2\operatorname{sen}(3t)}_{\text{periodica}}$$