Ejemplo 1

La transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geq 0$, la transformada de Laplace de f es la función F definida como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

Recuerden que esta integral impropia converge si el límite

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

existe, lo cual puede depender del parámetro s.

La transformada inversa

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, tenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

la transformada inversa de Laplace.

Linealdad de la transformada de Laplace

Si a y b son constantes, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^\infty (af(t)+bg(t))\,\mathrm{d}t \\ &= a\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t + b\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

para toda s tal que las transformadas de Laplace tanto de f como de g existen.

La transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geq 0$, la transformada de Laplace de f es la función F definida como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

Ejemplo 1

$f(t) = t^\alpha$ α constante, real

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha \, dt$$

Definimos la variable $u = st$

$du = s\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s}\, du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \, du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1)$$

$\alpha + 1 > 0$

$\alpha > -1$

La función de Gamma

Definición La *función de Gamma* está definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

para $x > 0$.

Características

1. La función de Gamma es continua para $\boxed{x} > 0$.
2. $\boxed{\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)}$ para $a > 0$ real.
3. $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \geq 0$ entero.
4. $\Gamma(1) = 1$.
5. $\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.}$

Ejemplo 2

$f(t) = \sqrt{t} = t^{1/2}$ $a = 1/2$ (reemplazamos) $s > 0$

$$F(s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{s^{1/2+1}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{s^{3/2}} = \frac{1}{2} s^{-3/2} \sqrt{\pi}$$

Funciones continuas por tramos

Definición Se dice que la función $f(t)$ es *continua por tramos* en el intervalo acotado $a \leq t \leq b$ siempre que $[a, b]$ pueda subdividirse en varios subintervalos finitos colindantes, de tal manera que:

1. $f(t)$ sea continua en el interior de cada uno de estos subintervalos; y
2. $f(t)$ tenga un límite finito conforme t se aproxime a cada extremo de cada subintervalo desde su interior.

Características

- Se dice que $f(t)$ es continua por tramos para $t \geq 0$ si es continua por tramos en todo subintervalo acotado de $[0, +\infty)$.
- Una función continua por tramos tiene sólo discontinuidades simples (si las hubiera) y únicamente en puntos aislados. En estos puntos el valor de la función experimenta un salto finito. El *salto* de $f(t)$ en el punto c está definido como $f(c^+) - f(c^-)$, donde $f(c^+) = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(t+\epsilon)$ y $f(c^-) = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(t-\epsilon)$.
- Una función continua por tramos es acotada en cada subintervalo cerrado. Por lo tanto, la función $f(t)$ sólo puede ir hacia infinita cuando t tiende a infinita.

Ejemplo 3

La función Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

No es necesario que la función sea continua, basta con que sea continua a tramos

escalon unitaria no es continua en $t = 0$

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt$$

$$= \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{H(t-\alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st} H(t-\alpha)\, dt$$

$$= \int_0^\alpha e^{-st} \underbrace{\overbrace{H(t-\alpha)}^{\leq 0}}_{0} + \int_\alpha^\infty e^{-st} \underbrace{H(t-\alpha)}_{1}\, dt$$

$$= \int_\alpha^\infty e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_{t=\alpha}^{\infty} = \frac{1}{s} e^{-\alpha s} \quad s > 0$$

$H(t-\alpha)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$ porque

1. Definimos los subintervalos $I_1 = [0,\alpha]$ $I_2 = [\alpha, \beta]$, $\beta > \alpha$ cualquiera $H(t-\alpha)$ continua en $[0,\alpha)$ y en (α,β)

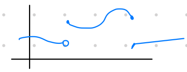
2. $\lim_{t \downarrow a} H(t-a) = 0$

$\lim_{t \uparrow a} H(t-a) = 0$

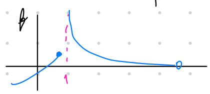
$\lim_{t \downarrow a} H(t-\alpha) = 1$

$\lim_{t \uparrow b} H(t-a) = 1$

Ejemplo 4

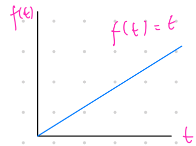


continua por tramos



$\lim_{t \to 1} f(t) = \infty$

no es continua a tramos



si continua tramos

Para cualquier intervalo acotado $[a,b]$

El límite $\lim_{t \to a} f(t) = a$ y $\lim_{t \to b} f(t) = b$ existen

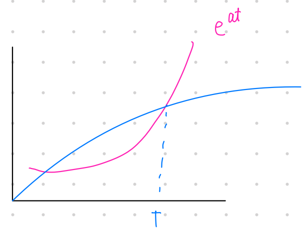
Funciones de orden exponencial

Definición Se dice que la función $f(t)$ es de *orden exponencial* conforme $t \to \infty$ si existen constantes no negativas M, c y T tales que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \text{para} \quad t \geq T.$$

Ejemplos

- Cada polinomio es de orden exponencial.
- Exponenciales e^{at} para a constante es de orden exponencial.
- Exponenciales e^{at^2} son de orden exponencial solo si $a \leq 0$.



$\lim_{t \to \infty} te^{-t} = 0$ entonces, existen constante M y T tal que $|t| \, e^{-t} \leq M \quad \forall \, t \geq T$

Entonces $|t| \leq Me^{t}$ para $t \geq T$

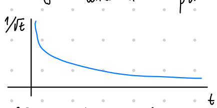
$c = 1$

Ejemplo 6

$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$

$F(s) = \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) = \dfrac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{s^{-1/2+1}} = \dfrac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}} \quad s > 0$

$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ no es continua por tramos



$\lim_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \infty$ no es continua por tramos en intervalo $[0,b]$

Demostración

Sabemos $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$ porque es de orden exponencial

Además, $|f(t)| \leq M_2$ para $0 \leq t \leq T$

Entonces existe una constante M tal que $|f(t)| \le Me^{ct}$ para $t \ge 0$

Luego,

$$|F(s)| = \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right|$$
$$\le \int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \quad \text{desigualdad triangular.}$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt$$
$$\le \int_0^\infty e^{-st} Me^{ct}\, dt$$
$$= M \int_0^\infty e^{-(s-c)t}\, dt = M \frac{1}{s-c} \quad \text{si} \quad s > c$$

Existencia de la transformada de Laplace

Teorema Si la función $f(t)$ es

1. continua por tramos para $t \geq 0$, y
2. de orden exponencial cuando $t \to \infty$, es decir $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$;

entonces su transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para toda $s > c$.

Condiciones suficientes

Las hipótesis del teorema de existencia son condiciones suficientes, no necesarias. Por ejemplo $f(t) = 1/\sqrt{t}$ no es continua por tramos (en $t = 0$), pero aún así

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Entonces $|F(s)| \le M \frac{1}{s-C}$ por ese la integral converge y la transfomada existe

Consecuencia

$$\lim_{s\to\infty} |F(s)| = \lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-C} = 0$$

Obsevación

La función $F(s) = \frac{s}{s+1}$ no puede ser una tranformada de La place pq $\lim_{s\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = 1$

Entonces

$$|F(s)| \le M \frac{1}{s-C}$$

por eso la integral converg y la transformada existe