Estudio para examen

Revisión tarea 3

Sup x^* e $\hat{y}$ soluciones

min $c^T x$ $\quad Ax \geq b$ $\quad$ dual $\quad$ máx $b^T y$ $\quad$ D)

$A^T y = c$

$y \geq 0$

x^* factible

P') mín $c^T x$

$Ax \geq b$

$d^t x \geq k$

D') Máx $b^T y + kz$

$A^T y + dz = c$

$y \geq 0$

$z \geq 0$

y^* factible para D) $\Rightarrow A^T y^* = c,\ y^* \geq 0$

Por dualidad fuerte, $c^T c^* = b^T y^*$. Tomando

$w = (y^*, 0)$

w factible para D', v.o = $b^T y^*$

Si P' infactible $\Rightarrow$ Dual no acotado o infactible

$b^T y \leq c^T x$

pero sabemos que $w = (y^*, 0)$ es factible para D'

(b) **(12 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$
\begin{aligned}
\text{mín } & ax_1 + bx_2 \\
\text{s.a. } & 5x_1 - 3x_2 \geq c \quad y_1 \\
& 3x_1 - 4x_2 \leq d \quad y_2 \\
& x_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Sabiendo que $a+b+c+d = 31$, encuentre la solución óptima y los valores de los parámetros a, b, c y d para que el problema dual tenga como solución óptima a (5,-10) y valor de la función objetivo igual a $5c$.

$\Rightarrow$ Dual: $\quad$ máx $cy_1 + dy_2$

$5y_1 + 3y_2 \leq a \qquad y_1 \geq 0$

$-3y_1 - 4y_2 = b \qquad y_2 \leq 0$

$5c - 10d = 5c$

$\Rightarrow d = 0$

$-3 \cdot 5 - 4 \cdot -10 = -15 + 40 = \boxed{25 = b}$

$a + 25 + c = 31$

$\boxed{a + c = 6}$

$ax_1 + bx_2 = 5c =$

$(6-c)x_1 + 25x_2 = 5c$

$x_1(5y_1 + 3y_2 - a) = 0 \quad$ 25 -30 $-a$

$x_2(-3y_1 - 4y_2 - b) = 0 \quad$ -15 $+40$ -25

$y_1(\underbrace{5x_1 - 3x_2 - c}_{=0}) = 0 \Rightarrow$

$y_2(\underbrace{3x_1 - 4x_2 - d}_{=0}) = 0$

$\boxed{3x_1 = 4x_2}$

$\boxed{c = 5x_1 - 3x_2}$

$(6-c)x_1 + 25x_2 = 5c$

$x_2 = \dfrac{5c + (c-6)x_1}{25}$

$ax_1 + 25x_2 = cy_1 + \cancel{dy_2} = 5c$

Por TMC $\Rightarrow$ $5x_1 - 3x_2 = c$

$3x_1 - 4x_2 = 0$

$\boxed{x_1 = \frac{4}{3}x_2}$

$\frac{20}{3}x_2 - \frac{9x_2}{3} = c$

$\frac{11x_2}{3} = c$

$x_2 = \frac{3c}{11}$

$x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{11} \cdot c$

$\boxed{x_1 = \frac{4c}{11}}$

$a + c = 6$

$a = 6 - c$

$ax_1 + 25x_2 = 5c$

$a \cdot \frac{4c}{11} + 25 \cdot \frac{3c}{11} = 5c$

$4a + 75 = 55$

$4a = -20$

$\boxed{a = -5}$

Sea $P)$ un problema no lineal con restricciones de igualdad y desigualdad:

$$
\begin{aligned}
P) \quad \min \quad & f(x) \\
\text{s.a.} \quad & g(x) \leq a \\
& h(x) = b
\end{aligned}
$$

Este problema se puede transformar a un problema irrestricto de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
P) \quad \min \quad & f(x) \\
\text{s.a.} \quad & g(x) \leq a \\
& h(x) = b
\end{aligned}
\quad \sim \quad \min \quad \mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = f(x) + \mu(g(x) - a) + \lambda(h(x) - b)
$$

Resumen KKT

Para que un punto crítico sea óptimo, se tienen que cumplir las condiciones de Lagrange y KKT:

Lagrange

(1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$

(2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$

(3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \leq 0$

(4) $\mu \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0$ $\quad$ o está activa, o $\mu = 0$ $\quad$ implica que está activa

(5) $\mu \geq 0$

Si, además, hay naturaleza de variables ($x \geq 0$), entonces se cambia esta restricción a una de $\leq$:

$$-x \leq 0$$

y se trabaja como una restricción más de desigualdad: $g(x) = -x \leq 0$

Regularidad y Singularidad

Lagrange y KKT solo encuentran puntos críticos regulares, no singulares. Para encontrar los puntos singulares hay que buscar puntos en los que el Jacobiano no es de rango completo.

Nota: Al resolver problemas se deben buscar puntos regulares con condiciones KKT y aparte puntos singulares analizando la matriz Jacobiana. El mejor valor en la función objetivo es el óptimo.

Matriz Jacobiana

$$
J(x) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_i(x) \end{pmatrix}
$$

Suficiencia

Supongamos que el problema $P)$ es convexo. Si x^* factible es un punto que satisface las condiciones de KKT (es regular), ese punto es mínimo global del problema.