Problema 1

Considere el siguiente modelo de optimización:

$$
\begin{array}{llrl}
P) & \text{máx} & 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 & \\
 & s.a & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 10000 \text{ (recurso } b_1) \\
 & & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 4000 \text{ (recurso } b_2) \\
 & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Se sabe que la solución óptima es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 4000$.

a) Determine, sin resolver el problema dual por Simplex, la solución y el valor óptimo del problema dual a (P).

b) ¿Cuál es la tasa de incremento en la función objetivo si varía el lado derecho de la primera y segunda restricción respectivamente (considerando cambios marginales)? Interprete a qué se deben estos valores.

c) ¿Cuál es el rango en el que puede variar el lado derecho de la segunda restricción de modo que la base siga siendo óptima?

d) ¿Cambia la solución óptima si el coeficiente de la función objetivo asociado a la variable x_3 cambia de 7 a 5? Justifique su respuesta e indique, si es que la solución cambia, cómo la obtendría (sólo indíquelo).

a) Determine, sin resolver el problema dual por Simplex, la solución y el valor óptimo del problema dual a (P).

Como nos dieron la solución del primal, podemos ocupar el THC para calcular la solución del dual de P). Para esto, necesitamos, primero, nuestro problema dual:

$$
\begin{array}{llrl}
P) & \max & 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 & \\
 & s.a & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 10000 \text{ (Recurso } b_1) \\
 & & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 4000 \text{ (Recurso } b_2) \\
 & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{llrl}
D) & \min & 10000y_1 + 4000y_2 & \\
 & s.a & y_1 + 2y_2 & \geq 2 \\
 & & 3y_1 + 2y_2 & \geq 12 \\
 & & 2y_1 + y_2 & \geq 7 \\
 & & y_1, y_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$y_1 (x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10.000) = 0$

$y_2 (2x_1 + 2x_2 + x_3 - 4000) = 0$

$x_1 (y_1 + 2y_2 - 2) = 0$

$x_2 (3y_1 + 2y_2 - 12) = 0$

$x_3 (2y_1 + y_2 - 7) = 0$

$x_1 = 0 = x_2 ; \; x_3 = 4000$

$y_1 (0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4000 - 10.000) = 0$

$y_1 \cdot -2000 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 0$

$x_3 (2y_1 + y_2 - 7) = 0$

$0 + y_2 - 7 = 0$

$y_2 = 7$

Entonces, la solución óptima de D) es:

$$y^* = \binom{0}{7}$$

Y nuestro valor óptimo es:

$$w^* = 10000 \cdot 0 + 4000 \cdot 7 = 28000$$

b) ¿Cuál es la tasa de incremento en la función objetivo si varía el lado derecho de la primera y segunda restricción respectivamente (considerando cambios marginales)? Interprete a qué se deben estos valores.

Para poder ver esto, podemos hacer un análisis utilizando los precios sombra:

Este se utiliza para las variables duales e indica, en términos marginales, cuánto cambia el valor óptimo de P) dado un cambio en el recurso b_i:

$$y_i = \frac{\triangle z^*}{\triangle b_i} = \pi_i = c_B^T \cdot B^{-1}$$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 7 \rightarrow b_1 = 10.000$, $b_2 = 4.000$

porque la segunda restricción es activa

$y_1 = 0 \Rightarrow \Delta z = 0 \cdot \Delta b_1$

$y_2 = 7 \Rightarrow \Delta z = 7 \cdot \Delta b_2$ } un cambio de 1 b_2 $\Rightarrow$ afecta en 7 unidades

c) ¿Cuál es el rango en el que puede variar el lado derecho de la segunda restricción de modo que la base siga siendo óptima?

Para poder ver esto, debemos fijarnos que se siga cumpliendo el criterio de factibilidad si variamos b_2:

$\rightarrow$ forma estándar:

$$\min \; -2x_1 - 12x_2 - 7x_3$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10.000$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$\bar{b} = B^{-1} b$

① $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10.000$

$0 + 0 + 2 \cdot 4000 + x_4 = 10.000$

$x_4 = 2.000$

$\hookrightarrow$ variable básica

2) $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4000$

$0 + 0 + 4000 + x_5 = 4000$

$\Rightarrow x_5 = 0$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10.000 \\ 4000 + b_2 \end{pmatrix} \geq 0$

$4000 + b_2 \geq 0$

$b_2 \geq -4000$

$10.000 - 8000 - b_2 \geq 0$

$2000 \geq b_2$

l) ¿Cambia la solución óptima si el coeficiente de la función objetivo asociado a la variable x_3 cambia de 7 a 5? Justifique su respuesta e indique, si es que la solución cambia, cómo la obtendría (sólo indíquelo).

$c_3 = 7 \Rightarrow c_3 = 5$

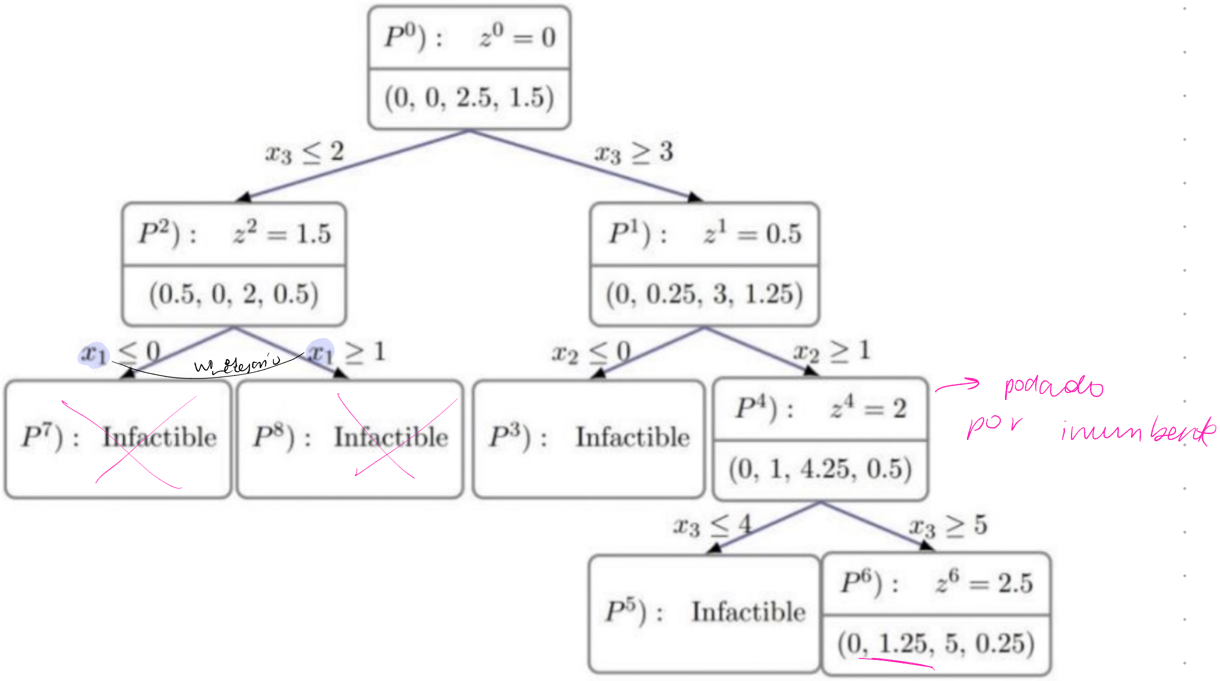
$\bar{c}_R = c_R^T - c_B^T B^{-1} R \geq 0$

Se tienen el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
P) \quad \text{mín} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
s.a \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{5}{2} \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = \frac{3}{2} \\
& x_1, x_4 \geq 0 \\
& x_2, x_3 \in Z
\end{aligned}
$$

Se ha utilizado un algoritmo de Branch and Bound para resolver el problema, y su desarrollo se muestra en la siguiente figura. Los problemas lineales planteados en cada iteración están indexados según la secuencia de resolución. Estamos seguros de que no hay errores en resolver cada uno de los problemas (P_i), aunque no estamos seguros si se ha aplicado bien el algoritmo.

Considere la siguiente red:



b) Indique si se encontró solución óptima al problema, incumbente o ninguna de las anteriores. Indique cuánto valor de la función objetivo se podría estar sacrificando por detenerse con el árbol actual.

Como el mejor valor fraccionario es igual al incumbente, la cantidad de unidades que se sacrifican en la F.O son 0, ya que estamos en el óptimo. Esto, se puede calcular a través del GAP, donde:

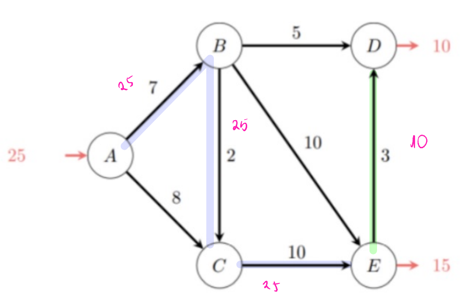
$$GAP\% = \frac{|mejor\ valor\ fraccionario\ - incumbente|}{incumbente}$$

$$= \frac{|1.5 - 1.5|}{1.5}$$

$$= \ 0$$

Problema 3

Considere la siguiente red:



$B = \{(A,B), (B,C), (C,B), (E,D)\}$

Costos reducido B

$\pi_{AB} = C_{AB} - \pi_A + \pi_B = 0 \Rightarrow \pi_B = 0$

$\pi_{BC} = C_{BC} - \pi_B + \pi_C = 0$

$\Rightarrow \pi_A = 7 \quad \pi_C = -2$

$\pi_E = -12$

$\pi_D = 15$

NB

$\pi_{AC} = C_{AC} - \pi$

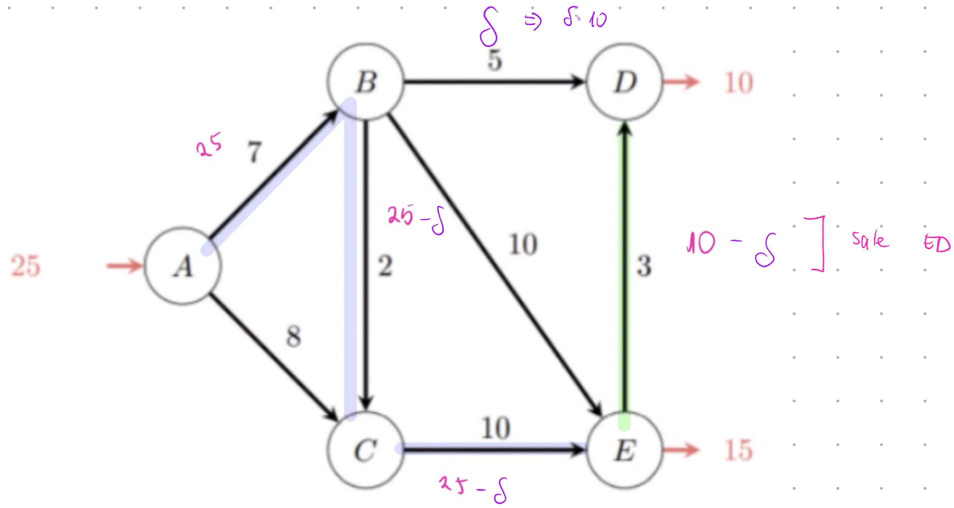
a) Actualmente, la manera de repartir los recursos es a través de la ruta A - B - C - E para el nodo E, y a través de la ruta A - B - C - E - D para el nodo D. Encuentre, utilizando el algoritmo de Simplex especializado en redes, la manera de distribuir los recursos a través de la red que incurra el menor costo.

$\bar{c}_{AC} = c_{AC} - \pi_A + \pi_C = 8 - 7 + (-2) = -1$
$\bar{c}_{BE} = c_{BE} - \pi_B + \pi_E = 10 - 0 + (-12) = -2$
$\bar{c}_{BD} = c_{BD} - \pi_B + \pi_D = 5 - 0 + (-15) = -10$

Como $\bar{c}_{BD} < 0$ y el más negativo, el arco (B,D) entra a la base

b) ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar el costo del arco (A, B) para que la solución óptima no cambie?

c) Se está considerando agregar una nueva ruta que va desde D a E. ¿Cuál es el costo que debe tener este arco para que la solución básica sí cambie?



δ ⇒ δ=10
5
10
25
7
25 - δ
10
2
3
10 - δ
sale ED
8
10
15
25 - δ
A
B
C
D
E