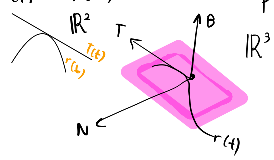
Torsión de una curva ⇒ $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrización curva r

$T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ $N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ $B(t) = T(t) \times N(t)$

Def: El plano osculador de la curva T en $r(t)$ es el plano que pasa por $r(t)$ y está generado por $N(t)$ y $T(t)$



Ec. plano obscurador ⇒ $\langle (x,y,z) - r(t), B(t) \rangle = 0$ } ecuación normal

producto punto

O se podría definir como la generación de vectores $T(t)$ y $N(t)$

$(x,y,z) - \underset{P_0}{r(t)} = \alpha T + \beta N$ } ecuación paramétrica

$N(s) = \dfrac{T'(s)}{\underbrace{\|T'(s)\|}_{k(s)}} \Rightarrow \boxed{k(s)\, N(s) = T'(s)}$

Torsión de una curva

Sea $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva T

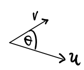
$k(s) = \left\| \dfrac{dT(s)}{ds} \right\|$ torsión binormal 0 si $z = 0$

La torsión "mide" que tanto se fuerce una curva. Es decir, cómo cambia el plano osculador a medida que se avanza en la curva, o cómo cambia el vector binormal

$B(s) = T(s) \times N(s)$ siempre con parametrización de arco. $\dfrac{dB(s)}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left(T(s) \times N(s) \right) = \underbrace{\dfrac{dT(s)}{ds} \times N(s)}_{0,\ N(s) \text{ misma dirección que } T'(s)} + T(s) \times \dfrac{d}{ds} N(s)$

$\Rightarrow \dfrac{dB(s)}{ds} = T(s) \times \dfrac{dN(s)}{ds}$ (1)

Recuerdo: $\|v \times u\| = \|r\|\,\|u\|\, \text{sen}\, \theta$



$\Rightarrow B = T \times N \Rightarrow \|B\| = \underset{1}{\|T\|}\, \underset{1}{\|N\|}\, \underset{1}{\text{sen}\, \theta} = 1$

$0 = \dfrac{d}{ds}\left(\langle B(s), B(s) \rangle \right)$

$= \langle \frac{d}{ds} B(s), B(s) \rangle + \langle B(s), \frac{d}{ds} B(s) \rangle$

$= 2 \langle \frac{d}{ds} B(s), B(s) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} B(s) \perp B(s)$ (2)

$\boxed{\text{De la ecuación (2), deducimos que } \frac{dB}{ds}(s) \text{ está en el plano obscurador}}$

$$\Rightarrow \frac{dB(s)}{ds} = \alpha\, T(s) + \beta\, N(s) \quad (*)$$

$\boxed{\text{De la ec (1), deducimos } \frac{dB(s)}{ds} \perp T(s)}$ (**)

De (*) y (**), obtenemos que:

$\dfrac{dB(s)}{ds} = \beta\, N(s) \Rightarrow \dfrac{dB(s)}{ds} = \beta\, N(s)$ → está en la dirección de $N(s)$

$\dfrac{dB(s)}{ds} = -\tau(s)\, N(s)$

Tau, torsión curva

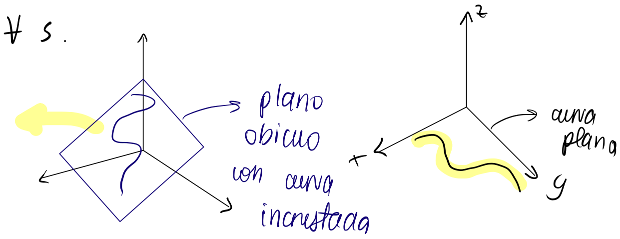
Def: la torsión de la curva r en $r(s)$ es $\tau(s)$ Tau

Prop: Si $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización distinta a la de longitud de arco, la torsión de la curva en $r(t)$ es:

$$\boxed{\tau(t) = \frac{\langle r'(t) \times r''(t),\ r'''(t) \rangle}{\|r'(t) \times r''(t)\|}}$$

Obs: curva plana $\Rightarrow \tau(s) = 0, \ \forall s.$

curva plana



Fórmulas de Frenet-Serret

① $\dfrac{dT(s)}{ds} = \kappa(s)\, N(s)$

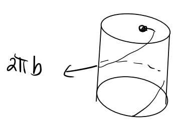
② $\dfrac{d}{ds} B(s) = -\tau(s)\, N(s)$

③ $\dfrac{d}{ds} N(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s)\, B(s)$

Ejemplo: Sean $a, b > 0$

$r(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t), bt), \ t \in [0, 2\pi]$

Probar que la curva parametrizada por r tiene curvatura y torsión constante



Encontrar parametrización en longitud de arco:

$$r_0(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$r_0'(s) = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$r_0''(s) = \left(\frac{-a}{a^2+b^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{-a}{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right)$$

$a > 0$

$$\kappa(s) = \| T'(s) \| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

En el caso de parametrización de long. de arco, $\|r'(t)\| = 1$.

$B(s) = T(s) \times N(s) \Rightarrow$

$$N(s) = \frac{T'(t)}{\frac{a}{a^2+b^2}} = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right)$$

$$\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$\frac{dB(s)}{ds} = \left(\frac{b}{a^2+b^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{a^2+b^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right)$$