Clase 28

$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$

$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{}$

$\mathcal{L}\{t \cdot t\} \neq \mathcal{L}\{t\} \cdot \mathcal{L}\{t\}$

$2/s^2 \qquad \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}$

Transformada de Laplace de funciones comúnes

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $(s > 0)$
t	$\frac{1}{s^2}$ $(s > 0)$
t^n ($n \geq 0$ entero)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$
t^a ($a > -1$ real)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $(s > \Re(a))$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$ $(s > 0, a \geq 0)$

Convoluciones

Observen que, en general, $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}$.

Definición de la convolución La *convolución* de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ está definido por

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

La transformada de la convolución Supóngase que $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos para $t \geq 0$, y que $|f(t)|$ y $|g(t)|$ están acotadas por Me^{ct} conforme $t \to \infty$. Entonces la transformada de Laplace de la convolución $f(t) \star g(t)$ existe para $s > c$; más aún,

$$\mathcal{L}\{f(t) \star g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Como consecuencia, tenemos

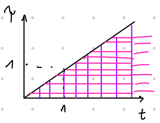
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) \star g(t).$$

Teorema

convolución

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right) dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\, dt$$



sustitucion $t \to u$

$$\int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau)\, \underbrace{g(t-\tau)}_{u = t-\tau}\, dt\, d\tau = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} f(\tau)\, g(u)\, du\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-su} e^{-s\tau} f(\tau)\, g(u)\, du\, dt = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-su} g(u)\, du = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}(g)$$

Ejercicio 2

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+9)(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9} \cdot \frac{1}{s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$= \operatorname{sen}(3t) * e^{-t}$

$= \int_0^t \operatorname{sen}(3\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau$

$= e^{-t}\int_0^t \operatorname{sen}(3t)\, e^t\, dt$

$= e^{-t}\left[(A\operatorname{sen}(3t) + B\cos(3t))\, e^\tau\right]_{\tau=0}^{t}$

En contrar constantes A, B

$(A\operatorname{sen}(3t) + B\cos(3t))\, e^t + (3A\cos(3\tau) - 3B\operatorname{sen}(3\tau))\, e^\tau = \operatorname{sen}(3\tau)\, e^\tau$

$\Rightarrow$ sen: $A - 3B = 1 \Rightarrow A = 1/10$

cos: $B + 3A = 0 \Rightarrow B = -3A = -3/10$

$(*) = e^{-t}\left[\left(\frac{1}{10}\operatorname{sen}(3\tau) - \frac{3}{10}\cos(3\tau)\right) e^t\right]_{\tau=0}^{t}$

$= e^{-t}\left(\frac{1}{10}\operatorname{sen}(3t) - \frac{3}{10}\cos(3t)\right)e^t - e^{-t} \cdot \frac{-3}{10} =$

$= \frac{1}{10}\operatorname{sen}(3t) - \frac{3}{10}\cos(3t) + \frac{3}{10}e^{-t}$

Teoría

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty (-t)\, e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}(-f(t))\, dt = \mathcal{L}\{-t \cdot f(t)\}\, dt$$

$g(t) = -f(t)$

$\mathcal{L}\{g(t)\}$

$\mathcal{L}\{-f(t)\}$

$$\frac{d^2}{ds^2} \cdot F(s) = \mathcal{L}\{f(t)(-t)f(t)\}$$

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t) f(t)\} \Rightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

Ejemplo 3

$\mathcal{L}\{t\cos(2t)\}$

$f(t) = \cos(2t)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$= -\frac{d}{ds}F(s)$

$= -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4}$

$= -\frac{(s^2+4) - s(2s)}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)}$

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} x'(t) + 9\int_0^t x(\tau)\, d\tau = \operatorname{sen}(2t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}\{x'(t) + 9\int_0^t x(\tau)\, d\tau\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}$

$\mathcal{L}\{x'(t)\} + 9\,\mathcal{L}\{\int_0^t x(\tau)\, d\tau\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}$

$$sX(s) - x(0) + 9\,\frac{X(s)}{s} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\left(s - \frac{9}{s}\right)X(s) = \frac{2}{s^2+4} + 1$$ ecuación algebraica

$$X(s) = \frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{s^2+9} = \boxed{\frac{2s}{(s^2+4)(s^2+9)}} + \frac{s}{s^2+9}$$

simplificar con fracciones

Fracciones parciales

$$\frac{2s}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$$

$$= \frac{As+B}{s^2+4}\cdot\frac{s^2+9}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+9}\cdot\frac{s^2+4}{s^2+4}$$

$$2s = As^3 + 9As + Bs^2 + 9B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D$$

$s^3: \quad 0 = A + C \qquad s: \quad 2 = 9A + 4C$

$s^2 = \quad 0 = B + D \qquad 0 = 9B + 4D$

$B = 0$

$D = 0$

$C = -A \Rightarrow 2 = 9A - 4A = 5A$

$\Rightarrow A = \frac{2}{5} \Rightarrow C = -\frac{2}{5}$

$$X(s) = \frac{\frac{2}{5}s}{s^2+4} + \frac{-\frac{2}{5}s}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+9}$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{s}{s^2+9}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$= \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

$$= \frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{3}{5}\cos(3t)$$

La solución de la ecuación integrodiferencial.