PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS / DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Guía EYP2405 - EYP2114
Métodos Estadísticos - Inferencia Estadística

Profesora : Lorena Correa
Ayudante : Nicolás Godoy
Primer Semestre 2017

Estimación Bayesiana

1. Una población de N elementos tiene θ defectuosos (θ es desconocido). Se extrae una muestra de tamaño n obteniéndose 1 defectuoso (la muestra es con reemplazo). Se desea hacer inferencia sobre θ.

2. Para una función probabilidad a priori $\pi(\theta)$ definida para $\theta = 0, \ldots, N$, determine la función de probabilidad a posteriori $\lambda(\theta)$.

   (Deje λ expresado en función de una sumatoria).

3. Sea $\pi(\theta) = r\ \pi(\theta - 1),\ \ \theta = 1, \ldots, N$. Calcule $\lambda(\theta+1)/\lambda(\theta)$ y examine su comportamiento para determinar la moda de la distribución a posteriori.

4. Suponga una variable aleatoria X, tal que $X|p \sim Bin(n, p)$ donde p tiene una distribución a priori $\pi(p) = cp^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$. Se se asume una función de pérdida cuadrática, encuentre la estimación óptima para p.

5. Sea $\quad f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \qquad 0 < x < 1 \qquad$ y

   $$\pi(\theta) = \frac{\alpha(\alpha\theta)^{\beta-1}e^{-\alpha\theta}}{\Gamma(\beta)} \quad , \quad \theta > 0.$$

   Encuentre la media a posteriori de θ.

6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ independientes, con $X_i \sim$ Poisson (μ). Suponga que la distribución a priori de μ es Gama con media 3 y varianza 18. Encuentre el riesgo a posteriori del estimador $\overline{X}$ y compárelo con el riesgo a posteriori de la decisión de Bayes. En ambos casos suponga una función de pérdida cuadrática.

7. Sean $Y_1, \ldots, Y_n \overset{iid}{\sim} U[0, \theta]$. Suponga una densidad a priori $\Pi(\theta) = 1/\theta^2,\ \ \theta \geq 1$.

   a) Encuentre la distribución a posteriori.

   b) Encuentre la media y varianza de la distribución a posteriori.

   c) Compare la moda de la distribución a posteriori con el estimador de máxima verosimilitud.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, teniendo X_i densidad

$$g_i(t) = \frac{c_i}{\theta}\, e^{\frac{-c_i t}{\theta}}, \quad t > 0.$$

   Encuentre la familia de distribuciones conjugadas y el estimador de Bayes con respecto a una función de pérdida cuadrática.

9. Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de la distribución $U[0, \theta]$.
   Sea $T = max(X_1, \ldots, X_n)$. Si la densidad a priori de θ es $g(\theta) = \theta^{-2}, \ \ \theta \geq 1$.

   a) Encuentre la densidad a posteriori de θ dado $X = x$.

   b) Encuentre la densidad condicional de θ dado $T = t$ y compare con el punto anterior.

   c) Encuentre la moda, media y mediana a posteriori de θ dado $T = t$ y discuta su aplicación en la estimación de θ.

Test de Hipótesis

1. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra de la distribución Normal con media μ y varianza σ^2. La varianza de la distribución es conocida. Considere las hipótesis

$$H_0 : \mu \leq \mu_0, \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

   a) Determine el valor de k en función de un nivel de significancia α^* predeterminado si se rechaza H_0 para $\overline{Y} > k$. Muestre que este valor de k puede obtenerse al definir la región de rechazo como

$$Z_c = \frac{\overline{Y} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > Z_{1-\alpha^*}.$$

   b) Mediante gráficos de la distribución Normal con medias μ_0 y $\mu > \mu_0$ represente los errores tipo I y tipo II.

   c) Muestre que, para un nivel de significancia predeterminado, el error tipo II disminuye cuando aumenta n.

   d) Calcule el valor de n necesario para que el error tipo II sea igual al nivel de significancia.

2. Para hacer un test de las hipótesis

$$H_0 : \lambda \geq 5, \qquad H_1 : \lambda < 5$$

   se dispone de una muestra de tamaño 10 de la distribución Poisson con parámetro λ.

   a) Calcule el error tipo I para los valores $\lambda = 5, 6, 7$ correspondientes a las regiones de rechazo de H_0 de la forma $\overline{Y} < k$, $k = 1, 2, 3$. Calcule el error tipo II para los valores $\lambda = 3, 4, 5$.

   b) Determine el valor de k de manera que el nivel de significancia sea menor que 0.10.

c) Si el error tipo I máximo aceptado es 0.10, ¿ Porqué se debe tomar el valor de k que hace máximo este error bajo la condición que sea menor que 0.10?.

3. La variabilidad de un proceso en condiciones correctas, y medida en términos de la desviación estandar, es de 3 unidades. Se dispone de una muestra de tamaño 15, con los valores siguientes: 27, 17, 18, 30, 17, 22, 16, 23, 26, 20, 22, 16, 23, 21 y 17.

   a) ¿ Se puede decir, con un nivel de significancia igual a 0.05, que el proceso está en condiciones correctas ?. Calcule el valor p del test.

   b) ¿ Con que frecuencia se acepta que el proceso está funcionando en condiciones correctas si la desviación estandar efectiva es 4, 6, 8, 10?. Grafique la función potencia.

4. La legislación impone a los aeropuertos ciertas normas con respecto al ruido emitido por los aviones en el despegue y aterrizaje. En los alrededores, el límite aceptado es de 80 decibeles. Más allá de este límite el aeropuerto debe pagar una multa. Los habitantes aseguran que el ruido en dicha zona sobrepasa el valor límite. El aeropuerto, que asegura que no es cierto, decide contratar un grupo de expertos, quienes para concluir asumen que la intensidad del ruido sigue una distribución $N(\mu,\ 49)$. Si se considera

$$H_0 : \mu = 80, \qquad H_1 : \mu = 78,$$

   encuentre la región crítica de Neyman-Pearson para un nivel de significación del 5 %. ¿Qué decisión tomarán lo expertos si se obtiene un promedio de 79.1 decibeles en una muestra de 100 aviones?. Encuentre el error tipo II y la potencia del test.

5. Use el lema de Neyman-Pearson para establecer la región crítica al hacer un test de

$$H_0 : \lambda = \lambda_0, \qquad H_1 : \lambda < \lambda_0$$

   con un nivel de significancia igual a 0.05 y a partir de una muestra aleatoria $(Y_1, \dots Y_n)$ de una población con función densidad

$$f(y) = \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y}, & y > 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

6. Se desea realizar una prueba de las hipótesis

$$H_0 : p = p_0, \qquad H_1 : p \neq p_0,$$

   donde p es la proporción de elementos con una determinada característica. Para ello se observan n elementos, registrándose si cada uno posee la característica y el número total (de entre los n) que la presenta. Encuentre la regla de decisión mediante el método de razón de verosimilitud.