Clase "2"

$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$

Grado de incertidumbre → la idea es cuantificar lo frente a eventos de interés.

¿Eventos? Conjunto de resultados posibles → evento.

⇒ Probabilidad clásica → $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$ → no siempre se cumple ⇒ Probabilidad empírica ↳ Teoría frecuentista → + repeticiones, converge al valor teórico. → Probabilidad subjetiva → grado no entra.

Elementos de teoría de conjuntos

Espacio muestral: conjunto de resultados posibles → ∞ o $\not\infty$

Punto muestral

caso discreto → conjunto numerable

Evento complemento → $\bar{E}$ no comparte con E

Mutuamente excluyentes → Disjuntos.

$\cup$ → Unión $\bar{E}$ → complemento de E

$\cap$ → Intersección

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$E \cup \bar{E} = S$ y $E \cap \bar{E} = \emptyset$

$\bar{\bar{E}} = E$

$A \cup B = B \cap A$

$A \cap B =$

es distributivo y asociativo

Ley de Morgan "complemento de la unión es lo mismo que la intersección de los complementos"

- **Ley de De Morgan**: Esta ley relaciona conjuntos y sus complementos.

  Para dos conjuntos (eventos), E_1 y E_2, la ley de De Morgan dice que

$$\overline{(E_1 \cup E_2)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \quad \text{y} \quad \overline{(E_1 \cap E_2)} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$$

  Generalizando

  ii) Supongamos que R cumple

$$\overline{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n$$

  → De forma general cumple

  y iii) Demostramos usando (i) - (ii) que R cumple para el caso "n+1"

$$\overline{(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \cup \cdots \cup \overline{E}_n$$

- **Ley Asociativa**: La unión e intersección de conjuntos es asociativa, es decir, para tres conjuntos A, B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = B \cup (A \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = B \cap (A \cap C)$$

- **Ley Distributiva**: La unión e intersección de conjuntos es distributiva, es decir, para tres conjuntos A, B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

ii) Supongamos que se cumple $\overline{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n$

iii) Demostremos usando (i) - (ii) que se cumple para el caso "n+1"

$\overline{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cup E_{n+1}} \overset{(i)}{=} \overline{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)} \cap \overline{E_{n+1}}$

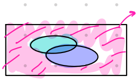
$\overset{(ii)}{=} (\bar{E}_1 \cap \cdots \cap \bar{E}_n) \cap \bar{E}_{n+1}$

$= \bar{E}_1 \cap \cdots \cap \bar{E}_{n+1}$ ∎

$\overline{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n$ / (C)

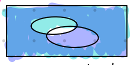
$\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \cdots \cap \bar{E}_n$

$\bar{E}_1 \cup \cdots \cup \bar{E}_n = \overline{E_1 \cap \cdots \cap E_n}$



complemento unión

$\overline{(E_1 \cup E_2)}$



$\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$ ↳ intersección complemento

Clase 3 Capítulo 2: modulo 1

Matemática de probabilidad

probabilidad ≥ 0

Los axiomas son los siguientes:

- **Axioma 1**: Para cada evento E contenido en un espacio muestral S se tiene que

$$P(E) \geq 0$$

- **Axioma 2**: La probabilidad del evento certeza S es

$$P(S) = 1$$

- **Axioma 3**: Para dos eventos E_1 y E_2 mutuamente excluyentes (disjuntos),

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

Sea un evento E y su complemento $\overline{E}$. Por ser eventos disjuntos se tiene que

$$P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

Además como $(E \cup \overline{E}) = S$, se tiene que

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Por otra parte

$$P(E \cap \overline{E}) = P(\phi) = 0$$

Finalmente para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 la ley aditiva dice que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \qquad (1)$$

Ley del complemento

$E \cup \bar{E} = S$ / $P(\cdot)$

$P(E \cup \bar{E}) = P(S) = 1$

$P(E) + P(\bar{E}) = 1 \Rightarrow P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

Eventos de probabilidad nula

$S \cap A = A$ supongamos que $A = \emptyset$:

$S \cup \emptyset = S$ / $P(\cdot)$

$P(S) + P(\cancel{\emptyset})^{0} = 1$

$E_1 = E_1 \cap S$

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

La ecuación (1) aplicada a la unión de tres eventos E_1, E_2 y E_3 es la siguiente:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P[(E_1 \cup E_2) \cup E_3] \\ &= P(E_1 \cup E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cup E_2) \cap E_3] \\ &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)] \\ &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\ &\quad + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \end{aligned}$$

ley distributiva

$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap \bar{E}_2)$

Analogamente * copiar

$P(E_2) \overset{A>3}{=} P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap \bar{E}_1)$

$P((E_1 \cap E_3) \cap (E_2 \cap E_3)) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

$P(E_2) \overset{A3}{=} P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap \bar{E}_1)$

$\therefore P(E_1 \cup E_2) = \begin{cases} P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ P(E_2) + P(E_1) - P(E_1 \cap E_2) \end{cases}$ ∎

Para n eventos cualquiera, por De Morgan se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) &= 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n}) \\ &= 1 - P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n) \end{aligned}$$

En el caso de $E_1, \ldots, E_n$ sean eventos mutuamente excluyentes

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum^{n} P(E_i)$$

Cuando los espacios muestrales son finitos, basta con asignar probabilidades a cada uno de los resultados posibles para luego obtener las probabilidad de un suceso simplemente sumando las probabilidades de ocurrencia de cada resultado básico que lo componen.

$$S = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

con $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, N$.

Para el caso de Probabilidad Clásica se tiene que para un suceso A:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales $n_1, \ldots, n_k$, entonces

$$\# S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Elementos generalmente no se repite

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$. $= \frac{n!}{(n-r)!}$

$\boxed{{}_nP_r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ muestreo sin remplazo.

r objetos

ABCD → Elegir 3

$\frac{4!}{(4-3)!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ // { Permutación

$\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4.$ // { combinatoria (no importa el orden)

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

→ se debe ser consistente
no importa si consideras o no el orden mientras exista consistencia

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

Teorema del binomio

En un espacio muestral finito:
¿Cuántos eventos puedo formar?   Ej: Lanzamiento de un dado.

S= { ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ }

$\binom{n}{n} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\ 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$

$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{6} =$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

eventos $= 2^6 = 64$ si elijo 1 dado, 2 dados, 3, 4, 5, 6 ...

Ordenamiento Multinomial

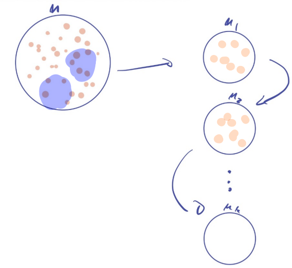
Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1, \ldots, n_k$, con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Ordenamiento Multinomial



$\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i = n}$

"Reasignarlos al azar"

Entre los que elijo

$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} \times \cdots \times \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_3}{n_k} =$

$\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!\ (n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})}{(\underbrace{n-n_1-\cdots-n_k}_{0!})!\, n_k!}$

$\hookrightarrow n = n - n_1 - \cdots - n_k$

$\frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} = \binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k}$

I_1 2018:

4 amigo seis opciones. Cada uno lanza dado

→ + frecuencia,

$\#S = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

contamos cuatro dado iguales

$\binom{6}{2} \frac{4!}{2!}$

6 — repetir 1 — rep 1 — dif 5; 6 — dif 5 — rep 1; 6 — diferente 5 — 2 — rep 1

$6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 2 = 120$

→ 6 casos

3 iguales, una diferente

amigo 1 amigo 2 amigo 3 amigo 4

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 =$

$\to 6 \cdot 5 \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 5 \cdot \underbrace{\binom{4}{3}}_{4} = 120$

$\to 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} = 120 \cdot \binom{4}{2} = 720$

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

$\to \frac{846}{} = 0{,}6527$

$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{}{6^4}$

6 — 1 — 5 — 4; 6 — 5 — 2 — 4; 6 — 5 — 4 — 3

$6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 720$

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

$15 \binom{4}{2} = 15 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 15 \cdot 6 = 90$

20·12

$\binom{6}{3} \frac{4!}{2!} = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 4 \cdot 3 = 240$

$\binom{6}{2} \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Pregunta 4: *Conteo*

El domingo recién pasado Sebita cumplió 4 años y recibió varios regalos, ente ellos había un auto que requería 6 pilas AA. Lamentablemente, las pilas no venían incluida y en casa solo tenía 4 pilas AA nuevas.

Buscando, encontré 6 pilas AA que había apartado hace un tiempo para ir a dejarlas en un contenedor de pilas, ya que están descargadas, pero ahora eran útiles para hacer contacto.

Logré obtener otras dos de un control remoto, pero tienen media carga. Si Seba toma todas las pilas y las mezcla, ¿cuál es la probabilidad que el auto lo entretenga durante la tarde si tomo 6 pilas al azar?

Suponga que para que al auto funciones durante la tarde, se requiere la mitad al menos de carga. Notar que las dos pilas del control remoto equivalen en carga a una nueva.

S → 6 — repite 1; 6 — 5 — 1; 6 — 5 — 4 — 1

$\#S: \binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}} = 11 \cdot 36 \cdot 7$

4 nuevas, 2 medias

6 descargadas

Al menos 3

$\binom{4}{3}\binom{8}{3} = 12$

$= \frac{4!}{3!} \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 4$

$\binom{4}{4}\binom{8}{2}$ ← Tiene que dar 12

medias

$\binom{4}{2}\binom{2}{2}\binom{6}{2}$

Problema 1

Un grupo de 4 amigas/os se juntan a planificar sus vacaciones. En una primera selección, entre todos los lugares planteados, escogieron seis lugares potenciales, cada uno con los respectivos atractivos - playa, sol, diversión, carrete, etc, pero no logran concordar en uno. Así que plantean llevar a cabo un experimento aleatorio de tal forma que el azar decida por ellos. Como son seis alternativas, se les ocurrió asociar las caras de un dado a cada lugar. Cada uno lanzará el dado y si un valor resulta tener mayor frecuencia, entonces el lugar asociado a ese número será el lugar de vacaciones. ¿Cuál es la probabilidad que en el primer intento lleguen a un acuerdo?

4 amigos, seis lugares, seis caras de un dado

A: En el primer intento llegan a un acuerdo.

#S no importa orden: Se lanzan 4 dados:

6^4 casos totales

combinación con repetición

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = \frac{9\cdot \cancel{8}^{2}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 126$$

En los casos Totales esto y contando el orden, entonces también debo hacerlo en los #A

4 iguales: 6

3 iguales, uno distinto: $6\cdot 5$ $\binom{4}{1}$

números diferentes

"elegir el distinto"

2 iguales, 1 distinto, 1 distinto $6\cdot 5\cdot 4\binom{4}{1}\big($

- cuatro coincidencias: 6 casos. **[1.0 Ptos]**
- tres coincidencias: $6\cdot 5\cdot \binom{4}{1}\cdot\binom{3}{3} = 120$ casos. **[1.0 Ptos]**

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\cdot 2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ $\binom{6}{2}$ $\frac{4!}{3!}$

- dos coincidencias y dos distintas: $6\cdot 5\cdot 4\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = 720$ casos. **[1.0 Ptos]**

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 20$

$6 + 6\cdot 5 + 6\cdot 5\cdot 4$

156