Clase 20 EDO

$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$

La clase pasada hemos visto que $\lambda = -3$ es valor propio repetido $\Big\}$ y $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector propio. Entonces $\vec{x}_1(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es solución $\Big\}$ No hay un 2do vector propio. $\Rightarrow$ Valor propio incompleto. $\Big\}$ La idea es buscar otra solución en la forma $t e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1$ no resultó

La otra idea forma: $e^{\lambda_1 t}(\vec{v}_1 t + \vec{w})$ sí resultó, con la condición: $(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}_1$

De álgebra lineal sabemos lo siguiente: Si λ_1 es un valor propio incompleto de $A \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{cases} (A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0} \\ (A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}_1 \end{cases}$$

tiene una solución. para $\vec{v}_1 \neq 0$ un vector propio y $\vec{w} \neq 0$ un vector generalizado

Seguimos con el ejemplo 1:

La segunda solución es $e^{\lambda_1 t}(t\,\vec{v}_1 + \vec{w})$

Calculamos $\vec{w}$:

$(A - \lambda_1 I)\vec{w} = \vec{v}_1$

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $w_1 + w_2 = 1$ $\qquad w_1 = 1 - w_2$

Elegimos $w_1 = 1$

$\Rightarrow w_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - w_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{w} + c\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}$$

La solución general

$$x(t) = c_1 e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \underbrace{e^{-3t}}_{e^{\lambda_1 t}}\left(t\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}}\right)$$

Observaciones:

Si $\vec{v}_1$ un vector propio, entonces $c\vec{v}_1$, $c \neq 0$ constante también es un vector propio pero $c\vec{w}$ no es un vector propio generalizado. En el ejemplo: $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ un v.p. generalizado y $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tmbn.

Además, si se elige otro vector propio $\vec{v}_1$ el vector propio generalizado cambia.

Matriz fundamental

El sistema $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cte. tiene solución general: $\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t)$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \Phi(t)\,\vec{c}$$

con $\Phi(t)$ la matriz fundamental

Matriz fundamental

La solución general del sistema lineal homogéneo

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante es una combinación lineal de n vectores linealmente independientes:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$$

en donde

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \\ | & & | \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

La matriz $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama *matriz fundamental* y es la matriz cuyas columnas son soluciones linealmente independientes del sistema de ecuaciones diferenciales.

La matriz fundamental satisface $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

$\Rightarrow$ Esta matriz satisface:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{bmatrix} \vec{x}_1'(t) & \cdots & \vec{x}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 \cdots & A\vec{x}_n \end{bmatrix} \Rightarrow A\begin{bmatrix} \vec{x}_1(t) & \cdots & \vec{x}_n(t) \end{bmatrix} = A\,\Phi(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi(t) = A\,\Phi(t)$$

y matriz Φ satisface la EDO.

$$\begin{cases} \vec{x}\,'(t) = A\,x(t) \\ \vec{x}(0) = \vec{b} \end{cases}$$

La sol gen: $\vec{x}(t) = \Phi(t)\,\vec{C}$ $\Rightarrow$ Sustituir la sol. part $\vec{x}(t) = \Phi(t)\,(\Phi(t)(\Phi(t))^{-1}\,\vec{b}$

Matriz exponencial $\Rightarrow$ Para $n = 1$: $x'(t) = a\,x(t)$, a cte. y soluciones general es: $x(t) = c\,e^{at}$, c constante

Si podemos calcularla, tenemos todas las soluciones

La idea es buscar la solución de $\vec{x}\,'(t) = A\,\vec{x}(t)$. Con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz

$$\underbrace{\vec{x}(t)}_{\text{vector}} = \underbrace{e^{At}}_{\text{matriz}}\,\underbrace{\vec{C}}_{\text{vector}}$$

Vamos a definir una matriz exponencial con series de Taylor

Recuerden: $e^a = 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}$

Ahora:

$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$

Queremos demostrar $\frac{d}{dt}e^{At} = A e^{At}$

$\Rightarrow$ Así, la matriz e^{At} es una matriz fundamental.

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}\right) = \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{A^n t^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\,n\,t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}A A^{n-1}t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}A(At)^{n-1} = A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(At)^m}{m!} = A\,e^{At}$$

$m = n-1$

$\therefore$ es una matriz fundamental. Entonces, la matriz exponencial es una matriz fundamental

$\rightarrow$ Si tenemos la matriz e^{At}, tenemos todas las soluciones de $\vec{x}\,'(t) = A\,x(t)$.

$\Rightarrow$ Ejemplos:

Ejemplo 2: A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Una matriz diagonal

$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 \ldots$

Ejemplo 3 $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 4t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & (2t)^3 \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3 \cdots & 0 \\ 0 & \cdots \cancel{1+2t} + \frac{1}{2}(2t)^2 + \frac{1}{6}(2t)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to 0's \qquad A^n = 0$ para $n \geq 3 \to 0$

"nilpotente"

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 4t \\ 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^2 + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t & 4t+t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Las columnas son las soluciones}} \to$$

La solución general es

$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$

$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{c}$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 4t+t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Tenemos una matriz A que es una proyección, es decir, $A^2 = A \Rightarrow A^n = A \;\forall n \geq 2 \in \mathbb{Z}$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

$$= \underset{n=0}{I} + \underset{n=1}{At} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}$$

$$= I + At + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A t^n}{n!}$$

$$= I + At + A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$= I + At + A\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - \underset{n=1}{t} - \underset{n=0}{1}\Big)$$

$$= I + At + A(e^t - t - 1)$$

$$= I + A(e^t - 1)$$

es conocida y se puede calcular.

Propiedades de la matriz exponencial

La matriz exponencial satisface las propiedades siguientes.

- Si las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son conmutables, es decir, $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.
- La matriz exponencial de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es invertible. Además, el inverso está dado por $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.