Transformada de derivada

Tenemos:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\, \underbrace{f'(t)\,dt}_{v'} = \Big[\underbrace{e^{-st}}_{u}\, \underbrace{f(t)}_{v}\Big]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \underbrace{(-s)\,e^{-st}}_{u'}\, \underbrace{f(t)}_{v}\,dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) - f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \boxed{-f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}}$$ para todos valores s tal que $\mathcal{L}\{f\}$ existe

Para este cálculo usamos:

1) $f'(t)$ es continua por tramos para definir correctamente la 1era integral
2) $f(t)$ es continua para usar integración por partes.
3) $f(t)$ es de orden exponencial para que la segunda integral converge

"Derivar en tiempo = multiplicar en LaPlace"

La transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geq 0$, la transformada de Laplace de f es la función F definida como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

La transformada inversa

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, tenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

la transformada inversa de Laplace.

Transformada de derivadas

Funciones suave por tramos La función f se llama *suave por tramos* en el intervalo acotado $[a, b]$ si es continua por tramos en $[a, b]$ y derivable salvo en ciertos puntos finitos, siendo $f'(t)$ continua por tramos en $[a, b]$. La función f es *suave por tramos* para $t \geq 0$ si es suave por tramos en cualquier subintervalo acotado de $[0, \infty)$.

Teorema Supóngase que la función $f(t)$ es

1. continua para $t \geq 0$,
2. suave por tramos para $t \geq 0$, y
3. de orden exponencial cuando $t \to \infty$.

Entonces, la transformada $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > c$, y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

Derivadas superiores

Si $g(t) = f^{(n-1)}(t)$ continua, suave por tramos y de orden exponencial

Entonces,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \mathcal{L}\{\tfrac{d}{dt} f^{(n-1)}(t)\}$$
$$= \mathcal{L}\{g'(t)\}$$
$$= s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

Si $f(t)$ y $g(t) = f'(t)$ son continuas, suaves por tramos y de orden exponencial.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{\tfrac{d}{dt} f'(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\cdot G(s) - g(0)$$
$$= s\,\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$
$$= s\,(s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0)$$
$$= s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

Transformada de derivadas de orden superior

Si $f^{(n-1)}(t)$ continua, suave por tramos y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}\right\} = s\mathcal{L}\left\{f^{(n-1)}\right\} - f^{(n-1)}(0).$$

Teorema Supóngase que todas las funciones $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son

1. continuas para $t \geq 0$,
2. suaves por tramos para $t \geq 0$, y
3. de orden exponencial con los mismos valores: existen constantes no negativas M, c y T tales que
$$|f^{(k)}(t)| \leq Me^{ct} \quad \text{para} \quad t \geq T$$
y todos $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Entonces, la transformada $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe y

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

para $s > c$.

Ejemplo 1

$$\text{PVI} \begin{cases} x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$$

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$$
$$\mathcal{L}\{x''(t) - x'(t) - 2x(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

EDO La Place en ambos lados

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} - \mathcal{L}\{x'(t)\} - 2\,\mathcal{L}\{x(t)\} = 0$$

Linealdad de La Place

teorema de derivadas

$$s^2 X(s) - s\,\cancel{x(0)}^{1} - \cancel{x'(0)}^{3}$$
$$- (s\,X(s) - \cancel{x(0)}^{1})$$
$$- 2X(s) = 0$$

incognita es $X(s)$

condiciones iniciales

$$s^2 X(s) - s - 3 - sX(s) + 1 - 2X(s) = 0$$ $X(s)$ incognita

$$(s^2 - s - 2)X(s) - s - 2 = 0$$

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2 - s - 2}$$ $s^2 - s - 2 \neq 0$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2 - s - 2}\right\}$$

Fracciones parciales

$$s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2)$$

$$\frac{s+2}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$\frac{s+2}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \Rightarrow s+2 = A(s-2) + B(s+1)$$

$$s+2 = s(A+B) + (-2A+B)$$

igualar potencias de s

[1] $A + B = 1$

[2] $-2A + B = 2$

$3A = -1$

$$\boxed{A = -1/3 \quad B = 4/3}$$

A, B constantes

$s > c$ variable

Transformada de Laplace de funciones comúnes

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $(s > 0)$
t	$\frac{1}{s^2}$ $(s > 0)$
t^n ($n \geq 0$ entero)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$
t^a ($a > -1$ real)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $(s > \Re(a))$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$ $(s > 0)$
$\operatorname{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$ $(s > 0)$
$H(t-a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}$ $(s > 0, a \geq 0)$

Ahora, $\dfrac{s+2}{s^2-s-2} = \dfrac{-1/3}{s+1} + \dfrac{4/3}{s-2}$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{-1/3}{s+1} + \frac{4/3}{s-2} \right\}$$ → Fracciones parciales

$$= -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$ linealidad de La Place

$$= -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t}$$ Tabla de tranformada

la solución particular

Transformada de integral

Si $f(t)$ es continua por tramos y de orden exponencial, entonces, para $g(t) = \int_0^t f(t)\,dt$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{v'}\, \underbrace{g(t)}_{u}\,dt = \left[\frac{1}{-s}e^{-st}g(t)\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{-s}e^{-st}}_{v}\,\underbrace{g'(t)}_{u'}\,dt$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{-s}e^{-st}g(t) - \frac{1}{-s}g(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}\,dt = \frac{1}{s}F(s)$$

$$g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}g(t) = 0$$

porque $g(t)$ de orden exponencial

$$|g(t)| \le \int_0^t |f(t)|\,dt$$ desigualdad triangular

$$\le \int_0^t M e^{ct}\,dt$$

$$= M\left[\frac{1}{c}e^{ct}\right]_0^t = \frac{M}{c}(e^{ct}-1)$$

$$< \frac{M}{c}e^{ct}$$

$$= \hat{M}e^{ct}$$

Si $f(t)$ orden exp. su integral también

*Integrar en el tiempo = dividir en La Place"

Traslación sobre el eje s

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ existen para $s > c+a$

y $$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt$$ $\sigma = s-a$

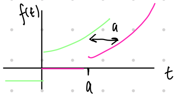
$$= \int_0^\infty e^{-\sigma} f(t)\,dt$$

$$F(\sigma) = F(s-a)$$

Traslación sobre eje t

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$

entonces



$$\mathcal{L}\{\overset{\text{Hea}}{H}(t-a)\,f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)\,f(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(t+a)}f(t)\,dt = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= e^{-sa}F(s)$$