

Resumen Branch & Bound

Algunas cosas importantes sobre Branch & Bound:

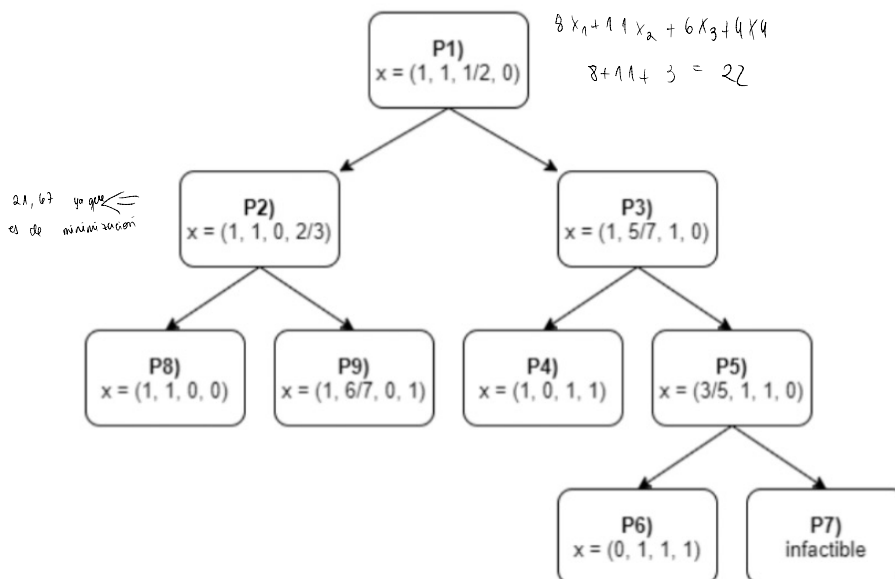
- z_R^* es igual o mejor que z^*
- Al bajar por el árbol, la función objetivo empeora
- **Incumbente:** Mejor valor objetivo hasta el momento
- Se **ramifica** cuando se obtiene una solución del problema relajado z_R y alguna variable es fraccionaria
- Se **corta** cuando se llega a un problema infactible o el valor de la f.o es peor que el incumbente
- **Regla de Bland:** Se prioriza la variable de menor índice
- Hay dos formas de resolver:
 - **BFS:** resolver por niveles de profundidad.
 - **DFS:** resolver profundidades de izquierda a derecha.

	Maximización	Minimización
Mejor cota inferior	Incumbente	Mejor valor fraccionario
Mejor cota superior	Mejor valor fraccionario	Incumbente

$$\text{GAP} = \frac{|\text{mejor valor fraccionario} - \text{incumbente}|}{\text{incumbente}}$$

Problema 1

Considere el siguiente árbol del algoritmo B&B para un problema con solo variables enteras y función objetivo $8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$:



- a) ¿El problema es de maximización o minimización? → maximización y que el valor objetivo sea
- b) ¿Cuál es el valor del incumbente? ¿Es este el óptimo? → valor óptimo = 21
- c) ¿Cuál es el valor de la mejor cota inferior y superior?
- d) ¿Está completo el árbol, o falta explorar algún subproblema? Justifique.
- e) Suponga que solo se han generado los nodos 1, 2, 3, 4 y 5. Indique cuál sería el error que se cometería al utilizar la solución entera del nodo 4 en lugar de seguir explorando el árbol y llegar al óptimo.
- f) Supongamos que al problema original se le agrega la restricción $5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 12$. Escriba todos los cubrimientos y sus respectivos planos de corte.

c) ¿Cuál es el valor de la mejor cota inferior y superior?

Veamos en nuestra tabla a qué correspondería el la cota inferior y superior de este problema:

	Maximización	Minimización
Mejor cota inferior	Incumbente	Mejor valor fraccionario
Mejor cota superior	Mejor valor fraccionario	Incumbente

Entonces, al ser un problema de maximización:

- Mejor cota inferior: Incumbente → ya sabemos el valor, por lo tanto:

$$Cota\ inferior = 21$$

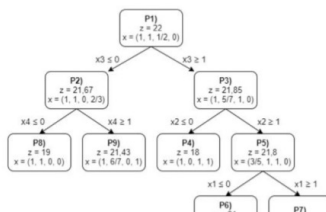
- Mejor cota superior: Mejor valor fraccionario → Debemos buscar este valor en el árbol.

Solución 1.d)

d) ¿Está completo el árbol, o falta explorar algún subproblema? Justifique.

La respuesta a esta pregunta depende de con qué finalidad estamos realizando el árbol.

- Por un lado, si queremos determinar todos los subproblemas posibles, todavía podemos seguir explorando a través de nuestro nodo P9), ya que es un problema fraccionario que podemos seguir desarrollando.
- Por el otro lado, si nuestra misión es determinar solamente el valor óptimo, podemos dejar de buscar, ya que el ramificar P9), el mayor valor que podemos llegar a obtener es 21. Si nos fijamos este ya es el valor de nuestro incumbente, por lo que no es necesario seguir ramificando.



e) Suponga que solo se han generado los nodos 1, 2, 3, 4 y 5. Indique cuál sería el error al utilizar la solución entera del nodo 4 en lugar de seguir explorando el árbol y llegar al óptimo.

Cuando nos hablan de error, se están refiriendo al GAP, ya que este nos entrega cual es la distancia entre nuestra mejor solución encontrada hasta el momento y el límite superior teórico de nuestra solución:

$$GAP = \frac{|\text{mejor valor fraccionario} - \text{incumbente}|}{\text{incumbente}}$$

Así, nuestro error es:

$$Error = GAP = \frac{|21.8 - 18|}{18} = 0.17 \rightarrow Error = 17\%$$

Como solo nos dicen que consideremos los nodos 1, 2, 3, 4 y 5, debemos calcular nuevamente el incumbente y el mejor valor fraccionario.

f) Supongamos que al problema original se le agrega la restricción $5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 12$. Escriba todos los cubrimientos y sus respectivos planos de corte.

¿Cómo calculamos esto? Los cubrimientos nos indican restricciones que se deben cumplir entre las variables para que cumplamos la restricción indicada.

Por ejemplo, si todas nuestras variables toman el valor de 1 ocurre lo siguiente:

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 12$$

$$5 + 7 + 4 + 3 \leq 12$$

$$19 \leq 12$$

Vemos que NO se cumple la restricción, por lo tanto agregamos el siguiente cubrimiento:

$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

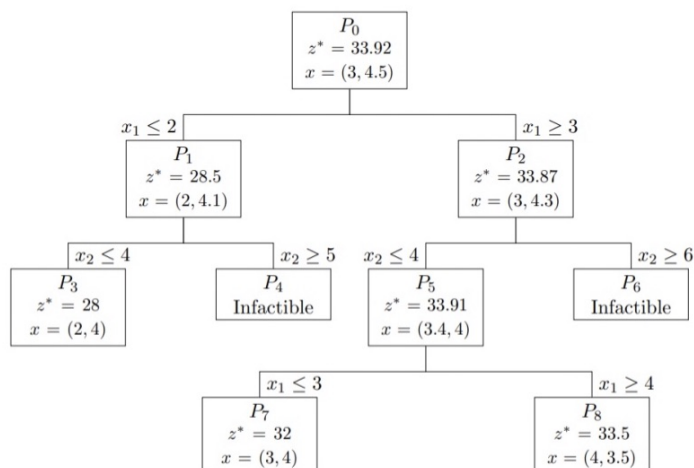
$$C_2 = \{1, 2, 3\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$C_3 = \{1, 2, 4\} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

$$C_4 = \{2, 3, 4\} \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

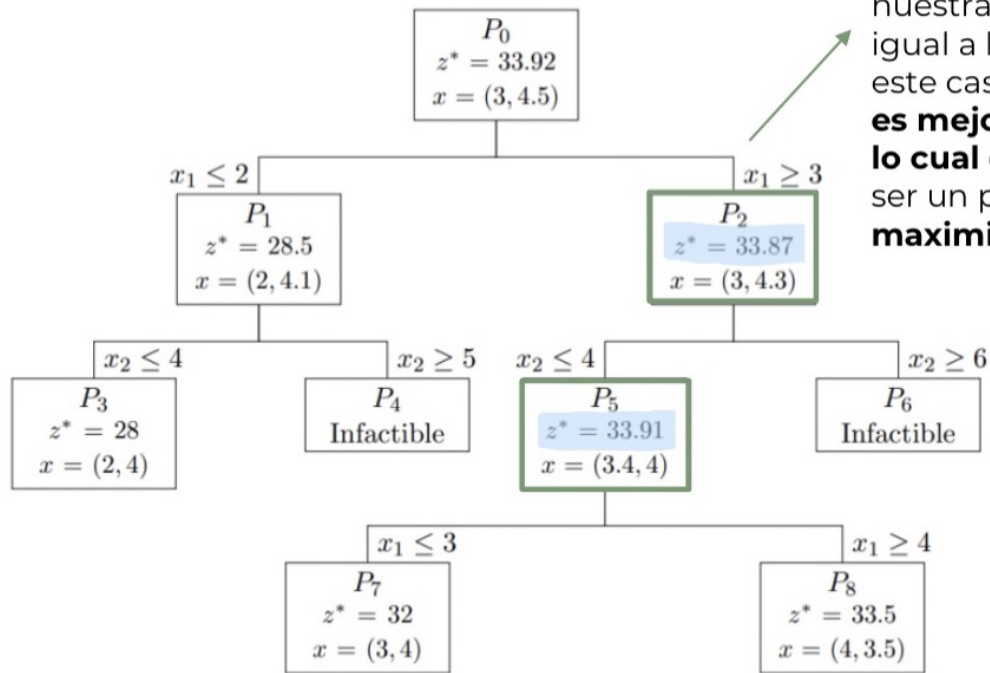
Problema 2.a)

(a) Suponga que se ha resuelto parcialmente un problema de maximización de programación entera mediante BB. Sea el siguiente árbol de resolución:



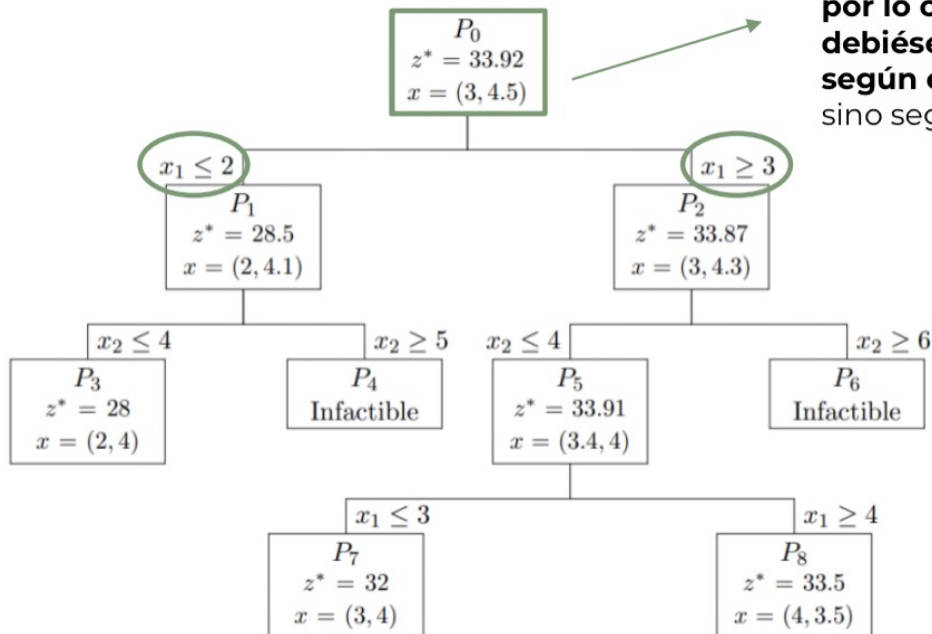
P_8 es el único nodo que no se ha ramificado hasta el momento. La información que se presenta no está 100% correcta. Identifique los tres valores incorrectos o inconsistentes dentro del árbol.

Analicemos nuestro árbol para ver qué error hay presentes:



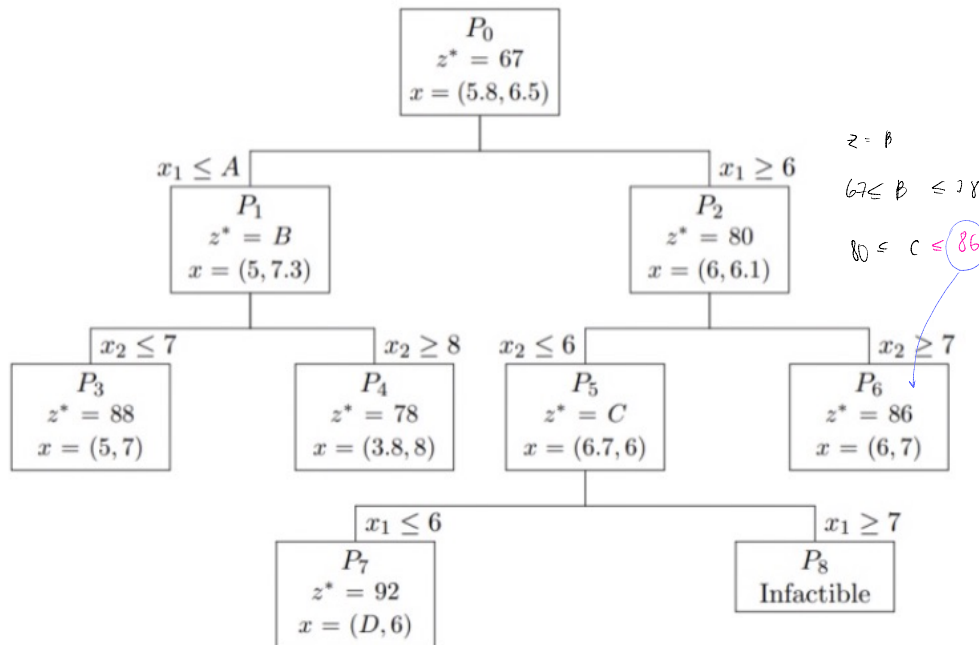
Recordemos que con cada ramificación nuestra F.O es peor o igual a la anterior y en este caso el **valor de P5) es mejor que el de P2) lo cual es incorrecto**, al ser un problema de **maximización**.

Analicemos nuestro árbol para ver qué error hay presentes:

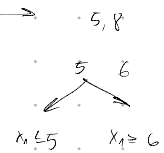


En P_0), vemos que el valor de x_1 **es entero**, por lo cual **no debiésemos ramificar según esta variable**, sino según x_2 .

- (b) Suponga que ha resuelto parcialmente otro problema de programación entera mediante BB. Sea el siguiente árbol de resolución, en donde los nodos se fueron resolviendo sucesivamente desde P_0 hasta P_8 :



- 1) ¿El problema es de maximización o minimización? Justifique.
- 2) Indique el rango de valores que puede tomar cada incógnita (A, B, C, D) dentro del árbol.
- 3) ¿Cuál es el valor de la mejor cota inferior y superior al valor óptimo?



- 3) ¿Cuál es el valor de la mejor cota inferior y superior al valor óptimo?

Estamos en un problema de minimización, por lo que veamos en nuestra tabla cuáles serían nuestras cotas superiores e inferiores:

	Maximización	Minimización
Mejor cota inferior	Incumbente	Mejor valor fraccionario
Mejor cota superior	Mejor valor fraccionario	Incumbente

Entonces, al ser un problema de maximización:

- **Mejor cota inferior:** Mejor valor fraccionario
- **Mejor cota superior:** Incumbente

