Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2019

EYP 2405/EYP 2114
Métodos Estadísticos / Inferencia Estadística
Clase de Ejercicios 2

1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población Bernoulli(θ), y sea $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ la media muestral.

   a) Obtenga la cota de Cramér-Rao e indique si $\bar{X}$ es un EIVUM. Justifique.

   b) Obtenga un EIVUM para $\theta(1-\theta)$.

2. Sea X una variable aleatoria con densidad

$$f(x \mid \theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|}, \quad x = -1, 0, 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

   a) Sea $T(x)$ un estimador de θ tal que

$$T(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 1; \\ 0, & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

   Muestre que $T(x)$ es un estimador insesgado de θ

   b) Encuentre un estimador mejor que $T(x)$ y demuestre que es mejor.

   c) Verifique si el estimador en b) alcanza la cota de Cramér-Rao.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d con densidad $f(x \mid \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$

   a) Muestre que $\frac{X_{(n)}}{\theta}$ es una cantidad pivotal.

   b) Utilizando a) construya un IC para θ con probabilidad de cubrimiento $1 - \alpha_L - \alpha_U$ en donde α_L y α_U son los niveles de significación inferior y superior, respectivamente.

4. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d con distribución Gamma(α, β) con α conocido.

   a) Si $p(\beta) \propto \frac{1}{\beta}$, encuentre el estimador de Bayes de β.

   b) Si $\beta \sim$ Gamma(a, b), encuentre el estimador de Bayes de β.