Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer Semestre 2022

MAT 1640 — Ecuaciones Diferenciales

Ayudantía extra Examen

05 de julio de 2022

Martín Montes U.
martin.montesu@uc.cl

TEU

Considere la ecuación:

$$(x+1)\cdot y' = (y-2)y; \quad y(x_0) = y_0$$

a) Determine para qué pares (x_0, y_0) el problema de valor inicial tiene solución única y encuentre dicha solución.

b) Determine el máximo intervalo de definición de la solución con valor inicial $y(1) = 4$.

General

1. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\cos(xy)\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Seleccione la alternativa correcta:

(a) Ninguna es correcta.

(b) Las soluciones de la EDO tienen recta tangente horizontal únicamente sobre la recta $y = x$

(c) La solución que cumple $y(0) = 1$ tiene derivada negativa en 0.

(d) Una hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad local de soluciones no se cumple para puntos suficientemente cerca del origen.

(e) La ecuación es exacta.

2. Determine el intervalo maximal de definición para la variable x de modo que el PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}; \quad y(1) = 1$$

tenga una solución explícita de y en función de x.

3. Al buscar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$$

mediante el método de coeficientes indeterminados, ¿qué forma tendría la solución?

Teorema del Wronskiano

Defina $f(x) = sin(x^2)$ y $g(x) = cos(x^2)$. Considere las siguientes afirmaciones:

a) f y g son linealmente independientes en todo intervalo que contiene al cero.

b) Existen $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ funciones lineales tales que f y g forman una base para el espacio de soluciones de la EDO lineal $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$.

¿Cuál(es) de las afirmaciones es correcta?

Sistemas

Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{t})}{dt} = A\mathbf{x}(\mathbf{t}) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \mathbf{x}(\mathbf{0}) = x_0 \end{cases}$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t}{1+t^2} \\ \dfrac{e^t}{1+t^2} \end{pmatrix}; \quad x_0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Estabilidad

Dado el sistema no lineal

$$\begin{cases} x' = x - x^2 - 3xy \\ y' = 3y - y^2 - 2xy \end{cases}$$

encuentre el sistema linealizado correspondiente en torno a cada uno de sus puntos de equilibrio y clasifíquelos, si posible, como estables o inestables.

Laplace

1. Resuelva con Transformada de Laplace:

$$x'' - x' - 6x = 0; \quad x(0) = 2,\, x'(0) = -1$$

2. Resuelva con Transformada de Laplace:

$$x'' + 4x = \sin 3t; \quad x(0) = x'(0) = 0$$

3. Resuelva con Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y; & x(0) = x'(0) = 0 \\ y'' = 2x - 2y + 40\sin(3t); & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Calcule la transformada inversa de: $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s-a)}$

5. Considere el sistema masa resorte:

$$x'' + 6x' + 34x = 30\sin(2t); \quad x(0) = x'(0) = 0$$

   Encuentre la ecuación para la posición $x(t)$

6. Usando Transformada de Laplace resuelva el problema $x''+4x = g(t);\; x(0) = x'(0) = 0$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 10 \\ (t-5)/5 & 5 \leq t < 10 \\ 1 & t \geq 10 \end{cases}$$

7. Considere la ecuación diferencial de la posición de una masa sujeta a un resorte y a una fuerza externa $f(t)$ tal que

$$x''(t) + 4x(t) = f(t)$$

   con $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$ y donde

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$$

   Resuelva el PVI y grafique la solución.

Laplace

1. Resuelva con Transformada de Laplace:

$$x'' - x' - 6x = 0; \quad x(0) = 2,\, x'(0) = -1$$

$\mathcal{L}\{x'' - x' - 6x\} = 0$

$s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0) - (s\,X(s) - x(0)) - 6\,X(s) = 0$

$(s^2 - s - 6)\,X(s) - 2s + 1 + 2 = 0$

$X(s) = \dfrac{2s-3}{(s-3)(s+2)} \Rightarrow \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s+2}$

$As + 2A + Bs - 3B = 2s - 3$

$A + B = 2$
$3A - 3B = -3$

$A = 3/5$
$B = 7/5$

$X(s) = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{s-3} + \dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{1}{s+2}$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{s-3} + \dfrac{7}{5}\dfrac{1}{s+2}\right\}$

$= \dfrac{3}{5}e^{3t} + \dfrac{7}{5}e^{-2t}$

2. Resuelva con Transformada de Laplace:

$$x'' + 4x = \sin 3t; \quad x(0) = x'(0) = 0$$

$\mathcal{L}\{x'' + 4x\} = \mathcal{L}\{\sin(3t)\}$

$s^2 X(s) - s\,X(0) - X'(0) + 4\,X(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$

$X(s) = \dfrac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}$

$= \dfrac{3}{5(s^2+4)} - \dfrac{3}{5(s^2+9)}$

$x(t) = \dfrac{3}{5}\,\dfrac{\sin(2t)}{2} - \dfrac{3}{5}\,\dfrac{\sin(3t)}{3}$

$= \dfrac{3}{10}\sin(2t) - \dfrac{1}{5}\sin(3t)$

$\dfrac{A}{s^2+9} + \dfrac{B}{s^2+4} = \dfrac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}$

$As^2 + 4A + Bs^2 + 9B = 3$

$A = -B$

$4A + 9B = 3$

$-4B + 9B = 3$

$5B = 3$

$B = 3/5 \quad A = -3/5$

3. Resuelva con Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y; & x(0) = x'(0) = 0 \\ y'' = 2x - 2y + 40\sin(3t); & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$2s^2 X(s) = -6X(s) + 2y(s)$

$s^2 y(s) = 2X(s) - 2y(s) + \dfrac{120}{s^2+9}$

(1) $(s^2+3)\,X(s) = y(s)$

$(s^2+2)\,y(s) - 2X(s) = \dfrac{120}{s^2+9}$

$(s^2+2)(s^2+3)\,X(s) - 2X(s) = \dfrac{120}{s^2+9}$

$(s^4 + 3s^2 + 4)\,X(s) = \dfrac{120}{s^2+9}$

$$X(s) = \frac{120}{(s^2+9)(s^2+1)(s^2+4)} \qquad y(s) = \frac{120\,(s^2+3)}{(s^2+9)(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$X(s) = \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9}$$

$$y(s) = \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\ \}$$

$$x(t) = 5\,\text{sen}\,(t) - 4\,\text{sen}\,(2t) + \text{sen}\,(3t)$$

$$y(t) = 10\,\text{sen}\,(t) + 4\,\text{sen}\,(2t) - 6\,\text{sen}\,(3t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s(s-a)}}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} d\tau$$

$$= \int_0^t e^{a\tau}\,d\tau = \left.\frac{e^{a\tau}}{a}\right|_0^t = \frac{e^{at}-1}{a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \int_0^t \frac{e^{at}-1}{a}\,d\tau = \left[\frac{e^{at}}{a^2} - \frac{t}{a}\right]_0^t = \frac{e^{at}}{a^2} - \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$$

5. Considere el sistema masa resorte:

$$x'' + 6x' + 34x = 30\sin(2t); \quad x(0) = x'(0) = 0$$

Encuentre la ecuación para la posición $x(t)$

$$s^2 X(s) + 6s\,X(s) + 34\,X(s) = \frac{60}{s^2+4}$$

$$X(s) = \frac{60}{(s^2+4)(s^2+6s+34)} =$$

$$\frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+d}{(s+3)^2+25}$$

$$X(s) = \frac{1}{29}\left(\frac{-10s}{s^2+4} + \frac{50}{s^2+4} + \frac{10(s+3-3)}{(s+3)^2+25} + \frac{10}{(s+3)^2+25}\right.$$

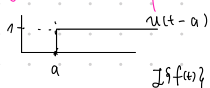
$$X(s) = \quad '' \quad\quad '' \quad + \frac{10(s+3)}{(s+3)^2+25} - \frac{20}{(s+3)^2+25}$$

$$X(t) = \frac{1}{29}\left(-10\cos(2t) + 25\,\text{sen}\,(2t) + 10e^{-3t}\cos(5t) - 4e^{-3t}\sin(5t)\right)$$

3) $x'' + 4x = f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & 0 \le t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\,\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}\,\mathcal{L}\{f(t-a)\}$$



$$f(t) = \cos(2t) - \cos(2t)\,\mathcal{U}(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\,\mathcal{L}\{\cos(2(t+\pi))\}$$

$s^2 X(s) - sX(0) - X'(0) + 4X(s) = \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4}$

$(s^2+4)X(s) = s + \frac{s}{s^2+4} - e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+4}$

$X(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{s}{(s^2+4)^2} - e^{-\pi s}\frac{s}{(s^2+4)^2}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k} t\sin(kt)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}\left(\sin(kt) - kt\cos(kt)\right)$

$= \frac{s^2}{s^2+4} - e^{-\pi s}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

$x(t) = \cos(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t) - u(t-\pi)f(t-\pi) = \cos(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t) - \frac{(t-\pi)}{4}\sin(2(t-\pi))\,u(t-\pi)$

1. Considere la ecuación diferencial ordinaria

$$\cos(xy)\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Seleccione la alternativa correcta: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{\cos(xy)} = M$

(a) Ninguna es correcta.

(b) Las soluciones de la EDO tienen recta tangente horizontal únicamente sobre la recta $y = x$ X

(c) La solución que cumple $y(0) = 1$ tiene derivada negativa en 0. $\frac{dy}{dx} = \frac{0^2+1^2}{\cos(0)} = \underline{\underline{1 > 0}}$

(d) Una hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad local de soluciones no se cumple para puntos suficientemente cerca del origen. $(0,0)$ X

$\hookrightarrow f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\cos(xy)}$ continua en $\Rightarrow (0,0)$

$f_y = \frac{2y\cos(xy) - (-\sin(xy)\,x\,(x^2+y^2))}{\cos^2(xy)}$

(e) La ecuación es exacta. X

$\underbrace{\cos(xy)}_{N}dy - \underbrace{(x^2+y^2)}_{m}dx = 0$

$M_y \neq N_x$

2. Determine el intervalo maximal de definición para la variable x de modo que el PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}; \quad y(1) = 1$$

tenga una solución explícita de y en función de x.

$y\,dy = 2x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = x^2 + C$

$\frac{1}{2} = 1 + C \quad c = -\frac{1}{2}$

$\frac{y^2}{2} = x^2 - \frac{1}{2}$

$y = \pm\sqrt{2x^2-1}$

$y = \sqrt{2x^2-1}$

$2x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 \geq 1/2$

$\boxed{x \geq \sqrt{2}/2 \rightarrow (\sqrt{2}/2, \infty)}$

$x \leq -\sqrt{2}/2 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{2}/2)$

$y_p = A + Bx + Cx^2 + D\cancel{x}e^{2x}$

3. Al buscar una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3e^{2x}$$

mediante el método de coeficientes indeterminados, ¿qué forma tendría la solución?

$y_p = A + Bx + Cx^2 + Dxe^{2x}$