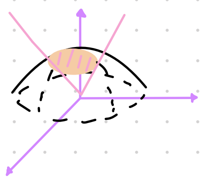
Encuentre una representación paramétrica de las siguientes superficies:

1. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se situa arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. La parte del plano $z = x + 3$ que se situa en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
3. La superficie de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, con $0 \leq z \leq 2$
4. El cono de ecuación $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, con $k \geq 0$

1)

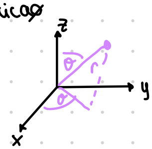
$$S \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & \to \text{esfera} \\ z = \sqrt{x^2+y^2} & \to \text{cono } (+) \end{cases}$$



Esfericas
(cualquier pto en el espacio)

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y &= r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}\right\}$$

explicar



ϕ

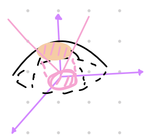
$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$2\cos\phi = \sqrt{4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi + 4\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\phi}$$

$$2\cos\phi = 2\sin\phi$$

$$\tan\phi = 1$$

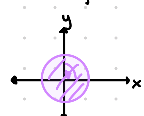
$$\phi = \pi/4 \quad \to \quad \therefore\ \phi \in [0, \pi/4]$$



proyectar

$$x^2+y^2+(x^2+y^2) = 4$$

$$x^2+y^2 = 2$$



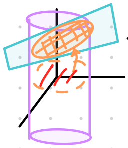
$\theta \in [0, 2\pi]$

sol

$$\vec{\rho}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\phi \\ 2\operatorname{sen}\theta\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}$$

2)

$$S \begin{cases} z = x+3 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$



→ Entonces nos da una elipse

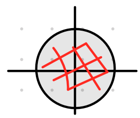
Ocupamos polares

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{seno}\,\theta$

$z = r\cos\theta + 3$

Lo llevamos al plano



$r \in [0,1]$

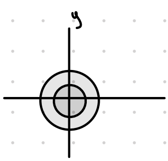
$\theta \in [0,2\pi]$

sol

$$\vec{\rho}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\text{sen}\,\theta \\ r\cos\theta+3 \end{pmatrix}$$

3)

$$S \begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$$



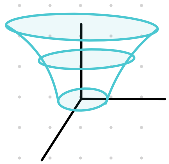
$x^2+y^2 = 1+z^2$

(este es. consiste en darle un valor a z)

↓

$z=0$ | $x^2+y^2=1$

$z=\sqrt{3}$ | $x^2+y^2=4$



esto sería lo q' hay q' parametrizar

⇓

Ocupar cilíndricas

(verlo como cilindros de varios radios, y además q' $z=z$ ya q' no nos dan un valor de z)

↓

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$
$$r^2 = 1 + z^2$$
$$r = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\vec{\rho}(z, \theta) = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2+1}\cos\theta \\ \sqrt{z+1}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z \end{pmatrix}$$

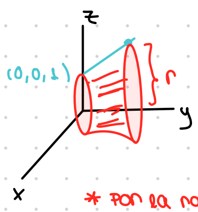
$$z \in [0, 2]$$
$$\theta \in [0, 2\pi]$$

Encuentre una parametrización para:

1. La superficie obtenida al hacer girar la circunferencia de radio 3, en el plano XZ y centrada en el punto $(x, y) = (5, 0)$, en torno al eje z.
2. La superficie obtenida al rotar el segmento entre $(0, 0, 1)$ y $(0, 2, 5)$ en torno al eje y.

2)

① $\vec{\rho}_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$



$\vec{\rho}_1(t) = \begin{pmatrix}0\\2t\\1+4t\end{pmatrix}$

* Por la rotac del segmento

② $r(t) = z(t) = 1+4t$

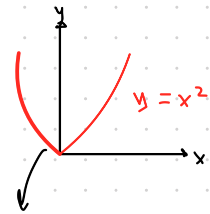
③ $\vec{\rho}(t,\theta) = \begin{pmatrix}(1+4t)\cos\theta\\2t\\(1+4t)\operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$

$t \in [0,1]$ → Por ser recta

$\theta \in [0, 2\pi]$

Un paraboloide es una superficie que nace de rotar una parábola entorno a su eje de simetría. Parametrice el paraboloide generado al rotar la función $y = x^2$ contenida en el plano XY en torno al eje y.

1. Parametrice la superficie generada.
2. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie para cualquier punto $\vec{\phi}_0(u, v) = (x_0, y_0, z_0)$
3. Ocupe la expresión anterior para encontrar el plano tangente al paraboloide en el punto $(1, 1, 0)$.



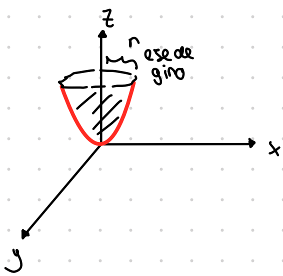
Parabola se expande al infinito e $x = \tau \rightarrow \therefore \tau \in [-\infty, \infty]$

① $\vec{\rho}(\tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau^2 \end{pmatrix}$ $\quad \tau \in [-\infty, \infty]$

② $r(\tau) = x(\tau) = \tau$

③ $\vec{\rho}(\tau, \theta) = \begin{pmatrix} \tau\cos\theta \\ \tau^2 \\ \tau\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$ $\quad \tau \in [-\infty, \infty]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

queremos vuelta completa



Real desarrollo pregunta:

$$\underbrace{\vec{\rho}_\tau = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 2\tau \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{\rho}_\theta = \begin{pmatrix} -\tau\sin\theta \\ 0 \\ \tau\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{derivadas direccionales}}$$

$$\vec{\rho}_\tau \times \vec{\rho}_\theta = \begin{pmatrix} 2\tau^2\cos\theta \\ -\tau \\ 2\tau^2\sin\theta \end{pmatrix}$$ vector normal

2)

$\therefore$ Ecuac del plano

$$r : \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\theta \\ -r \\ 2r^2\sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$2r^2\cos(x - x_0) - r(y - y_0) + 2r^2\sin\theta\,(z - z_0) = 0$$

3)

$$\vec{P}(r_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r^2 \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}$$

$r_0 = 1$

$\theta_0 = 0$

$$2\cancelto{1}{r^2}\cos(x - \cancelto{1}{x_0}) - \cancelto{1}{r}(y - \cancelto{1}{y_0}) + 2\cancelto{0}{r^2\sin\theta}\,(z - \cancelto{0}{z_0}) = 0$$

$$2(x - 1) + y - 1 = 0$$