Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Probabilidad y Estadística

Prof: Lorena Correa A.
Segundo Semestre 2009

GUIA 2
EYP2405 - METODOS ESTADISTICOS

1. Se desea estimar la tasa de falla π de cierta máquina. Al observar 100 unidades durante cierto tiempo, se registró que 7 máquinas fallaron.
   (a) Construya intervalos de 90%, 92% y 96% de confianza para π. Use la aproximación Normal y luego construya intervalos exactos. Compare e interprete los resultados.
   (b) Si el ancho de un intervalo de 99% de confianza puede ser a lo más 0.10, ¿cuál es el tamaño de la muestra que se debe usar si π es desconocido?.
2. Un compuesto químico es testeado regularmente por su fabricante para determinar su contenido de azufre. Durante un período de observación se ha encontrado que el contenido medio es de 0.35% con una desviación estándar de 0.05%. Para un comprador de este compuesto es muy importante la cantidad de azufre que él contenga y por ello la mide en cuatro muestras que obtiene aleatoriamente de su compra. Si el promedio en dichas muestras excede el 0.5% rechaza la compra. ¿Puede confiar, en forma razonable, en que no rechazará la partida equivocadamente?.
3. Para controlar la calidad del concreto se utiliza una tarjeta de registro de una prueba de resistencia realizada a cubos de dimensiones especificadas y en base a ellas se determinó que ella tiene una distribución Normal de media $28N/mm^2$ y desviación estándar $6N/mm^2$. Se desea construir límites simétricos en torno a dicha media de tal forma de tener sólo una probabilidad de 1 en 5 de que el promedio de mediciones a cuatro cubos caiga fuera de dichos límites cuando el concreto mantiene los requerimientos del diseño. ¿Cuáles serían los límites si la probabilidad disminuye a 1 en 20?.
4. Para determinar la cantidad de cloro contenido en dos polímeros diferentes se realizaron 9 mediciones en el primero y 16 en el segundo, entregando promedios de 58.18 y 56.97 respectivamente. El método analítico utilizado es conocido de experiencias anteriores y se sabe que entrega resultados con una desviación estándar de 0.8. Encuentre un intervalo de 99 % de confianza para la verdadera diferencia entre los porcentajes de cloro de ambos polímeros.
5. En la construcción de un puente se necesita estudiar la posible aparición de pequeñísimas grietas. Se determina que la proporción de dm^2 construidos que tengan una de estas grietas no puede pasar de 1 por mil, y se necesita estar seguro de que se cumpla esta condición. Para ello se toma una muestra de $N\ \ dm^2$ en construcción que se observan para determinar la proporción de los que presentan alguna falla.
   (a) ¿Qué tipo de intervalo de una cola sería conveniente?. Derívelo.
   (b) Encuentre el intervalo de una cola, de 95% de confianza, sabiendo que se encontró fallas en 4 dm^2 de 5.000 observados.
6. Dos sucursales bancarias atienden un número de clientes por cada 5 minutos de acuerdo a distribuciones Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Se tomaron 2 muestras aleatorias de 120 períodos de 5 minutos en cada sucursal, encontrándose promedios muestrales de 9.5 y 10.1 clientes por período. Mediante intervalo de 99% de confianza para $(\lambda_1 - \lambda_2)$ indique si se puede afirmar que las tasas de atención son distintas.
7. La duración de una componente es aproximadamente Normal con una media proporcional a la cantidad de uno de los insumos utilizados, que no es una variable aleatoria, y varianza constante. Una muestra de tamaño $n = 8$ de las duraciones, en días, es 23, 31, 34, 46, 25, 49, 30. Los valores correspondientes a la cantidad de insumo utilizado, en gramos, son 18, 23, 22, 30, 15, 29, 16. Derive el estimador de máxima verosimilitud para la constante de proporcionalidad y obtenga un intervalo de confianza 0.95 para este parámtero suponiendo que la distribución de probabilidades del estimador es asintóticamente Normal.

8. El polvo detergente es comercializado en cajas que tienen un peso rotulado que se debe respetar. Con el objeto de estimar el peso μ y la desviación típica σ de las cajas de un lote producido en una jornada, se sacan 3 muestras independientes de tamaños n_1, n_2, n_3 respectivamente, y se obtienen $\bar{X}_i$, S_i^2, $i = 1, 2, 3$. Asuma normalidad de la población. Si

$$n_1 = 10, \quad n_2 = 15, \quad n_3 = 12$$
$$\bar{X}_1 = 151,5 \; grs. \quad \bar{X}_2 = 152,0 grs. \quad \bar{X}_3 = 150,5 grs.$$
$$S_1^2 = 1,44 grs^2 \quad S_2^2 = 1,21 grs^2 \quad S_3^2 = 1,00 grs^2$$

   (a) Construya un intervalo de 95% de confianza para μ.

   (b) Construya un intervalo de 95% de confianza para la desviación estándar σ.

9. Una muestra aleatoria, obtenida en 6 días, de la tasa de interés en el banco A es 2.34, 2.01, 2.65, 2.12, 2.76, 3.01. Para el banco B una muestra aleatoria de 6 días en las tasa de interés es 1.89, 2.23, 1.76, 2.34, 2.00, 2.81, 2.96. Estas tasas de interés se pueden asumir como provenientes de distribuciones Normales.

   (a) Muestre que en base al promedio de las tasas observadas del banco A, existen infinitos intervalos de confianza para la tasa de interés promedio. Explique porqué el intervalo simétrico es preferible. Explique porqué no se utiliza la mediana como base para construir un intervalo de confianza para la tasa de interés promedio aunque en muestras grandes también tiene distribución Normal.

   (b) Construya un intervalo de confianza 0.95 para el coeficiente de variación de la tasa de interés en el banco A. Interprete el significado de este intervalo.

   (c) ¿ Existe evidencia en los datos como para decir, con un nivel de confianza razonable, que el banco A tiene tasas más altas ?. ¿ Cómo puede cambiar la respuesta a esta pregunta si las observaciones corresponden a los mismos o distintos días ?. ¿ Cómo se puede validar el supuesto de que las varianzas son iguales ?.

   (d) Suponiendo que las observaciones corresponden a los mismos días, ¿ existe correlación entre las tasas de interés de estos dos bancos ?.

10. Si $Y_1, ..., Y_n$ es una muestra aleatoria de una población normal, explique cómo obtener un intervalo de confianza $(1 - \alpha)$ para la varianza poblacional σ^2 si la media poblacional μ es conocida. Explique en qué sentido el conocimiento de μ mejora la estimación por intervalos en comparación al caso μ desconocido.

11. En una muestra de 100 estudiantes egresados en 1992, el coeficiente de correlación entre la nota promedio en la universidad y el salario en el primer trabajo fue 0.45. En 1982 el coeficiente de correlación era 0.67. ¿ Diría usted, con un nivel razonable de confianza, que la correlación entre estas variables ha cambiado o aceptaría la hipótesis que las diferencias se deben sólo a errores muestrales ?. Explique claramente los supuestos necesarios para hacer el análisis.