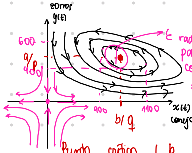
Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - py) \\ \frac{dy}{dt} = y(qx - b) \end{cases}$$

$x(t)$, $y(t)$ incógnitas
a, b, p, q constantes positivas

$(0,0)$ es un punto silla (inestable)



ε radio círculo para que se considera estable

⇒ Esa curva de solución está contenida dentro de un círculo más grande

Ejemplo $\varepsilon = 100$

Punto crítico $\left(\frac{b}{q}, \frac{a}{p}\right)$ es un "centro" porque son curvas cerradas alrededor del pto. crítico

Cerca del punto crítico (de manera local), se puede analizar el tipo de punto crítico

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} b/q \\ a/p \end{bmatrix} \Rightarrow \text{no es estable (asintóticamente)}$$

Puntos críticos de sistemas no lineales

Un sistema lineal

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

con A y $\mathbf{b}$ constantes y A invertible, tiene un único punto crítico: $\mathbf{x}_c = -A^{-1}\mathbf{b}$.

Sistemas no lineales pueden tener cualquier número de puntos críticos.

Teoría La clasificación de puntos críticos es algo local. Además, un sistema no-lineal se comporta casi lineal cerca de un pto crítico

dado
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(x,y) \\ \frac{d}{dt} y(t) = g(x,y) \end{cases}$$
y (a,b) un punto crítico estable.

$$f(x,y) = \cancel{f(a,b)} + \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-b) + r(x,y)$$

punto crítico

$$g(x,y) = \underbrace{\cancel{g(a,b)}}_{0} + \frac{\partial}{\partial x} g(a,b)(x-a) + \frac{\partial}{\partial y} g(a,b)(y-b) + r(x,y)$$

suma del resto de los términos "residuos" ≈ 0

Usamos una serie de Taylor para f y g, que dependen de x, y.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{bmatrix}}_{\text{matriz Jacobiana}} \begin{bmatrix} x(t) - a \\ y(t) - b \end{bmatrix}$$

Buena aproximación cerca del pto crítico.
"linealización"

Puntos críticos aislados

Un punto crítico se llama *aislado* si existe alguna vecindad alrededor el punto en lo cual no existe otro punto crítico.

En este caso, la clasificación de puntos críticos como nodo, centro o espiral se define localmente en una vecindad alrededor del punto crítico.

Linealización cercana a un punto crítico

Cercana a un punto crítico se puede analizar el comportamiento de sistemas no lineales con aproximaciones lineales. Es decir, se puede linealizar un sistema cerca de un punto crítico.

Supongamos que el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x,y), \\ \frac{d}{dt}y(t) = g(x,y), \end{cases}$$

tiene un punto crítico aislado en (a,b). Cerca del punto crítico, se puede aproximar este sistema no lineal con el sistema lineal dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x f(a,b) & \partial_y f(a,b) \\ \partial_x g(a,b) & \partial_y g(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - a \\ y(t) - b \end{bmatrix}.$$

La matriz de coeficientes se llama *matriz Jacobiana*.

Ejemplo 2

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y - xy = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = x^3 - 2y + xy = g(x,y)$$

$(0,0)$ es un pto. crítico $\quad f(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 3-y & 1-x \\ 3x^2+y & -2+x \end{bmatrix}(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

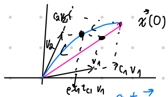
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ cerca del pto. crítico $(0,0)$

Teoría → Tenemos $\vec{x}'(t) = A\,x(t)$ y un único pto. crítico en cero, si A invertible. Asumimos que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y λ_1, λ_2 sus valores propios distintos a cero. $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores propios

Caso 1

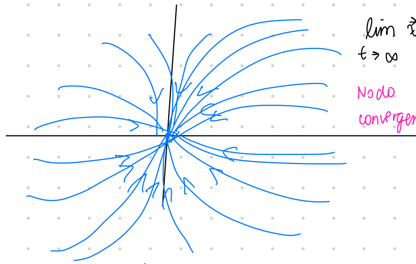
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$



en $t = 1$: $\vec{x}(1) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{<c_1}\vec{v}_1 + \underbrace{c_2 e^{\lambda_2 t}}_{<c_2}\vec{v}_2$

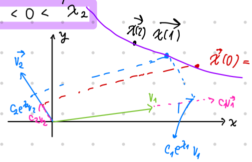
$e^{\lambda_1 t} < e^{\lambda_2 t}$



$\lim_{t\to\infty} \vec{x}(t) = 0$

Nodo impropio convergente

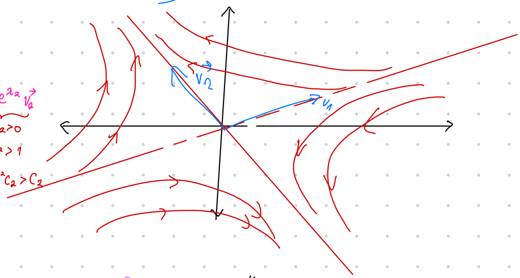
Caso 2: $\boxed{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$ → punto silla



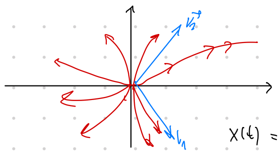
$\vec{x}(0) = c_1\vec{v}_1 + c_2 v_2$

$\vec{x}_1(1) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1}}_{\substack{\lambda_1<0 \\ 0<e^{\lambda_1}<1 \\ 0<c_1e^{\lambda_1}<c_1}}\vec{v}_1 + \underbrace{c_2 e^{\lambda_2}}_{\substack{\lambda_2>0 \\ e^{\lambda_2}>1 \\ e^{\lambda_2}c_2>c_2}}\vec{v}_2$

$\vec{x}(2) = c_1 e^{2\lambda_1} + c_2 e^{2\lambda_2}\vec{v}_2$



Caso 3: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

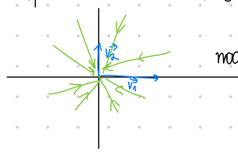


$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$

Caso 4

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ completo

$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$
$= e^{\lambda_1 t}(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2)$



nodo propio convergente

Caso 5

$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ completo

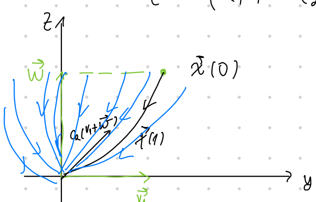
nodo propio divergente.

Caso 6 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ incompleto.

$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}(t\vec{v}_1 + \vec{w})$

↪ vector propio generalizado.

$= e^{\lambda_1 t}(c_1 v_1 + c_2(t\vec{v}_1 + w))$



nodo impropio convergente.