Problema 1

En un taller de manufactura existen M máquinas y N trabajos que deben ser procesados. Cada trabajo debe ser procesado en un subconjunto (conocido) de las M máquinas, en una secuencia pre-establecida. Si el trabajo número i debe procesarse en la máquina k, entonces t_{ik} representa su tiempo de proceso en esa máquina. Cada máquina puede procesar un solo trabajo a la vez, y una vez que comienza el procesamiento de un trabajo no puede interrumpirse. Se desea programar los trabajos de modo de minimizar el tiempo total requerido para procesarlos todos.

Conjuntos y subíndices

El enunciado nos presenta lo siguiente:

- $k: máquinas \in M$
- $i: trabajos \in N$

Parámetros

El enunciado nos presenta el siguiente parámetro:

- $t_{ik} = tiempo\ de\ procesamiento\ del\ trabajo\ i\ en\ la\ máquina\ k$

Parámetros

También, sabemos que cada trabajo i es procesado en un subconjunto M_i de máquinas en un orden preestablecido, por ende, podemos ocupar a nuestro favor. Nos conviene definir una nuevo subíndice j que represente el conjunto de máquinas.

- $a_{ij} = \begin{cases} 1 & Si\ el\ trabajo\ i\ debe\ ser\ procesado\ en\ la\ máquina\ j \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$

- $b_{i,j1,j2} = \begin{cases} 1 & Si\ el\ trabajo\ i\ debe\ ser\ procesado\ secuencialmente\ en\ las\ máquinas\ j1\ y\ j2 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$ } es sabido pero no sabes pq son parejas

Variables

Tenemos que decidir el orden de procesamiento en orden de poder minimizar el tiempo requerido.

- $y_{ijk} = \begin{cases} 1 & Si\ el\ trabajo\ i\ comienza\ antes\ que\ el\ trabajo\ j\ en\ la\ máquina\ k \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$

- $x_{ik} = instante\ en\ que\ se\ inicia\ el\ procesamiento\ del\ trabajo\ i\ en\ la\ máquina\ k$

- $z = Tiempo\ requerido\ para\ procesar\ el\ último\ trabajo$

4. Restricciones

Tenemos las siguientes restricciones:

- Restringir funcionamiento cuando los trabajos deben ser procesados en una misma máquina
- Seguir secuencia de máquinas para los diferentes trabajos
- El tiempo de procesamiento del último trabajo debe ser mayor o igual a Z
- Naturaleza de las variables.

4. Restricciones

Tenemos las siguientes restricciones:

- Restringir funcionamiento cuando los trabajos deben ser procesados en una misma máquina

Si i antes que j

$$M y_{ijk} + x_{ik} \geq (x_{jk} + t_{jk}) a_{ik} a_{jk} \qquad \forall i, j, k$$

$$M(1 - y_{ijk}) + x_{jk} \geq (x_{ik} + t_{ik}) a_{ik} a_{jk} \qquad \forall i, j, k$$

- Seguir secuencia de las máquinas

$$x_{ij2} \geq (x_{ij1} + t_{ij1}) b_{i,j1,j2} \qquad \forall i, j1, j2$$

Restricciones

- El tiempo de procesamiento del último trabajo en cada máquina debe ser mayor o igual a Z (considerando ji como la última máquina de aquel trabajo)

* Nos lubie

$$x_{i\cancel{j}k} + t_{i\cancel{j}k} \leq Z \qquad \forall k$$

$\forall i$

- Naturaleza de las variables

$$z, x_{ik} \geq 0 \qquad \forall i, j, k$$
$$y_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j, k$$

Problema 2: Convexidad

a) ¿Es $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$ un conjunto convexo? Justifique.

b) Demuestre que la función $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-|x|}$ no es convexa y tampoco es cóncava.

c) Sean $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = e^{g(x)}$. Demuestre utilizando la definición de convexidad que $f(x)$ es convexa. Hint: e^x es convexa.

Resumen Convexidad

Definición 5 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice convexo si para todo par de puntos $x_1 \in D$ y $x_2 \in D$ y cada número real λ con $0 \leq \lambda \leq 1$, $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in D$.*

Definición 7 *(Función convexa) Sea $f(x) : D \to \mathbb{R}$, con D convexo. Entonces, $f(x)$ es convexa sobre D si:*

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in D, \lambda \in [0,1].$$

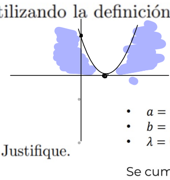
Definición 8 *(Función cóncava) Sea $f(x) : D \to \mathbb{R}$, con D convexo. Entonces, $f(x)$ es cóncava sobre D si:*

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in D, \lambda \in [0,1].$$

Así, resulta claro que si $f(x)$ es una función convexa, entonces $-f(x)$ será una función cóncava.

$x = (1-y)^2$

$y = (1-x)^2$



Problema 2.a

a) ¿Es $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$ un conjunto convexo? Justifique.

- $a = (x_1, y_1)$
- $b = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow$ ¿Qué agarrar se debe puntos cumplir?

$z = \lambda a + (1-\lambda) b = \lambda (x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)$

$= (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \in S$

- $a = (x_1, y_1) = (0,1)$
- $b = (x_2, y_2) = (1,0)$
- $\lambda = 0.5$

Se cumple que:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = 1 \leq 1 : a \in S$$
$$\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} = \sqrt{1} + \sqrt{0} = 1 \leq 1 : b \in S$$

Sin embargo:

$$z = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = (0.5, 0.5)$$

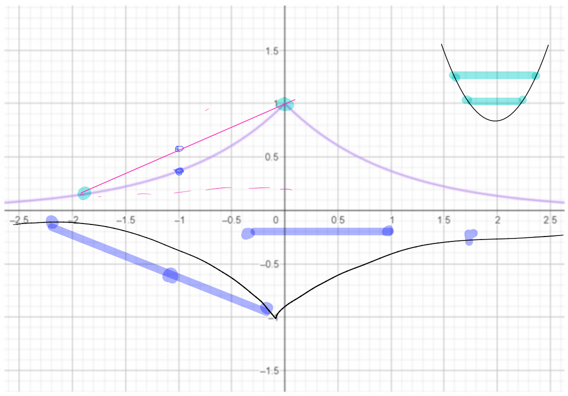
$$\sqrt{0.5} + \sqrt{0.5} = 1.414 \geq 1 : z \notin S$$

Por lo tanto, S no es un conjunto convexo

Problema 2.b

b) Demuestre que la función $f(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-|x|}$ no es convexa y tampoco es cóncava.

Una forma rápida de saber que esto es verdad es graficando nuestra función, la cual queda de la siguiente manera:



Definición 7 *(Función convexa) Sea $f(x) : D \to \mathbb{R}$, con D convexo. Entonces, $f(x)$ es convexa sobre D si:*

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in D, \lambda \in [0,1].$$

Problema 2.b

Debemos buscar un contraejemplo para poder demostrar lo pedido de manera analítica

- $x = -2$
- $y = 0$
- $z = 2$
- $\lambda = 0.5$

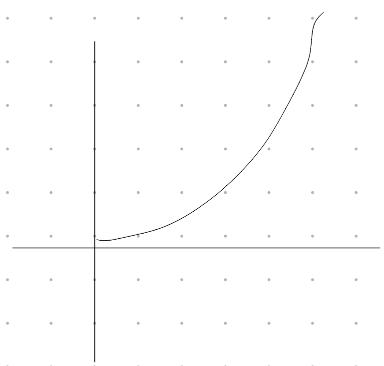
Entonces: $f(-1)$

Como $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0.3697 < 0.5677 = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, la función no es cóncava.

Como $f(\lambda x + (1-\lambda)z) = 1 > 0.1353 = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$, la función no es convexa.

Problema 2.c

c) Sean $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = e^{g(x)}$. Demuestre utilizando la definición de convexidad que $f(x)$ es convexa. Hint: e^x es convexa.



Como g es convexa sabemos que:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \qquad (1)$$

Luego, como nos indicaron que e es convexa, sabemos que:

$$e^{(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))} \leq \lambda e^{g(x)} + (1-\lambda)e^{g(y)} \qquad (2)$$

Como e es creciente, podemos aplicar exponencial a la ecuación (1) manteniendo la igualdad:

$$e^{g(\lambda x + (1-\lambda)y)} \leq e^{(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y))} \qquad (3)$$