Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2019

EYP 2405/EYP 2114
Métodos Estadísticos / Inferencia Estadística
Clase de Ejercicios

1. Se sabe que las fallas que han afectado al metro de Santiago en los últimos días, se producen debido a que ciertos componentes eléctricos dejan de funcionar. Asuma que los componentes son del mismo tipo con distribución común F. Sean, $x_1, \ldots, x_n$ tiempos de vida observados de tales componentes. La cantidad de interés en este problema es $S(t) = 1 - F(t)$, $t > 0$ que corresponde a la probabilidad que un componente no falle antes del tiempo t. Suponiendo que los tiempos de vida de los componentes son independientes con distribución exponencial de parámetro λ,

   a) Escriba el modelo estadístico correspondiente a esta situación
   b) Encuentre un estadístico suficiente minimal para λ.
   c) Pruebe que $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es completo.

2. Sea X_{ij} una variable aleatoria que representa la j-ésima medición a la unidad i. Se postula que

$$X_{ij} = \tau + \gamma_j + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, 1)$$

   en donde τ y γ_j son parámetros de interés definidos en $\mathbb{R}$. Si las mediciones para cada unidad i se asumen independientes, y considerando una muestra de n unidades y k mediciones

   a) Escriba el modelo estadístico correspondiente y analice si es identificado.

3. Relacionado con el Problema 1, suponga que los tiempos de vida observados fueron medidos con error, por lo que en realidad se observa $x_i - \mu$, $\forall i$. Además, se sabe que el valor de λ es 1. En este nuevo escenario, $x_1, \ldots, x_n$ es una muestra aleatoria con distribución exponencial trasladada de densidad dada por

$$f(x|\mu) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)} & \text{si } \mu < x \\ 0 & \text{si } \mu \geq x \end{cases}$$

   a) Muestre que $X_{(1)} = \min(X_i)$ es un estadístico suficiente para μ y estudie su ancilaridad.
   b) Pruebe que $X_{(1)}$ es un estadístico completo.
   c) Muestre que $E\left(\frac{X_{(1)}}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2\right) = \left(\mu + \frac{1}{n}\right) \sigma^2$, en donde $\sigma^2 = Var(X)$.

4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de una población con densidad

$$f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1, \theta > 0$$

a) Encuentre un estadístico suficiente minimal para θ.

b) Encuentre un estadístico completo.

Indicaciones

a) Recuerde que si f es una función integrable, entonces $\frac{d}{dx}\int_x^c f(t)dt = -f(x)$.

b) Si $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d de una población con media μ y varianza σ^2, entonces

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad E(S^2) = \sigma^2,$$

con $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ y $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.

c) Si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, entonces $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x > 0, \lambda > 0$.