Clase 25 EDO

$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ constante $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$

λ_1, λ_2 valores propios distintos a cero

$\vec{v_1}, \vec{v_2}$ vectores propios

$\vec{x_c} = 0$ pto. crítico

Caso de λ_1, λ_2 complejo

$\lambda_1 = p + qi \qquad \vec{v_1} = \vec{a} + \vec{b}i$

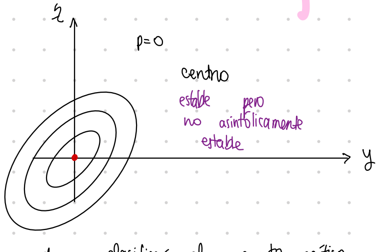
$\lambda_2 = p - qi \qquad \vec{v_2} = \vec{a} - \vec{b}i$

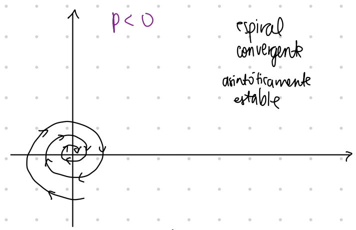
Soluciones son:

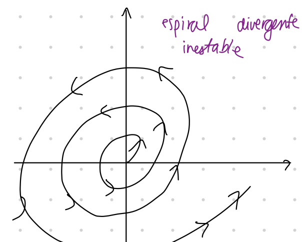
$\vec{x_1}(t) = e^{pt}\left(\vec{a}\cos(qt) - b\,\text{sen}(qt)\right)$

$\vec{x_2}(t) = e^{pt}\left(b\cos(qt) + a\,\text{sen}(qt)\right)$

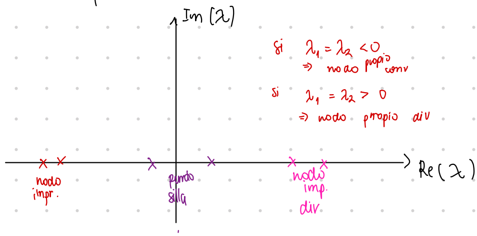
$\vec{X}(t) = C_1\vec{X_1}(t) + C_2\vec{X_2}(t)$

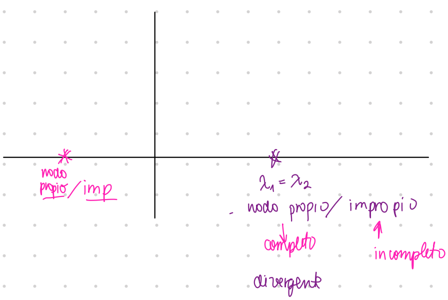


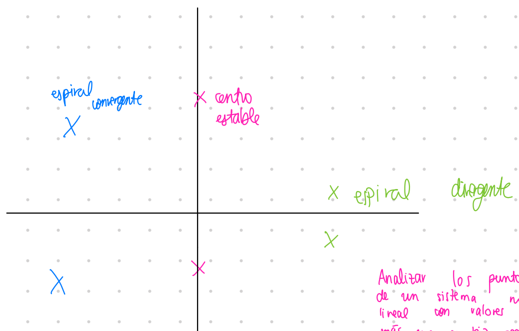




Se puede clasificar el punto crítico de un sistema lineal con sus valores y vectores propios.





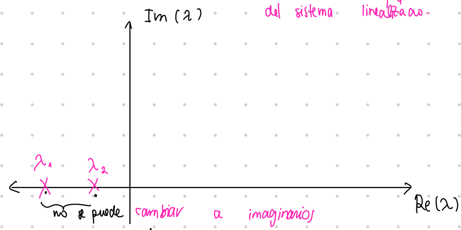


Analizar los puntos críticos de un sistema no lineal con valores propio más un cambio pequeño del sistema linealizado.

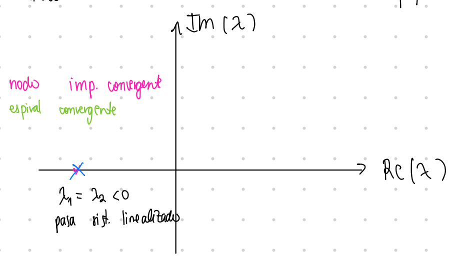
Sistema no lineal

↕ cambio "pequeño"

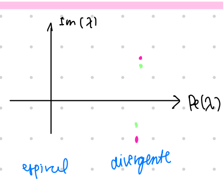
Sistema linealizado cercano a un punto crítico ⟷ clasificación con valores propios.

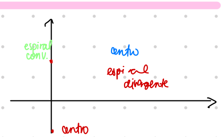


λ_1, λ_2 valores propios del sistema linealizado en este caso el punto sigue siendo un nodo imp. conv.



linealizado	no lineal
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ nodo conv	nodo conv
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ nodo conv	nodo conv o esp. conv
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ punto silla	punto silla
espiral div	espiral div
centro	centro o espiral conv o espiral div.





Transformadas

operación	entrada	salida
función cuadrada $f(x) = x^2$	número 2	número 4
derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	función de x $sen(x)$	función de x $\cos(x)$
transformada de LaPlace	función de x $f(x)$	función de s $F(s)$

La misma variable independiente (x)

cambio de variable independiente

Ejemplo 1

$f(t) = 1$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

definición

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \left[\frac{1}{-s} e^{-st}\right]_{t=0}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s} \underbrace{\lim_{t \to \infty} e^{-st}}_{=0 \text{ si } s>0} - \frac{1}{-s} e^0 = \frac{1}{s} \qquad s>0$$

Entonces $F(s) = \frac{1}{s}$, $s>0$

Ejemplo 2

$f(t) = e^{at}$, a cte.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a-s} \lim_{t \to \infty} e^{(a-s)t} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \quad \text{si } s>a \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s-a} \quad s>a$$

Ejemplo 3:

$f(t) = t$

$$F(s) = \int_0^\infty \underset{g'}{e^{-st}}\, \underset{f}{t}\, dt$$

vaca

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t\right]_0^\infty - \int \frac{1}{-s} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} \underbrace{\lim_{t \to \infty} te^{-st}}_{=0} - 0 + \frac{1}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, dt}_{\text{transformada de laplace } f(t)=1} = \frac{1}{s^2}$$

para $s>0$

$1/s$

Cuadro 1: Tabla de transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $(s>0)$
t	$\frac{1}{s^2}$ $(s>0)$
t^n $(n \geq 0$ entero$)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s>0)$
t^a $(a > -1$ real$)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(s>0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $(s > \Re(a))$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s>0)$

Ejemplo 4

$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s} \mathcal{L}\{$