Ayudantía 4

1. Sea $R(\cdot,\cdot)$ un predicado binario. Considere las siguientes fórmulas en lógica de predicados:

$$\varphi_1 : \forall x\,(R(x,x))$$
$$\varphi_2 : \forall x \forall y\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$
$$\varphi_3 : \forall x \forall y\,((R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow x = y)$$
$$\varphi_4 : \forall x \forall y \forall z\,((\underbrace{R(x,y)}_{x \neq y} \wedge \underbrace{R(y,z)}_{y \neq z}) \rightarrow \underbrace{R(x,z)}_{x \neq z})$$

Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentre interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ tales que $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ e $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$.
En cada caso, explique brevemente. $I(dom) = \mathbb{N}$ $\quad I_2(dom) = \mathbb{N}$ $\quad I_3(dom) = \mathbb{N}$

$I_1(R(x,y)) = x = y$ ✓ $\quad I_2(R(x,y)) = x \leq y$ $\quad I_3(R(x,y)) = x \neq y$

(a) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_4$
(b) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4$
(c) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$

1. Veamos si $I_1 \models \varphi$. Para φ_1: $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene $n = n$ $\therefore I_1 \models \varphi_1$

2. Para φ_4: Dados $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Si se cumple que $n_1 = n_2$ y $n_2 = n_3$, se tiene $n_1 = n_3$ $\quad I_1 \models \varphi_4$

$I_3 \not\models \varphi$: Para ningún $n \in \mathbb{N}$ se cumple $n \neq n$. $\therefore I_3 \not\models \varphi_1$. Por lo tanto, $I \not\models \varphi$ por reglas de conjunción.

b) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4$

$I_1 \models \varphi_1$ e $I_1 \models \varphi_2$. Luego, para φ_2 dado

Para $I_3 \not\models \varphi$

c) $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$

Veamos $I_2 \models \varphi$

Para φ_1: $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq n$

2. Sea P un conjunto de variables proposicionales, $\Sigma \subseteq L(P)$ un conjunto de formulas en lógica proposicional, y $\varphi, \psi \in L(P)$ dos formulas en lógica proposicional. Demuestre que:

(a) Si $\Sigma \models (\varphi \rightarrow \psi)$ entonces $\underbrace{\Sigma \cup}_{\text{unión}} \{\varphi\} \models \psi$. $\rightarrow$ no $= \vee$ $\quad \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi\}$

(b) Si φ es una tautología, se cumple que si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

a) Si $\Sigma \models (\overbrace{\varphi \rightarrow \psi}^{\neg\varphi \cup \psi}) \Rightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$

Por dem directo

Notar que si $\Sigma(\bar{v}) = 0$, la c. lógica es trivialmente correcta

Sea $\bar{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una valuación cualquiera. Suponemos que $\Sigma(\bar{v}) = 1$, y por consecuencia lógica e implicancia entonces $(\neg\varphi \vee \psi)(\bar{v}) = 1$. Luego $\Sigma \cup \{\varphi\}(\bar{v}) = 1$ ya que $\Sigma(\bar{v}) = 1$ y necesariamente y como $(\neg\varphi \vee \psi)(\bar{v}) = 1$ y como no se cumple $\varphi \Rightarrow \neg\varphi = 0$. Entonces necesariamente $\psi(\bar{v}) = 1$. y se cumple.

b) PD: si φ es una tautología. Si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi \Rightarrow \Sigma \models \psi$

Sea σ una valuación $\sigma\, P \rightarrow \{0,1\}$ valuación tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Luego cuando φ es una tautología necesariamente $\sigma(\varphi) = 1$, entonces que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$

Finalmente, como $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, por def. cons. lógica se sabe que se debe cumplir $\sigma(\psi) = 1$

Como σ es una valuación arbitraria se cumple que $\Sigma \models \psi$

$\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$\Sigma' = \{\varphi_2, \varphi_3\} \rightarrow \Sigma' \models \varphi_1$