Teorema de stokes

F con componentes de clase C^1 en una región abierta que contiene a S.

$$\iint_S (\nabla \times F)\, d\vec{s} = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{r}$$

$\partial S \to$ cerrada

Teorema de la divergencia idem (igual al teorema anterior) es una región abierta que contiene a V.

$$\underbrace{\iint_{\partial V} F \cdot d\vec{s}}_{\text{integral de flujo}} = \iiint_V \nabla \cdot F \, dV$$

Problema 1

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + f(x,y,z)\mathbf{k}$, donde f es una función de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, y sea

$$I = \iint_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} F \cdot d\vec{r}$$

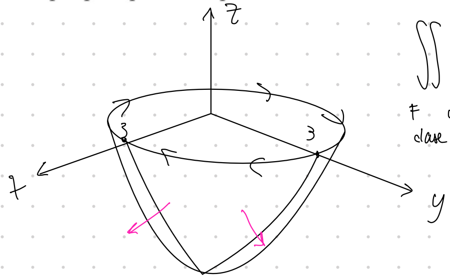
$\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \to \nabla \times F$

donde la superficie S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2 - 9$ comprendida bajo el plano $z = 0$ y con vector normal apuntando en la dirección negativa del eje z. ¿Es posible calcular el valor de I? Si lo es, calcúlelo, y si no lo es, justifique por qué no es posible

$z = x^2 + y^2 - 9$

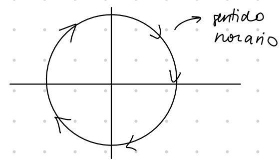
$x = 0 \qquad z = y^2 - 9$

$y = 0 \qquad x^2 + z = 9$



$$\iint (\nabla \times F)\, d\vec{s} = \int_C F \cdot d\vec{r}$$

F con componentes clase C^1



$-C$: $x = 3\cos(t)$, $y = 3\,\mathrm{sen}(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$r'(t) = (-3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 0)$

$$-\int_{-C} F \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} (3\,\mathrm{sen}(t), -3\cos(t), f(r(t))) \cdot (-3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 0)\, dt = -\int -9\,\mathrm{sen}^2(t) - 9\cos^2(t) + 0 = -\int_0^{2\pi} -9\, dt = 18\pi$$

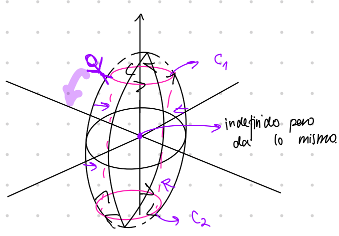
Problema 2

Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, zx, x^2 e^{z^2 y}\right)$ y S la porción del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{12} = 1$ fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada de tal forma que las normales apuntan hacia dentro del elipsoide

$F = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, zx, x^2 e^{z^2 y}\right)$

S: $\underbrace{\frac{X^2}{4}}_{a^2} + \underbrace{\frac{y^2}{4}}_{b^2} + \underbrace{\frac{z^2}{12}}_{c^2} = 1$

$a = 2 \quad b = 2 \quad c = 2\sqrt{3}$



Componentes de F de clase C^1 en $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

$$\iint_S (\nabla \times F)\, d\vec{s} = \int_{C_1} F \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} F \cdot d\vec{r}$$

$\underbrace{\frac{x^2+y^2}{4}}_{1}$

$C_{1,2}$: $\frac{1}{4} + \frac{z^2}{12} = 1 \Rightarrow z^2 = 9 \qquad z \in \{-3, 3\}$ ($-3 \to C_2$, $3 \to C_1$)

C_1: $z=3$ $\quad t\in[0,2\pi]$ $\quad \int_{C_1} F\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sqrt{10}, 3\cos(t), \cdots)}_{F(r(t))} \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)\,dt$

$x=\cos(t)$ $\quad r'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$

$y = \operatorname{sen}(t)$

$$\int_0^{2\pi} -\sqrt{10}\operatorname{sen}(t) + 3\cos^2(t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 1+\cos(2t)\,dt = \frac{3}{2}\left(t+\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi$$

$-C_2$: $x=\cos(t)$ $\quad r'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$

$y=\operatorname{sen}(t)$

$z=-3$

$$\int_{-C_2} F\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sqrt{10}, -3\cos(t), \ldots)\cdot(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sqrt{10}\operatorname{sen}(t) - 3\cos^2(t)\,dt = -3\pi$$

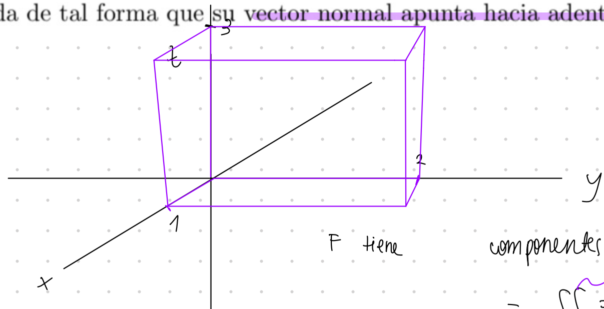
$$\iint \operatorname{div}(F)\,d\vec{S} = \int_{C_1} F\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} F\cdot d\vec{r} = 3\pi - (-3\pi) = 6\pi$$

Problema 3

Calcule el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^2y, xz^3, 4yz^2)$$

a través de la frontera del paralelepípedo formado por los planos $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$, orientada de tal forma que su vector normal apunta hacia adentro



F tiene componentes clase C^1.

$$-\iint \underbrace{F\cdot d\vec{s}}_{\text{integral de un campo}} = \iiint \nabla\cdot F\,dV$$

$\nabla\cdot F = 4xy + 8yz$

$$\iint F(-n)\,dS = -\iiint \nabla\cdot F\,dV$$

V: $x\in[0,1]$

$y\in[0,2]$

$z\in[0,3]$

$$\int_0^3\int_0^2\int_0^1 4xy + 8yz\,dx\,dy\,dz = -\int_0^3\int_0^2 2x^2y + 8xyz\Big|_{x=0}^{x=1} dy\,dz = -\int_0^3\int_0^2 2y+8yz\,dy\,dz = \cdots = -84$$

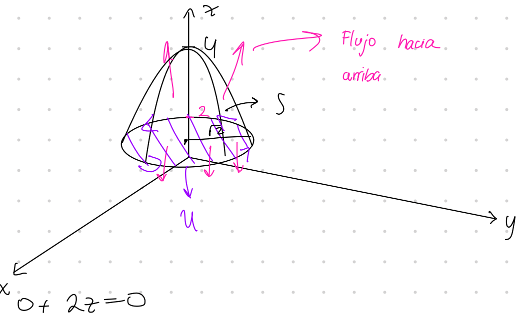
Problema 4

Calcule el flujo hacia arriba del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (-2xz, z, z^2)$ a través de la región del paraboloide $x^2+y^2+z=4$ que está encima del plano $z=2$

$z = 4 - x^2 + y^2$ $\quad$ sobre $z=2$

$x=0$ $\quad z = 4-y^2$

$y=0$ $\quad z = 4-x^2$



$F = (-2xz, z, z^2)$

F tiene componentes de clase C^1.

$$\underbrace{\iint_S F \cdot d\vec{s}}_{\text{Queremos}} + \iint_U F \cdot d\vec{s} = \iiint_V \cancel{\nabla F}^{\,0} \, dV$$

$$\Rightarrow \iint_S F\, d\vec{s} = - \iint_U F \cdot d\vec{s}$$

$\nabla \cdot F = -2z + 0 + 2z = 0$

$U: \quad (r\cos(t), r\,\text{sen}\,\theta, 2)$

$r \in [0, \sqrt{2}] \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$r_\theta = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0)$

$r_r = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)$

$r_\theta \times r_r = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(-r) = (0, 0, -r)$

$$\iint_V F \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (-2r\cos\theta \cdot 2, 2, 4) \cdot (0, 0, -r)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -4r \, dr\, d\theta = 2\pi\left(-\frac{4r^2}{2}\right)\Big|_0^2 = -4\pi(2-0) = -8\pi$$

$$\Rightarrow \iint_S F\, d\vec{s} = 8\pi.$$