Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer semestre de 2019

Ayudante: Hernán Robledo (harobledo@uc.cl)

Inferencia Estadística / Métodos Estadísticos - EYP2114/EYP2405

Ayudantía 2

1. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra de una distribución $U(\theta, \theta+1)$. Determine:
   a) Un estadístico suficiente para θ.
   b) Según el estadístico determinado en a), determine si es mínimo suficiente para θ
   c) Determine si el estadístico es completo.

2. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra que distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x|\mu) = \frac{3^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{x-\mu}\right)^{\alpha+1}\exp\left(\frac{-3}{x-\mu}\right)$$

   donde $x \geqslant \mu$, y α es conocido pero μ es desconocido. Determine un estadístico ancilar para μ.

3. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra que distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(x|\sigma) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)$$

   $x > 0, \sigma > 0$. Determine un estadístico ancilar para σ.

4. Para cada una de las distribuciones, sea $X_1, .., X_n$ una muestra. Encuentre, si existe, un estadístico mínimo, y determine si pertenece a una familia completa o no.
   a) $f(x|\theta) = \dfrac{(log\theta)\theta^x}{\theta-1} \qquad 0 < x < 1, \theta > 1$
   b) $f(x|\theta) = \dfrac{2x}{\theta^2} \qquad 0 < x < \theta, \theta > 0.$
   c) $f(x|\theta) = \dfrac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]} \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty$

SOLUCIÓN A EJERCICIOS RESTANTES

Problema 3)

Notemos que la distribución pertenece a una familia de escala (para más información Casella Berger Capítulo 3, sección 2). Sea Z una variable aleatoria que distribuye $f(x)$

(la familia sin parámetro escala). Debido a que X pertenece a esta familia, entonces si X distribuye $f(x-\sigma)$, entonces σZ distribuye $f(x-\sigma)$. El estadístico ancilar correspondiente a esta distribución es cualquier función que dependa de $\frac{X_1}{X_n}, ..., \frac{X_n}{X_n}$. Para mostrar que una función de este estilo es ancilar (llamemos $S(Y)$) vamos a mostrar que la distribución de esta no depende del parámetro θ, lo cual corresponde a la definición de estadístico ancilar. Sea $S(Y) = S(Y_1, ..., Y_{n-1}) = S(\frac{X_1}{X_n}, ..., \frac{X_{n-1}}{X_n})$ que distribuye $f_Y(y)$, con función de distribución $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(S(Y) \leqslant y) = P(Y_1 \leqslant y_1, Y_2 \leqslant y_2, .., Y_{n-1} < y_{n-1}) = P(\frac{X_1}{X_n} \leqslant y_1, ..., \frac{X_{n-1}}{X_n} \leqslant y_{n-1}) =$$

$$P(\frac{\sigma Z_1}{\sigma Z_n} \leqslant y_1, ..., \frac{\sigma Z_{n-1}}{\sigma Z_n} \leqslant y_{n-1}) = P(\frac{Z_1}{Z_n} \leqslant y_1, ..., \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \leqslant y_{n-1})$$

Y como los Z_i no dependen de σ, entonces esta última probabilidad no depende de tal paráemtro. Así, **cualquier estadístico que dependa de $\frac{X_1}{X_n}, ..., \frac{X_n}{X_n}$ es ancilar para una familia de escala.**$\square$

Problema 4b)

Durante la ayudantía surgió la duda respecto al estadístico suficiente de esta pregunta. La distribución de la muestra sería la siguiente función:

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} I_{[\theta,\infty]}(x_i) = \Big(\frac{2}{\theta}\Big)^n \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) I_{[\theta,\infty]}(\min_i x_i)$$

La duda correspondía a si la función $t(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ podía entrar dentro de la función $g(T(x)|\theta)$ y considerar a $h(x) = 1$ como el estadístico suficiente. La respuesta a esto es sí, pero no estaríamos cumpliendo con el propósito de esta sección, que es la de **Reducción de Datos**. Si consideramos a un estadístico que es una función de la muestra, tal como lo es $\prod_{i=1}^n x_i$, estaríamos considerando un estadístico más grande de lo que necesitamos. Seguiría siendo suficiente, pero sólo el estadístico $T(X) = \min_i X_i$ ya es suficiente y reduce la información de θ en si mismo. Considerar el estadístico $T(X) = \Big(\min_i X_i, \prod_{i=1}^n x_i\Big)$ sería tener un estadístico suficiente que supone una menor reducción de datos, ya que con el mínimo basta por si solo. Finalmente decir que la función $g(T(X)|\theta)$ es una función de θ y **depende de la muestra sólo a través del estadístico suficiente** $T(X)$.

Aclarado lo anterior, procederemos a mostrar la completitud del estadístico $T(X) = \min_i X_i$. Para determinar lo anterior, debe cumplirse que $E[g(T)|\theta] = 0$ solo si la función $g(t) = 0$. Esto es, debemos encontrar una expresión con la cual concluir que $g(t) = 0$ para que la esperanza se anule.

Para calcular esta esperanza debemos conocer cómo distribuye la variable aleatoria $T(X) = \max_i X_i$. Se puede demostrar (Teorema 5.4.4 Casella and Berger) que la distribución del máximo sigue la siguiente densidad:

$$f_T(t) = nF_X(t)^{n-1} f_X(t)$$

donde $f_X(x)$ y $F_X(x)$ corresponden a la función de densidad y acumulada de la variable X. Integrando $f_X(x)$ determinamos que $F_X(x) = \frac{x^2}{\theta^2}$. Reemplazamos:

$$f_T(t) = n\Big(\frac{t^2}{\theta^2}\Big)^{n-1}\frac{2t}{\theta^2} = n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}}$$

Ahora calculamos la esperanza según esta función de densidad de $g(t)$:

$$E[g(T)|\theta] = \int_0^\theta g(t)n\frac{t^{2n-1}}{\theta^{2n}}dt = \frac{n}{\theta^{2n}}\int_0^\theta g(t)t^{2n-1}dt$$

No sería correcto concluir de inmediato que $g(t)$ puede ser igual a 0 y hacer que la esperanza sea 0. Debemos utilizar algo más formal matemáticamente hablando. Para esto, asumamos que existe una función $g(t)$ que hace que $E[g(T)|\theta] = 0$, de lo cual se desprenda lo siguiente:

$$E[g(T)|\theta] = \frac{n}{\theta^{2n}}\int_0^\theta g(t)t^{2n-1}dt = 0 \iff \int_0^\theta g(t)t^{2n-1}dt = 0$$

Si derivamos la esperanza en función de θ, tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\theta}E[g(T)|\theta] = 0$$

Y procedemos a desarrollar esto:

$$\frac{d}{d\theta}E[g(T)|\theta] = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{n}{\theta^{2n}}\int_0^\theta g(t)t^{2n-1}\right) = \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{n}{\theta^{2n}}\Big)\int_0^\theta g(t)t^{2n-1} + \frac{d}{d\theta}\Big(\int_0^\theta g(t)t^{2n-1}\Big)$$

$$= \frac{d}{d\theta}\Big(\frac{n}{\theta^{2n}}\Big)\int_0^\theta g(t)t^{2n-1} + g(\theta)\theta^{2n-1}$$

Debido a nuestra suposición $E[g(T)|\theta] = 0$, la integral en esta última expresión se anula, y queda que:

$$\frac{d}{d\theta}E[g(T)|\theta] = g(\theta)\theta^{2n-1}\frac{n}{\theta^2 n} = g(\theta)\frac{n}{\theta} = 0$$

Como n y θ son valores positivos distintos de cero, tenemos que la única manera en que esta expresión sea igual a cero es con que $g(t) = 0$. Y con esto concluimos que el estadístico $T(x) = \max_i x_i$ es completo. $\square$

Es importante que comprendan cómo hacer este desarrollo, ya que podría entrar en la interrogación la demostración de una familia completa. Si quieren ver otro ejemplo pueden ver el ejemplo 6.2.23 del Casella and Berger, que demuestra la completitud de un estadístico suficiente para una distribución uniforme.

Problema 4c)

El teorema de factorización no nos permite determinar un estadístico suficiente para esta distribución ya que no se puede desarrollar la expresión (inténtelo). Un estadístico que es suficiente para todas las distribuciones consiste en $T(X) = (X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$, que corresponde a los estadísticos de orden (Casella and Berger, ejemplo 6.2.5). No nos detendremos a demostrar esto (porque el libro tampoco lo hace). Demostraremos que este estadístico es mínimo suficiente para esta distribución.

Según el teorema de Lehmann-Scheffe, basta con mostrar $\frac{p(x|\theta)}{p(y|\theta)}$ es constante como función de θ sí y sólo si $T(x) = T(y)$. Llamemos a la constante de la razón anterior como α, esto es:

$$\frac{p(x|\theta)}{p(y|\theta)} = \alpha$$

$$p(x|\theta) = \alpha p(y|\theta)$$

Debido a que esta expresión es constante para todo θ, consideremos el caso en que $\theta = 0$:

$$\frac{p(x|0)}{p(y|0)} = \alpha \iff p(x|0) = \alpha p(y|0)$$

Dividamos las dos ecuaciones anteriores para obtener:

$$\frac{p(x|\theta)}{p(x|0)} = \frac{p(y|\theta)}{p(y|0)}$$

Si reemplazamos ahora las densidades tenemos:

$$\frac{\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2)}{\prod_{i=1}^n (1 + (x_i - \theta)^2)} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + y_i^2)}{\prod_{i=1}^n (1 + (y_i - \theta)^2)}$$

El recíproco de esto sería:

$$\frac{\prod_{i=1}^n (1 + (x_i - \theta)^2)}{\prod_{i=1}^n (1 + x_i^2)} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + (y_i - \theta)^2)}{\prod_{i=1}^n (1 + y_i^2)}$$

Si consideramos lo anterior como funciones de θ, tendríamos a ambos lados polinomios de grado $2n$, y dos polinomios son iguales si y sólo si sus raís son iguales, por lo tanto, ambos polinomios tienen las mismas raíces que corresponderían a $\theta = x_i \pm i$ y $\theta = y_i \pm i$, con i un número imaginario. Debido a lo anterior, las raíces son permutaciones una de la otra, así que la igualdad se cumple sí y sólo si $T(x) = T(y)$, para que cada término se elimine correctamente. $\square$