$$k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \Rightarrow k = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} \qquad T = \frac{r'}{\|r'\|}$$

$$r' = T \cdot \|r'\| \quad / \frac{d}{dt}$$

$$r'' = T'\|r'\| + T(\|r'\|)'$$

↳ depende de t

$$r' \times r'' = [T \cdot \|r'\|] \times [T' \cdot \|r'\| + T(\|r'\|)']$$

$$= \|r'\|^2 (T \times T') + \|r'\| (\|r'\|)' \cancel{(T \times T)}^0$$

$$= \|r'\|^2 (T \times T') + \|r'\| (\|r'\|)'$$

$$r' \times r'' = \|r'\|^2 (T \times T')$$

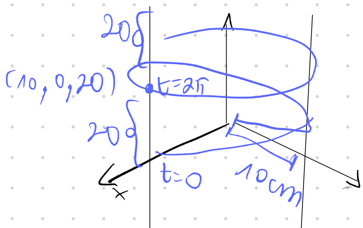
$$\frac{\|r' \times r''\|}{\|r'\|^2} = \|T'\| \quad / \frac{1}{\| \quad \|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'\|^3} = k(t)}$$

Problema 1

Una hélice tiene un radio de 10 cm y sube 20 cm en cada vuelta. En total ella gira 30 veces. Encuentre la parametrización natural (arcoparámetro o por longitud de arco). Además, busque una expresión que entregue el largo de la hélice desde que ha dado dos vueltas hasta que da x vueltas, con $x \in [2, 30]$.

Hint: Ecuación paramétrica de una hélice, $\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$



$$bt = 20$$

$$b2\pi = 20$$

$$b = \frac{10}{\pi}$$

Parametrización natural

$$r(t) = \left(10\cos(t), 10\sin(t), \frac{10t}{\pi}\right)$$

$$S(t) = \int_a^t \|r'(t)\| \, dt$$

$$r'(t) = \left(-10 \operatorname{sen}(t), 10\cos(t), \frac{10}{\pi}\right)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{100 + \frac{100}{\pi^2}} = 10\sqrt{\frac{\pi^2+1}{\pi^2}} = \frac{10}{\pi}\sqrt{\pi^2+1}$$

$$S(t) = \int_0^t \frac{10}{\pi}\sqrt{1+\pi^2} \, dt$$

$$= \frac{10}{\pi}\sqrt{1+\pi^2} \cdot t \Rightarrow t(s) = \frac{s\pi}{10\sqrt{1+\pi^2}}$$

$$r(s) = \left(10\cos\left(\frac{s\pi}{10\sqrt{1+\pi^2}}\right), 10 \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi}{10\sqrt{1+\pi^2}}\right), \frac{s}{\sqrt{1+\pi^2}}\right)$$

$$s \in [0, \underbrace{600\sqrt{1+\pi^2}}]$$

$$60\pi \cdot \frac{10}{\pi}\sqrt{1+\pi^2}$$

(30 vueltas) $= t$

$$\hookrightarrow S(t) = \int_{4\pi}^t \frac{10}{\pi}\sqrt{1+\pi^2} \, dt$$

$$= \frac{10}{\pi}\sqrt{1+\pi^2}\,(t - 4\pi)$$

$$S(x) = \frac{10}{\pi}\sqrt{1+\pi^2}\,(x \cdot 2\pi - 4\pi), \quad x \in [2, 30]$$

Problema 2

Encuentre los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t^3/3, t)$ en el punto $(1, 2/3, 1)$. $t = 1$

$$T = \frac{r'}{\|r'\|} \qquad N = \frac{T'}{\|T'\|} \qquad B = T \times N = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|}$$

$$r' = (2t, 2t^2, t) \Rightarrow \|r'\| = \sqrt{4t^2 + 4t^4 + 1} = \sqrt{(1+2t^2)^2} = |1+2t^2| = 1+2t^2$$

$$T = \frac{(2t, 2t^2, 1)}{1+2t^2} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$$

$$T'(t) = \frac{-4t}{(1+2t^2)^2}(2t, 2t^2, 1) + \frac{1}{1+2t^2}(2, 4t, 0)$$

$$N(1) = \frac{T'(1)}{\|T'(1)\|} \Rightarrow T'(1) = \frac{-4}{9}(2,2,1) + \frac{(2,4,0)}{3}$$

$$\|T(1)\| = \frac{1}{9}\sqrt{4+16+16} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad // \quad = \frac{1}{9}(-8,-8,-4) + \frac{(6,12,0)}{9} = \frac{(-2,4,-4)}{9}$$

$$N(1) = \frac{(-2,4,-4)}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{(-1,2,-2)}{3}$$

$$B = \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|} \qquad r' = (2t, 2t^2, 1)$$

$$r'' = (2, 4t, 0)$$

$$B = \frac{(-4,2,4)}{\|(-4,2,4)\|} \qquad r' \times r'' = \hat{i}(-4t) - \hat{j}(-2) + \hat{k}(8t^2 - 4t^2)$$

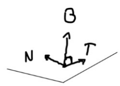
$$= (-4t, 2, 4t^2)$$

Problema 4

Determine la ecuación de la recta tangente y el plano osculador a la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $z = y^2$ en el punto $(1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 \\ z = y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x, y > 0 \\ x^2 = y^2 \\ |x| = |y| \\ x = y \end{array}$$

$$x = t \qquad r(t) = (t, t, t^2)$$
$$y = x = t$$
$$z = x^2 = t^2$$



$$L: \quad (x,y,z) = P_0 + \lambda r'$$

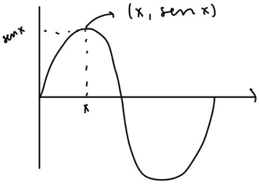
$$\pi: \quad [(x,y,z) - P_0] \cdot B = 0$$
$$[(x,y,z) - P_0] \cdot \frac{r' \times r''}{\|r' \times r''\|} = 0 \qquad x = y$$

$$[(x,y,z) - P_0] \cdot (r' \times r'') = 0$$

$r(t) = (1,1,1) \Rightarrow t = 1$

$$r(t) = (t,t,t^2) \qquad L: (x,y,z) = r(1) + \lambda r'(1)$$
$$r'(t) = (1,1,2t) \qquad (x,y,z) = \underline{(1,1,1) + \lambda(1,1,2)}$$
$$r''(t) = (0,0,2) \qquad \pi: [(x,y,z) - r(1)] \cdot (r'(1) \times r''(1)) = 0$$
$$r' \times r'' = (2,-2,0) \qquad [(x,y,z) - (1,1,1)] \cdot (2,-2,0) = 0$$
$$(x-1, y-1, z-1) \cdot (2,-2,0) = 0$$
$$\pi: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x = y\right] \qquad 2x - \cancel{2} - 2y + \cancel{2} = 0$$
$$\underline{x = y}$$

Calcule la curvatura de la función $y = \sin(x)$ a partir de una representación paramétrica de esta. ¿En qué punto de ella la curvatura alcanza su valor máximo?, ¿existe algún punto en que la curvatura sea mínima?



$r(t) = (t, \operatorname{sen}(t), 0)$

$r'(t) = (1, \cos(t), 0)$

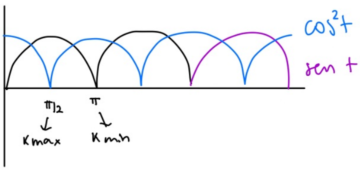
$r''(t) = (0, -\sin(t), 0)$

$r'(t) \times r''(t) = (0, 0, -\operatorname{sen}(t))$

$\| r' \times r'' \| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = |\operatorname{sen} t|$

$\| r' \| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

$$\kappa = \frac{\| r' \times r'' \|}{\| r' \|^3} = \frac{|\operatorname{sen} t|}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}}$$



$K_{max} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\qquad K_{max} = 1$

$K_{min} \Rightarrow t = n\pi$ $\qquad K_{min} = 0$

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT1630 - Cálculo III
Primer Semestre 2022

Ayudantía 3

Profesora : María Isabel Cortez
Ayudante : Juan Parra (jiparra3@uc.cl)
Fecha : 29-03-22

Problema 1

Una hélice tiene un radio de 10 cm y sube 20 cm en cada vuelta. En total ella gira 30 veces. Encuentre la parametrización natural (arcoparámetro o por longitud de arco). Además, busque una expresión que entregue el largo de la hélice desde que ha dado dos vueltas hasta que da x vueltas, con $x \in [2, 30]$.
Hint: Ecuación paramétrica de una hélice, $\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$

Problema 2

Encuentre los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t^3/3, t)$ en el punto $(1, 2/3, 1)$.

Problema 3

Calcule la curvatura de la función $y = \sin(x)$ a partir de una representación paramétrica de esta. ¿En qué punto de ella la curvatura alcanza su valor máximo?, ¿existe algún punto en que la curvatura sea mínima?

Problema 4

Determine la ecuación de la recta tangente y el plano osculador a la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $z = y^2$ en el punto $(1, 1, 1)$