Ayudantía 3

Lógica de Predicados

1. Para una interpretación $\mathcal{I}$ y un elemento a de $\mathcal{I}(dom)$, decimos que a es *definible* en lógica de predicados si existe una fórmula $\alpha(x)$ en lógica de predicados tal que $\mathcal{I} \models \alpha(a)$ y $\mathcal{I} \not\models \alpha(b)$ para todo b en $\mathcal{I}(dom)$ con $a \neq b$.

   (a) Para un $N > 0$ cualquiera y un símbolo de predicado $<$, sea $\mathcal{I}_N$ tal que

   $$\mathcal{I}_N(dom) := \{0, \ldots, N\}$$
   $$\mathcal{I}_N(<) := x < y$$

   Demuestre que para todo $0 \leq k \leq N$ se tiene que k es definible en lógica de predicados.

   (b) A partir del ítem anterior, demuestre que existen infinitas fórmulas $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ que solo usan el símbolo de predicado $<$, tales que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo $i \neq j$.

a) Para demostrar que K es definible en lógica predicado, debemos demostrar que existe fórmula $\alpha(x)$ tal que solo sea satisfacible al ser evaluada en k.

Dado $N>0$, $0 \leq k \leq n$, definimos que una fórmula que solo sea satisfacible al ser evaluada en k

$$\alpha_k(x) = \boxed{\exists x_0 \ldots \exists x_n} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} (x_i < x_{i+1}) \wedge \underbrace{(\neg(x < x_k) \wedge \neg(x_k < x))}_{(2)}$$

Para que no sean variables libres

La fórmula será cierta al evaluar en k, es decir, $\mathcal{I} \models \alpha(a) \iff a = k$

(b) A partir del ítem anterior, demuestre que existen infinitas fórmulas $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ que solo usan el símbolo de predicado $<$, tales que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo $i \neq j$.

$$\beta_i := \exists x_0 \ldots \exists x_i \bigwedge_{0 \leq t \leq i+1} (x_t < x_{t+1}) \longrightarrow$$

① $(x_1 < x_2)$

② $(x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3)$

③ $(x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \wedge (x_3 < x_4)$

2. Sea $<$ y $=$ símbolos de predicado binario. Para cada una de las siguientes oraciones φ en lógica de predicados, demuestre que φ es satisfacible por una interpretación con dominio finito no vacío y que interpreta $=$ como la igualdad de elementos, esto es, existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(\text{dom})$ es finito no vacío, $\mathcal{I}(=)$ es la igualdad y $\mathcal{I} \models \varphi$.

   (a) $\varphi_1 := (\forall x. \neg(x < x)) \wedge (\forall x. \exists y. x < y)$

   (b) $\varphi_2 := (\forall x. \neg(x < x)) \wedge (\forall x. \exists y. x < y) \wedge (\forall x. \forall y. (x < y \rightarrow \neg(y < x)))$

   (c) $\varphi_3 := (\forall x. \neg(x < x)) \wedge (\forall x. \exists y. x < y) \wedge (\forall x. \forall y. (x < y \rightarrow \neg(y < x))) \wedge (\exists x. \forall y. ((\neg(x = y)) \rightarrow x < y))$

a) $\varphi_1 := (\overbrace{\forall x. \neg}^{\text{ningún } x}(x < x)) \wedge (\underbrace{\forall x. \exists y.\ x < y}_{\text{Todos se relacionan con un elemento}})$

se relaciona consigo mismo

Posible solución usar un conjunto finito $\underbrace{\{a, b\}}_{\mathcal{I}(dom)}$, una interpretación de la forma: $x < y \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \{(a,b), (b,a)\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Ej: $(a < a) = 0$

$(a < b) = 1$

$\underbrace{a \quad b}_{\text{Dom } \{a, b\}}$

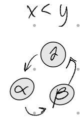
b) $\varphi_2 := \varphi_1 \wedge (\forall x. \forall y (x < y \longrightarrow \neg(\overbrace{y < x}^{\mathcal{I}(dom)})))$

Piedra papel o tijera

Posible solución conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e interpretación $\Rightarrow$ $x < y = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \{(\alpha,\beta), (\beta,\gamma), (\gamma,\alpha)\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Ej: $(\alpha < \alpha) = 0$

$(\alpha < \beta) = 1$



c) Posible solución: Usar un conjunto finito de 4 elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ y usar la interpretación dada por:

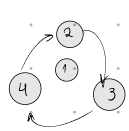
carta mágica

Ej:

$(1 < 2) = 1$

$(1 < 3) = 1$

$(3 < 2) = 0$



$x < y = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,4), (4,2)\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

cachipun

3. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decida si son verdaderas o no. Demuestre sus respuestas.

$p \to q \equiv \neg p \cup q$

(a) $\forall x.[(\exists y.R(x,y)) \longrightarrow S(x)] \equiv \forall x.\forall y.[R(x,y) \longrightarrow S(x)]$

(b) $(\forall x.(P(x) \to Q(x))) \models (\forall x.(P(x) \wedge Q(x)))$

(c) **[Propuesto]** $(\forall y.\exists x.(P(x) \to Q(y))) \models (\exists x.\forall y.(P(x) \to Q(y)))$

a) Ver pauta