Clase 19

Parametrización de superficies: Decimos que $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie si existe $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $r(D) = S$. Es un objeto 2-dimensional que se incrusta en $\mathbb{R}^3$. Las curvas son objetos 1-dimensionales que se incrustan en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

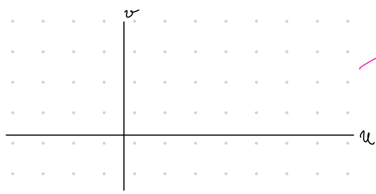
La función r se conoce como parametrización de la superficie S.

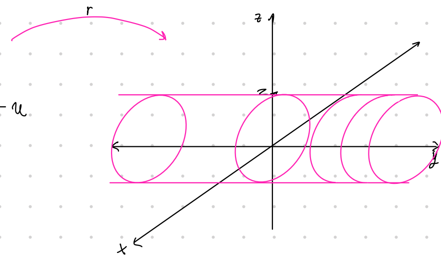
Ejemplo: $r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longrightarrow (2\cos(u), v, 2\,\text{sen}(u))$

Identificar la superficie parametrizada por r.

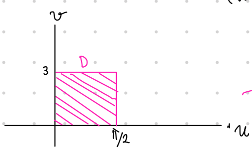
$x^2+z^2 = 4 = 2^2$ circunferencia centrada en el origen de radio 2.



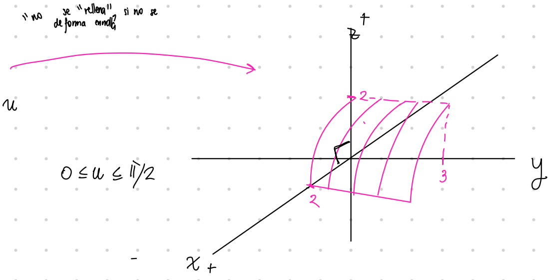


Ejemplo $r: [0, \pi/2] \times [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longrightarrow (2\cos(u), v, 2\,\text{sen}(u))$



"no se "rellena" si no se deforma cuando"



$0 \le u \le \pi/2$

Fijando la primera o segunda coordenada en $\mathbb{R}^2$, la parametrización r de la superficie, se convierte en la parametrización de una curva que yace sobre la superficie

En el caso del segundo ejemplo

Fijando $u = u_0 \in [0, \pi/2]$

$r_{u_0}: [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

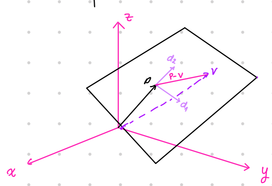
$v \longrightarrow r(u_0, v)$

Fijando $v = v_0 \in [0,3]$

$r_{v_0}: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$u \longrightarrow r(u, v_0)$

Ejemplo: Encontrar parametrización del plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $P \in \mathbb{R}^3$ y que tiene rectas directoras d_1 y $d_2 \in \mathbb{R}^3$

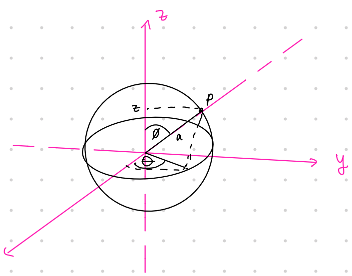


$-p+v = \alpha d_1 + \beta d_2$

$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\alpha, \beta) \longrightarrow P + \alpha d_1 + \beta d_2$

Parametrización de la esfera en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$



$z = a\cos\phi$

$x = a\,\text{sen}\,\phi\,\cos(\theta)$

$y = a\,\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta)$

$r: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

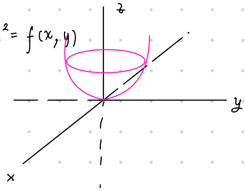
$(\theta, \phi) \longrightarrow (a\,\text{sen}\phi\cos\theta,\ a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\theta,\ a\cos\phi)$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \phi \le \pi$

Ejemplo: Parametrizar la superficie de $\mathbb{R}^3$ descrita por la ecuación $z = x^2+2y^2 = f(x,y)$

$$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x, y, x^2+2y^2)$$



Ejemplo

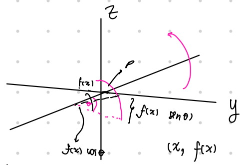
$$z = 2\sqrt{x^2+y^2}$$
$$r_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2})$$

$$r_2: [0, 2\pi] \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \longrightarrow (r\cos(\theta), r\,\text{sen}\,\theta, 2r)$$
$$\downarrow$$
$$2\sqrt{x^2+y^2}$$

Superficie de revolución

$y = f(x)$, rotarla en torno a x.

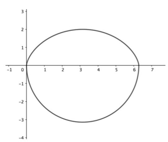
$$r: \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, \theta) \longrightarrow (x, f(x)\cos(\theta), f(x)\,\text{sen}(\theta))$$



2. *a*) Encuentre el área encerrada por un arco de cicloide, parametrizado como

$$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

con $t \in [0, 2\pi]$ y la mitad inferior de la circunferencia de radio π y centrada en $(\pi, 0)$.



b) Entregue un parametrización de la superficie que se genera al rotar un arco de cicloide, $r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$, en torno al eje x.

Solución:

$$x(t) = t - \sin(t)$$

$$y(t) = (1 - \cos(t))\cos\theta$$

$$z(t) = (1 - \cos(t))\,\text{sen}\,\theta$$

con $0 \le t \le 2\pi$ y $0 \le \theta \le 2\pi$