Clase 21 EDO

Ejemplo 1 $x^{(4)}(t) + 8x''(t) + 16x(t) = 0$

$x_1 = e^{pt}(\vec{a}\cos(qt) - \vec{b}\,\text{sen}(qt))$
$x_2 = e^{pt}(\vec{b}\cos(qt) + \vec{a}\,\text{sen}(qt))$

La EDO lineal, homogénea, coef. constantes

Buscar en la forma $x(t) = e^{rt}$, r cte.

Sustituir en la EDO

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0$$

$$(r^2+4)(r^2+4) = 0$$

$r = \pm 2i$ (x2)

$$\Rightarrow x(t) = C_1\cos(2t) + C_2\,\text{sen}(2t) + t\,[C_3\cos(2t) + C_4\,\text{sen}(2t)]$$

7. Resuelva usando variación de parámetros

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$$

$$\boxed{y'' - \frac{(x+2)}{x}y' + \frac{(x+2)}{x^2}y = 2x}$$

$$u_1 = -\int \frac{y_2\cdot f(x)}{w}\,dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1\cdot f(x)}{w}\,dx$$

Por inspección $y_1 = x$ es solución de la EDO homogénea asociada

$$-\frac{(x+2)}{x} + \frac{(x+2)}{x} = 0.$$

$$\boxed{y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1)^2}} = x\int \frac{e^{\int \frac{x+2}{x}dx}}{x^2}$$

$$\int 1 + \frac{2}{x}\,dx = x + \ln(x^2)$$

$$= x\int \frac{e^x\cdot\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\,dx = e^x x$$

$$W = \begin{vmatrix} x & e^x x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = xe^x + x^2e^x - e^x x = x^2e^x$$

$$U_1 = -\int \frac{\cancel{e^x}\cdot\cancel{x}\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x^2}\cancel{e^x}}\,dx = -2x$$

$$U_2 = \int \frac{\cancel{x}\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x^2}e^x} = 2\int e^{-x}\,dx = -2e^{-x}$$

$$y(x) = U_1y_1 + U_2y_2$$

Ejemplo 2

$$x''(t) + x(t) = e^{-t}$$

lineal no homogénea, coef constantes

ec. características.

$r^2 + 1 \Rightarrow r = \pm i$

$$x_h = C_1\cos(t) + C_2\,\text{sen}(t)$$

$x_p = Ae^{-t}$ $\qquad 2Ae^{-t} = e^{-t}$

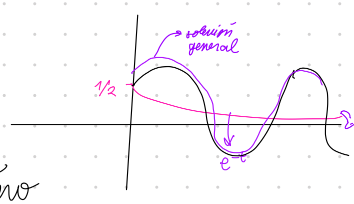
$x_p' = -Ae^{-t}$ $\qquad 2A = 1 \Rightarrow A = 1/2$

$x_p'' = Ae^{-t}$

$$x(t) = \underbrace{C_1\cos(t) + C_2\,\text{sen}(t)}_{\text{solución periodica}} + \underbrace{\frac{e^{-t}}{2}}_{\text{solución transitoria}}$$

parte de la sol general

$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}e^{-t} = 0$ } si tiende a cero



Ejemplo 3

$m=1$ $k=2$

$$\begin{cases} x''(t) + \underbrace{2}_{c}x'(t) + 2x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = V_0 \end{cases}$$

La EDO lineal, homogénea coef. constantes.

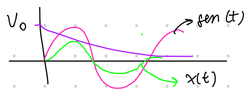
Amortiguamiento crítico $C_{cr} = 2\sqrt{k \cdot m} = 2\sqrt{2 \cdot 1} = 2\sqrt{2}$

La ec. característica: $c = 2 < 2\sqrt{2}$ subamortiguado.

$r^2 + 2r + 2 = 0$
$(r+1)^2 = -1$
$r+1 = \pm i$
$r = -1 \pm i$

La sol general
$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos(t) + C_2 \operatorname{sen}(t))$
sustituir en cond inicial
$x(0) = C_1 = 0$
$x'(0) = C_2 = V_0$

La sol general:
$x(t) = V_0 e^{-t} \operatorname{sen}(t)$



$\Rightarrow$ la máxima de $x(t)$ es cuando $x'(t) = 0$

$$x'(t) = -\cancel{V_0} e^{-t}\operatorname{sen}(t) + \cancel{V_0} e^{-t}\cos(t) = 0$$

$\operatorname{sen}(t) = \cos(t)$
$\Rightarrow t = \pi/4$

La amplitud máxima es en el primer extremo $t_{máx} = \pi/4$

Sobre amortiguado (críticamente amortiguado) (cruza $x=0$ una vez o ninguna vez)

Ejemplo 4: $x'' + 2x' + 2x = \cos(w \cdot t)$

$w > 0$ real constante

$$x_h = C_1 e^{-t}\cos(t) + C_2 e^{-t}\operatorname{sen}(t)$$

Buscar $x_p(t) = A\cos(wt) + B\operatorname{sen}(w \cdot t)$
Sustituir en la EDO

$$-Aw^2\cos(w \cdot t) - Bw^2\operatorname{sen}(w \cdot t)$$
$$-2Aw\operatorname{sen}(wt) + 2Bw\cos(wt)$$
$$+2A\cos(w \cdot t) + 2B\operatorname{sen}(wt) = \cos(wt)$$

$$B = \frac{2w}{2-w^2} - \frac{4Bw^2}{(w^2+1)(2-w^2)}$$

$$\begin{cases} Aw^2 + 2Bw + 2A = 1 \\ -Bw^2 - 2Aw + 2B = 0 \end{cases}$$

$B(2-w^2) - 2Aw = 0$

$B(2-w^2) = 2Aw$

$$\Rightarrow B\left(1 + \frac{4w^2}{(w^2+1)(2-w^2)}\right) = \frac{2w}{2-w^2}$$

$=$

$A(w^2+2) + 2Bw = 1$

$$A = \frac{1 - 2Bw}{w^2+1}$$

$$B = 2 \cdot w\left(\frac{1}{2-w^2} \frac{-2Bw}{(w^2+1)(2-w^2)}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}2-w^2 & 2w\\ -2w & 2-w^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\frac{1}{(2-w^2)^2+4w^2}\begin{bmatrix}2-w^2 & -2w\\ 2w & 2-w^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

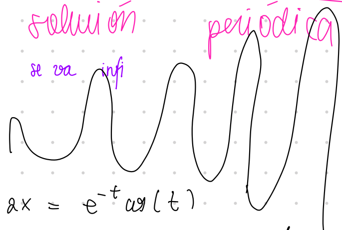
$$=\begin{bmatrix}2-w^2\\ 2w\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4-4w^2+w^4+4w^3}$$

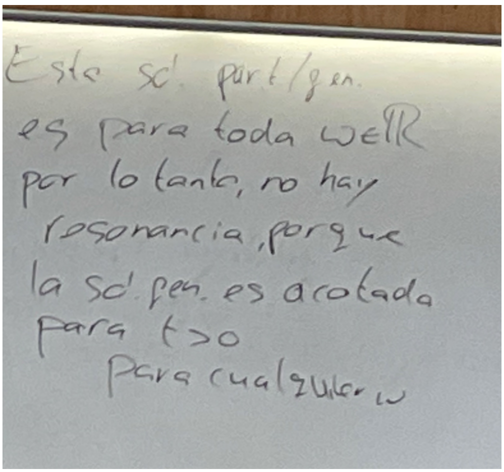
$$x_p=\frac{2-w^2}{w^2+4}\left(\cos(wt)+\operatorname{sen}(wt)\right)$$

La sol general

$$x(t)=\underbrace{c_1e^{-t}\cos(t)+c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t)}_{\text{solución transitoria}}+\underbrace{\frac{2w}{w^2+4}\cos(wt)+\frac{2w}{w^2+4}\operatorname{sen}(wt)}_{\text{solución periódica}}$$

resonancia ⇒ $x(t)$ se va infi





Ejemplo 4

$$x''+2x'+2x=e^{-t}\cos(t)$$

el lado derecho es parte de la complementaria

⇒ $x_p=Ae^{-t}\cos(t)$ no va a funcionar

La sol gen. es:

$$x(t)=c_1e^{-t}\cos(t)+c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t)+\underbrace{\frac{1}{2}te^{-t}\operatorname{sen}(t)}_{\text{transitoria no es una resonancia}}$$

Resonancia

Intento $x_p=Ate^{-t}\cos(t)+Bte^{-t}\operatorname{sen}(t)$

$$x''+2x'+2x=e^{t}\cos(t)$$

$$x(t)=c_1e^{-t}\cos(t)+c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t)+\underbrace{\frac{1}{8}e^{t}\left(\cos(t)+\operatorname{sen}(t)\right)}_{\text{Va al infinito pero depende de la fuerza}}$$

Con resonancia positiva