Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
EYP2114/2127 - Inferencia Estadística
Segundo Semestre 2023
Profesora: Ana María Araneda
Ayudante: Sebastián Guerra (sebastian.guerrap@uc.cl)

Ayudantía 5

Cota de Cramér-Rao e intervalos de confianza

Problema 1 (Casella y Berger, 2002)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ iid Bernoulli(p). Muestre que la varianza de $\bar{X}$ alcanza la cota de Cramér-Rao, y por lo tanto $\bar{X}$ es el mejor estimador insesgado de p.

Problema 2 (Casella y Berger, 2002)

Si $X_1, \ldots, X_n$ son iid $f_\theta(x)$, con f que satisface las condiciones del teorema de Cramér-Rao. Si $W(\boldsymbol{X})$ es un estimador insesgado de $\tau(\theta)$, entonces $W(\boldsymbol{X})$ alcanza la cota de Cramér-Rao si y solo si

$$a(\theta)[W(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta)] = \frac{\partial}{\partial\theta} \log L(\theta, \boldsymbol{X})$$

para alguna función $a(\theta)$.

Use este resultado para encontrar funciones de θ, digamos $g(\theta)$, para las cuales existe un estimador insesgado cuya varianza alcanza la cota de Cramér-Rao.

(a) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0$

(b) $f_\theta(x) = \frac{\log\theta}{\theta-1}\theta^x, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 1$

Problema 3 (Casella y Berger, 2002)

Sea X una observación de una distribución Beta$(\theta, 1)$.

(a) Sea $Y = -\log(X)^{-1}$. Evalúe el coeficiente de confianza del conjunto $[y/2, y]$

(b) Encuentre un pivote y uselo para encontrar un intervalo de confianza con el mismo coeficiente de confianza que el intervalo en la parte (a)

1) CCR : $\mathrm{Var}_\theta\underbrace{[T(\underline{x})]}_{\text{estimador}} \geq \dfrac{\left[\dfrac{d}{d\theta} E_\theta[T(\underline{x})]\right]^2}{E_\theta\left[\left(\dfrac{d}{d\theta}\ln f_\theta(\underline{x})\right)^2\right]}$

$$E\left[\left(\frac{d}{d\theta}\ln f_\theta(\underline{x})\right)^2\right] = \overset{\text{dist. iid}}{-n}\, E\left[\frac{d^2}{dp^2}\ln f(x)\right]$$

vector

no es vector

$$= -n\, E\left[\frac{d^2}{dp^2}\ln\left(p^x(1-p)^{1-x}\right)\right]$$

$$= -n\, E\left[\frac{d^2}{dp^2}\left(x\ln(p)+(1-x)\ln(1-p)\right)\right]$$

$$= -n\, E\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{x}{p}-\frac{1-x}{1-p}\right)\right]$$

$$= -n\, E\left[\frac{-x}{p^2}-\frac{1-x}{(1-p)^2}\right]$$

$$= -n\left[\frac{-E[X]}{p^2}-\frac{1-E[X]}{(1-p)^2}\right]$$

$$= -n\left[\frac{-1}{p}-\frac{1}{1-p}\right]$$

$$= -n\left(\frac{p-1-p}{p(1-p)}\right) = \frac{n}{p(1-p)}$$

Luego: $\dfrac{d}{dp}E[\overline{X}] = \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]\right)$

$$= \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\cancel{n}_1}\cancel{n}^1 p\right) = 1$$

$$\frac{1}{n/(p(1-p))} = \frac{p(1-p)}{n} = Var(\overline{X})$$

$$\left.\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\, n p (1-p) = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}\right\} \text{Verificación}$$

$\overline{X}$ es insesgado y tiene la varianza más baja posible.
Por ende, es el mejor estimador.

P2 a) $L(\theta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1}$

$= \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n}\right)^{\theta-1}$

$\ell(\theta|\underline{x}) = n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$

$n\left[\frac{1}{\theta} + \frac{\sum \ln(x_i)}{n}\right]$

$= \underbrace{-n}_{a(\theta)}\left[\underbrace{\frac{-\sum\ln(X_i)}{n}}_{W(\underline{X})} - \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{\tau(\theta)}\right]$

$\therefore W(\underline{X})$ es el EIVUM de $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$

score: derivada de log verosimilitud

b) $L(\theta, \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\ln(\theta)}{\theta-1}\theta^x$

$\ell(\theta, \underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln[\ln(\theta)] - \ln(\theta-1) + x_i\ln(\theta)\right)$

$= n\ln\ln\theta - n\ln(\theta-1) + \ln\theta\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta\ln\theta} - \frac{n}{\theta-1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$

$= \frac{n}{\theta\ln\theta} - \frac{n}{\theta-1} + \frac{n\overline{X}}{\theta}$

$= \frac{n}{\theta}\left[\overline{x} - \frac{\theta}{\theta-1} + \frac{1}{\ln\theta}\right]$

$= \frac{n}{\theta}\left[\overline{x} - \left(\frac{\theta}{\theta-1} - \frac{1}{\ln\theta}\right)\right]$

$\Rightarrow \overline{X}$ es el EIVUM de $\frac{\theta}{\theta-1} - \frac{1}{\ln\theta}$

P2 $B(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$

$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$B(\theta,1) = \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)\Gamma(1)} x^{\theta-1}$

$= \frac{\theta\,\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} = \theta x^{\theta-1}$

a) $Y = -\log(X)^{-1}$

$\frac{1}{y} = -\ln(x)$

$e^{-1/y} = X = g^{-1}(y)$

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d g^{-1}(y)}{d y} \right|$

$= \theta \exp\left\{\frac{-1}{y}(\theta-1)\right\} \frac{1}{y^2} \exp\left\{\frac{-1}{y}\right\}$

$P(Y/2 \leq \theta \leq Y)$

$= P(\theta \leq Y \leq 2\theta)$

$= \int_{\theta}^{2\theta} \frac{\theta}{y^2} \exp\left\{\frac{-\theta}{y}\right\} dy =$

$= \exp\left\{\frac{-\theta}{y}\right\}\Big|_{\theta}^{2\theta}$

$= e^{-1/2} - e^{-1}$

≈ 0.239

b) $f(x) = \left|\frac{dQ}{dt}\right| g[Q(t,\theta)]$

$T = X^{\theta} \to$ pivote

$\sqrt[\theta]{T} = X = g^{-1}(t)$

$f_T(t) = \theta\,(t^{1/\theta})^{\theta-1} \cdot \frac{1}{\theta} t^{1/\theta-1}$

$= t^{\theta-\frac{1}{\theta}+\frac{1-\theta}{\theta}}$

$= t^{0} = 1 \qquad 0 < t < 1$

$0 < t < 1$

Luego: $\{\theta : a \leq X^{\theta} \leq b\} - P(a \leq X^{\theta} \leq b) = 1-\alpha$

$= \{\theta : \ln a \leq \theta \ln X \leq \ln b\}$

$= \left\{\theta : \frac{\ln a}{\ln x} \leq \theta \leq \frac{\ln b}{\ln x}\right\}$

$P(a \leq X^{\theta} \leq b)$, $X^{\theta} \sim U(0,1)$

$= b - a = 1 - \alpha$

$b - a = 0.239$

Prop: encontrar $\{a, b\}$ que minimicen el intervalo de confianza.

Problema 4 (Casella y Berger, 2002)

Sean $X_1, \dots, X_n$ independientes provenientes de la distribución

$$f_{X_i}(x_i) = e^{i\theta - x_i}\mathbb{1}_{[i\theta,\infty)}(x_i)$$

Pruebe que $T = \text{mín}_i\{X_i/i\}$ es un estadístico suficiente para θ. En base a T, encuentre el intervalo de confianza $1-\alpha$ para θ de la forma $[T+a, T+b]$ de largo mínimo.

(Propuesto) Problema 5 (Casella y Berger, 2002)

Sean $X_1, , \dots, X_n$ iid uniforme$(0, \theta)$. Sea $Y = \text{máx}_i\{X_i\}$. Muestre que Y/θ es un pivote y que el intervalo

$$\left\{\theta : y \leq \theta \leq \frac{y}{\alpha^{1/n}}\right\}$$

es el menor intervalo de confianza pivotal $1-\alpha$.

15:50

P4 1) $L(\theta|\underline{x}) = \exp\left\{\sum i\theta - \sum x_i\right\} \prod_{i=1}^{n} 1\!\!1_{[\theta,\infty)}\left(\frac{x_i}{i}\right)$

$= \exp\left\{\frac{n(n+1)}{2}\theta - \sum x_i\right\} \cdot 1\!\!1_{[\theta,\infty)}\left(\min_i\left(\frac{x_i}{i}\right)\right)$

Por teorema de factorización,

$\min\left(\frac{x_i}{i}\right)$ es suficiente

$P(T > t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > i t) = \prod_{i=1}^{n} \int_{it}^{\infty} e^{i\theta - x}\,dx$

$= \prod_{i=1}^{n} e^{i\theta}\left[-e^{-x}\right]_{it}^{\infty}$

$= \prod_{i=1}^{n} e^{i\theta - it} = \exp\left\{-\frac{n(n+1)}{2}\right\}(t-\theta)$

$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}\exp\left\{-\frac{n(n+1)}{2}\right\}(t-\theta)}_{f_T(t)} \quad t \geq \theta$

fam de localización

$Y = T - \theta$ es un pivote

$\{\theta : T + a \leq \theta \leq T + b\}$

$P(-b \leq Y \leq -a) = 1 - \alpha$