Clase 29

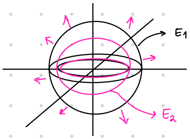
Teo de la divergencia

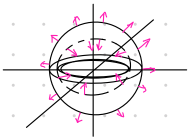
$$\iint_{\partial E} F \cdot ds = \iiint_E \operatorname{div}(F)\, dV$$

$F = (F_1, F_2, F_3)$ definido en un dominio de contiene al sólido E.

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Obs:





E (la diferencia de E_1 con E_2)

$\partial E = S_1 \cup S_2$

$$\iiint_E \operatorname{div}(F)\, dV = \underbrace{\iint_{S_1} F\cdot ds}_{\text{orientada hacia afuera}} + \underbrace{\iint_{S_2} F \cdot ds}_{\text{orientada hacia adentro}}$$

$$\iiint_E \operatorname{div}(F)\, dV = \iiint_{E_1} \operatorname{div}(F)\, dV - \iiint_{E_2} \operatorname{div}(F)\, dV$$

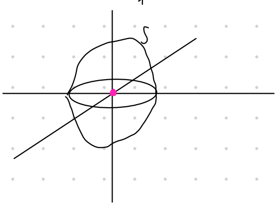
$$= \iint_{S_1} F\cdot ds - \iint_{S_2^-} F\cdot ds = \iint_{S_1} F\cdot ds - \left(-\iint_{S_2} F \cdot ds\right)$$

$$= \iint_{S_1} F\cdot ds + \iint_{S_2} F\cdot ds.$$

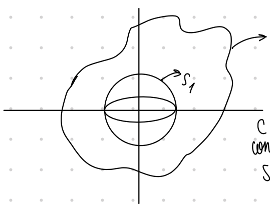
Ejemplo: Se define $E(x,y,z) = \dfrac{\varepsilon Q (x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ con ε, Q ctes. $\neq 0$

(campo asociado al flujo eléctrico)

Usar el teo de la divergencia para mostrar que el flujo eléctrico de E a través de cualquier superficie cerrada S que encierra al origen es $\iint_S E\cdot ds = 4\pi \varepsilon Q$



Para aplicar el teorema de la divergencia, debemos aplicarlo a un sólido sobre el que el campo E esté definido. Como el campo no está definido en el origen, hay que aplicarlo a un sólido que no contenga al origen. Para esto tenemos $a>0$ tal que la esfera centrada en el origen, de radio a, está contenida en el interior del sólido que encierra S.



C el sólido contenido entre S y S_1

$$\iiint_C \operatorname{div}(F) dV \quad \underbrace{\iint_S F\cdot ds}_{\text{orientado hacia afuera}} - \underbrace{\iint_{S_1} F\cdot ds}_{\text{Orientado hacia afuera}}$$

Calculando $\operatorname{div}(E)$ $E = (E_1, E_2, E_3)$

$$\operatorname{div}(E)(x,y,z) = \frac{\partial E_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial E_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial E_3}{\partial z}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\varepsilon Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{\varepsilon Q}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot 2x \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial y} = \varepsilon Q\left(\frac{(x^2+y^2+z^2) - 3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \Rightarrow \operatorname{div}(E) = 0$$

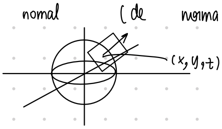
$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = \varepsilon Q\left(\frac{(x^2+y^2+z^2) - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \Rightarrow \iiint_C \operatorname{div}(E) dV = 0$$

$$\Rightarrow \iint_S E\, ds = \iint_{S_1} E \cdot ds$$

S_1 es la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ orientada hacia arriba

$$E(x,y,z) = \varepsilon Q \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$$

El vector nomal (de norma 1) a la esfera S_1 en el punto (x,y,z) es $\dfrac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} = \hat{n}(x,y,z)$



$$\iint_{S_1} E\cdot ds = \iint_{S_1} E \cdot \hat{n}\, dx\, dy = \iint_{S_1} \left\langle \frac{\varepsilon Q(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}, \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right\rangle \underbrace{\| \times \|}_{\|(x,y,z)\|} dx\, dy$$

$$= \iint_{S_1} \frac{\varepsilon Q}{\|(x,y,z)\|^2} \| \times \| \, dx\, dy$$

$$\iint_{S_1} E \cdot dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} \underbrace{\overbrace{\iint \| \cdot / \cdot \| \, dx \, dy}^{\text{Fórmula de área}}}_{\text{Área } (S_1)} = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\varepsilon Q \, 4\pi a^2}{a^2} = 4\pi \, \varepsilon Q$$

Vector normal en (x, y, z) a la esfera.

$\alpha : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

parametrización de la esfera

$$\iint_{S_1} E \cdot dS = \iint_D \left\langle E(\alpha(x,y)), \frac{\partial \alpha}{\partial x} \times \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\rangle dx \, dy = \iint_D \left\langle E(\alpha(x,y)), \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) \right\rangle dx \, dy = \iint_D \left\langle E(\alpha(x,y)), \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y)}{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x,y) \right\|} \right\rangle \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\|$$