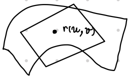
Integral de un campo vectorial sobre una superficie

1) Orientación de una superficie: $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie con parametrización $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad r(D) = S$

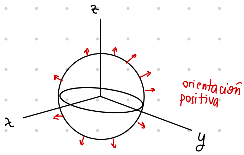


$$\frac{\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right\|} = \hat{n}(r(u,v))$$

Si es posible definir la sgte función:

$$\hat{n}: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$r(u,v) \longrightarrow \hat{n}(r(u,v))$$

de manera continua, entonces se dice que S es orientable



Def: Sea $F: M \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y sea $S \subseteq M$ una superficie suave y orientable, con orientación normal $\hat{n}$. Entonces la integral de F sobre la superficie S es:

$$\iint_S F \cdot ds = \iint_S F \cdot \hat{n}\, ds$$

Sea $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S, con $S = r(D)$

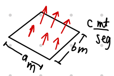
$$\iint_S F \cdot ds = \iint_S F \cdot \hat{n}\, ds = \iint_D \langle F(r(u,v)), \hat{n}(r(u,v)) \rangle \underbrace{\left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv}_{ds}$$

$$\boxed{\iint_S F \cdot ds = \iint_D \left\langle F(r(u,v)),\ \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) \right\rangle du\, dv}$$

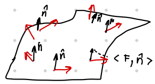
Integral de campo vectorial sobre S. Se conoce como integral de flujo de F sobre S.

Interpretación

boca tubo cuadrado



$\rightarrow$ caudal abc $\frac{mts^3}{seg}$



$$\sum_i \sum_j \left\langle F, \hat{n} \right\rangle \left\| \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v \xrightarrow[\Delta u \to 0]{\Delta v \to 0} \iint F \cdot ds$$

velocidad del fluido

Se interpreta como un caudal de un fluido que atraviesa la superficie S con velocidad F.

Ejemplo: $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longrightarrow (z,y,x)$

Calcule la integral de flujo a traves de la esfera $x^2+y^2+z^2$. Sol: $r: [0,\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\phi, \theta) \longrightarrow (\operatorname{sen}\phi \cos(\theta), \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta), \cos(\phi))$$

$$\frac{\partial r}{\partial \phi}(\phi,\theta) \times \frac{\partial r}{\partial \theta}(\phi,\theta) = (\operatorname{sen}^2\phi \cos\theta,\ \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\phi\cos\phi)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\langle F(r(\phi,\theta)), \frac{\partial r}{\partial \phi}(\phi,\theta) \times \frac{\partial r}{\partial \theta}(\phi,\theta) \right\rangle d\theta\, d\phi = \iint_S F\, ds$$

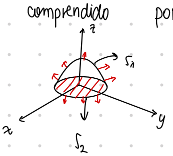
$$\left\langle F(r(\phi,\theta)), \frac{\partial r}{\partial \phi}(\phi,\theta) \times \frac{\partial r}{\partial \theta}(\phi,\theta) \right\rangle$$
$$= \left\langle (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\theta), (\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\phi) \right\rangle$$
$$= 2\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta$$

$$F(r(\phi,\theta)) = F(\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi) = (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\theta)$$

$$\underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta\, d\theta\, d\phi}_{0} + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi \left[\overbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta}^{\pi}\right] = \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi = \frac{4}{3}\pi$$

Ejemplo: $F(x,y,z) = (y,x,z)$

Calcular $\iint_S F \cdot ds$, con S la superficie que encierra el volumen comprendido por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$, y el plano $z = 0$



$$\iint_S F\, ds = \iint_{S_1} F\, ds + \iint_{S_2} F\, ds$$

Es necesario evaluar en un punto para saber que está hacia afuera.

Parametrización de S_2:

$$\alpha: [0,1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$\frac{d\alpha}{dr}(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta}(r,\theta) = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\frac{d\alpha}{dr}(r,\theta) \times \frac{d\alpha}{d\theta}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0,0,r)$$

orientación hacia abajo:

$$\frac{d\alpha}{d\theta}(r,\theta) \times \frac{d\alpha}{dr}(r,\theta) = (0,0,-r)$$

$$\langle F(\alpha(r,\theta)), (0,0,-r) \rangle = 0$$

$$F(\alpha(r,\theta)) = F(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0) = (r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \iint F \cdot ds = 0$$

Parametrización de S_1:

$$B: (x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

$$-1 \leq x \leq 1$$
$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = (1, 0, -2x)$$

$$\frac{\partial B}{\partial y}(x,y) = (0, 1, -2y)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} \times \frac{\partial B}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \underbrace{(2x, 2y, 1)}_{\text{buena orientación}}$$

$$F(B(x,y)) = F(x, y, 1 - x^2 - y^2)$$

$$\langle F(B(x,y)), (2x, 2y, 1) \rangle = 4xy + 1 - x^2 - y^2$$

$$\iint_{S_1} F \cdot dS = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (4xy + 1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

↪ usar polares.