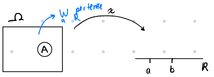
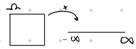
Ayudantía 4





$\{x \in [a,b]\} = \{w \mid X(w) \in [a,b]\}$

$P(X \in [a,b]) = P(w \mid X(w) \in [a,b])$

$P(X^{-1}([a,b]))$

$X \leq x = w \mid X(w) \in (-\infty, x)$

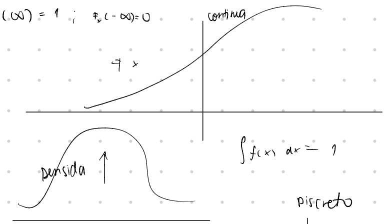
$F_x(x) = P(X \leq x) = P(w \mid X(w) \in (-\infty, x))$

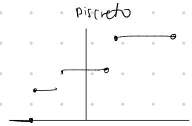
Función de distribución

$= P(X^{-1}(-\infty, x))$

- $F_x(x) = P(X \leq x) = P(-\infty \leq X < x)$

$F_x(\infty) = 1 \; ; \; F_x(-\infty) = 0$





$E(x) = \int_{\Theta} x f_x(x)\, dx$ $\qquad E(x^n) = \int x^n f_x(x)\, dx$

$F_x'(x) = f_x(x)$

- $Var(x) = \underbrace{E(x^2)}_{\text{2do momento}} - (E(x))^2$

$= E((x-\mu)^2)$

Función generadora de momentos

$E(x), E(x^2), \ldots, E(x^n)$

$M_x(t) = E(e^{tx})$ $\qquad M_x'(0) = E(x)$

Calcule la media y varianza de la distriibución Poisson, utilizando la función generadora de momentos.

$$X \; Poission(\lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{e^t\lambda}$$

$M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

soporte: conjunto de llegada variable aleatoria

$M_x'(t) = \lambda e^{\lambda(e^t-1)} e^t$

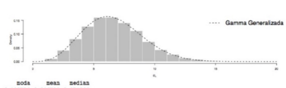
$M_x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(e^t-1)} e^{2t} + \lambda e^{(e^t-1)} \cdot e^t$

$M_x''(0) = \lambda^2 + \lambda = E(x^2)$

$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2,$

Problema 2

Una distribución de probabilidad que permite mayor grado de libertad en su forma para modelar datos con soporte en R_0^+es la Gamma - Generalizada (K, ν, β), tal como se muestra en la figura en la que se ajusta dicho modelo a un conjunto de observaciones.



Este modelo tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \frac{\beta \nu^{\beta k} x^{(\beta k)-1} e^{-(\nu x)^\beta}}{\Gamma(k)}, \quad x \geq 0,$$

con $k > 0, \nu > 0$ y $\beta > 0$.

$$\boxed{\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x}\, dx}$$

$\Gamma(k) = k\,\Gamma(k-1)$

(a) Muestre que el m - ésimo momento está dado por la siguiente expresión $\frac{\Gamma\left(\frac{m}{\beta}+k\right)}{\nu^m \Gamma(k)}$.

$$E(x^n) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} x^m \beta \nu^{\beta k} x^{(\beta k)-1} e^{-(\nu x)^\beta} dx$$

$y = (\nu x)^\beta$

$dy = \beta(\nu x)^{\beta-1} \nu\, dx$

$$= \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} x^m \frac{\beta((\nu x)^\beta)^k}{x} e^{-(\nu x)^\beta} dx$$

$$\Rightarrow E(x^m) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{y^{m/\beta}}{\vartheta^m} \, y^k \, e^{-y} \left(\frac{\beta}{x}\right) \underbrace{dx}_{\frac{dy}{y}} \Rightarrow E(x^m) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \frac{y^{m/\beta}}{\vartheta^m} \frac{y^k}{y} e^{-y} dy$$

$$=$$

$$E(x^m) = \frac{1}{\vartheta^m \Gamma(k)} \int_0^\infty y^{\left(\frac{m}{\beta}+k\right)-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m}{\beta}+k\right)}{\vartheta^m \, \Gamma(k)}$$

$\beta = 2$, $k = 2$, ¿ V? Promedio: 6,64 ¿ para gustar

$$E(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\right)}{v \, \Gamma(2)} \Rightarrow V = \frac{\Gamma(1/2+2)}{E(x) \cdot \Gamma(2)} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{6{,}64}$$