PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo semestre 2022

EYP2127 Inferencia Estadística
Ayudantía 1: Modelos, parametrización e identificabilidad

Profesora: Inés M. Varas
Ayudante: Borja Márquez de la Plata

Ejercicio 1

Sea X_1, X_2, ..., X_n variables aleatorias iid Exponencial, con parámetro $\lambda > 0$. Se define una muestra $\boldsymbol{X}$ como el vector (X_1, X_2, ..., X_n).

b) Encuentre el espacio muestral, el espacio paramétrico y la fdp de la muestra.

b) Especifique un modelo estadístico para la muestra.

c) ¿Es el modelo paramétrico?

d) ¿Es el modelo identificable?

Ejercicio 2

Sea sea $i = 1, 2, ..., n$ y X_i variables aleatorias Normal, con media μ_i y desviación estándar σ_i. Se define una muestra $\boldsymbol{X}$ como el vector (X_1, X_2, ..., X_n).

a) Encuentre el espacio muestral, el espacio paramétrico y la fdp de la muestra.

b) Especifique un modelo estadístico para la muestra.

Ejercicio 3

Sea X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria iid Normal de tamaño n, con media θ^2 y desviación estándar 1.

a) Especifique un modelo estadístico para la muestra.

b) ¿Es el modelo identificable?

Ejercicio 4

Se está investigando como se absorbe un fertilizante por tomates cultivados. Se plantan 30 tomates, donde 7 pertenecen a una especie "A" y los otros 23 pertenecen a otra especie "B" y se exponen al fertilizante. Si la concentración de fertilizante que absorbe un tomate de la especie i distribuye Gamma(α_i, β_i), proponga un modelo estadístico para el experimento.

Resumen:

- **Modelo:** $\mathcal{F} = \{ f(x|\theta) : \theta \in \Theta , x \in \mathcal{X} \}$

- **Parametrización:**

  → Param: Nº de parametros finitos definidos
  → No-param: parametros infinitos
  → Semi : tiene al menos un parametro finito e infinito

- **identificabilidad** : Si $f(x|\theta)$ es uno - uno

$$\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow f(x|\theta_1) \neq f(x|\theta_2)$$

$$f(x|\theta_1) = f(x|\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

Ejercicio 1

Sea X_1, X_2, ..., X_n variables aleatorias iid Exponencial, con parámetro $\lambda > 0$. Se define una muestra $\boldsymbol{X}$ como el vector $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

b) Encuentre el espacio muestral, el espacio paramétrico y la fdp de la muestra.

b) Especifique un modelo estadístico para la muestra.

c) ¿Es el modelo paramétrico?

d) ¿Es el modelo identificable?

$$x \sim Exp(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

a) $\mathcal{X}: x \geq 0 \longrightarrow$ Expacio muestral

$\Theta: \lambda > 0 = \lambda \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow$ espacio paramétrico

$$f(x|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i}$$

b) $$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} : \lambda > 0, \; x \geq 0 \right\}$$

c) Si

d) $$\prod \lambda_1 e^{-\lambda_2 x_i} = \prod \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_i}$$

$$n \ln(\lambda_1) - \lambda_1 \sum x_i = n \ln(\lambda_2) - \lambda_2 \sum x_i$$

$$\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum x_i} = \lambda_2^n e^{-\lambda_2 \sum x_i}$$

$$n \ln(\lambda_1) - \lambda_1 \sum x_i = n \ln(\lambda_2) - \lambda_2 \sum x_i$$

por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2$

es identificable

Ejercicio 2

independientes

Sea sea $i = 1, 2, ..., n$ y X_i variables aleatorias Normal, con media μ_i y desviación estándar σ_i. Se define una muestra $\boldsymbol{X}$ como el vector $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

a) Encuentre el espacio muestral, el espacio paramétrico y la fdp de la muestra.

b) Especifique un modelo estadístico para la muestra.

$$X \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-\mu_i)^2}$$

$$\mathcal{X}: \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mu_i \in \mathbb{R} \quad , \sigma_i^2 \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\theta = (\mu_i, \sigma_i^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ = \Theta$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n / \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-\mu_i)^2}$$

b) $$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x-\mu_i)^2} : \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma_i^2 \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

Ejercicio 3

Sea X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria iid Normal de tamaño n, con media θ^2 y desviación estándar 1.

a) Especifique un modelo estadístico para la muestra.

b) ¿Es el modelo identificable?

a) $$f(\underline{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta^2)^2}$$

$\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = -1$

$f(\underline{x}|\theta_1) = f(\underline{x}|\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$ ident.

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_1^2)^2} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta_2^2)^2}$$

Ejercicio 4

Se está investigando como se absorbe un fertilizante por tomates cultivados. Se plantan 30 tomates, donde 7 pertenecen a una especie "A" y los otros 23 pertenecen a otra especie "B" y se exponen al fertilizante. Si la concentración de fertilizante que absorbe un tomate de la especie i distribuye Gamma(α_i, β_i), proponga un modelo estadístico para el experimento.

$$\text{Gamma}(\alpha,\beta) \quad \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

Especie "A":

$$f(x \mid \alpha_1, \beta_1) = \prod_{i=1}^{7} \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta_1 x}$$

Especie "B"

$$f(x \mid \alpha_2, \beta_2) = \prod_{j=1}^{23} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta_2 x}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i=1}^{7} \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\beta_1 x} \prod_{j=1}^{23} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_2 - 1} e^{-\beta_2 x} : \theta \in \Theta \right\}$$

Con $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^{+4}$