Ecuaciones diferenciales: ¿Qué son?

$$y^2 - 1 = x^2 - 2x$$

con $y = y(x)$ (una función)

$$y^2 = x^2 - 2x + 1$$
$$y^2 = (x-1)^2$$
$$y(x) = \pm (x-1)$$

Definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cálculo $\Rightarrow$ Dada una función, calcula su derivada.

EDO $\rightarrow$ $y'(x) = y(x)$ / $\int$

Derivada incógnita $\Leftarrow$ ecuación

¿Cómo resolver?

Método 0: Prueba y error

Idea 1

$\Rightarrow$ $y(x) = e^x$ $\Rightarrow$ $y'(x) = y(x)$

$e^x = e^x$

Idea 2:

$y(x) = c\, e^x$, con una c constante

¿Para qué sirven?

Ejemplo de un modelo:

Radioactividad $\Rightarrow$ La vida media de un material radioactivo. $N(t)$: número de átomos radioactivos en un tiempo

La vida media $\Delta T_{1/2}$

$$N(t+\Delta T_{1/2}) = \frac{1}{2} N(t)$$ $\Rightarrow$ Tasa de decrecimiento $k>0$ tal que:

$$N(t+\Delta t) = N(t) - kN(t)\Delta t$$

$$N(t+\Delta t) - N(t) = -kN(t)\cdot\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -kN(t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} -kN(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}N(t) = -kN(t)$$

e^{-kt}

IDEA

$$N(t) = e^{-kt}$$

$$-k e^{-kt} = -k\cdot e^{-kt}$$ ✓

Ejemplo

$$F_g = -mg$$

$$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow F = m\cdot a$$

a: aceleración

$\Rightarrow \quad a = -g \qquad z$: altura

$$a = \frac{dv}{dt} = -g$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dz}{dt} = -g$$

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} dt = \int -g \; dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = -g$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + c$$

$$z(t) = \int -gt + c \; dt =$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 + ct + k.$$

k cte.

En $t=0$, la pelota en el suelo

$z(0) = 0$

Sustituir en la solución $k = 0$

modelo: velocidad inicial $v(0) = 1$

$$\frac{dz}{dt}(0) = 1 \qquad \int f'(x)\, dx = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad c = 1$$

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + t$$

$T(t)$ T: temperatura en una sala en tiempo.

$\Delta T = k(T - A)\Delta t$ A: T° ambiental.

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -k(T-A)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} = T'(t) = -k(T(t) - A) = -kT(t) + ak$$

$$T(t) = e^{-kt} + akt - Ak$$

$$T'(t) = -ke^{-kt} + ak$$

$$y'(x) = y(x)$$