Clase 18 EDO

Ejemplo 1

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

Se puede "desacoplar" en

$$y'' - y' - 2y = 0$$

ec característica $r^2 - r - 2 = 0$

$(r+1)(r-2) = 0$

$r=-1$ $r=2$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

$$z(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

$[y'$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Sol. gen $\vec{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$

Teoría

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

Con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante

En el caso de $n=1$

tenemos $x'(t) = ax(t)$,

a constante

La sol es $x(t) = ce^{at}$,

C constante

Esto nos da una idea de buscar la solución de la forma

$$\vec{x}(t) = \vec{c}\, e^{bt}$$

$\vec{c}$ y b constantes

Sustituir la idea en la EDO

$$\underbrace{\vec{c}\, b\, \cancel{e^{bt}}}_{\frac{d\vec{x}}{dt}} = A\vec{c}\,\cancel{e^{bt}}$$

$$\boxed{A\vec{c} = b\vec{c}}$$

Entonces, $\vec{x}(t) = \vec{c}e^{bt}$ es una solución de $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

Observaciones

1. Un *valor propio* también se conoce como *eigenvalor* y *autovalor*.
2. Dada una matriz con elementos reales, un valor propio puede ser:
   a) real y distinto a todos los otros valores propios;
   b) complejo $a + b\imath$ con $b \neq 0$ y distinto a todos los otros valores propios (en este caso, su conjugado $a - b\imath$ también es un valor propio);
   c) repetido (real o complejo).
3. Una matriz de tamaño $n \times n$ tiene n valores propios, contando la multiplicidad.
4. Si $\mathbf{v}$ un vector propio, entonces $c\mathbf{v}$ para cualquiera constante $c \neq 0$ también un vector propio.

Ejemplo 1 (Parte 2)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\lambda, \vec{v})$ valor y vector propio. si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\vec{v} \neq 0$

Entonces $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$ y

$\underbrace{(A-\lambda I)}\vec{v} = \vec{0}$

debiese ser no invertible ⇒ su determinante debe ser cero.

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \underbrace{\lambda^2 - \lambda - 2 = 0}_{\text{Ec. característica}} \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$\underbrace{\lambda = -1 \quad \lambda = 2}_{\text{valores propios}}$

Hallar los vectores propios

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \vec{v}_1 = 0$$

$\boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}$ → o cualquier multiplicado por un c

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{11}+v_{21}=0\\ 2v_{11}+2v_{21}=0\end{cases}$$

son LI

$$\begin{cases} v_{11}+v_{21}=0 \\ v_{21}=-v_{11}\end{cases}$$

$\boxed{\text{Elegimos } v_{11}=1 \ (\neq 0) \Rightarrow v_{21}=-1}$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}_2=0$$

$$\begin{bmatrix}-2&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \overset{\text{Elimino 2da fila}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix}-2&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$-2v_{21}+v_{22}=0$$
$$v_{22}=2v_{21}$$

Elegimos $v_{21}=1$

$v_{22}=2$

$$\Rightarrow \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$= c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}$$

Resumiendo: $\lambda=-1$, $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\Rightarrow x_1(t)=e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1$ y $x_2(t)=e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$

$\lambda=2$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

soluciones $\xrightarrow{\text{general}}$ $x(t)=c_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+c_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ($\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$)

Ejemplo 2: $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{bmatrix}2&5\\-1&-4\end{bmatrix}\vec{x}$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=0$$
$$\det\left(\begin{bmatrix}2&5\\-1&-5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&5\\-1&-4-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$(2-\lambda)(-4-\lambda)+5=0$$
$$\lambda^2-2\lambda+4\lambda+5=0$$
$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$
$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-3$$

Hallar los vectores propios

$$A\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1$$
$$\left(\begin{bmatrix}2&5\\-1&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{bmatrix}=0$$
$$v_{11}+5v_{21}=0 \Rightarrow \vec{v}_1=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$$
Elegimos $=1$

$v_{11}=-5$

$$A\vec{v}_2=-3\vec{v}_2$$
$$\left(\begin{bmatrix}2&5\\-1&-4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3&0\\0&-3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{bmatrix}=0$$
$$v_{21}+v_{22}=0 \Rightarrow \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$
1 $\quad v_{22}=-1$

sol general: $\vec{x}(t)=c_1e^{t}\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}+c_2e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Ejemplo 4

$$\vec{x}'=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\vec{x}$$
$$\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$\lambda^2+1=0$$
$$\lambda_1=-i \quad \lambda_2=i$$

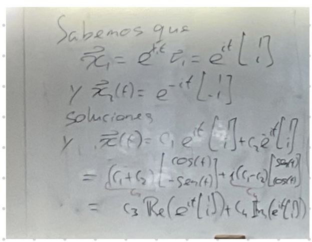
$$A\vec{v}_1=i\,\vec{v}_1$$
$$\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}i&0\\0&i\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}=0$$
$$\begin{bmatrix}-i&1\\-1&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-i&1\\-i&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Elegimos $v_{11}=1$ entonces
$$-i\,v_{11}+v_{21}=0$$
$$v_{21}=i$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$$

Sabemos que $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$

$\vec{v}_2=\overline{\vec{v}_1}=\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$

↳ conjugado   cambia el negativo



Ejemplo 3:

Hallan la solución general del sistema

$$\mathbf{x}'(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&1&2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t).\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$
$-p_3$ $\quad -p_2$ $\quad -p_1$

Al ser una matriz compañera, entonces $\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$

$$x_1'''(t)-2x_1''-x_1'+2x_1=0$$

$x_3=x_2'$ $\quad x_3'=-2x_1+x_2+2x_3$

$x_1'''=-2x_1+x_1'+2x_1''$

$$\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$$
$$(\lambda^2-\lambda-2)(\lambda-1)=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$
$$\Rightarrow \lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=2$$

Se puede ver que $\lambda=1$ es una raíz. Hay que dividir el polinomio $(\lambda-1)$

$\lambda-1$ | $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2$
$\lambda^3-\lambda^2$
⋮

$$\lambda^2-\lambda-2$$