Problema 1

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left((1-a)y^3 + ax, xy^2 + e^y\right) \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

(a) Encuentre los valores de a que hacen de $\mathbf{F}$ un campo conservativo

(b) Encuentre una función potencial del campo $\mathbf{F}$ para dichos valores de a, ocúpela para calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre la curva C parametrizada por

$F(x,y) = \left((1-a)y^3 + ax, \cancel{x^2+e^y}\ xy^2+e^y, 0\right)$

$a = Q_x = \cancel{2x}\ y^2$

$\Rightarrow$ vemos que el $P_y = 3y^2(1-a)$

campo está definido en una región simplemente conexa, por lo que no hay problema.

$y^2 = 3y^2(1-a)$

$\frac{1}{3} = (1-a)$

$1 = 3-3a \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ //

$\Rightarrow F(x,y) = \left(\frac{y^3}{3} + \frac{2x}{3}, xy^2 + e^y\right).$

$f_x = \frac{y^3}{3} + \frac{2x}{3} \Rightarrow \int f_x = \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2}{3} + c(y)$

$f_y = xy^2 + e^y \Rightarrow \int f_y = \frac{xy^3}{3} + e^y$

$\Rightarrow f = \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2}{3} + e^y + C$

$\Rightarrow \Rightarrow$ integral corresponde a

$r(0) = (e(1), 1) = (e, 1)$

$r(1) = (e^{\cos(1)}(1-1), 0) = (0,0)$

$f(0,0) - f(e,1) = 0 + 0 + 1 - \left(\frac{e \cdot 1^3}{3} + \frac{e^2}{3} + e\right)$

$= \cancel{1 + \frac{2e}{3} - \frac{e^2}{2}}\ 1 - \frac{4e}{3} - \frac{e^2}{3}$

Problema 2

Calcule el valor de la siguiente integral de línea

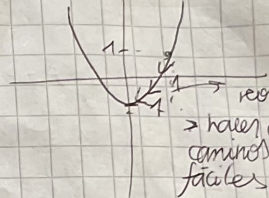
$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

donde C es la parte del arco $y = 2x^2 - 1$ que parte en $(1, 1)$ y termina en $(0, -1)$

$$\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \qquad C: \; y = 2x^2 - 1$$

$$(1,1) \Rightarrow (0,-1)$$

$$P = \frac{-y}{\underbrace{x^2+y^2}_{\text{cuidado origen}}} \qquad Q = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad r(t) = (t, 2t^2-1)$$



→ recorren [illegible]

→ hacer dos caminos más fáciles.

$$Q_x = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P_y = -\left[\frac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = Q_x$$

⇒ El campos se puede definir en una región que no incluye al cero ⇒ es conservativo

parametrizar en sentido contrario

$$r(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1-t) + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}t = \begin{pmatrix}1-t\\1-t-t\end{pmatrix} = (1-t, 1-2t)$$

$$F(r(t)) = \left(\frac{2t-1}{\underbrace{1-2t+t^2+1-4t+4t^2}_{5t^2-6t+2}}, \frac{1-t}{(1-t)^2+(1-2t)^2}\right)$$

10

$$r'(t) = (-1, -2)$$

$$\int_1^0 F(r(t))\,r'(t)\,dt = -\int_0^1 \frac{1-2t}{5t^2-6t+2} + \frac{2t-2}{5t^2-6t+2}\,dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{-1}{5t^2-6t+2} = \int_0^1 \frac{1}{5t^2-6t+2} = \frac{3\pi}{4} =$$

$(0,-1) \Rightarrow (1,1)$ $\qquad r(t) = (0,-1)(1-t) + (1,1)\,t$

$= (t, 2t-1)$

$r'(t) = (1,2)$

$$\int_C F\,dr + \int_\gamma F\,dr = \iint 0\,dA$$

$$\int_C F\,dr = -\int_\gamma F\,dr$$

$$\int F\,dr = \int_0^1 (1-2t, t)(1,2)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t^2+4t^2-4t+1} = \int_0^1 \frac{1}{5t^2-4t+1} \qquad \int \frac{1}{1+5\left(t^2-\frac{4}{5}t+\frac{4}{25}-\frac{4}{25}\right)}$$

$\arctan(3) - \arctan(-2)$ $\qquad \arctan(5t-2)$ $\qquad \dfrac{5}{1+(5t-2)}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{1+5(t-2/3)^2-\frac{4}{5}}$

$+\arctan(3) + \arctan(2)$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{\frac{1}{5}+5(t-2/3)}$

$\int F\,dr = -(\arctan(3) + \arctan(2)) = \dfrac{3\pi}{4}$

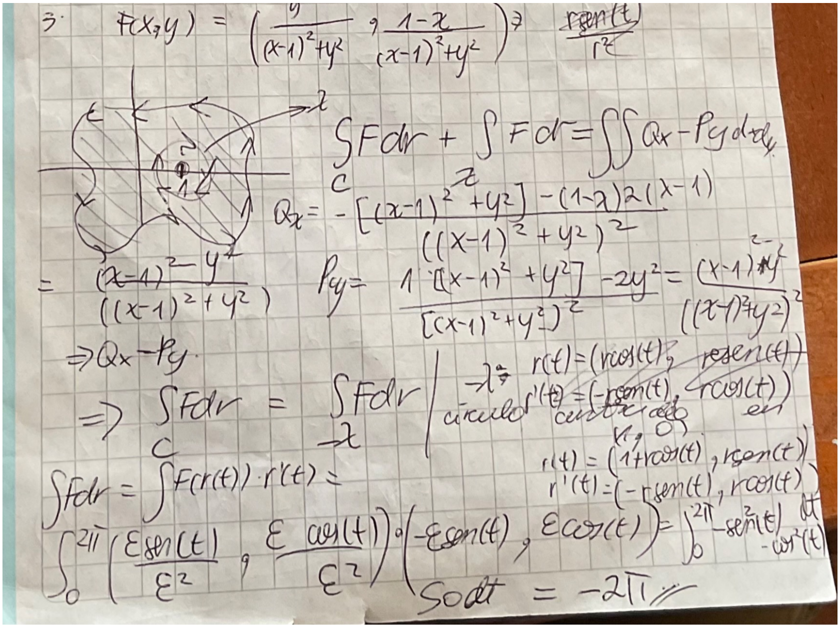
$= 0{,}14$

Problema 3

Considere el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

Calcule la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde C es cualquier curva positivamente orientada que encierra al punto $(1,0)$



3. $F(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{1-x}{(x-1)^2+y^2} \right)$; $\cancel{\frac{r\,sen(t)}{r^2}}$

$\int_C F\,dr + \int_\lambda F\,dr = \iint Q_x - P_y \, dx\,dy$

$Q_x = \frac{-[(x-1)^2+y^2] - (1-x)2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2}$

$= \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2+y^2)}$ $\quad P_y = \frac{1\,[(x-1)^2+y^2] - 2y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2} = \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow Q_x - P_y$.

$\Rightarrow \int_C F\,dr = \int_{-\lambda} F\,dr$ | $-\lambda$: círculo centrado en $(1,0)$

$\cancel{r(t) = (r\cos(t), r\,sen(t))}$

$\cancel{r'(t) = (-r\,sen(t), r\cos(t))}$

$r(t) = (1 + r\cos(t), r\,sen(t))$

$r'(t) = (-r\,sen(t), r\cos(t))$

$\int F\,dr = \int F(r(t)) \cdot r'(t) =$

$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon\, sen(t)}{\varepsilon^2}, \frac{\varepsilon \cos(t)}{\varepsilon^2} \right) \cdot \left(-\varepsilon\, sen(t), \varepsilon \cos(t) \right) = \int_0^{2\pi} -sen^2(t) - \cos^2(t)\, dt$

$\int_0 dt = -2\pi$

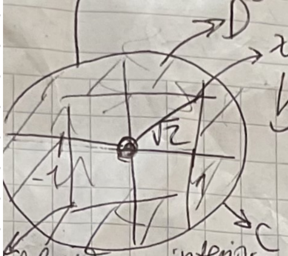
Problema 4

Considere que el flujo normal exterior de un campo vectorial $f(x)\mathbf{F}$ sobre un cuadrado de vértices $\{(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)\}$ es igual a $b \in \mathbb{R}$. Las componentes de $f(x)\mathbf{F}$ tienen derivadas parciales continuas y se cumple

$$f'(x)\mathbf{F} \cdot \mathbf{i} + f(x)(\nabla \cdot \mathbf{F}) = k \in \mathbb{R} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

¿Cuál es el flujo normal exterior del campo $f(x)\mathbf{F}$ sobre la curva $C : x^2 + y^2 = R^2$ con $R > \sqrt{2}$?

Este flujo debe ser exterior



$\nabla f(x) \cdot F + \nabla \cdot F\, f(x)$

$$b = \int_\lambda f(x) F \cdot n = \iint \overbrace{\nabla \cdot (f(x) F)}^{\nabla \cdot F\, f(x)}$$

$$f(\nabla \cdot F) + F \cdot \nabla f$$

flujo interior, para greene.

$$f'(x) F_i + f(x) (\underbrace{\nabla \cdot F}_{-b}) = k \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\Rightarrow \int_\lambda f(x) F \cdot n + \int_C \overbrace{f(x) F (n \cdot -1)}^{} = \iint_D \nabla \cdot (f(x) F)$$

$F = (P, Q)$ $\quad f(x) F = (f(x) P, f(x) Q)$

$$\Rightarrow \nabla (f F) = f (\nabla \cdot F) + F \cdot \underbrace{\nabla f} = f(x)(\nabla \cdot F) + \overset{P}{F} \cdot f'(x)$$

$\nabla f = (f'(x), 0)$ → ya que no depende de y.

$\Rightarrow F = (P, Q)$

$F \cdot i \cdot f'(x)$

$$= \iint k \, dA$$

$$= k \iint 1 \, dA$$

$$= k \left(\pi R^2 - 2 \cdot 2 \right)$$

$$\int_C F dr = b + k(\pi r^2 - 4)$$