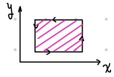
Clase 26

Teorema de Stokes



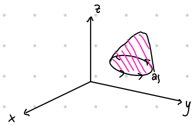
$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Greene

$$\int_{\partial S} F \cdot dr = \iint Q_x - P_y \, dx\,dy$$

$F = (P, Q)$

Stokes (Green dim 3)

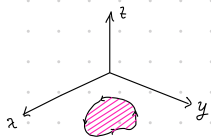


Stokes $\Rightarrow$ Greene

obs

Teo (Stokes): Sea S una superficie orientable, suave por pedazos con orientación positiva (es decir, consistente con la orientación de la superficie). Sea $F: M \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuyos componentes tienen derivadas parciales continuas y tal que M es un abierto tal que $S \subseteq M$. Entonces

$$\int_{\partial S} F \cdot dr = \iint \text{rot}(F) \, dS$$



obs: Stokes $\Longrightarrow$ Greene

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longrightarrow (P(x,y), Q(x,y))$

$\tilde{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

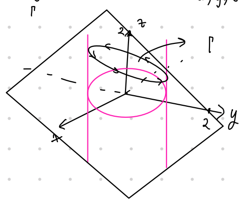
$(x, y, z) \longrightarrow (P(x,y), Q(x,y), 0)$

$\text{rot}(\tilde{F}) = (0, 0, Q_x - P_y)$

$r: D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r(D) = S$

Stokes $\Longrightarrow \displaystyle\int_{\partial S} \tilde{F} \, dr = \iint_D \langle (0, 0, Q_x - P_y), (0, 0, 1) \rangle \, dx\,dy$

Ejemplo Calcular $\int_\Gamma F \cdot dr$, donde $F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$ y Γ es la intersección del plano $y + z = 2$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$



Calculamos $\int_\Gamma F \cdot dr$ usando Stokes

Para calcular $\iint_S \text{rot}(F) \, dS$, necesitamos parametrizar S

$\alpha: (r, \theta) = (r\cos\theta, \, r\,\text{sen}\theta, \, 2 - r\,\text{sen}\,\theta)$

$0 \leq r \leq 1 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial z \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 + 2y)$$

$\dfrac{d\alpha}{dr}(r,\theta) = (\cos\theta, \, \text{sen}\theta, \, 1 - \text{sen}\theta)$

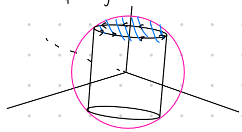
$\dfrac{d\alpha}{d\theta}(r,\theta) = (-r\,\text{sen}\theta, \, r\cos\theta, \, -r\cos\theta)$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial}(r,\theta) \times \frac{\partial\alpha}{\partial\theta}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \text{sen}\theta & -\text{sen}\theta \\ -r\,\text{sen}\theta & r\cos\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = (0, r, r)$$

$$\iint_S \text{rot}(F) \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle F(\alpha(r,\theta)), (0, r, r) \rangle \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(1 + 2r\,\text{sen}\theta) \, d\theta \, dr = \pi$$

$(0, 0, 1 + 2r\,\text{sen}\theta)$

Ejemplo: Usar Stokes para calcular $\iint_S \text{rot}(F) \, dS$ donde $F(x,y,z) = (xz, yz, xy)$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba del plano xy.



Debemos parametrizar ∂S

$\theta \longrightarrow (\cos\theta, \, \text{sen}\theta, \, z_0)$ $\quad$ z_0 se obtiene al intersectar el cilindro

$x^2 + y^2 = 1$

$y^2 + x^2 + z^2 = 4 \Rightarrow z^2 = 3 \qquad z_0 = \pm\sqrt{3}$

$\theta \longrightarrow (\cos\theta, \, \text{sen}\theta, \, \sqrt{3})$

* como está hacia dentro,

$$\int_{\partial S} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} \langle F(r(\theta)), \frac{\partial r}{\partial\theta}(\theta) \rangle \, d\theta =$$