

INFORME TAREA 2

Diego González
RUT:20.300.533-4
Github: @bernoulli314

1. Introducción

Péndulo simple en medio viscoso

Los péndulos son un objeto de estudio relevante en ciencias e ingeniería. En un medio viscoso, la ecuación que los describe es:

$$\ddot{\phi} = -\gamma\dot{\phi} - \frac{g}{l}\sin(\phi)$$

En el caso de pequeñas oscilaciones, se asume que $\sin(\phi) \approx \phi$.

Para fines prácticos, se considerarán las constantes $l = 5.533[m]$, $\gamma = 2.533[s^{-1}]$ y $g = 9.8[m/s^2]$, donde se implementará el método de *Runge – Kutta* de orden 4 para resolver esta ecuación y se comparará paralelamente con el caso de pequeñas oscilaciones.

Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es uno de los sistemas dinámicos no lineales más conocidos, las ecuaciones que lo describen son:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x) \wedge \frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y \wedge \frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

Con β , σ y ρ constantes. Para fines prácticos, se considerarán los valores $\beta = 8/3$, $\sigma = 10$ y $\rho = 28$ y se integrará la ecuación mediante el método *RK4* disponible en la librería `scipy.integrate` con condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ para luego perturbar estas condiciones a $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1.0533, 1)$. Con el fin de comprender mejor el efecto de estas perturbaciones, se graficarán y compararán las soluciones mediante gráficos 3D utilizando la librería `mpl_toolkits.mplot3d`.

2. Desarrollo

Péndulo simple en medio viscoso

Analizando las constantes del sistema, es posible notar que el oscilador es un **oscilador con amortiguamiento débil** (esto debido a que $\gamma^2/4 < g/l$), cuya ecuación es:

$$\phi(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi(0))$$

Con $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - (\frac{\gamma}{2})^2}$. Si consideramos las condiciones iniciales $\phi(0) = \phi_0$ y $\dot{\phi}(0) = 0$, la ecuación es:

$$\phi(t) = \frac{\phi_0}{\cos(\phi_0)} e^{\frac{-\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

Cuyo periodo de oscilación es $T = 2\pi/\omega$, en base a esto, como $T \approx 15$, y si se considera al menos un valor por cada grado ($2\pi = 360$) se define la variable temporal $dt = 10^{-q}$ con $q \geq 2$, ya que $15/360 \approx 0.04$, En este caso se consideró $dt = 10^{-2}$. Se define la función y sus factores en base a los valores dados (ver `phi_pequenas_osc`).

Por otro lado, se crea el método *RK4* para resolver el problema mediante una serie de pasos, con el fin de lograr la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

(ver función `paso_rk4` y sus pasos previos en código).

Para h , se considera que $h = dt$ con dt diferencial de tiempo o paso temporal. Para definir y_0 , necesario para implementar el método RK4, se utiliza un arreglo *numpy* del tipo `np.arange([phi_0, 0])`. Luego, para generar los valores correspondientes de $y(t)$, se crea una matriz de ceros la cual luego se rellena mediante recursión (ver líneas 97 y 98 del código)

En ambos casos se analiza $\phi(t)$ en un rango $t \in [0, 2\pi/\omega]$. En una primera instancia se integra la función para $\phi_0 = \pi/50$ y luego para $\phi_0 = \pi/2.533$. Ambas funciones se grafican para compararlas y analizar la pérdida de energía de cada una de estas, además, se crea el factor `diferencia_relativa_promedio` el cual suma las diferencias absolutas entre el valor obtenido mediante pequeñas oscilaciones y RK4 para luego sacar un promedio simple, obteniendo así un valor que determina el grado de diferencia entre ambos métodos.

Para observar de mejor manera la variación energética del péndulo en ambos casos, se calcula la energía mecánica total en cada momento, considerando, sin pérdida de generalidad, que la masa del péndulo es de $m = 1[kg]$, para luego generar los gráficos que muestran la evolución de la energía respecto al tiempo.

Atractor de Lorenz

Luego de importar las librerías y definir las constantes, se define la función del Atractor de Lorenz con la forma necesaria para aplicar el método RK4, es decir, un arreglo *numpy* del tipo `np.arange([x,y,z])` (ver función `lorenz` en el código). Con el fin de implementar el código se definen las condiciones iniciales tanto normales como perturbadas y se grafican mediante un gráfico 3D para el cual se escogen diversos rangos de tiempo y cantidad de puntos (`s_span` y `times` respectivamente, puede encontrarlas en el código) para apreciar de mejor forma la diferencia que existe entre ambos casos.

Finalmente, para apreciar de mejor manera las diferencias presente entre las condiciones iniciales normales y las perturbadas, se generan tres gráficos de dos dimensiones comparando las coordenadas XY , XZ y YZ respectivamente.

3. Resultados

Péndulo simple en medio viscoso

En el caso $\phi_0 = \pi/50$ se obtuvo una diferencia relativa promedio de $0.002986 \approx 0.2\%$ aproximadamente. Mientras que en el caso $\phi_0 = \pi/2.533$ se obtuvo una diferencia relativa promedio de $0.128093 \approx 12.8\%$.

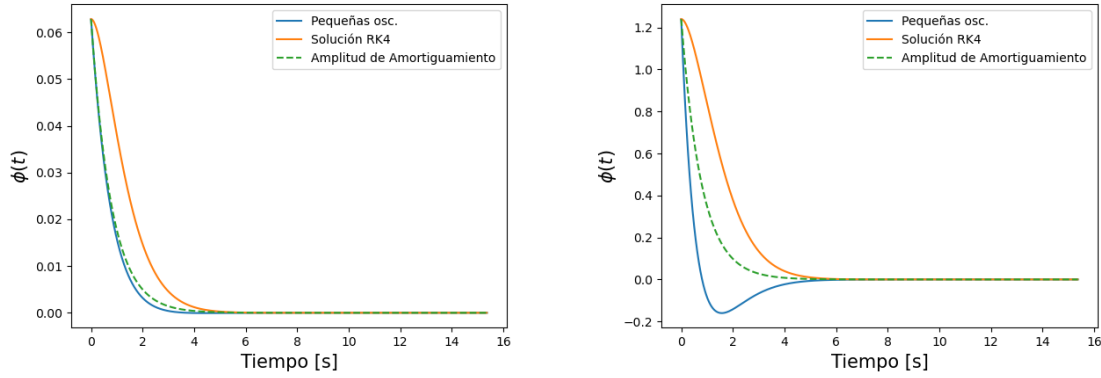


Figura 1: A la izquierda, cálculo de $\phi(t)$ mediante pequeñas oscilaciones y RK4 con $\phi_0 = \pi/50$. A la derecha, cálculo de $\phi(t)$ mediante pequeñas oscilaciones y RK4 con $\phi_0 = \pi/\gamma$

En términos de energía total se obtuvieron los siguientes gráficos:

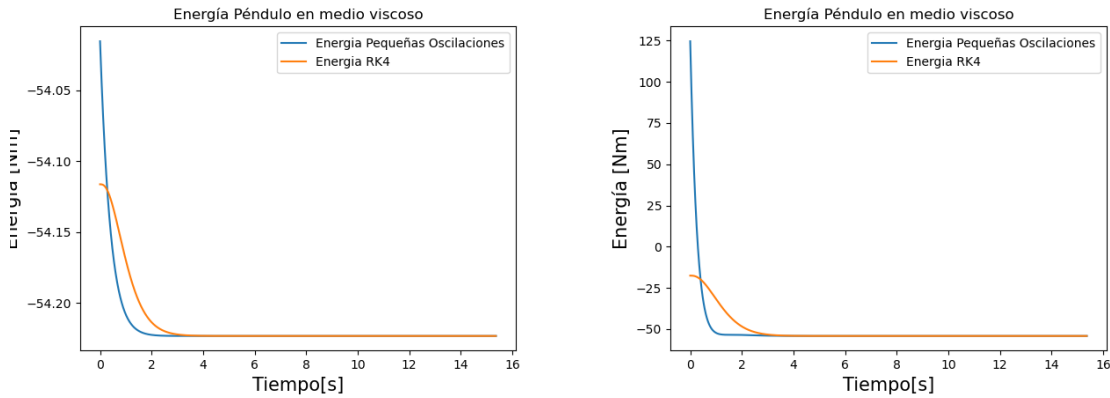


Figura 2: A la izquierda, calculo de la Energía del péndulo mediante pequeñas oscilaciones y RK4 con $\phi_0 = \pi/50$. A la derecha, calculo de la Energía del péndulo mediante pequeñas oscilaciones y RK4 con $\phi_0 = \pi/\gamma$.

Atractor de Lorenz

Los gráficos obtenidos para el atractor de Lorenz para un rango de 0 a 10, 0 a 100 y 0 a 1000; y para 50, 500 y 5000 evaluaciones en el caso con condiciones iniciales (en azul) y con codiciones perturbadas (en naranjo) son:

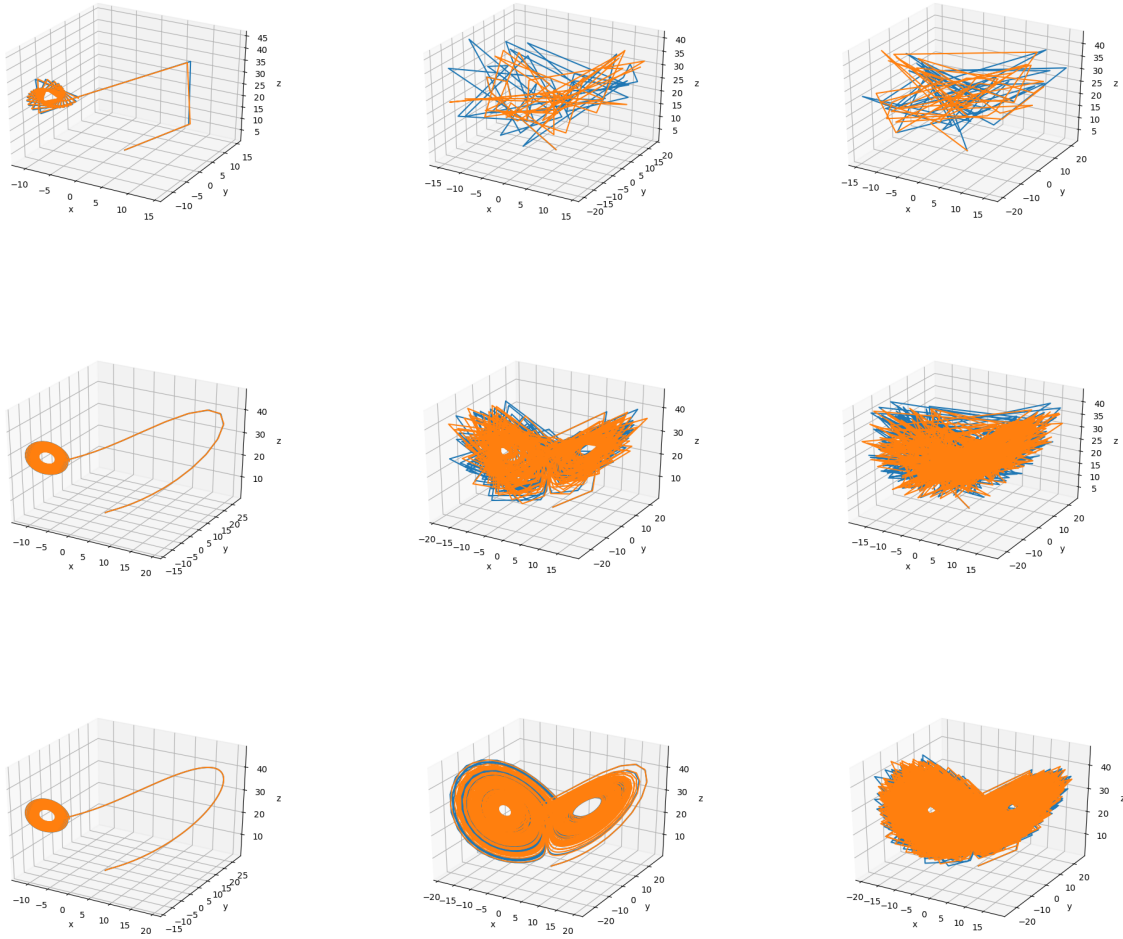


Figura 3: Gráficos del Atractor de Lorenz, hacia la derecha aumenta el rango(con 10, 100 y 1000 respectivamente) y hacia abajo aumenta la cantidad de evaluaciones (con 50, 500 y 5000 respectivamente)

Por otro lado, los gráficos obtenidos al comparar los ejes XY , XZ y YZ respectivamente son:

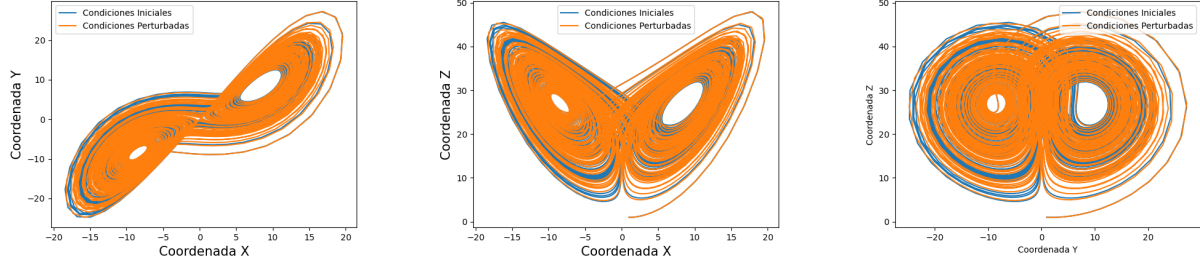


Figura 4: A la izquierda, comparación de las coordenadas X e Y del atractor de Lorenz. Al centro, la comparación de las coordenadas X y Z. A la derecha, la comparación de las coordenadas Y y Z

4. Discusión y Conclusiones

Péndulo simple en medio viscoso

La aproximación del péndulo en medio viscoso mediante pequeñas oscilaciones es considerablemente cercano al péndulo real cuando el valor del ángulo inicial es pequeño (con un error de aproximadamente un 2% en nuestro caso) por lo que, sin grandes pérdidas de información, se le puede considerar una buena aproximación del caso real. Por otro lado, cuando el ángulo es considerablemente mayor (como en nuestro caso π/γ), la aproximación mediante pequeñas oscilaciones comienza a perder precisión, teniendo grandes diferencias en el comportamiento del péndulo y en el caso estudiado, con un error de aproximadamente un 12%.

La energía del sistema, al considerar un ángulo pequeño ($\phi_0 = \pi/50$), es similar en ambos casos, aunque se estabiliza mucho más rápido en el caso de pequeñas oscilaciones. Pero, al analizar la energía en un ángulo grande (como en este caso, $\phi_0 = \pi/\gamma$), se logra apreciar una diferencia notable entre ambos modelos, esto puede ser producto de la ineficiencia que posee el modelo de pequeñas oscilaciones a la hora de representar casos donde los ángulos son grandes.

Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es un sistema muy susceptible a la variación de las condiciones iniciales, a pesar de poseer una perturbación pequeña de y , la cual incluso puede no ser considerada en sistemas no caóticos, en este caso generan diferencias notables a la hora de analizar los gráficos, estas diferencias son mucho más apreciables visualmente en un mayor rango y menor cantidad de evaluaciones. La aplicación de métodos de integración con un error asociado, como lo son los casos de integraciones computacionales, puede llevar a obtener resultados considerablemente distintos a los reales en casos de sistemas caóticos como el atractor de Lorenz.