

## INFORME TAREA 2

Diego González  
RUT:20.300.533-4  
Github: @bernoulli314

### 1. Introducción

#### Péndulo simple en medio viscoso

Los péndulos son un objeto de estudio relevante en ciencias e ingeniería. En un medio viscoso, la ecuación que los describe es:

$$\ddot{\phi} = -\gamma\dot{\phi} - \frac{g}{l}\sin(\phi)$$

En el caso de pequeñas oscilaciones, se asume que  $\sin(\phi) \approx \phi$ .

Para fines prácticos, se considerarán las constantes  $l = 5.533[m]$ ,  $\gamma = 2.533[s^{-1}]$  y  $g = 9.8[m/s^2]$ , donde se implementará el método de *Runge – Kutta* de orden 4 para resolver esta ecuación y se comparará paralelamente con el caso de pequeñas oscilaciones.

#### Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es uno de los sistemas dinámicos no lineales más conocidos, las ecuaciones que lo describen son:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x) \wedge \frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y \wedge \frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

Con  $\beta$ ,  $\sigma$  y  $\rho$  constantes. Para fines prácticos, se considerarán los valores  $\beta = 8/3$ ,  $\sigma = 10$  y  $\rho = 28$  y se integrará la ecuación mediante el método *RK4* disponible en la librería `scipy.integrate` con condiciones iniciales  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$  para luego perturbar estas condiciones a  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1.0533, 1)$ . Con el fin de comprender mejor el efecto de estas perturbaciones, se graficarán y compararán las soluciones mediante gráficos 3D utilizando la librería `mpl_toolkits.mplot3d`.

### 2. Desarrollo

#### Péndulo simple en medio viscoso

Analizando las constantes del sistema, es posible notar que el oscilador es un **oscilador con amortiguamiento débil** (esto debido a que  $\gamma^2/4 < g/l$ ), cuya ecuación es:

$$\phi(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi(0))$$

Con  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - (\frac{\gamma}{2})^2}$ . Si consideramos las condiciones iniciales  $\phi(0) = \phi_0$  y  $\dot{\phi}(0) = 0$ , la ecuación es:

$$\phi(t) = \frac{\phi_0}{\cos(\phi_0)} e^{\frac{-\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

Cuyo periodo de oscilación es  $T = 2\pi/\omega$ , en base a esto, como  $T \approx 15$ , y si se considera al menos un valor por cada grado ( $2\pi = 360$ ) se define la variable temporal  $dt = 10^{-q}$  con  $q \geq 2$ , ya que  $15/360 \approx 0.04$ . En este caso se consideró  $dt = 10^{-2}$ . Se define la función y sus factores en base a los valores dados (ver `phi_pequenas_osc`).

Por otro lado, se crea el método *RK4* para resolver el problema mediante una serie de pasos, con el fin de lograr la ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

(ver función `paso_rk4` y sus pasos previos en código).

Para  $h$ , se considera que  $h = dt$  con  $dt$  diferencial de tiempo o paso temporal. Para definir  $y_0$ , necesario para implementar el método RK4, se utiliza un arreglo *numpy* del tipo `np.arange([phi_0, 0])`. Luego, para generar los valores correspondientes de  $y(t)$ , se crea una matriz de ceros la cual luego se rellena mediante recursión (ver líneas 97 y 98 del código)

En ambos casos se analiza  $\phi(t)$  en un rango  $t \in [0, 2\pi/\omega]$ . En una primera instancia se integra la función para  $\phi_0 = \pi/50$  y luego para  $\phi_0 = \pi/2.533$ . Ambas funciones se grafican para compararlas y analizar la pérdida de energía de cada una de estas, además, se crea el factor `diferencia_relativa_promedio` el cual suma las diferencias absolutas entre el valor obtenido mediante pequeñas oscilaciones y RK4 para luego sacar un promedio simple, obteniendo así un valor que determina el grado de diferencia entre ambos métodos.

## Atractor de Lorenz

Luego de importar las librerías y definir las constantes, se define la función del Atractor de Lorenz con la forma necesaria para aplicar el método RK4, es decir, un arreglo *numpy* del tipo `np.arange([x,y,z])` (ver función `lorenz` en el código). Con el fin de implementar el código se definen las condiciones iniciales tanto normales como perturbadas y se grafican mediante un gráfico 3D para el cual se escogen diversos rangos de tiempo y cantidad de puntos (`s_span` y `times` respectivamente, puede encontrarlas en el código) para apreciar de mejor forma la diferencia que existe entre ambos casos.

## 3. Resultados

### Péndulo simple en medio viscoso

En el caso  $\phi_0 = \pi/50$  se obtuvo el siguiente gráfico:

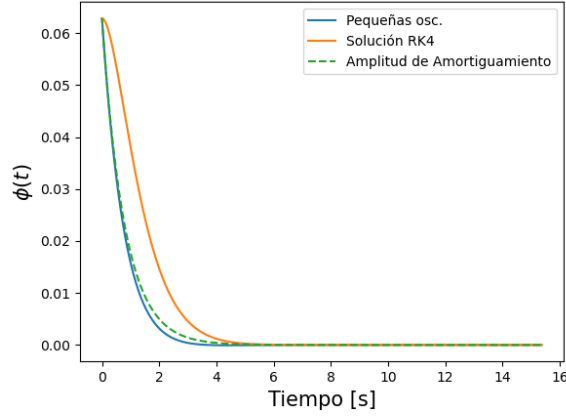


Figura 1: Cálculo de  $\phi(t)$  mediante pequeñas oscilaciones y RK4 con  $\phi_0 = \pi/50$

Cuya diferencia relativa promedio fue de  $0.002986 \approx 0.2\%$  aproximadamente.  
En el caso  $\phi_0 = \pi/2.533$  se obtuvo el siguiente gráfico:

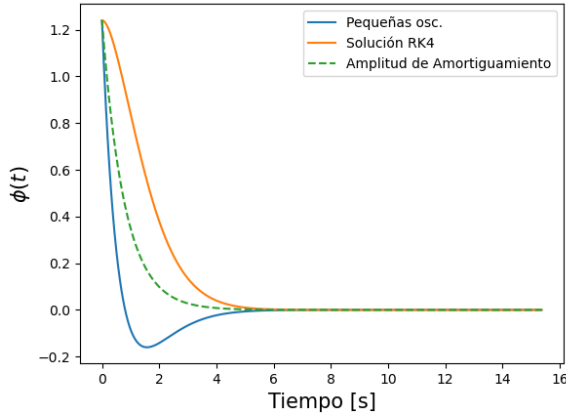


Figura 2: Cálculo de  $\phi(t)$  mediante pequeñas oscilaciones y RK4 con  $\phi_0 = \pi/\gamma$

Cuya diferencia relativa promedio fue de  $0.128093 \approx 12.8\%$ . En términos energéticos, es posible notar que el método de pequeñas oscilaciones llega antes al punto de mínima energía potencial, aunque por otro lado presenta una mayor energía cinética que RK4, aunque va disminuyendo progresivamente, oscilando así, la energía potencial, mientras que la solución RK4 muestra una pérdida más lenta y estable de energía potencia y cinética.

## Atractor de Lorenz

Los gráficos obtenidos para el atractor de Lorenz son:

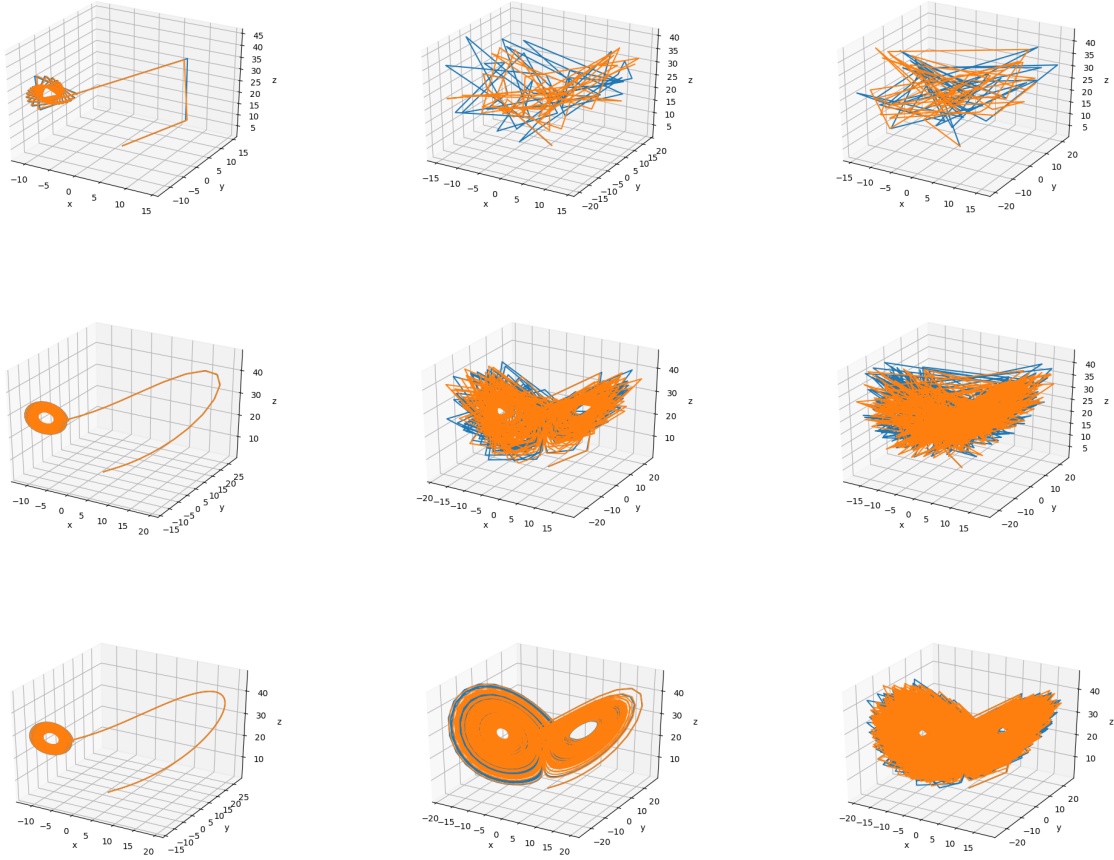


Figura 3: Gráficos del Atractor de Lorenz, hacia la derecha aumenta el rango(con 10, 100 y 1000 respectivamente) y hacia abajo aumenta la cantidad de evaluaciones (con 50, 500 y 5000 respectivamente)

## 4. Discusión y Conclusiones

### Péndulo simple en medio viscoso

La aproximación del péndulo en medio viscoso mediante pequeñas oscilaciones es considerablemente cercano al péndulo real cuando el valor del ángulo inicial es pequeño (con un error de aproximadamente un 2% en nuestro caso) por lo que, sin grandes pérdidas de información, se le puede considerar una buena aproximación del caso real. Por otro lado, cuando el ángulo es considerablemente mayor (como en nuestro caso  $\pi/\gamma$ ), la aproximación mediante pequeñas oscilaciones comienza a perder precisión, teniendo grandes diferencias en el comportamiento del péndulo y su energía y, en el caso estudiado, con un error de aproximadamente un 12%.

## Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es un sistema muy susceptible a la variación de las condiciones iniciales, a pesar de poseer una perturbación pequeña de  $y$ , la cual incluso puede no ser considerada en sistemas no caóticos, en este caso generan diferencias notables a la hora de analizar los gráficos, estas diferencias son mucho más apreciables en un mayor rango y menor cantidad de evaluaciones. La aplicación de métodos de integración con un error asociado, como lo son los casos de integraciones computacionales, puede llevar a obtener resultados considerablemente distintos a los reales en casos de sistemas caóticos como el atractor de Lorenz.