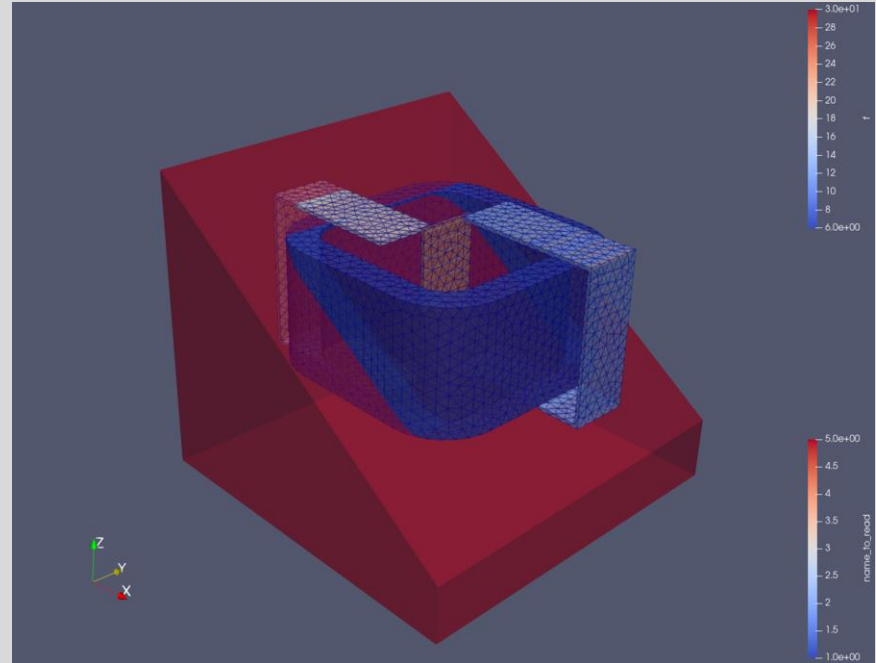


Gruppe 4: Maxwell

Sebastian Zeilinger
Maximilian Redl
Jan Niklas Bernrader
David Förlinger
Thomas Kroyer
Johanna-Sophia Köberl



Maxwellgleichungen

$$\nabla \times H(\mathbf{r}, t) = J(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial D(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \begin{array}{l} \text{Maxwell'scher} \\ \text{Verschiebungstrom} \end{array}$$

Materialgesetze:

$$B = \mu H$$

$$J = \sigma E$$

$$\nabla \times E(\mathbf{r}, t) = \frac{-\partial B(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot B(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t),$$

H = magnetische Feldstärke, B = magnetische Flussdichte, E = elektrische Feldstärke
D = elektrische Flussdichte, J = elektrische Stromdichte, ρ = Ladungsdichte

Herleitung der Poisson-Gleichung mit fixer Magnetisierung

Der Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte \vec{B} , magnetischer Feldstärke \vec{H} und Magnetisierung \vec{M} in Materie ist:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$$

Magnetische Feldkonstante = μ_0

Wenn die Rotation von \vec{H} verschwindet, besitzt \vec{H} ein Potential. Somit kann die obige Gleichung auf \vec{H} umgestellt werden und durch Multiplikation mit dem Nabla Operator erhält man die **Poisson Gleichung** :

$$\begin{aligned}\nabla * \vec{H} &= \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla * \vec{B}}_{=0} - \nabla \vec{M} = -\nabla^2 \phi \\ \rightarrow \quad \nabla \vec{M} &= \nabla^2 \phi\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\nabla^2 \phi_{in} = \nabla \vec{M}, \quad \nabla^2 \phi_{out} = 0$$

Mit den Randbedingungen :

$$U_{in} = U_{out}$$

$$\frac{\partial U_{in}}{\partial n} = \frac{\partial U_{out}}{\partial n} + \vec{M} * \vec{n}$$

Mithilfe des Gauß'schen und des Stokes'schen Integralsatzes kann gezeigt werden, dass die Normalkomponente \vec{n} von \vec{B} und die Tangentialkomponente \vec{t} von \vec{H} stetig sind:

$$\vec{n} * (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad \vec{t} * (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

Jetzt kann B ausgedrückt werden durch ϕ und \vec{M} wobei $\vec{n} = \frac{\partial}{\partial n}$:

$$\frac{\partial \phi_{out}}{\partial n} + \vec{M} \vec{n} = \frac{\partial \phi_{in}}{\partial n}$$

Da die Ableitung von ϕ nicht divergieren darf, da sonst auch \vec{H} divergiert, folgt dass:

$$\phi_{out} = \phi_{in}$$

Schwache Formulierung

$$\Delta u = \nabla M$$

$$\Delta u * \textcolor{red}{v} = \nabla M$$

$$\int_{\Omega} \nabla u * \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial s} * v \, ds = \int_{\Omega} \nabla v * M \, dx$$

Der Randterm verschwindet da das Potential am Rand Null ist.

Code

```
def solver(mesh_file, cell_regions_file, facet_regions_file, output_file, output_file_potential):
```

```
    # Import mesh with volume and facet regions
```

```
    mesh = Mesh(mesh_file)
```

```
    cell_regions = MeshFunction("size_t", mesh, cell_regions_file)
```

```
    facet_regions = MeshFunction("size_t", mesh, facet_regions_file)
```

```
    dx = Measure('dx', domain=mesh, subdomain_data=cell_regions)
```

```
    #Define function space
```

```
    V = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

```
    W = VectorFunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

```
    #Magnetization
```

```
    M0 = Expression(('1.0', '0.0', '0.0'), degree=0)
```

```
    M1 = Expression(('0.0', '0.0', '0.0'), degree=0)
```

```
    # Define variational problem
```

```
    u = TrialFunction(V) # scalar potential
```

```
    v = TestFunction(V)
```

```
    f0 = M0
```

```
    f1 = M1
```

```
    u = TrialFunction(V)
```

```
    v = TestFunction(V)
```

```
    a = (dot(grad(u), grad(v)))*dx
```

```
    L = (dot(f0, grad(v)))*dx(1) + (dot(f1, grad(v)))*dx(2)
```

```
    # Dirichlet boundary (0 at outer boundary)
```

```
    bc1 = DirichletBC(V, Constant(0.0), facet_regions, 3)
```

```
    # Compute solution
```

```
    u = Function(V)
```

```
    solve(a == L, u, bc1)
```

```
    #stray field
```

```
    #H = project(-grad(u), W)
```

```
    H = project(-grad(u), W, solver_type="mumps")
```

```
    #Export
```

```
    vtkfile = File(output_file)
```

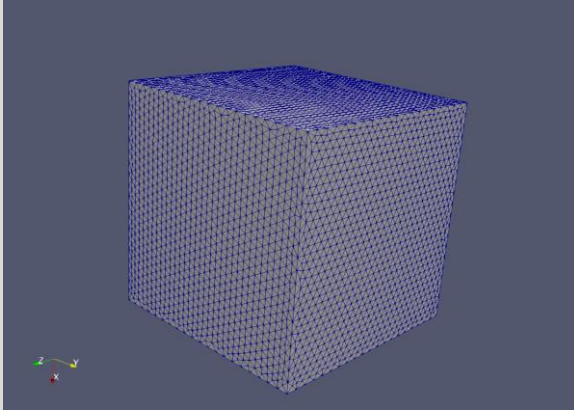
```
    vtkfile << H
```

```
    potentialfile = File(output_file_potential)
```

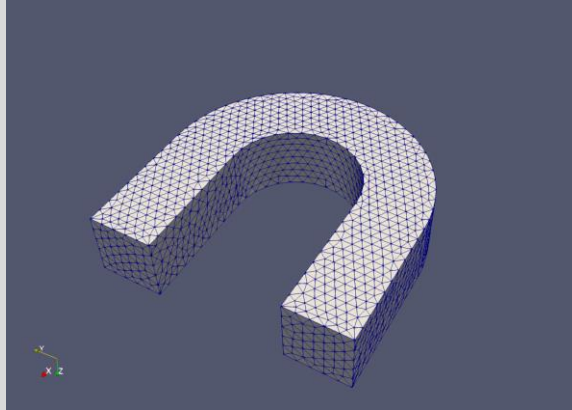
```
    potentialfile << u
```

Meshes

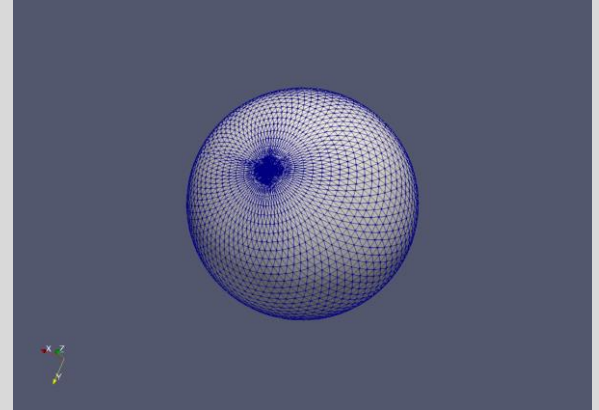
Würfelmagnet



Hufeisenmagnet



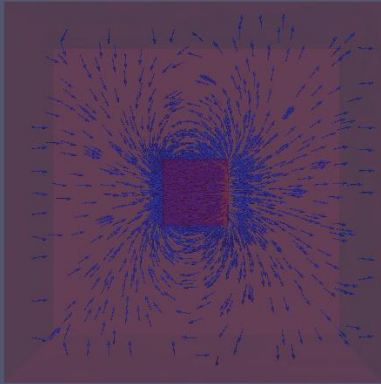
Kugelmagnet



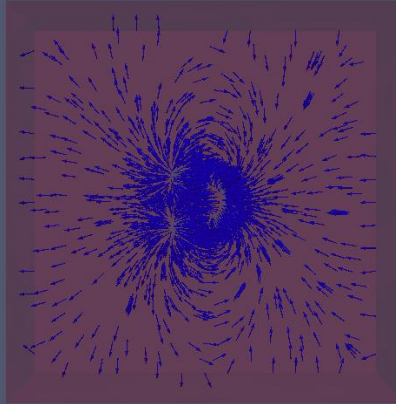
→ Meshes erstellt mit Salome

Magnetfelder der drei Magneten

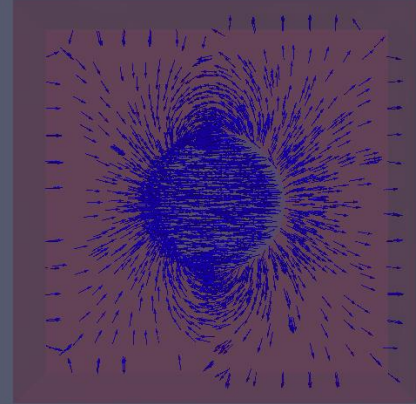
Würfelmagnet



Hufeisenmagnet

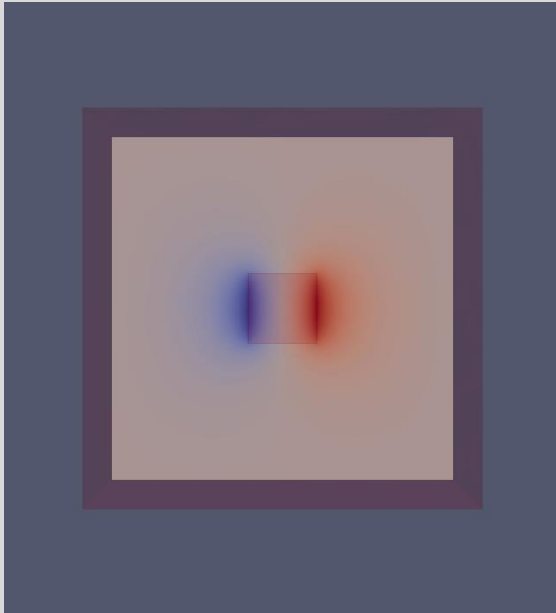


Kugelmagnet

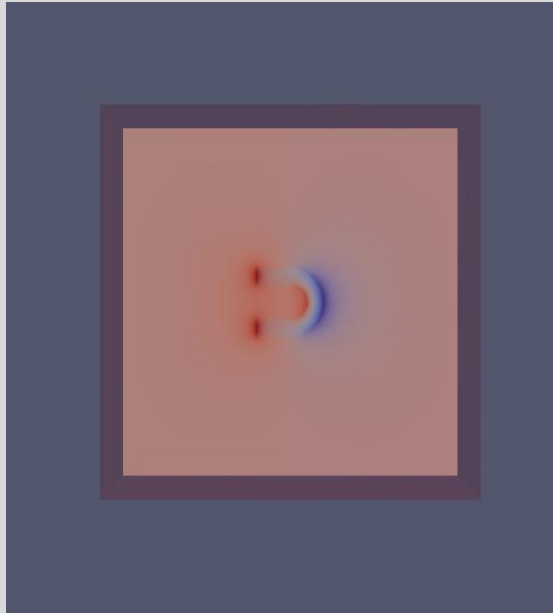


Potentiale der drei Magneten

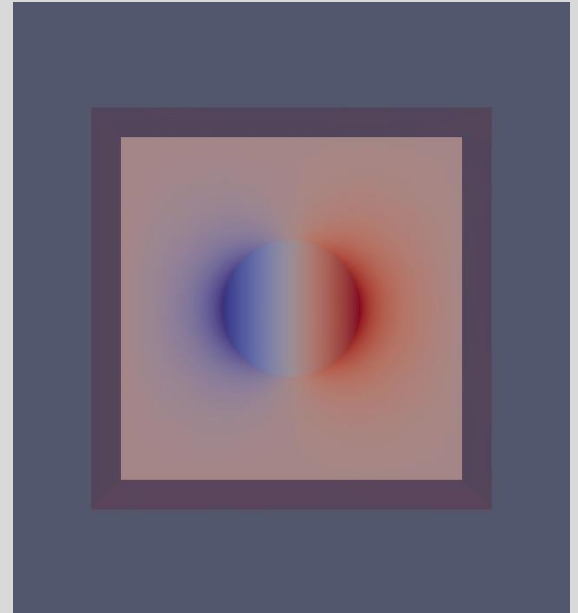
Würfelmagnet



Hufeisenmagnet

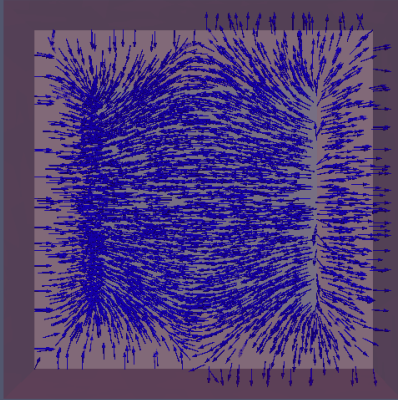


Kugelmagnet

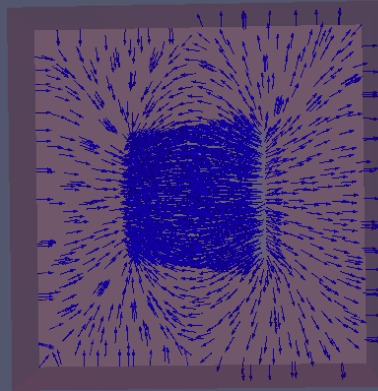


Magnetfelder der Magneten mit verschiedenen Airboxen

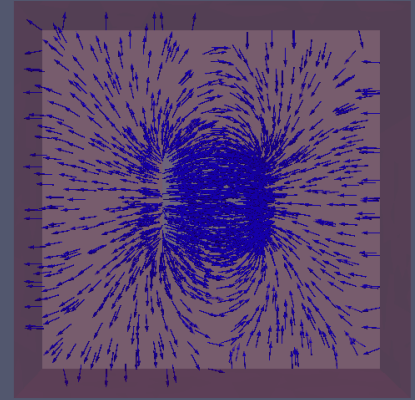
30mm Airbox



50mm Airbox

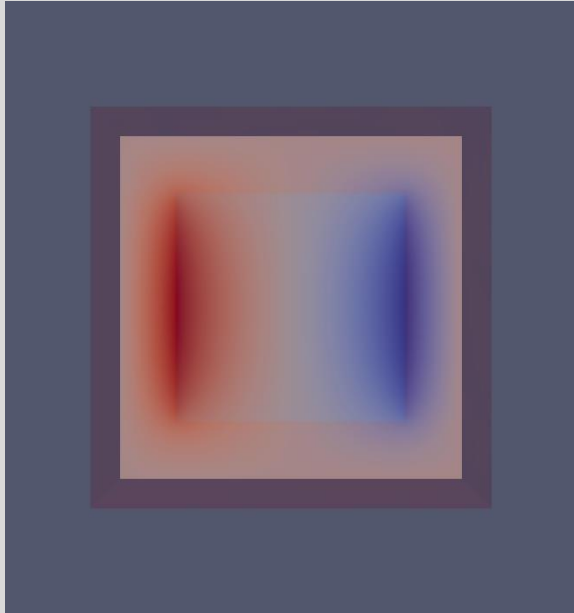


70mm Airbox

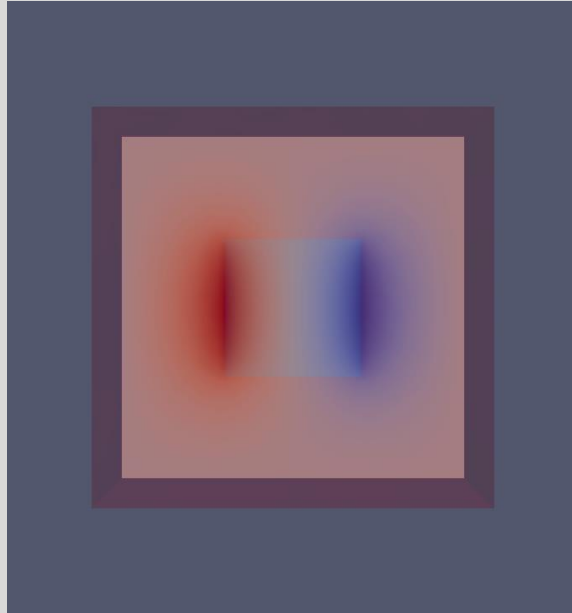


Potentiale der Magneten mit verschiedenen Airboxen

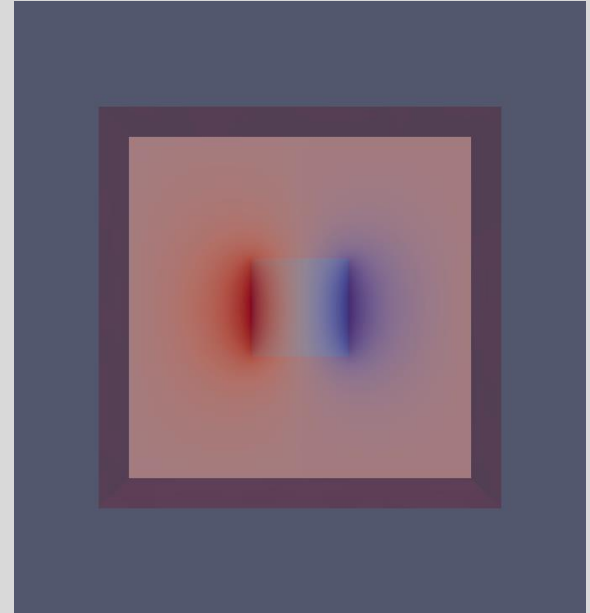
30mm Airbox



50mm Airbox



70mm Airbox



A,V-A Formalismus

Der verwendete Formalismus ist der AV-A Formalismus. Dieser ergibt sich aus den folgenden Maxwell-Gleichungen für den ladungsfreien Raum:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B}\end{aligned}$$

Daraus kann man definieren:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Wobei A das magnetische Vektorpotential ist. Setzt man das in die Gleichung mit dem elektrischen Feld ein, kommt man auf folgende Formel:

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

Daraus folgt:

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla V$$

A,V-A Formalismus

Aus diesen Formeln kommt man dann auf folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\partial_t (\nabla v + \vec{A})\end{aligned}$$

Wobei v das über die Zeit integrierte elektrische Skalarpotential ist.

Die für die Beschreibung des Problems verwendeten Differentialgleichungen lauten wie folgt:

$$\nabla \times (v \nabla \times \vec{A}) + \sigma * \partial_t (\nabla v + \vec{A}) = J \quad \text{in } \Omega_c$$

$$\nabla(\sigma * \partial_t (\nabla v + \vec{A})) = 0 \quad \text{in } \Omega_c$$

Wobei Ω_c in der leitenden Region bedeutet. Hier ist v der Kehrwert der magnetischen Permeabilität μ und σ der Leitwert. J ist ein Quellterm für die Stromdichte

A-A* Formalismus

Der AA*-Formalismus ist der Formalismus der in den folgenden Simulationen verwendet wird. Er ergibt sich, wenn man das elektrische Skalarpotential auf 0 setzt. Die Gleichungen die sich dabei ergeben sind die Folgenden:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\partial t(\vec{A})$$

Die für die Beschreibung des Problems verwendeten Differentialgleichungen lauten wie folgt:

$$\nabla \times (v \nabla \times \vec{A}) + \sigma * \partial t(A) = J \quad \text{in } \Omega_c$$

$$\nabla (\sigma * \partial t(\vec{A})) = 0 \quad \text{in } \Omega_c$$

Wobei Ω_c in der leitenden Region bedeutet. Hier ist v der Kehrwert der magnetischen Permeabilität μ und σ der Leitwert. J ist ein Quellterm für die Stromdichte

Zeitharmonische Problem

Im folgenden betrachten wir zeitharmonische Probleme. Mit dieser Schreibweise kann man Felder folgendermaßen darstellen:

$$A(t) = Ae^{i\omega t}$$

Mit dieser Schreibweise werden zeitliche Ableitungen zu einer Multiplikation mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der imaginären Einheit i .

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} = i\omega A(t)$$

Wegen der komplexen Zahlen müssen jetzt doppelt so viele Gleichungen gelöst werden.

Erzeugung der Stromdichte

Die Stromdichte in der Spule kann durch einen Quellterm berechnet werden. Dieser ergibt sich durch folgende Gleichung.

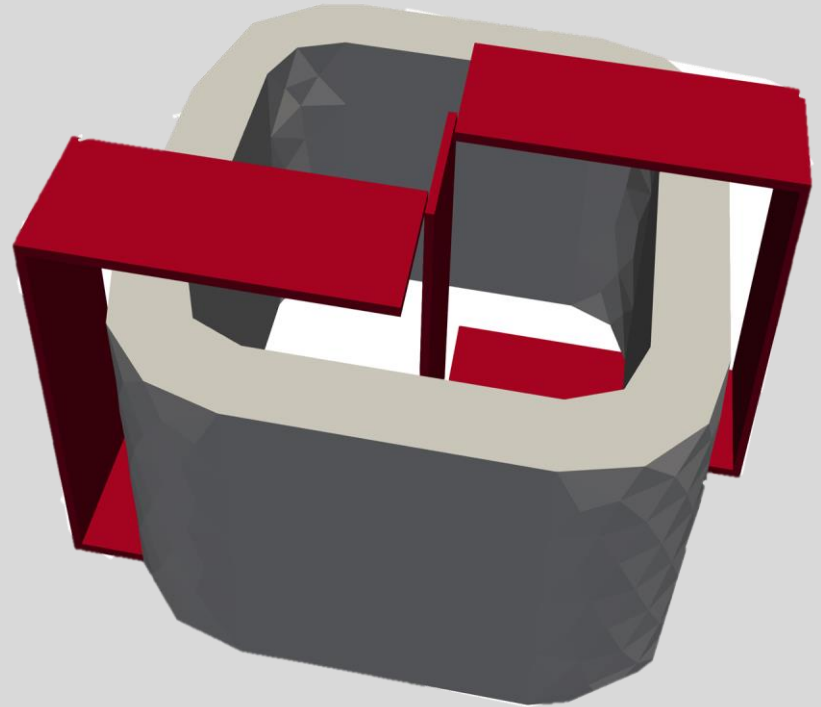
$$J_{ges} = J + \sigma E$$

Hierbei ist J die Quellstromdichte und σE ist die Stromdichte, die durch das elektrische Feld entsteht. Wir können folgenden Zusammenhang benutzen um das Stromdichteverektorpotential zu berechnen.

$$J = \text{rot}(T_0)$$

Bildet man die Rotation von beiden Seiten und multipliziert man mit einer Testfunktion u , kommt man auf die schwache Formulierung.

$$\text{rot}(J) \cdot u = \text{rot}(T_0) \text{rot}(u)$$

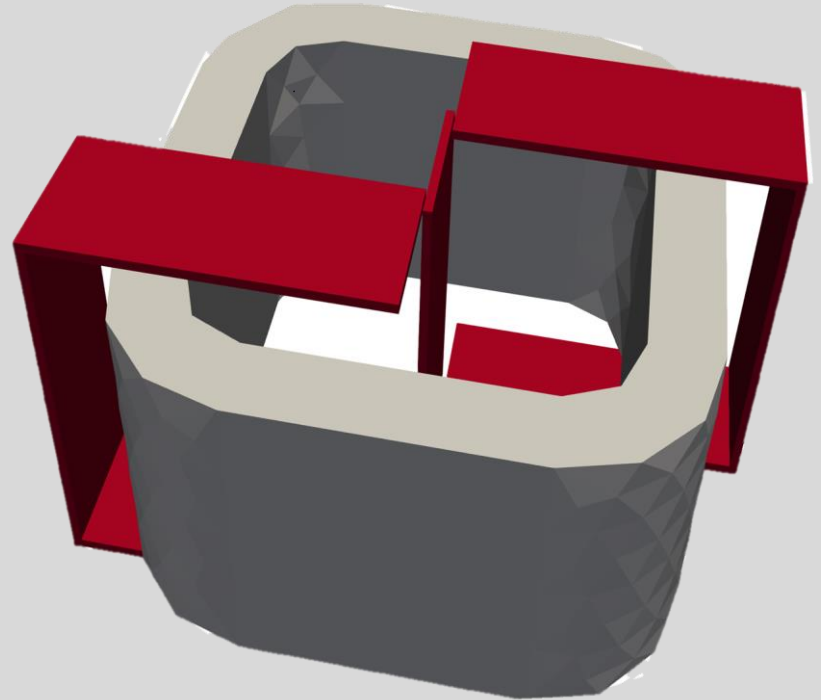


Schwache Formulierung

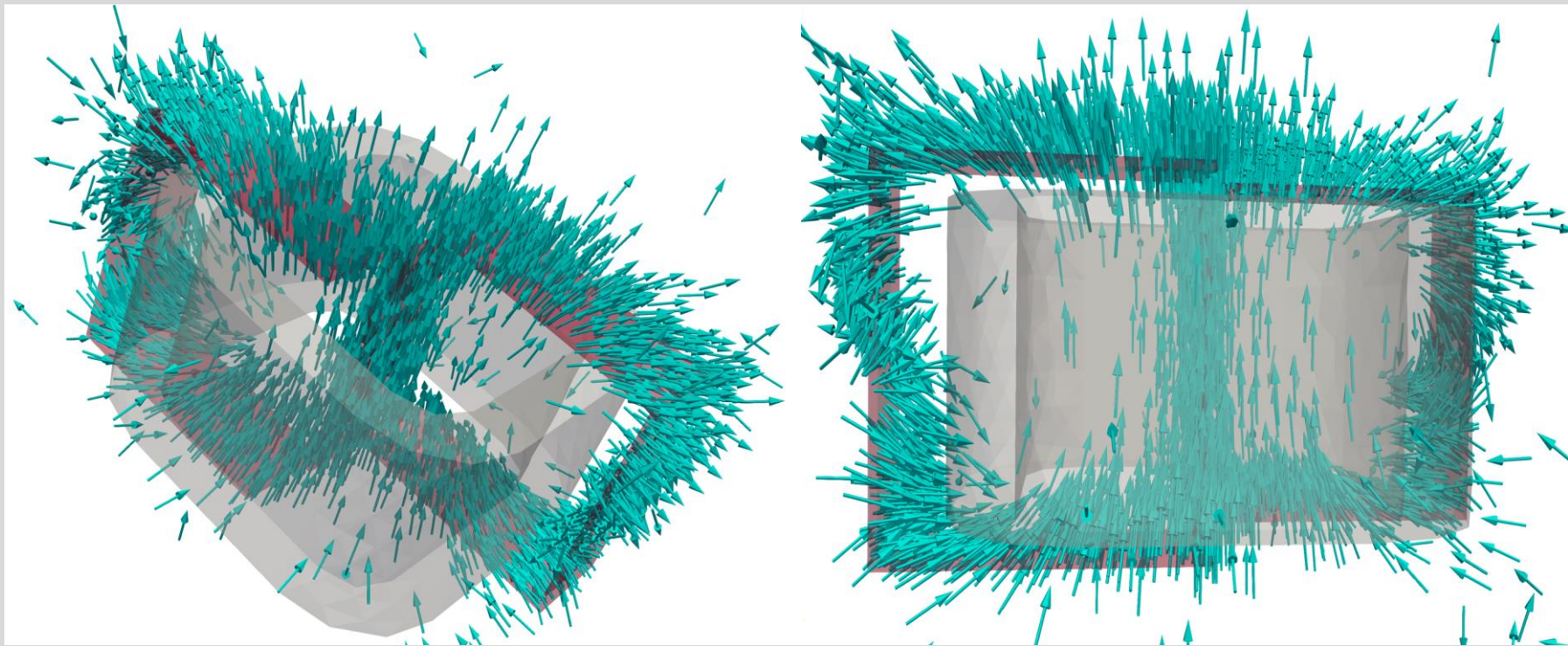
Mit FEnlCs wird diese Gleichung gelöst und T_0 bestimmt.

Dies kann in die Differentialgleichungen eingesetzt werden und in die schwache Formulierung umgeschrieben werden.

```
V = FunctionSpace(mesh, "N1curl", 1)
W = VectorFunctionSpace(mesh, "CG", 1)
u = TrialFunction(V)
v = TestFunction(V)
a = inner(curl(u), curl(v))*dx
L = Constant(scale)*inner(j_expr, curl(v))*dx(Omega['coil'])
```



T_0 -Feld



Schwache Formulierung Wirbelstromproblem

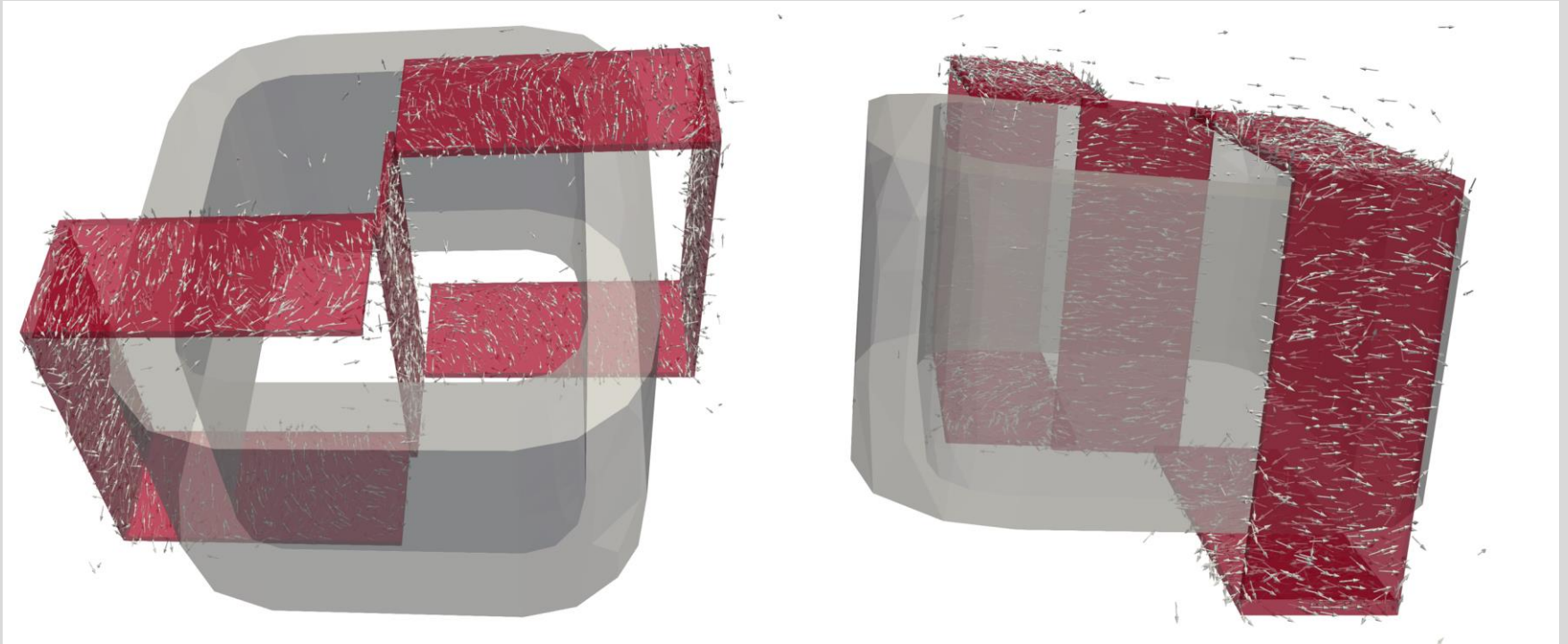
Nun wird das tatsächliche Wirbelstromproblem gelöst und damit die partiellen Differentialgleichungen der AA*-Formulierung gelöst. Da wir die Gleichungen im komplexen Lösen, gibt es doppelt so viele.

```
Hcurl = FiniteElement("N1curl", tetrahedron, 1)
V = FunctionSpace(mesh, MixedElement((Hcurl, Hcurl)))
a = 1/mu*inner(curl(u_r), curl(v_r))*dx
a -= 1/mu*inner(curl(u_i), curl(v_i))*dx

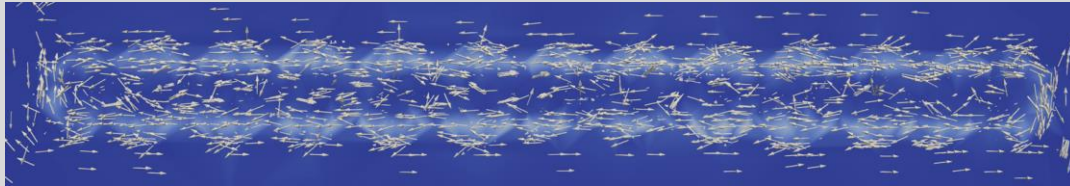
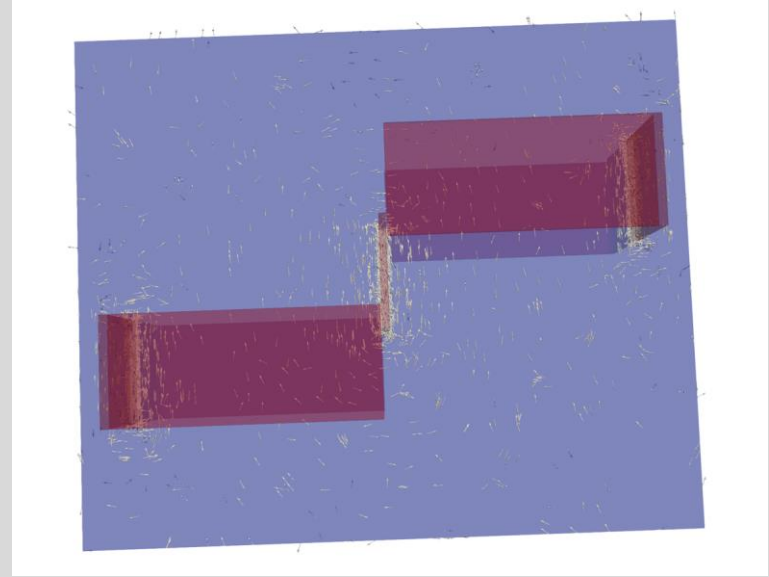
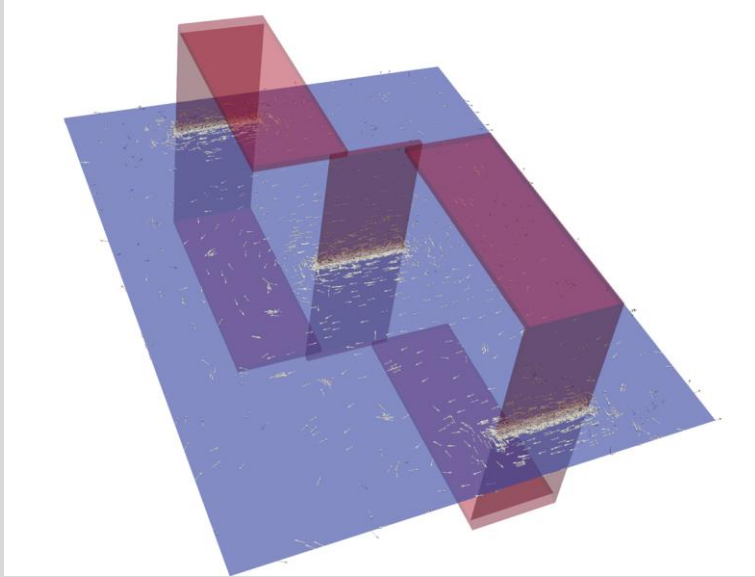
a -= Constant(scale**2*omega)*sigma*inner(u_i, v_r)*dx
a -= Constant(scale**2*omega)*sigma*inner(u_r, v_i)*dx

L = inner(T0, curl(v_r))*dx
```

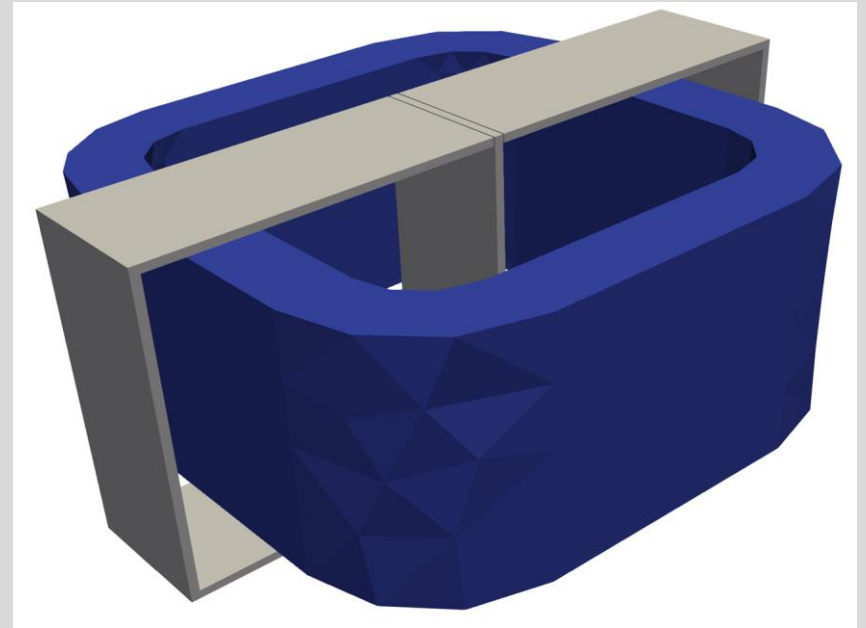
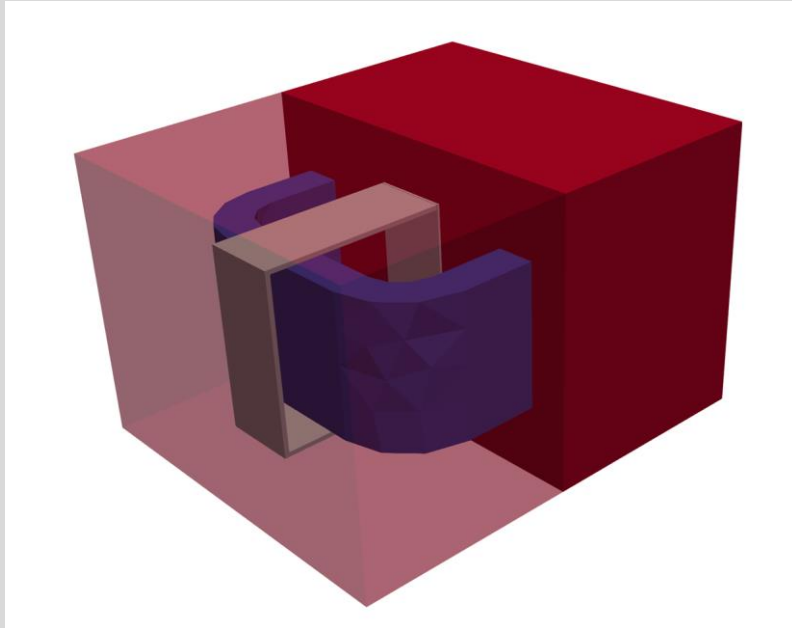
Realteil des J-Feldes



Realteil des J-Feldes

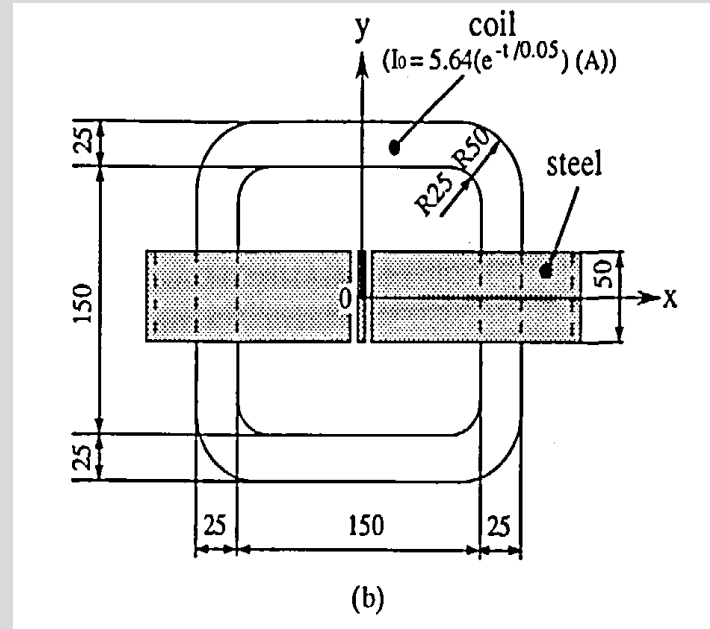
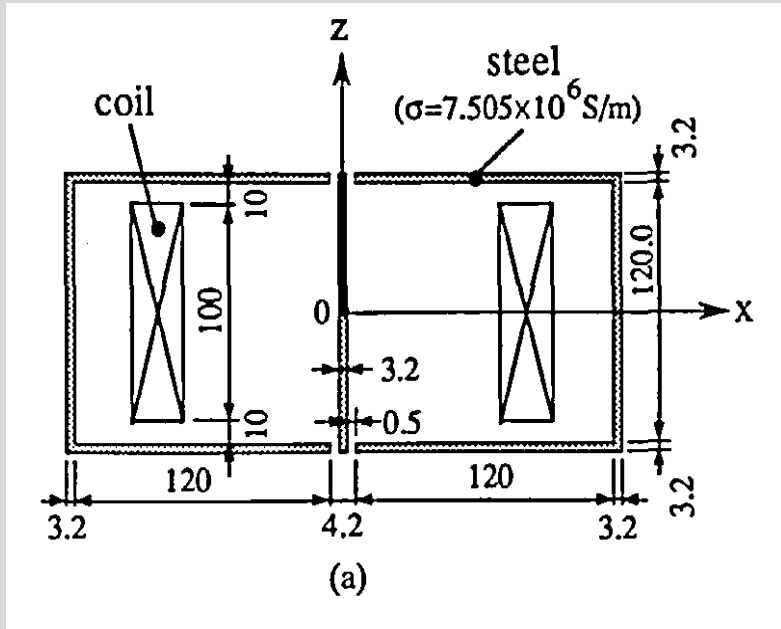


TEAM 10 Problem

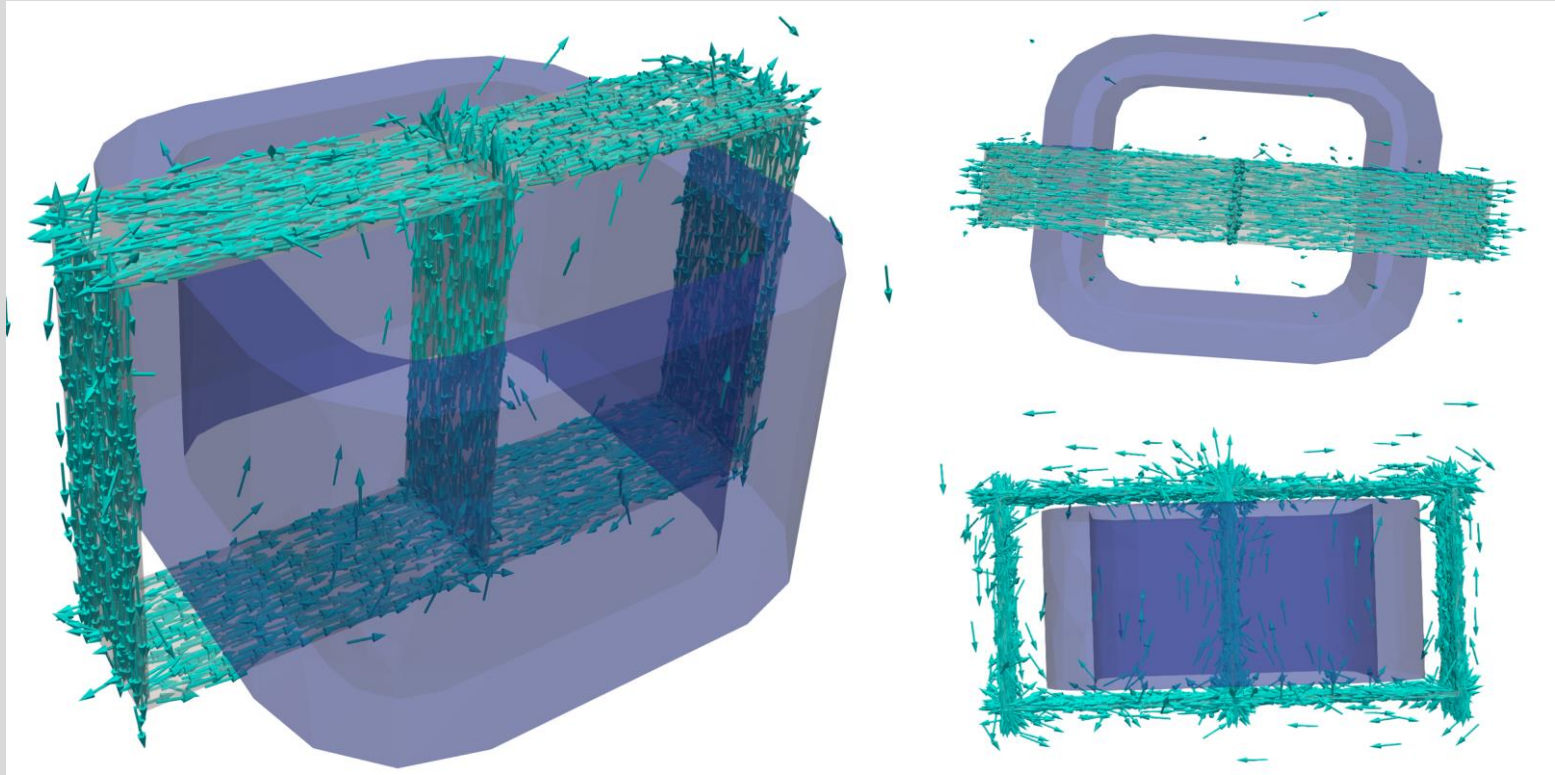


Comparison of the solution

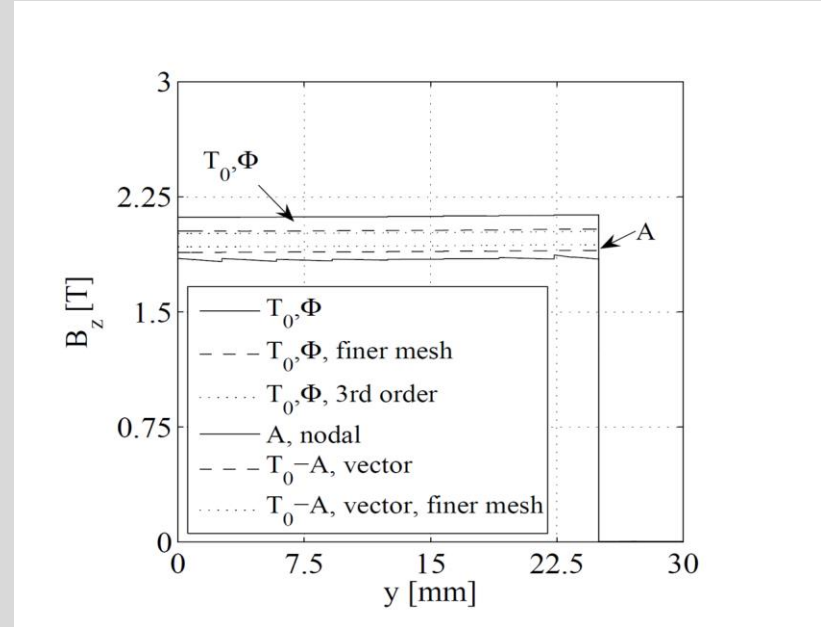
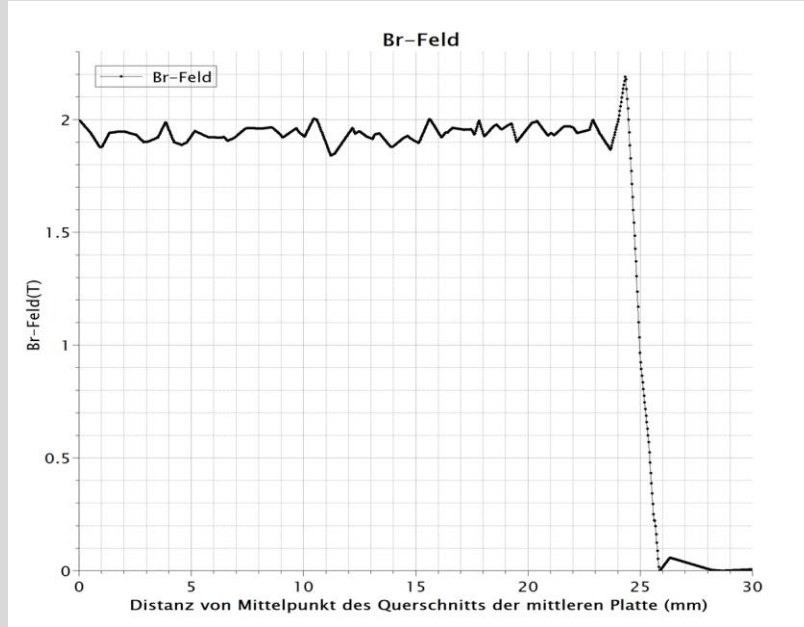
TEAM 10 Problem



Realteil des B-Feldes



Vergleich mit einer anderen Simulation



Die Stromdichte in der Spule wurde adaptiert um auf dieselbe Amplituden des B-Feldes zu kommen. Der Grund dafür ist, dass die Permeabilität nicht bekannt ist und daher geschätzt werden musste.

Quellen

- https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwiK5Y6t_rXuAhUE-aQKHbzNBpAQFjABegQIARAC&url=http%3A%2F%2Fmaxwell.sze.hu%2Fdocs%2FC4.pdf&usg=AOvVaw1tu_JzFMpu8Qw4a2g8rX_C
- https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjZn4jT_7XuAhWFDewKHc22BmUQFjADegQIDxAC&url=https%3A%2F%2Ffenicsproject.org%2Fpub%2Ftutorial%2Fpdf%2Ffenics-tutorial-vol1.pdf&usg=AOvVaw14JMa8vBYGMwmYyOhDkksP
- https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjn5YTTg7buAhVQqaQKHVB0CL8QFjAAegQIAxAC&url=http%3A%2F%2Fwww.compumag.org%2Fwp%2Fwp-content%2Fuploads%2F2018%2F06%2Fproblem13.pdf&usg=AOvVaw266b_ygSJqH0ahXu8193l
- https://en.wikipedia.org/wiki/Demagnetizing_field