

과제 3번

선형 벡터 공간

필드 F 에서 벡터 공간 V 는 다음과 같은 법칙을 만족하는 두 연산, 벡터 합과 스칼라 곱을 가지는 집합이다.

- 합: $x+y$ 로 표기 ($x, y \in V$)
- 곱: ax 로 표기 ($a \in F$)

법칙)

교환: $x+y = y+x$ ($x, y \in V$)

결합: $(x+y)+z = x+(y+z)$ ($x, y, z \in V$)

분배: $a(x+y) = ax+ay$ ($a \in F, x, y \in V$)

분배: $(a+b)x = ax+bx$ ($b \in F, x \in V$)

영벡터: $x+0 = x$ ($0 \in V$)

역원: $x+(-x) = 0$ ($-x \in V$)

벡터 집합이 다음과 같은 선형 관계인 식(1)을 제외하고 a_i 가 0인 경우를 선형독립이라고 한다.

벡터 집합이 선형 독립이 아니면 선형종속이라고 한다.

$$\sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{식(1)}$$

V 가 n 차원이라면 선형독립인 벡터의 최대 n 개를 수용한다.

실수 필드라면 \mathbb{R} , 복소수 필드라면 \mathbb{C} 로 표현한다.

\mathbb{R}^2 라는 실수 필드 \mathbb{R} 에서 정의된 선형 벡터 공간의 차원은 2다.

식(1)에 $n=2$ 대입 $\longrightarrow a_1|1\rangle + a_2|2\rangle = 0$

여기서, $|1\rangle = (x, y)$, $|2\rangle = (w, z)$ 라고 한다면

$$\begin{cases} a_1x + a_2w = 0 \\ a_1y + a_2z = 0 \end{cases}$$

위 방정식이 $a_1=0$ 이고 $a_2=0$ 일때만 성립 하는지
확인하기 위해 행렬 형태로 표현 하면

$$\begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

위 행렬을 행렬식으로 표현하면

$$\det \begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} = xz - wy \quad \dots \text{식(2)}$$

행렬식이 0 이 아니라면 유일하게 a_1 와 a_2 는 0이다.

\therefore 식(2)가 0이 아니면 두 벡터는 선형독립, 0이면 선형종속
 \mathbb{R}^2 의 임의의 벡터 $V = (n, m)$ 가 있고 아래와 같이 표현 한다.

$$V = a_1(x, y) + a_2(w, z)$$

위 방정식을 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

위 행렬을 풀기 위해 식(2)와 같이 표현

여기서 $xz - wy \neq 0$ 이므로 a_1 와 a_2 를 구할 수 있다.

$\therefore (x, y)$ 와 (w, z) 두 벡터가

\mathbb{R}^2 의 모든 벡터를 생성할 수 있어 기저를 형성한다.

따라서 \mathbb{R}^2 의 차원은 2다.