선형 벡터 공간 정의 후 차원 증명

선형 벡터 정의

필드 F에서 벡터 공간 V는 다음과 같은 법칙을 만족하는 두 연산, 벡터 합과 스칼라 곱을 가지는 집합이다.

- 합: $x+y$ 로 표기 $(x, y \in V)$
- 곱: ax 로 표기 $(a \in F)$

법칙)

교환: $x+y = y+x$ $(x+y \in V)$
결합: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $(x+y+z \in V)$
분배: $a(x+y) = ax+ay$ $(ax+ay \in V)$
분배: $(a+b)x = ax+bx$ $(b \in F,\ ax+bx \in V)$
영벡터: $x+0 = x$ $(0 \in V)$
역원: $x+(-x)=0$ $(-x \in V)$

벡터 집합이 다음과 같은 선형 관계인 식(1)을 제외하고 a_i가 0인 경우를 선형독립이라고 한다.
벡터 집합이 선형 독립이 아니면 선형종속 이라고 한다.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i|i\rangle = |0\rangle$$

식(1)

V가 n차원이라면 선형독립인 벡터의 최대 n개를 수용한다.
실수 필드라면 R, 복소수 필드라면 C로 표현한다.

R^2 라는 실수 필드 R에서 정의된 선형 벡터 공간의 차원은 2다.

식(1)에 $n=2$ 대입 $\longrightarrow$ $a_1|1\rangle + a_2|2\rangle = 0$

여기서, $|1\rangle = (x, y)$, $|2\rangle = (w, z)$ 라고 한다면

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 w = 0 \\ a_1 y + a_2 z = 0 \end{cases}$$

위 방정식이 $a_1 = 0$ 이고 $a_2 = 0$ 일때만 성립 하는지 확인하기 위해 행렬 형태로 표현하면

$$\begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

위 행렬을 행렬식으로 표현하면

$$\det \begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} = xz - wy \quad \cdots \text{식}(2)$$

행렬식이 0 이 아니라면 유일하게 a_1와 a_2는 0이다.

$\therefore$ 식(2)가 0이 아니면 두 벡터는 선형독립, 0이면 선형종속

R^2의 임의의 벡터 $V = (n, m)$가 있고 아래와 같이 표현 한다.

$$V = a_1(x, y) + a_2(w, z)$$

위 방정식을 행렬로 표현하면

$$\begin{pmatrix} x & w \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

위 행렬을 풀기 위해 식(2)와 같이 표현

여기서 $xz - wy \neq 0$ 이므로 a_1와 a_2를 구할 수 있다.

$\therefore$ (x, y)와 (w, z) 두 벡터가 R^2의 모든 벡터를 생성할 수 있어 기저를 형성한다.

따라서 R^2의 차원은 2다.