Exercice 1 : (2014 S2) (3pts)
Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le point A(0, 0, 1), le plan (P) tel que :
(P) : 2x + y – 2z – 7 = 0 et la sphère (S) de centre $\Omega(0, 3,-2)$ et de rayon $R=3$

1) a – Montrer que $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire au plan (P).

b) Vérifier que H(2, 1, – 1) est le point d'intersection de (P) et (Δ)

2) a) posons $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, montrer que :
$\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$

b) Montrer que : $d(\Omega;(\Delta))=3$

c) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de tangence entre (Δ) et (S).

Exercice 2 : (2014 S2) (3pts)
Soit la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{5U_n-4}{1+U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1=5$$

1) Montrer que : $U_n>2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

2) On pose $V_n=\dfrac{3}{U_n-2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

a) Montrer que $V_{n+1}=\dfrac{1+U_n}{U_n-2}$, en déduire que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1

b) Ecrire V_n en fonction de n, en déduire que :

$$U_n=2+\frac{3}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

c) Déterminer $\lim U_n$

Exercice 3 : (2014 S2) (3pts)
Pour déterminer les deux questions d'un concours de Recrutement, un candidat tire, successivement et sans remise deux fiches d'un sac contenant dix fiches : 8 fiches concernant les maths et 2 fiches concernant la langue française.
On considère les deux événements suivants:
A ″ Tirer deux fiches concernant la langue française ″
B ″ Tirer deux fiches concernant deux matières différentes″.
Montrer que Montrer que : $P(A)=\dfrac{1}{45}$ et $P(A)=\dfrac{16}{45}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de fiches de la langue française tirées.
a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.
b) Montrer que $p(X=0)=\dfrac{28}{45}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (2014 S2) (3 pts)
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-4Z+5=0$
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B , C, D et Ω d'affixes respectives $a=2+i$; $b=2-i$; $c=i$; $d=-i$ et $\omega=1$

a) Montrer que $\dfrac{a-\omega}{b-\omega}=i$

b) En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

2) Soient z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $z'=iz+1-i$.

b) Vérifier que $R(A)=C$ et $R(D)=B$

c) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

Problème : (2014 S2) (8pts)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(xe^x-1)e^x$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et interpréter le résultat géométriquement.

2) a) Montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

b) En déduire que (C) admet une branche parabolique au voisinage de +∞ dont on précisera la direction.

3) a) Montrer que $f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$
Et vérifier que $f'(0)=0$

b) Montrer que : $e^x-1\geq 0 \quad \forall x\in[0;+\infty[$ et
$e^x-1\leq 0 \quad \forall x\in]-\infty;0]$

c) Montrer que f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$ puis dresser le tableau de variation de f sur R.

4) a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;+\infty[$ et que $\frac{1}{2}<\alpha<1$

(on admet $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$)

b) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. (On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique dont les coordonnées ne sont pas demandées).

5) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$$

6) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et $x=\frac{1}{2}$