

**Exercice 1 :** (2009 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct ( $\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ )

On considère les points A(-2,2,8), B(6,6,0) et C(2,-1,0), D(0,1,-1).

(S) l'ensemble des points M vérifiant  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

1) Déterminer les coordonnées  $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$  et en déduire que  $x + 2y + 2z = 0$  est une équation cartésienne du plan (OCD)

2) Vérifier que (S) est la sphère de centre  $\Omega(2, 4, 4)$  et de rayon  $R = 6$

3) a – Calculer la distance de  $\Omega$  au plan (OCD)

b – En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère(S)

c – Vérifier que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  et en déduire que O est le point contact de la sphère (S) et du plan (OCD).

**Exercice 2 :** (2009 S1) (3pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct ( $\mathbf{O}; \mathbf{u}, \mathbf{v}$ ) on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$\mathbf{a} = 2 - 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

$$\mathbf{c} = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})\mathbf{i}$$

1) Ecrire a et b sous forme trigonométrique

2) Soit R la rotation de centre O Et d'angle  $\frac{5\pi}{6}$

a – Soit Z l'affixe du point M du plan et Z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation

Montrer que  $Z' = bZ$ .

b) Vérifier que le point C image du point A par la rotation R.

3) Montrer que  $\arg \mathbf{c} \equiv \arg \mathbf{a} + \arg \mathbf{b}[2\pi]$  puis

Déterminer l'argument du nombre complexe c.

**Exercice 2 :** (2009 S1) (2pts)

On pose  $\mathbf{I} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+3} d\mathbf{x}$  et  $\mathbf{J} = \int_{-2}^{-1} \ln(2\mathbf{x}+6) d\mathbf{x}$

1) a – Vérifier que :  $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+3} = 1 - \frac{3}{\mathbf{x}+3} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} - \{-3\}$

b – Montrer que :  $\mathbf{I} = 1 - 3\ln 2$

2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que:  $\mathbf{J} = -\mathbf{I}$

**Exercice 3 :** (2009 S1) (3pts)

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A " Obtenir trois boules de même couleurs"

B " Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux "

Montrer que  $\mathbf{P(A)} = \frac{3}{44}$  et  $\mathbf{P(B)} = \frac{3}{11}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique E(X)

**Problème :** (2009 S1) (9pts)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 2 \ln \left( e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \right)$$

(C<sub>f</sub>) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé ( $\mathbf{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}$ ) (unité : 1 cm)

I – 1) Vérifier que :

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en déduire que  $D_f = \mathbb{R}$  et que :

$$1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 4$  puis interpréter le résultat géométriquement.

$$2) a - Montrer que f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et vérifier que :  $f'(0) = 0$

b – Etudier le signe  $\sqrt{e^x} - 1$  du en déduire que f est croissante sur  $[0, +\infty[$  et décroissante sur  $]-\infty; 0]$

4) a- Vérifier que :

$$f(x) = 2x + 2 \ln \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b – Montrer que la droite (D) d'équation  $y = 2x$

est asymptote à la courbe (C<sub>f</sub>) au voisinage en  $+\infty$

5) a - Vérifier que:

$$e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b- Etudier le signe de  $\sqrt{e^x} - 2$  et de

$$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

c – En déduire que:

$$\forall x \in [0; \ln 4] \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$$

d – Montrer que :  $f(x) \leq x \quad \forall x \in [0; \ln 4]$

6) Construire la courbe (C<sub>f</sub>) (On admet que (C<sub>f</sub>) admet deux points d'inflexions d'abscisse  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$\alpha < -1$  et  $\beta > 2$ . On pose  $\ln 4 \approx 1,4$

II – On considère la suite (U<sub>n</sub>) définie par :

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que :  $0 \leq U_n \leq \ln 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U<sub>n</sub>) est décroissante.

3) En déduire que (U<sub>n</sub>) est convergente puis calculer sa limite.