

الصفحة 1 4 **    <b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا</b> <b>المسالك الدولية</b> <b>الدورة العادية 2020</b> <b>- الموضوع -</b>	SSSSSSSSSSSSSSS NS 22F	 المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي <b>المركز الوطني للنقويم والامتحانات</b>
<b>3</b> <b>مدة الإنجاز</b>	<b>الرياضيات</b>	<b>المادة</b>
<b>7</b> <b>المعامل</b>	<b>شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)</b>	<b>الشعبة أو المسلك</b>

## INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

<b>Exercice 1</b>	<b>Suites numériques</b>	<b>4 points</b>
<b>Exercice 2</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>5 points</b>
<b>Exercice 3</b>	<b>Limites, dérivabilité et calcul intégral</b>	<b>4 points</b>
<b>Problème</b>	<b>Etude d'une fonction numérique</b>	<b>7 points</b>

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$
- ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

**Exercice 1 : (4 points )**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = \frac{3}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

**0.25** 1) Calculer  $u_1$

**0.5** 2) Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$

**1** 3)a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

puis en déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

**0.5** b) Calculer  $\lim u_n$

**4** 4) On considère la suite numérique  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**0.75** a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$

**1** b) Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

**Exercice 2 : (5 points )**

1) Dans l'ensemble  $\square$  des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

**0.5** a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est  $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

**1** b) En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .

**2)** Soient les nombres complexes  $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ,  $b = 1 + i\sqrt{3}$  et  $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

**0.75** a) Vérifier que  $b\bar{c} = a$ , puis en déduire que  $ac = 4b$

**0.5** b) Ecrire les nombres complexes  $b$  et  $c$  sous forme trigonométrique.

**0.5** c) En déduire que  $a = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

**3)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $b, c$  et  $d$  telle que  $d = a^4$ . Soit  $z$  l'affixe d'un point

$M$  du plan et  $z'$  l'affixe de  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{12}$

**0.5** a) Vérifier que  $z' = \frac{1}{4}az$

**0.25** b) Déterminer l'image du point  $C$  par la rotation  $R$

**0.25** c) Déterminer la nature du triangle  $OBC$ .

**0.75** d) Montrer que  $a^4 = 128b$  et en déduire que les points  $O, B$  et  $D$  sont alignés

**Exercice 3 : (4 points )**

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

0.5 a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

0.5 b) Montrer que  $g$  est croissante sur  $[1, +\infty[$

0.5 c) en déduire que pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$ ,  $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$  (remarquer que  $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$ )

1 d) Montrer que pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

0.75 2) a) Montrer que la fonction  $G : x \mapsto x \left( -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$  est une primitive de  $g$  sur  $]0, +\infty[$

0.75 b) Calculer l'intégrale  $\int_1^4 g(x)dx$

**Problème : (7 points )**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 2cm)

0.5 1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

0.5 2) a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = -x + \frac{5}{2}$  est une asymptote à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$

0.75 b) Résoudre l'équation  $e^{x-2} - 4 = 0$  puis montrer que la courbe  $(C)$  est au dessus de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $]-\infty, 2 + \ln 4]$  et en dessous de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $[2 + \ln 4, +\infty[$

0.5 3) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  puis interpréter géométriquement le résultat

0.5 4) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$

0.25 b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$

0.75 5) Calculer  $f''(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis montrer que  $A(2, 2)$  est un point d'inflexion de  $(C)$

0.5 6) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$

1 7) Construire  $(\Delta)$  et  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{i}; \vec{j})$  ci-dessous (on prend  $\ln 2 \approx 0,7$  et  $\ln 3 \approx 1,1$ )

الصفحة 4	4 NS 22F	<b>الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 – الموضوع</b> - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	
0.5		8) a) Montrer que la fonction $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur $\square$	
0.75		b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $f^{-1}$ (remarquer que la droite $(\Delta)$ est perpendiculaire à la première bissectrice du repère )	
0.5		c) Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$ ( Remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$ )	

✓