

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2020 - الم موضوع -

SSSSSSSSSSSSSSSSSS

RS 22F



†.ИЛЯСТ | ИЧЧОЕО
†.САУО+ | 90ХХЕ д.СО
Λ 90С44Х 2222
Λ 100КЛ 2222, Λ 100Х 2.00

المركز الوطني للتقدير والامتحانات

3	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
 - ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
 - ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	2 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Dérivabilité et calcul intégral	4 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et suites numériques	9 points

- ✓ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par \bar{z} le conjugué de z
 - ✓ \ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : (2 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5 1) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n < 2$

2) On pose pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

0.5 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

0.75 b) Ecrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de \mathbb{N} .

0.25 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : (5 points)

0.75 1) Résoudre dans l'ensemble \square des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

0.75 a) Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel

0.5 b) Soit le nombre complexe $b = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$. Prouver que $b^2 = a$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z' .

0.25 a) Vérifier que $z' = bz$

0.5 b) Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R .

0.75 4) a) Montrer que $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC

0.5 b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

5) Soit T la translation de vecteur \vec{u} et D l'image de A par T

0.25 a) Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$

0.75 b) Montrer que $\frac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O , B et D sont alignés

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction numérique u définie sur \mathbb{R} par : $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$

0.5 1)a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , $u'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}$

0.25 b) poser le tableau de variation de la fonction u (sans calcul de limite) ;

0.5 c) En déduire le signe de la fonction u sur \mathbb{R} (remarquer que $u(0) = 0$)

2) Soit la fonction v définie sur \mathbb{R} par $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$

0.5 a)Vérifier que pour tout x de \mathbb{R} , $v(x) = e^x u(x)$

0.5 b) En déduire le signe de la fonction v sur \mathbb{R}

0.5 3) a) Montrer que la fonction W définie par $W(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4 - 2x)e^x - 3x$ est une primitive de la fonction v sur \mathbb{R}

0.5 b) Calculer l'intégrale $\int_0^2 v(x)dx$

0.75 c) Montrer que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur \mathbb{R} .

Problème : (9 points)

I - Soit g la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

0.5 1) Montrer que $g'(x) < 0$, pour tout $x \in [0, +\infty[$

0.5 2) Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$; (remarquer que $g(1) = 0$)

II – On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 2 cm)

0.5 1) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

0.5 2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

0.75 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

1 3) a) Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

0.75 b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $[0, 1]$ et sur $[2, +\infty[$ et croissante sur $[1, 2]$

0.25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$, (on admet $f(2) \approx 1,25$)

0.5 4) Sachant que $f(3) = 0.5$ et $f(4) = -1.9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3, 4]$.

1 5) Construire (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

III - On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1, 2]$

0.5 1) a) A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1, 2]$

x	1	2
$h(x)$	0	↘ $h(2)$

0.25 b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1, 2]$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}

0.75 a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de \mathbb{N}

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0.75 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$