

Exercice 1 : (2009 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points A(-2, 2, 8), B(6, 6, 0) et C(2, -1, 0), D(0, 1, -1).

(S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

- 1) Déterminer les coordonnées $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD)
- 2) Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 4, 4)$ et de rayon $R = 6$
- 3) a – Calculer la distance de Ω au plan (OCD)
b – En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S)
c – Vérifier que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ et en déduire que O est le point contact de la sphère (S) et du plan (OCD).

Exercice 2 : (2009 S1) (3pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 2 - 2i$, $\mathbf{b} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$$\mathbf{c} = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$$

- 1) Ecrire a et b sous forme trigonométrique
- 2) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$
a – Soit Z l'affixe du point M du plan et Z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation
Montrer que $Z' = bZ$.
b) Vérifier que le point C image du point A par la rotation R.
3) Montrer que $\arg \mathbf{c} \equiv \arg \mathbf{a} + \arg \mathbf{b} [2\pi]$ puis
Déterminer l'argument du nombre complexe c.

Exercice 2 : (2009 S1) (2pts)

On pose $\mathbf{I} = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+3} d\mathbf{x}$ et $\mathbf{J} = \int_{-2}^{-1} \ln(2\mathbf{x}+6) d\mathbf{x}$

- 1) a – Vérifier que : $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+3} = 1 - \frac{3}{\mathbf{x}+3} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R} - \{-3\}$
b – Montrer que : $\mathbf{I} = 1 - 3\ln 2$
- 2) A l'aide d'une intégration par parties montrer que: $\mathbf{J} = -\mathbf{I}$

Exercice 3 : (2009 S1) (3pts)

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges. (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément trois boules de la caisse.

- 1) On considère les deux événements :
A" Obtenir trois boules de même couleurs"
B " Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux "

Montrer que $\mathbf{P(A)} = \frac{3}{44}$ et $\mathbf{P(B)} = \frac{3}{11}$

- 2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de couleur des boules tirées.
a) Déterminer les valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique E(X)

Problème : (2009 S1) (9pts)

On considère la fonction f définie par :

$$\mathbf{f(x)} = 2 \ln \left(\mathbf{e^x} - 2\sqrt{\mathbf{e^x}} + 2 \right)$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

I – 1) Vérifier que :

$$\mathbf{e^x} - 2\sqrt{\mathbf{e^x}} + 2 = \left(\sqrt{\mathbf{e^x}} - 1 \right)^2 + 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

en déduire que $\mathbf{D_f} = \mathbb{R}$ et que :

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\mathbf{e^x}}} + \frac{2}{\mathbf{e^x}} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

2) Calculer $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow +\infty} \mathbf{f(x)}$ et montrer que

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow -\infty} \mathbf{f(x)} = \ln 4$ puis interpréter le résultat géométriquement.

2) a – Montrer que $\mathbf{f'(x)} = \frac{2\sqrt{\mathbf{e^x}}(\sqrt{\mathbf{e^x}} - 1)}{(\sqrt{\mathbf{e^x}} - 1)^2 + 1} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$

et vérifier que : $\mathbf{f'(0)} = 0$

b – Etudier le signe $\sqrt{\mathbf{e^x}} - 1$ du en déduire que f est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty; 0]$

4) a- Vérifier que :

$$\mathbf{f(x)} = 2\mathbf{x} + 2 \ln \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\mathbf{e^x}}} + \frac{2}{\mathbf{e^x}} \right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

b – Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage en $+\infty$

5) a - Vérifier que :

$$\mathbf{e^x} - 3\sqrt{\mathbf{e^x}} + 2 = (\sqrt{\mathbf{e^x}} - 1)(\sqrt{\mathbf{e^x}} - 2) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

b- Etudier le signe de $\sqrt{\mathbf{e^x}} - 2$ et de $(\sqrt{\mathbf{e^x}} - 1)(\sqrt{\mathbf{e^x}} - 2)$ sur \mathbb{R}

c – En déduire que :

$$\forall \mathbf{x} \in [0; \ln 4] \quad \mathbf{e^x} - 2\sqrt{\mathbf{e^x}} + 2 \leq \sqrt{\mathbf{e^x}}$$

d – Montrer que : $\mathbf{f(x)} \leq \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in [0; \ln 4]$

6) Construire la courbe (C_f) (On admet que (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisse α et β tels que :

$\alpha < -1$ et $\beta > 2$. On pose $\ln 4 \approx 1,4$

II – On considère la suite (U_n) définie par :

$$\mathbf{U_{n+1}} = \mathbf{f(U_n)} \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{U_0} = 1$$

- 1) Montrer que : $0 \leq \mathbf{U_n} \leq \ln 4 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$
- 2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- 3) En déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.