

Exercice 1 : (2014 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ les points A(0;3;1), B(-1;3;0) et C(0;5;0) et

$$(S) \text{ la sphère d'équation: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$$

- 1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}$ et en déduire que A, B et C sont non alignés.
 b) Montrer que : $2x - y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

- 2) a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2 ; 0 ; 0)$ et de rayon 3
 b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)
 c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

Exercice 2 : (2014 S1) (3pts)

$$1) \text{ Résoudre dans } \mathbb{C} \text{ l'équation : } z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$$

$$2) \text{ Soit } u \text{ le nombre complexe tel que: } u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$a) \text{ Montrer que le module de } u \text{ est } \sqrt{2} \text{ que } \arg u \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$$

b) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u montrer que u^6 est un nombre réel.

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{e}}_1; \vec{\mathbf{e}}_2)$ on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a} = 4 - 4i\sqrt{3}$, $\mathbf{b} = 8$

4) Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) exprimer z' en fonction de z.

b) Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 3 : (2014 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 13$$

$$1) \text{ Montrer que : } U_n < 14 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) Soit (V_n) la suite définie par :

$$V_n = 14 - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner V_n en fonction de n.

$$b - \text{En déduire que : } U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

puis Calculer $\lim U_n$

c – Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $U_n > 13,99$

Exercice 3 : (2014 S1) (3pts)

Un sac contient neuf jetons, indiscernables au toucher portant les chiffres suivants : 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1

- 1) On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac

Soit l'événement : A " la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 "

$$\text{Montrer que } P(A) = \frac{5}{9}$$

2) On considère le jeu suivant : Said tire au hasard et en même temps deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le chiffre 1

$$a) \text{ Montrer la probabilité de gain de Said est } \frac{1}{6}$$

b) Said a jouer le jeu précédent trois fois de suite, et à chaque fois il remet les deux jetons tirés dans le sac

Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

Problème : (2014 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

$$1) \text{ Montrer que } g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[\text{ et en déduire que } g \text{ est croissante sur }]0; +\infty[$$

c – Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que :

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1] \text{ et } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

II) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ (unité : 1 cm)

$$1) \text{ Montrer que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et interpréter le résultat géométriquement.}$$

$$2) a) \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$b) \text{ Montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0 \text{ (on peut poser } t = \sqrt{x} \text{ puis montrer que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0)$$

$$c) \text{ Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de } +\infty$$

$$3) a - \text{ Montrer que: } f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

puis en déduire que est décroissante sur $]0, 1]$ et

croissante sur $[1; +\infty[$

b - Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$, puis en déduire que $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

$$4) \text{ Construire la courbe (C) dans le repère } (\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}).$$

(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).

5) On considère les intégrales I et J suivants: $\mathbf{I} = \int_1^{\mathbf{e}} (1 + \ln \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ et $\mathbf{J} = \int_1^{\mathbf{e}} (1 + \ln \mathbf{x})^2 d\mathbf{x}$

- a) Montrer que $\mathbf{H}: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \ln \mathbf{x}$ est une fonction primitive de $\mathbf{h}: \mathbf{x} \rightarrow 1 + \ln \mathbf{x}$ sur $]0; +\infty[$ puis en déduire que $\mathbf{I} = \mathbf{e}$.
- b) En utilisant une intégration par parties, montrer $\mathbf{J} = 2\mathbf{e} - 1$
- c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $\mathbf{x} = 1$ et $\mathbf{x} = \mathbf{e}$