

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- ✓ On désigne par \bar{z} le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- ✓ \ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$.

0.25 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

0.5 × b) En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B, (AC))$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

0.25 × a) Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

0.5 \ b) En déduire que $d(\Omega, (ABC)) = 3$.

3) Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

0.5 \ a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

0.5 b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

0.5 4) Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2 (3points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points

A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2i$

0.25 1) Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

0.25 2) a) Vérifier que $b - d = c$

0.5 \ b) Montrer que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.

0.25 3) a) Vérifier que $ac = 2b$

0.5 b) En déduire que $2\arg(b) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' .

0.25 \ a) Montrer que $z' = \frac{1}{2}az$

0.5 \ b) En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

0.5 c) Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

Exercise 3 (3points) :

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2.

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

A : "la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1"

B : "le produit ab est égal à 2"

0.5 1) a) Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A .

0.5 b) Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

0.75 2) Calculer $p(A/B)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

0.25 a) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

0.5 b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

0.5 c) On considère les événements :

M : " le produit ab est pair non nul" et N : "le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

Problème (11points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 1 cm).

0.25 1) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$

0.5 b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)

0.5 c) Dédire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

0.75 d) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

0.5 2) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$

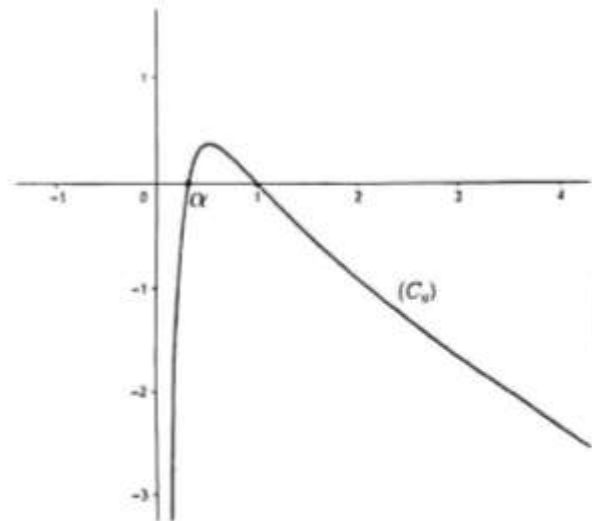
3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$:

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow	\searrow
		0	$f'(\beta)$	0

(On donne $\beta \approx 4.9$)

- 0.5 a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f
0.5 b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0, +\infty[$
1 c) Dédire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion.

4) La courbe (C_g) ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0,3$)
Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.



- 0.5 a) A partir de la courbe (C_g) , déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$
0.5 b) Dédire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et au-dessus de (C_f) sur les intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$
1.5 5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
(On prend : $\alpha \approx 0.3$, $\beta \approx 4.9$ et $f(\beta) \approx 1.9$)
0.5 6) a) Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha, 1]$
1 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$
0.75 c) Dédire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$
7) Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]\alpha, 1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
0.5 a) Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$, pour tout n de \mathbb{N}
0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)
0.75 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.