Année scolaire : 2022 – 2023	Solutions examen 2023 SN	AGOUZAL 2 BPCF-2 BSVTF

Exercice 1 : **(2023 SN)** (3pts)

On a **B(2;1;2) ; C(2;5;0) ; A(0;1;4).**

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&4\\-2&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&2\\-2&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

b) En déduire l'aire de triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ or $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\right\|=\frac{4}{2}\left\|2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right\|$

Donc $S_{ABC}=2\sqrt{2^2+1^2+2^2}=2\sqrt{9}$

D'où $S_{ABC}=6$

On a $d(B,(AC))=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{4\sqrt{2^2+1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}$

Donc $d(B,(AC))=\frac{4\sqrt{9}}{\sqrt{36}}=2$ d'où $d(B,(AC))=2$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

a) Vérifier que : $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

D est le milieu du segment $[AC]$

Donc $D\left(\frac{0+2}{2};\frac{1+5}{2};\frac{4+0}{2}\right)$ donc $D(1;3;2)$

Or $\Omega(3;4;4)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}(2;1;2)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

Or $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{D\Omega}$

D'où $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

b) En déduire que $d(\Omega,(ABC))=3$

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

Et puisque $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (ABC) donc $(D\Omega)\perp(ABC)$

Or D est le milieu du segment $[AC]$ donc $D\in(ABC)$

Donc D est la projection orthogonal de Ω sur (ABC)

Donc $d(\Omega,(ABC))=D\Omega$ or $\overrightarrow{D\Omega}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

Donc $D\Omega=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

D'où $d(\Omega,(ABC))=3$

3) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$$

a) Déterminer le centre et le rayon de (S).

$x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

$a=\frac{-6}{-2}$; $b=\frac{-8}{-2}$; $c=\frac{-8}{-2}$; $d=32$

Donc $a=3$; $b=4$; $c=4$; $d=32$

$a^2+b^2+c^2-d=3^2+4^2+4^2-32=9$

Donc le centre de (S) est $\Omega(3;4;4)$ et $R=\sqrt{9}=3$

D'où $\Omega(3;4;4)$ et rayon $R=3$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

On a $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=3$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
Donc (ABC) coupe la sphère (S) en un seule point.
Or $D\Omega=3$ et $R=3$ donc $D\in(S)$ or $D\in(ABC)$

$(ABC)\cap(S)=\{D\}$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en D.

4) soit (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC).Tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.
Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2).

Soit (Q) un plan parallèle à (ABC) tel que :

(Q) coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

On a $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ normal à (ABC)

(Q) est parallèle à (ABC) et on a $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (Q)

Soit $M(x;y;z)\in(Q)$

$\overrightarrow{D\Omega}(2;1;2)$ est normal à (Q)

$(Q):2x+y+2z+d=0$

(Q) coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

$\sqrt{5}=\sqrt{3^2-(d(\Omega;(Q)))^2}\Leftrightarrow 3^2-(d(\Omega;(Q)))^2=5$

$(d(\Omega;(Q)))^2=9-5\Leftrightarrow(d(\Omega;(Q)))^2=4$

$\mathbf{d}(\Omega;(\mathbf{Q}))=2$ car $\mathbf{d}(\Omega;(\mathbf{Q}))>0$

On sait que $\mathbf{d}(\Omega;(\mathbf{Q}))>0$

$(\mathbf{Q}): 2x+y+2z+d=0$; $\Omega(3;4;4)$

$$\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{Q}))=\frac{|2\times 3+4+2\times 4+\mathbf{d}|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|18+\mathbf{d}|}{\sqrt{9}}$$

$\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{Q}))=\frac{|18+\mathbf{d}|}{3}$ or $\mathbf{d}(\Omega;(\mathbf{Q}))=2$

Donc $\frac{|18+\mathbf{d}|}{3}=2 \Leftrightarrow |18+\mathbf{d}|=6$

$\Leftrightarrow 18+\mathbf{d}=6$ ou $18+\mathbf{d}=-6 \Leftrightarrow \mathbf{d}=-12$ ou $\mathbf{d}=-24$

D'où $(\mathbf{Q}_1): 2x+y+2z-12=0$ et

$(\mathbf{Q}_2): 2x+y+2z-24=0$

Exercice 2 :((2023 SN) (3pts)

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{u}};\vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a}=\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}$; $\mathbf{b}=1+\sqrt{2}+\mathbf{i}$ $\mathbf{c}=\overline{\mathbf{b}}$ et $\mathbf{d}=2\mathbf{i}$

1) Ecrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

$\mathbf{a}=\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}$

$|\mathbf{u}|=\left|\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}\right|=\sqrt{2+2}=2$

$$\mathbf{a}=\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

D'où $\mathbf{a}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) a) Vérifier que : $\mathbf{b}-\mathbf{d}=\mathbf{c}$

$\mathbf{b}-\mathbf{d}=1+\sqrt{2}+\mathbf{i}-2\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{b}-\mathbf{d}=1+\sqrt{2}-\mathbf{i}$

Or $\mathbf{c}=\overline{\mathbf{b}}$ et $\overline{\mathbf{b}}=1+\sqrt{2}-\mathbf{i}$

Donc $\mathbf{b}-\mathbf{d}=\mathbf{c}$

b) Montrer que : $\left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}-\mathbf{d}$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.

$\left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1+\sqrt{2}+\mathbf{i}-\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(1+\mathbf{i}-\mathbf{i}\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\sqrt{2}+1+\mathbf{i}\sqrt{2}+\mathbf{i}-2\mathbf{i}-\mathbf{i}\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\sqrt{2}+1-\mathbf{i}$ or $\mathbf{c}=\overline{\mathbf{b}}$

Donc $\left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{c}$ or $\mathbf{c}=\mathbf{b}-\mathbf{d}$

D'où $\left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}-\mathbf{d}$

On a $\left(\sqrt{2}+1\right)(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{b}-\mathbf{d}$

Donc $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{d}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}=\left(\sqrt{2}+1\right)$ or $\left(\sqrt{2}+1\right)\in\mathbb{R}$

Donc $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{d}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\in\mathbb{R}$ donc les points A, B et D sont alignés

3) a) Vérifier que : $\mathbf{ac}=2\mathbf{b}$

$\mathbf{ac}=\left(\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}-\mathbf{i}\right)$

Donc

$$\mathbf{ac}=\left(\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+2-\mathbf{i}\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}+2\mathbf{i}+\sqrt{2}\right)$$

$\mathbf{ac}=2\sqrt{2}+2+2\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{ac}=2(\sqrt{2}+1+\mathbf{i})$

D'où $\mathbf{ac}=2\mathbf{b}$

b) En déduire que : $2\arg(\mathbf{b})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a $2\mathbf{b}=\mathbf{ac}$ donc $\arg(\mathbf{b})\equiv\arg(ac)[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b})\equiv\arg(a)+\arg(\mathbf{c})[2\pi]$ or $\mathbf{c}=\overline{\mathbf{b}}$

Donc $\arg(\mathbf{c})\equiv\arg(\overline{\mathbf{b}})[2\pi]$ et $\arg(\overline{\mathbf{b}})\equiv-\arg(\mathbf{b})[2\pi]$

Donc $\arg(\mathbf{b})\equiv\arg(a)-\arg(\mathbf{b})[2\pi]$

Donc $2\arg(\mathbf{b})\equiv\arg(a)[2\pi]$ or $\arg(\mathbf{a})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $2\arg(\mathbf{b})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M′ d'affixe z′ .

a) Montrer que : $z'=\frac{1}{2}az$

$\mathbf{R(M)}=\mathbf{M}' \Leftrightarrow \mathbf{z}'-0=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}(\mathbf{z}-0)$

$\Leftrightarrow \mathbf{z}'=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\mathbf{z}$ on a $\mathbf{a}=2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$ donc $\frac{1}{2}\mathbf{a}=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$

D'où $\mathbf{z}'=\frac{1}{2}\mathbf{az}$

b) En déduire que $\mathbf{R(C)}=\mathbf{B}$ et $\mathbf{R(A)}=\mathbf{D}$

On a $2\mathbf{b}=\mathbf{ac} \Leftrightarrow \mathbf{b}=\frac{1}{2}\mathbf{ac} \Leftrightarrow \mathbf{R(C)}=\mathbf{B}$

$\mathbf{R(A)}=\mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{d}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{d}=\frac{1}{2}\mathbf{a}^2$

On a $\mathbf{a}=\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}$ donc $\mathbf{a}^2=2(1+\mathbf{i})^2$

$\mathbf{a}^2=2\times 2\mathbf{i} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{a}^2=2\mathbf{i} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{a}^2=\mathbf{d}$

D'où $\mathbf{R(A)}=\mathbf{D}$

c) Montrer que : $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$, puis en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathbf{AC}};\overrightarrow{\mathbf{AB}})$.

$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$? On a $\mathbf{R}(\mathbf{C})=\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{b}=\frac{1}{2}\mathbf{ac}$

$$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{\frac{1}{2}\mathbf{ac}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{\mathbf{c}-2}{\mathbf{c}-\mathbf{a}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{1+\sqrt{2}-\mathbf{i}-2}{1+\sqrt{2}-\mathbf{i}-\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}$$

D'où $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$

On a $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)>0$ donc $\arg\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}\equiv\arg\mathbf{a}[2\pi]$ or $\arg(\mathbf{a})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a $(\overrightarrow{\mathbf{AC}};\overrightarrow{\mathbf{AB}})\equiv\arg\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}[2\pi]$

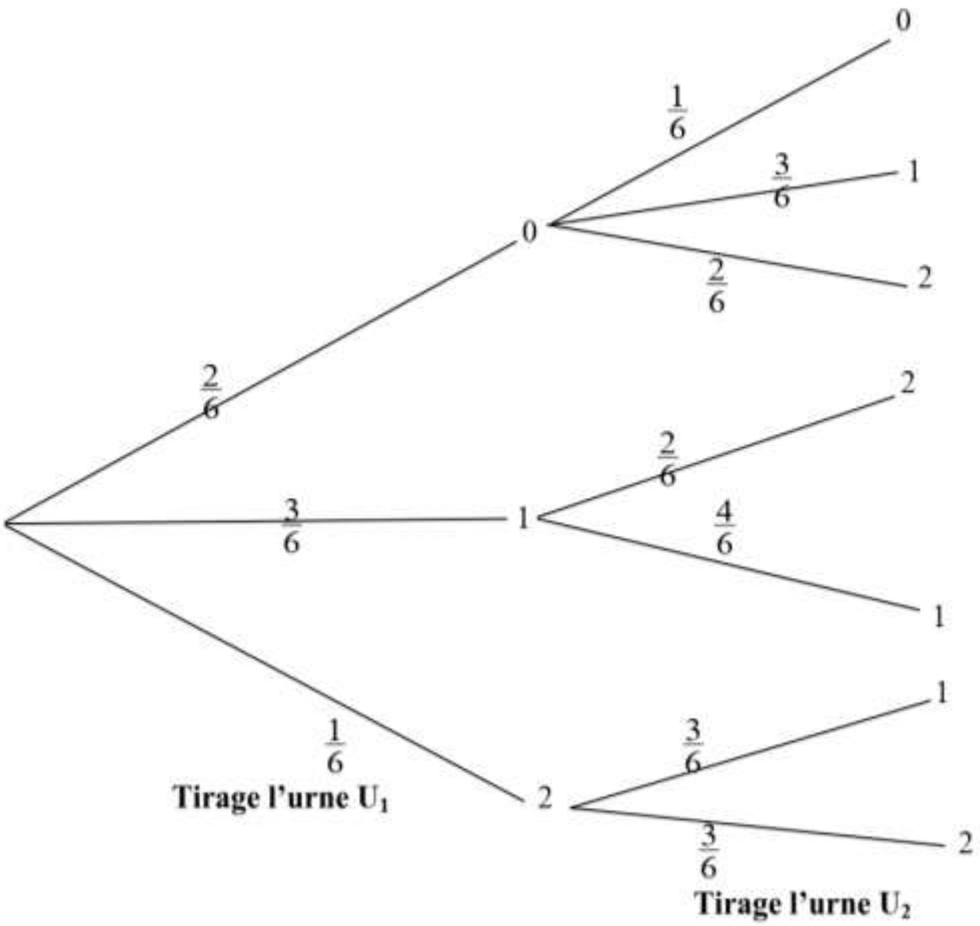
D'où $(\overrightarrow{\mathbf{AC}};\overrightarrow{\mathbf{AB}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

<u>Exercice 3</u>:((2023 SN) (3pts)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres
0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ;2 et Une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres 1 ;1 ;1 ; 2 ; 2.

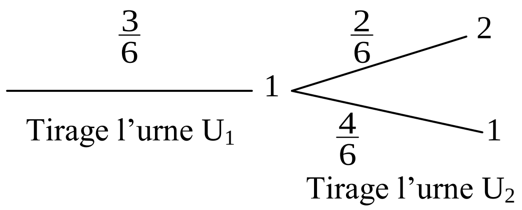
On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre **a** qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre **b** qu'elle porte.

U_1 : 2 (0) ; 3 (1) ; 1 (2) U_2 : 3 (1) ; 2 (2) ; **a**



U_1 : 2 (0) ; 3 (1) ; 1 (2)
U_2 : 3 (1) ; 2 (2)

1) a) Calculer $P(A)$; la probabilité de l'événement A. A " la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre1"

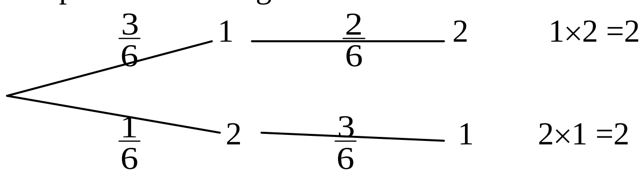


$$P(A)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{6}\times\frac{6}{6}$$

D'où $P(A)=\frac{1}{2}$

b) Montrer que $P(B)=\frac{1}{4}$ (on peut utiliser l'arbre des possibilités).

B " le produit ab est égal à 2 "



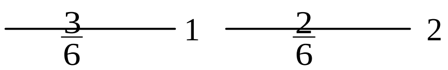
$$P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$$

$$P(B)=\frac{1}{4}$$

2) Calculer $P(A/B)$; la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$(A\cap B)$ " a = 1 et b =2 " ab = 2



$$P(A\cap B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} \text{ donc } P(A/B)=\frac{4}{6}$$

D'où $P(A/B)=\frac{2}{3}$

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab.

a) Montrer que $P(X=0)=\frac{1}{3}$; 0×2 ou 0×1 ou 0×0

$$P(X=0)=\frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right) \quad \text{donc } P(X=0)=\frac{1}{3}$$

b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 et 4)

$$P(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=2)=P(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=4)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$$

k	0	1	2	4
P(X=k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(On a $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=1$)

c) On considère les événements :

N " le produit ab est pair non nul" ab =2 ou ab = 4

$$P(N)=P(X=2)+P(X=4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$P(N)=\frac{1}{3}$$

M " le produit ab est égal à 1 " ab = 1×1

$$P(M)=P(X=1)=\frac{1}{3} \text{ donc } P(M)=\frac{1}{3}$$

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

On a $P(M)=\frac{1}{3}$ et $P(N)=\frac{1}{3}$ donc $P(M)=P(N)$

D'où les événements M et N sont équiprobables.

<u>Problème :</u> (2023 SN) (11pts)

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$$

1) a) Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

On a $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

$$f(x)=\frac{2x-2+x(1-\ln x)^2}{x}$$

$$f(x)=\frac{2x-2+x-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

D'où $f(x)=\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

b) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ **et que** $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ **(on peut poser $t=\sqrt{x}$)**

On a $t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2$ $\quad x\to 0^+ \Leftrightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=\lim_{t\to 0^+} t^2(\ln t^2)^2=\lim_{t\to 0^+}(t\,2\ln t)^2$$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=\lim_{t\to 0^+}(2t\ln t)^2=0$$

Car $\lim_{t\to 0^+} t\ln t=0$ D'où $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0 \ ?$$

On a $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2 \qquad x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2=0$$

Car $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

D'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

c) Déduire que $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ puis donner une interprétation géométriquement du résultat.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

On a $\lim_{x\to0^+} x\ln x=0$ et $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2=0$

$\lim_{x\to0^+} 3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2=-2$ et $\lim_{x\to0^+} x=0^+$

D'où $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

On a $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ donc la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$$

puisque $\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}=2$ et $\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=+\infty$

et $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}=0$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et

$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$$

On a $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

$$f'(x)=-\frac{-2}{x^2}+2(1-\ln x)(1-\ln x)'$$

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}+2(1-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}\left(1-x(1-\ln x)\right)$$

$$f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}\qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f ' de f sur $]0;+\infty[$

x	0	1	β	+∞
f'(x)	+∞ ↘	0 ↗	f '(β) ↘	0

a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

On a $f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

$x\to x\ln x$, $x\to1-x$ et $x\to x^2$ sont continues sur $]0;+\infty[$ donc $x\to1-x+x\ln x$ est continue sur $]0;+\infty[$

Donc f' est continue sur $]0;+\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

$f'(]0;1])=[0;+\infty[$ donc $f'(x)\geq0 \quad \forall x\in]0;1]$

et $f'([1;\beta])=[0;f'(\beta)]$ donc $f'(x)\geq0 \quad \forall x\in[1;\beta]$

$f'([\beta;+\infty[)=]0;f'(\beta)]$ donc $f'(x)>0 \quad \forall x\in[\beta;+\infty[$

Donc $f'(x)\geq0 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

D'où f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

x	0	1	+∞
f'(x)		+	
f(x)	−∞ ↗		+∞

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0;+\infty[$

On a f' est décroissante sur $]0;1]$

Donc $\forall x \in]0;1]$ $f''(x) \leq 0$

On a f' est croissante sur $[1;\beta]$

Donc $\forall x \in [1;\beta]$ $f''(x) \geq 0$

On a f' est décroissante sur $[\beta;+\infty[$

Donc $\forall x \in [\beta;+\infty[$ $f''(x) \leq 0$

x	0		1		β		+ ∞
f ″ (x)	‖	–	0	+	0	–	

c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexions.

$\forall x \in]0;1] \cup [\beta;+\infty[$ $f''(x) \leq 0$ la courbe (C_f) est concave sur les intervalles $]0;1]$ et $[\beta;+\infty[$

$\forall x \in [1;\beta]$ $f''(x) \geq 0$ la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle $[1;\beta]$

la courbe (C_f) change de concavité en 1 et en β

La courbe (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses 1 et β.

4) a) A partir de la courbe (C_g) déterminer le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[\alpha;1]$ donc $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [\alpha;1]$

la courbe (C_g) est en dessous de l'axe des abscisses sur les intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$

Donc $g(x) \leq 0$ $\forall x \in]0;\alpha] \cup [1;+\infty[$

x	0		α		1		+ ∞
g (x)	‖	–	0	+	0	–	

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessus de la courbe (C_f) sur les intervalles $]0;\alpha[$ et $[1;+\infty[$

On a $g : x \to f(x) - x$

$\forall x \in [\alpha;1]$ $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x$

$\forall x \in [\alpha;1]$ $x \leq f(x)$ $(\Delta) : y = x$

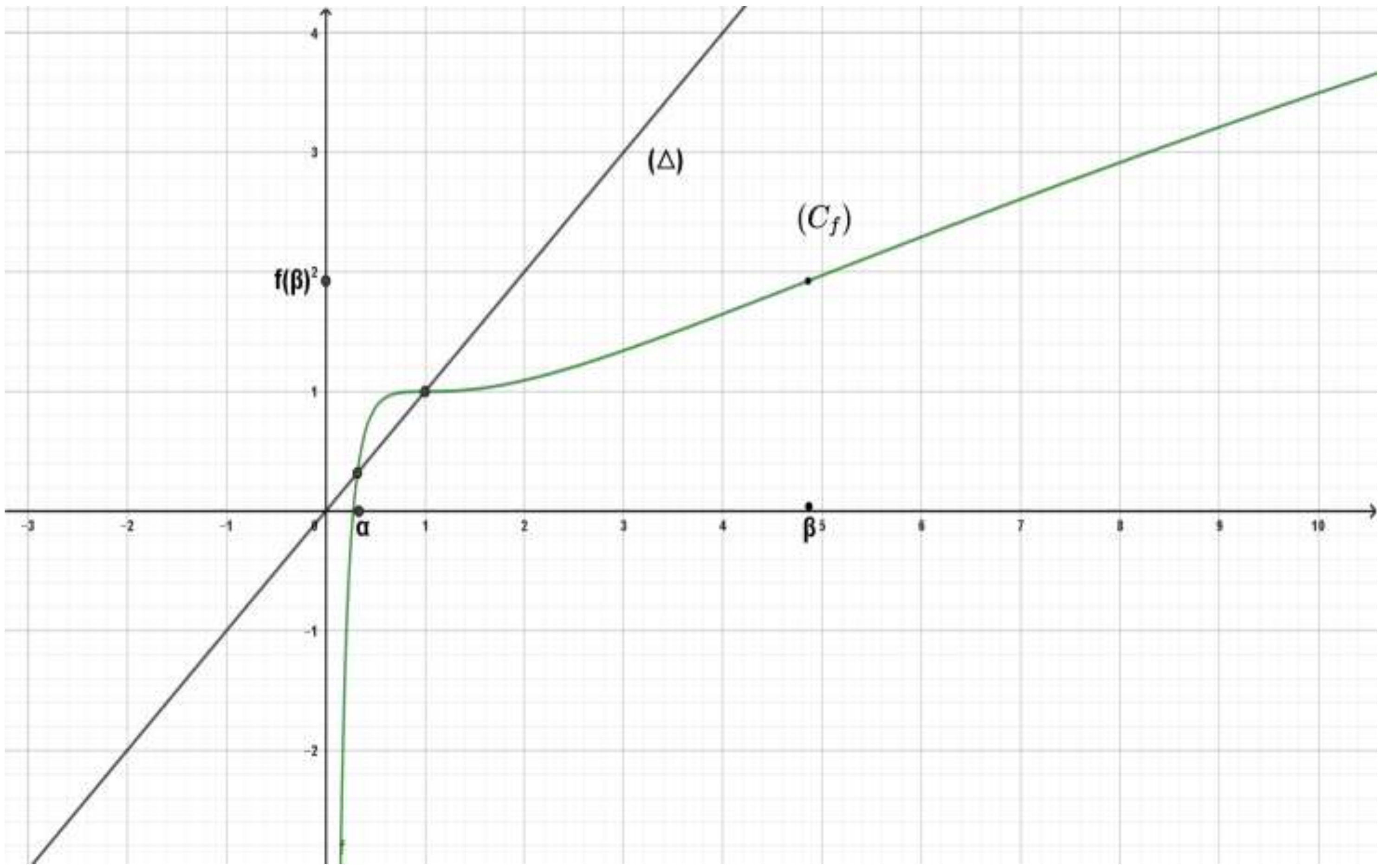
La droite (Δ) est en dessous de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[\alpha;1]$

$\forall x \in]0;\alpha] \cup [1;+\infty[$ $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$

$\forall x \in]0;\alpha] \cup [1;+\infty[$ $x \geq f(x)$

La droite (Δ) est au-dessus de la courbe (C_f) sur les intervalles $]0;\alpha[$ et $[1;+\infty[$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $\alpha \approx 0,3$, $\beta \approx 4,9$; $f(\beta) \approx 1,9$)



6) a) Vérifier que la fonction $x \to 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \to 1-\ln x$ sur $[\alpha;1]$

On pose $\mathbf{u}(x) = 2x - x\ln x \quad \forall x \in [\alpha;1]$ donc $\mathbf{u}'(x) = 2-(\ln x + 1) \quad \forall x \in [\alpha;1]$

$\mathbf{u}'(x) = 1-\ln x \quad \forall x \in [\alpha;1]$

la fonction $x \to 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \to 1-\ln x$ sur $[\alpha;1]$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

on pose $\mathbf{J} = \int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx$

$\mathbf{u}(x) = (1-\ln x)^2 \qquad \mathbf{u}'(x) = -2(1-\ln x)\frac{1}{x}$

$\mathbf{v}'(x) = 1 \qquad \mathbf{v}(x) = x$

$\mathbf{J} = \left[x(1-\ln x)^2\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 -2x(1-\ln x)\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \mathbf{J} = 1-\alpha(1-\ln\alpha)^2 + 2\int_\alpha^1 (1-\ln x)dx$

$\mathbf{J} = 1-\alpha(1-\ln\alpha)^2 + 2[2x - x\ln x]_\alpha^1 \Leftrightarrow \mathbf{J} = 1-\alpha(1-\ln\alpha)^2 + 4-(4\alpha - 2\alpha\ln\alpha)$

Donc $\mathbf{J} = 5-\alpha(1-2\ln\alpha+(\ln\alpha)^2)-(4\alpha-2\alpha\ln\alpha)$

Donc $\mathbf{J} = 5(1-\alpha)+2\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2+2\alpha\ln\alpha$

Donc $\mathbf{J} = 5(1-\alpha)+4\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2$

$\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

c) Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = α et x = 1.

$\mathbf{A} = \int_\alpha^1 |f(x)| dx \, 1cm \times 1cm \qquad \forall x \in [\alpha;1] \; f(x) \ge x$ donc $f(x) > 0 \quad \forall x \in [\alpha;1]$

$\mathbf{A} = \int_\alpha^1 f(x)dx (cm^2)$ on pose $\mathbf{I} = \int_\alpha^1 f(x)dx$

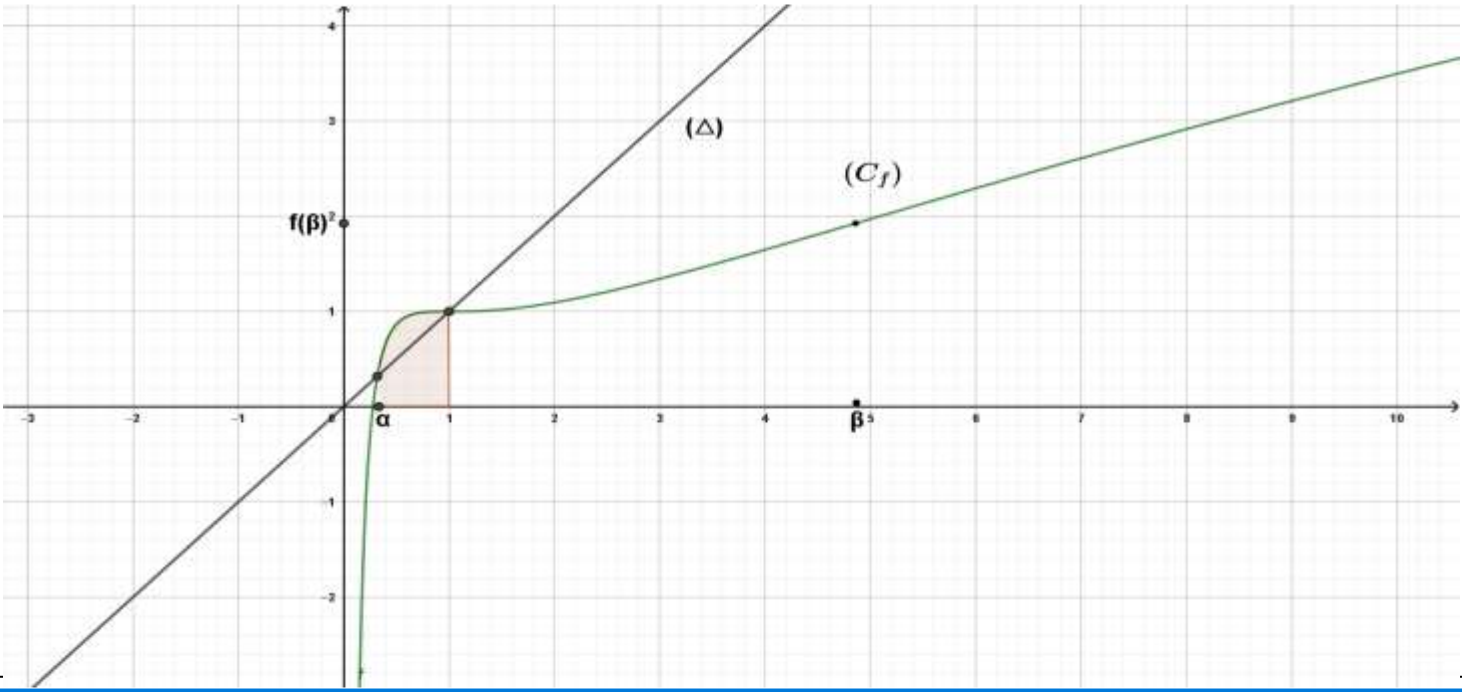
$\mathbf{I} = \int_\alpha^1 2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2 dx$; on a $x \to 2-\frac{2}{x}$ et $x \to (1-\ln x)^2$ sont continues sur $[\alpha;1]$

Donc $\mathbf{I} = \int_\alpha^1 f(x)dx = \int_\alpha^1 (2-\frac{2}{x})dx + \int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx$

On a $\int_\alpha^1 (2-\frac{2}{x})dx = [2x - 2\ln x]_\alpha^1 = 2-2\alpha+2\ln\alpha$

Donc $\mathbf{I} = 2-2\alpha+2\ln\alpha+5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$ $\mathbf{I} = 7(1-\alpha)+2\ln\alpha+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

D'où $\mathbf{A} = [7(1-\alpha)+2\ln\alpha+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha]cm^2$



7) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 \in]\alpha;1[$

$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que: $\alpha < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0 \in]\alpha;1[$ donc $\alpha < U_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\alpha < U_n < 1$ et montrons que $\alpha < U_{n+1} < 1$

On a f est strictement croissante sur $[\alpha;1]$ et $\alpha < U_n < 1$

Donc $f(\alpha) < f(U_n) < f(1)$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ et $g(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

Donc $\alpha < U_{n+1} < 1$

D'où $\alpha < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)

On a $\forall x \in [\alpha;1] \ f(x) \geq x$ or $U_n \in]\alpha;1[$

Donc $f(U_n) \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_{n+1} \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

On a la suite (U_n) est croissante et majorée

D'où la suite (U_n) est convergente

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in]\alpha;1[$

f est continue sur $[\alpha;1]$ et $f([\alpha;1]) = [\alpha;1]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$

On sait que $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = 1$

Or (U_n) est croissante donc $U_n \geq U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_0 \leq U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 \in]\alpha;1[$

D'où $\lim U_n = 1$