Exercice 1 : **(2010 SN)** (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points $A(-1;0;3)$; $B(3;0;0)$; $C(7;1;-3)$ et (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1) Montrer que: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que : $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

$C(7;1;-3)$; $B(3;0;0)$; $A(-1;0;3)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\1\\-6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 8\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 8\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+4\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$

Soit $M(x;y;z)\in(ABC)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

$(ABC): 3x+4z+d=0$

Or $B(3;0;0)\in(ABC)$

Donc $3\times3+4\times0+d=0 \Leftrightarrow d=-9$

D'où $(ABC): 3x+4z-9=0$

2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3;1;0)$ et de rayon 5

$(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

$a=\dfrac{-6}{-2}$; $b=\dfrac{-2}{-2}$; $c=\dfrac{0}{-2}$; $d=-5$

Donc $a=3$; $b=1$; $c=0$; $d=-15$

$a^2+b^2+c^2+15=9+1+15=25>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(3;1;0)$ et $R=\sqrt{25}=5$

D'où $\Omega(3;1;0)$ et rayon $R=5$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(3;0;4)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit $M(x;y;z)\in(\Delta)$ $\qquad \Omega(3;1;0)$

$$(\Delta):\begin{cases}x=3+3t\\ y=1+0\times t\\ z=0+4t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

$$(\Delta):\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points E(6, 1, 4) et F(0, 1, – 4)

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(S)$ équivaut à

$$\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\\ (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\end{cases}$$

$(3+3t-3)^2+(1-1)^2+(4t)^2=25$

$9t^2+16t^2=25 \Leftrightarrow 25t^2=25 \Leftrightarrow t=1$ ou $t=-1$

Si $t=1$ donc $\begin{cases}x=3+3\times1\\ y=1\\ z=0+4\times1\end{cases}$ donc $E(6;1;4)$

Si $t=-1$ donc $\begin{cases}x=3+3\times(-1)\\ y=1\\ z=0+4\times(-1)\end{cases}$ donc $F(0;1;-4)$

$(\Delta)\cap(S)=\{E(6;1;4);F(0;1;-4)\}$

Exercice 2 : **(2010 SN)** (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-6z+10=0$

$\Delta=6^2-4\times1\times10 \Leftrightarrow \Delta=36-40 \Leftrightarrow \Delta=-4$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{6+i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$ et $z_2=\overline{z_1}=3-i$

D'où $S=\{3-i;3+i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=3-i$, $b=3+i$; $c=7-3i$

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z'=iz+2-4i$

$R(M)=M' \Leftrightarrow z'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

$\Leftrightarrow z'=(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})(z-3+i)+3-i$

$\Leftrightarrow z'=iz-3i-1+3-i$

D'où $z'=iz+2-4i$

b) Vérifier que : l'affixe du point C′ l'image du point C par la rotation R est : $c' = 5+3i$

$$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = ic + 2 - 4i$$

$$\Leftrightarrow c' = i(7-3i) + 2 - 4i$$

$$\Leftrightarrow c' = 7i + 3 + 2 - 4i \Leftrightarrow c' = 5 + 3i$$

c) Montrer que : $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC′ est rectangle en B et $BC = 2BC'$

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b} = \frac{2+2i}{4-4i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b} = \frac{2(1+i)}{4(1-i)} \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}\frac{2i}{2} \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$$

D'où $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i$

On a $\frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \frac{c'-b}{c-b} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

Donc $\arg\left(\frac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Or $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}) \equiv \arg(\frac{c'-b}{c-b})[2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc le triangle BCC′ est rectangle en B.

On a $\left|\frac{c'-b}{c-b}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|c'-b|}{|c-b|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{BC'}{BC} = \frac{1}{2}$

$$\frac{BC'}{BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = 2BC'$$

D'où $BC = 2BC'$

Exercice 3 : **(2010 S1)** (3pts)

1) On considère les deux événements :

Montrer que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$

5 B ; 3 R ; 2 N

On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac

$$Card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$$

A″ Obtenir une seule boule rouge″

3(R) 7 $(\overline{R})$

$$Card(A) = C_3^1 \times C_7^3 = 3\times 35 = 105$$

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$$

B ″ Obtenir une boule blanche au moins ″

Première méthode

$\overline{B}$ ″Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées″

5 (B) ; 5$(\overline{B})$

$$Card(\overline{B}) = C_5^4 = 5$$

$$P(\overline{B}) = \frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$$

$$p(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$$

D'où $P(B) = \frac{41}{42}$

Deuxième méthode

5 (B) ; 5$(\overline{B})$

$$Card(B) = C_5^1\times C_5^3 + C_5^2\times C_5^2 + C_5^3\times C_5^1 + C_5^4$$

$$Card(B) = 50+100+50+5 = 205$$

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{205}{210} = \frac{41}{42}$$

D'où $P(B) = \frac{41}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

On peut obtenir :

* Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 0.

*Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 1.

*Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 2.

*Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées.
Donc X = 3.

D'où les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

b) Montrer que $P(X=0) = \frac{1}{6}$ et $P(X=2) = \frac{3}{10}$

3 (R) ; 7$(\overline{R})$

$$card(X=0) = C_7^4 = 35$$

$$P(X=0) = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

$$card(X=2) = C_3^2\times C_7^2 = 3\times 21 = 63$$

$$P(X=2) = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$$P(X=1) = P(A) = \frac{1}{2}$$

Première méthode

3 (R) ; 7$(\overline{R})$

$$card(X=3) = C_3^3\times C_7^1 = 7$$

$$P(X=3) = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

Deuxième méthode

On sait que

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 1$$

Donc $P(X=3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

$$P(X=3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$$

D'où $P(X=3) = \frac{1}{30}$

k	0	1	2	3
P(X= k)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(Remarque $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=1$)

<u>Exercice 4 :</u> (2010 SN) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{3U_n-1}{2U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0=2$$

1) Montrer que : $U_n-1>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=2$ donc $U_0-1>0$

Soit n ∈ ℕ supposons que $U_n-1>0$ et montrons que $U_{n+1}-1>0$

$$U_{n+1}-1=\frac{3U_n-1}{2U_n}-1=\frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}$$

Donc $U_{n+1}-1=\frac{U_n-1}{2U_n}$ on a $U_n-1>0$ (1)

Donc $U_n>1$ donc $2U_n>2$ (2)

De (1) et (2) $\frac{U_n-1}{2U_n}>0$ donc $U_{n+1}-1>0$

D'où $U_n-1>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Soit (V_n) définie par : $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrons que $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$?

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}=\frac{\frac{U_n-1}{2U_n}}{2\frac{3U_n-1}{2U_n}-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{U_n-1}{2U_n}}{\frac{6U_n-2-2U_n}{2U_n}}=\frac{U_n-1}{4U_n-2}$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)$$

Donc $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$V_0=\frac{U_0-1}{2U_0-1}=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad V_n=V_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que : $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

en déduire que $\lim U_n=1$

$$V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}\Leftrightarrow V_n(2U_n-1)=U_n-1$$

$$\Leftrightarrow 2V_nU_n-V_n=U_n-1$$

$$\Leftrightarrow 2V_nU_n-U_n=V_n-1$$

$$\Leftrightarrow U_n(2V_n-1)=V_n-1\Leftrightarrow U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1}$$

D'où $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1}$ et $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $$U_n=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\lim U_n=\lim\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{0-1}{0-1}=1$$

Car $-1<\frac{1}{2}<1$ et $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

D'où $\lim U_n=1$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$W_n=\ln U_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a $W_n=\ln U_n$

$\lim W_n=\lim\ln U_n \Leftrightarrow \lim W_n=\ln 1=0$

car la fonction ln est continue en 1.

<u>Problème :</u> (2010 SN) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur ℝ par :

$$g(x)=1+4xe^{2x}$$

1) Montrer que $g'(x)=4(2x+1)e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$g(x)=1+4xe^{2x}$$

$$g'(x)=4e^{2x}+4x\times(2x)'e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$g'(x)=4e^{2x}+8xe^{2x}\Leftrightarrow g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$$

D'où $g'(x)=4(2x+1)e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

On a $g'(x)=4(2x+1)e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(2x+1)$

Car $e^{2x}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$; $2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ $\mathbf{g'(x) \geq 0}$ donc g est croissantes sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$\forall x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ $\mathbf{g'(x) \leq 0}$ donc g est décroissantes sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

3) a) Montrer que $g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g(-\frac{1}{2}) > 0$

$\mathbf{g(x) = 1 + 4xe^{2x}}$ **donc** $g(-\frac{1}{2}) = 1 + 4(-\frac{1}{2})e^{2(-\frac{1}{2})} = 1 - 2e^{-1}$

D'où $g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$

$g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e}$ donc $g(-\frac{1}{2}) > 0$ car $e \approx 2,7$

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de R.

On a g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Donc $g(-\frac{1}{2}) = \frac{e-2}{e}$ est le minimum de g sur R

Donc $g(x) \geq g(-\frac{1}{2})$ $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

II) On considère la fonction f définie sur ℝ par

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$$

2) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur R

$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{2x} + (2x-1)2e^{2x} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$

$f'(x) = 1 + 4xe^{2x} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Or $g(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur R

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)e^{2x} + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{2x}{x} - \frac{1}{x})e^{2x} + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2 - \frac{1}{x})e^{2x} + 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[(2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1)\right]$$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$\mathbf{f(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{2x}=0}$$

Or $\mathbf{e^{2x}}>0 \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}$

$$\mathbf{f(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

$\mathbf{f(x)-(x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}}$ $\qquad \mathbf{y=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}}$

$$\mathbf{(\Delta)\cap(C)=\left\{A\left(\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2}\right)\right\}}$$

$\forall \mathbf{x}\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad \mathbf{f(x)>(x+1)}$ la courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall \mathbf{x}\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\quad \mathbf{f(x)<(x+1)}$ la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

4) a) Montrer que $y = x$ une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

$\mathbf{y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=x}$ car $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$

$\mathbf{(T): y=x}$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$

On a $\mathbf{f'(x)=g(x)} \qquad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}$

Donc $\mathbf{f''(x)=g'(x)} \qquad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}$

Or $\mathbf{g'(x)=4(2x+1)e^{2x}} \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

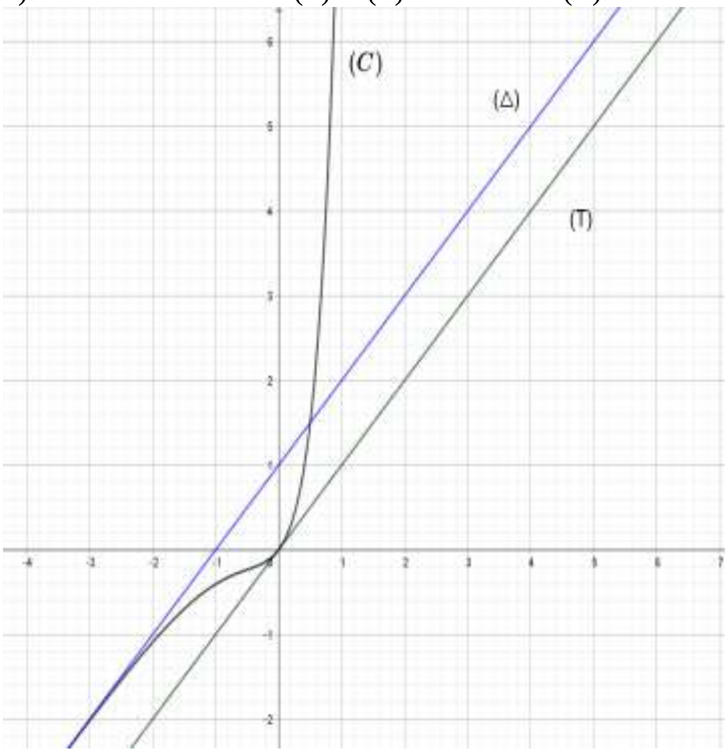
$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\quad \mathbf{f''(x)\geq 0}$

$\forall \mathbf{x}\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right] \quad \mathbf{f''(x)\leq 0}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\mathbf{f''(x)}$		$-$	0	$+$	

La courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C).



6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}}$

6) a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}}$

$\mathbf{u(x)=2x-1} \qquad \mathbf{u'(x)=2}$

$\mathbf{v'(x)=e^{2x}} \qquad \mathbf{v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}2\frac{1}{2}e^{2x}dx}$$

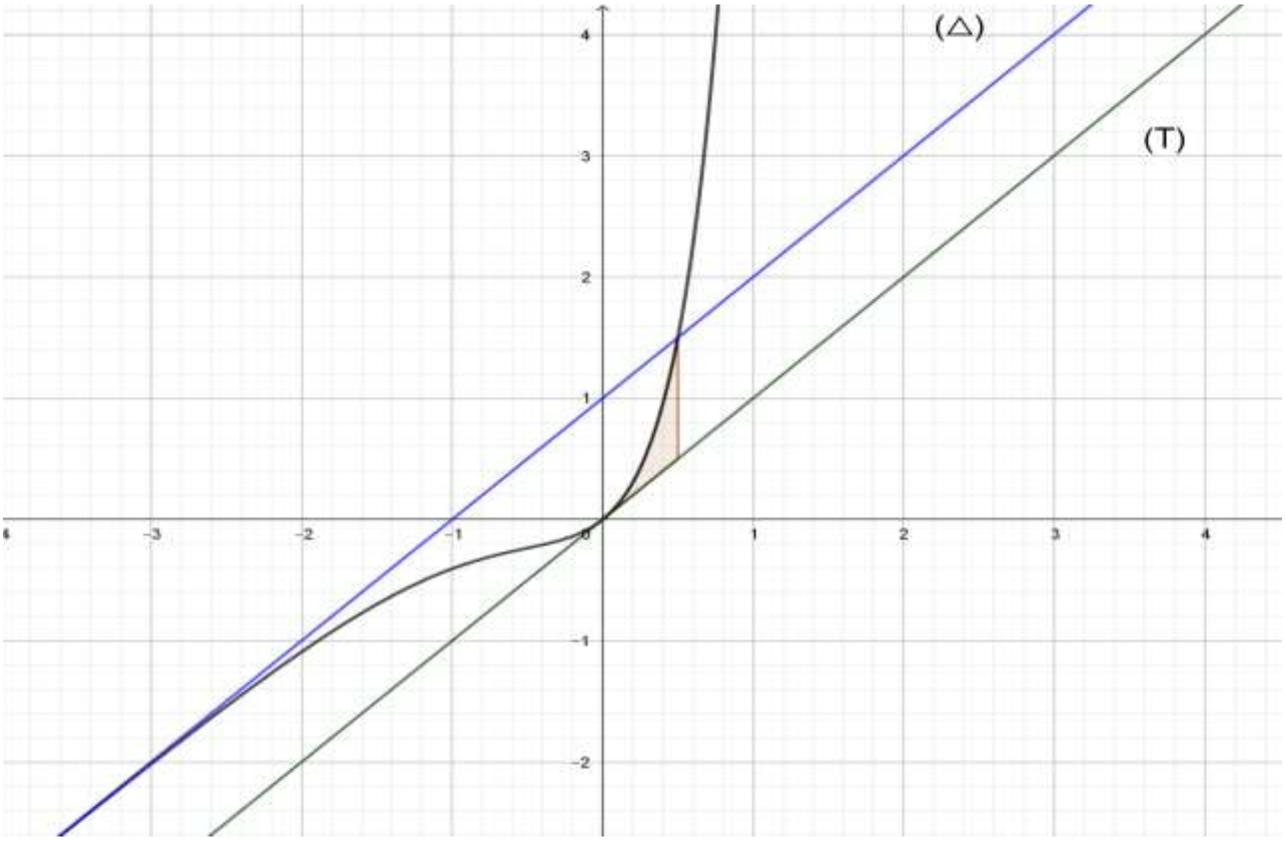
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=\left[(x-\frac{1}{2})e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=0+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{e}{2}}$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}}$

b) Montrer que l’aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$ est $(6-2\mathbf{e})\mathbf{cm}^2$.



$$\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - x\right| \mathbf{dx}\, 2\mathbf{cm} \times 2\mathbf{cm}$$

$$\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - x)\mathbf{dx}\, 4\mathbf{cm}^2 \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{x} \ \ \forall \mathbf{x} \in [0;+\infty[$$

On pose $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - x)\mathbf{dx}$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}} + \mathbf{x} + 1 - x)\mathbf{dx}$$

$$\mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} ((2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}} + 1)\mathbf{dx} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}\mathbf{dx} + \int_0^{\frac{1}{2}} 1\mathbf{dx}$$

$\mathbf{x} \to (2\mathbf{x}-1)\mathbf{e}^{2\mathbf{x}}$ et $\mathbf{x} \to 1$ sont continues sur R en particulier sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

$$\mathbf{I} = 1 - \frac{\mathbf{e}}{2} + [\mathbf{x}]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\mathbf{e}}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{donc } \mathbf{I} = \frac{3}{2} - \frac{\mathbf{e}}{2}$$

D’où $\mathbf{A} = (6-2\mathbf{e})\mathbf{cm}^2$