

Exercice 1 :

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ les points A(1;1;-1), B(0;1;-2) et C(3;2;1) et

$$(S) \text{ la sphère d'équation: } \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 - 2\mathbf{x} - 2\mathbf{z} - 1 = 0$$

1) Montrer que (S) est de centre $\Omega(1; 0; 1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

$$(S): \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 - 2\mathbf{x} - 2\mathbf{z} - 1 = 0;$$

$$\mathbf{a} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{b} = \frac{0}{-2}; \quad \mathbf{c} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{d} = -1$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 1; \mathbf{b} = 0; \mathbf{c} = 1; \mathbf{d} = -1$$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{d} = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1 = 3 > 0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1;0;1)$ et $R = \sqrt{3}$

D'où $\Omega(1;0;1)$ et rayon $R = \sqrt{3}$

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ et vérifier que : $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

C(3;2;1); B(0;1;-2); A(1;1;-1)

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} - \mathbf{k}$$

D'où $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

Soit $M(x; y; z) \in (\text{ABC})$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à (ABC)}$$

$$(\text{ABC}): 1x + 0xy - 1z + d = 0 \text{ or } B(0;1;-2) \in (\text{ABC})$$

$$(\text{ABC}): x - z + d = 0 \text{ or } B(0;1;-2) \in (\text{ABC})$$

$$\text{Donc } 0 - (-2) + d = 0 \text{ donc } d = -2$$

$$\text{D'où } (\text{ABC}): \mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$$

b) Vérifier que : $d(\Omega, (\text{ABC})) = \sqrt{2}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1.

$$(\text{ABC}): \mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0 \quad \Omega(1;0;1)$$

$$d(\Omega, (\text{ABC})) = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{D'où } d(\Omega, (\text{ABC})) = \sqrt{2}$$

$$\text{On a } d(\Omega, (\text{ABC})) = \sqrt{2} \text{ et } R = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc } d(\Omega, (\text{ABC})) < R$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

De rayon $\sqrt{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{3-2} = 1$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + t \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

On a (Δ) est perpendiculaire au (ABC).

Donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}}(1;0;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit $M(x; y; z) \in (\text{ABC}) \quad \Omega(1;0;1)$

$(\Delta): \begin{cases} \mathbf{x} = 1 + t \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation

paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) est (2;0;0) $\mathbf{M}(x; y; z) \in (\Delta) \cap (\text{ABC})$ équivaut à

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + t \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - t \\ \mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(1+t) - (1-t) - 2 = 0$$

$$\text{Donc } 1+t-1+t-2=0 \Leftrightarrow 2t=2 \Leftrightarrow t=1$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + 1 \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - 1 \end{cases} \text{ d'où } \mathbf{H}(2;0;0)$$

$$(\Delta) \cap (\text{ABC}) = \{\mathbf{H}(2;0;0)\}$$

c) En déduire le centre du cercle (Γ)

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

Donc $\mathbf{H}(2;0;0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 :

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $\mathbf{Z}^2 - 12\mathbf{Z} + 61 = 0$

$$\mathbf{Z}^2 - 12\mathbf{Z} + 61 = 0$$

$$\Delta = (12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100$$

Don l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1 = \frac{12 + i\sqrt{100}}{2} = \frac{12 + 10i}{2} = 6 + 5i \text{ et } \mathbf{z}_2 = \overline{\mathbf{z}_1} = 6 - 5i$$

$$\text{D'où } \mathbf{S} = \{6 + 5i; 6 - 5i\}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct ($O; \vec{u}; \vec{v}$) on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 6 - 5i$, $\mathbf{b} = 4 - 2i$, $\mathbf{c} = 2 + i$

a) Calculer $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}}$ et en déduire que A, B et C sont alignés.

$$\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \frac{6 - 5i - 2 - i}{4 - 2i - 2 - i} = \frac{4 - 6i}{2 - 3i}$$

$$\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \frac{2(2 - 3i)}{2 - 3i} = 2$$

On a $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = 2$ donc $\frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} \in \mathbb{R}$

D'où A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe $1 + 5i$

b) Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6i$

$$T(\mathbf{C}) = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{c} + \text{aff}(\vec{u}) \Leftrightarrow \mathbf{d} = 2 + i + 1 + 5i$$

D'où $\mathbf{d} = 3 + 6i$

c) Montrer que $\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = -1 + i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1 + i$

$$\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \frac{3 + 6i - 2 - i}{4 - 2i - 2 - i} = \frac{1 + 5i}{2 - 3i}$$

$$\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \frac{(1 + 5i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 - 15 + 3i + 10i}{2^2 + 3^2}$$

$$\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \frac{13(-1 + i)}{13} = -1 + i$$

D'où $\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = -1 + i$

$$|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\text{Donc } \frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$\text{D'où } \arg \left(\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} \right) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$

$$\text{On sait que } (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left(\frac{\mathbf{d} - \mathbf{c}}{\mathbf{b} - \mathbf{c}} \right) [2\pi]$$

$$\text{D'où } (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Exercice 3 :

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1 et deux jetons portent les chiffres 2.

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.

1) A " Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux " Montrer que : $P(A) = \frac{5}{28}$

5 (1) ; 2 (2) ; 1 (0)

$$\text{Card}(\Omega) = C_8^3 = 56$$

$$\text{Card}(A) = C_5^1 \times C_2^1 \times C_1^1 = 10$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

2) B "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ". Montrer que : $P(B) = \frac{5}{56}$

$$2 + 2 + 1 = 5$$

$$\text{Card}(B) = C_2^2 \times C_5^1 = 5$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{56}$$

3) C "la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 " Montrer que : $P(C) = \frac{3}{8}$

$$2 + 2 + 0 = 4 ; 2 + 1 + 1 = 4$$

$$\text{Card}(C) = C_2^2 \times C_1^1 + C_5^2 \times C_2^1 = 21$$

$$P(C) = \frac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

Exercice 4 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } U_0 = 11$$

$$1) \text{ Montrer que: } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} (U_n - 12) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11} U_n - \frac{120}{11}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} U_n - \frac{120}{11}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} (U_n - 12)$$

$$2) \text{ a) Montrer que: } U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 11$ donc $U_0 < 12$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 12$ et montrons que $U_{n+1} < 12$ c'est-à-dire $U_{n+1} - 12 < 0$

On a

$$U_n < 12 \Leftrightarrow U_n - 12 < 0 \Leftrightarrow \frac{10}{11} (U_n - 12) < 0$$

$$\text{Or } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} (U_n - 12) \text{ donc } U_{n+1} - 12 < 0$$

$$\text{D'où } U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} - U_n$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{10U_n - 11U_n + 12}{11}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{12 - U_n}{11} \text{ or } U_n < 12$$

$$\text{Donc } 12 - U_n > 0 \text{ donc } U_{n+1} - U_n > 0$$

D'où (U_n) est strictement croissante.



c) En déduire que (U_n) est convergente.

On a (U_n) est strictement croissante et majorée donc (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis écrire V_n en fonction de n .

Montrons que $V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$

Donc $V_{n+1} = U_{n+1} - 12$ or $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

Donc $V_{n+1} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$

Donc $V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

On a $V_n = V_0 \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $V_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$

On a $V_n = U_n - 12$ donc $U_n = V_n + 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $\lim \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{10}{11} < 1$

D'où $\lim U_n = 12$

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe

Sur $[0, 1[$ et en déduire que $\forall x \in [0, 1] \quad g(x) \leq 0$

$\forall x \in [0, 1[\quad 0 < x < 1$ et $\ln x < 0$

$$0 < x^2 < 1 \text{ et } \ln x < 0 \quad x^2 > 0$$

Donc $-1 < x^2 - 1 < 0$ et $2x^2 \ln x < 0$

Donc $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $[0, 1[$

On a $x^2 - 1 < 0$ et $2x^2 \ln x < 0 \quad \forall x \in [0, 1[$

Donc $x^2 - 1 + x^2 \ln x < 0 \quad \forall x \in [0, 1[$

D'où $g(x) < 0 \quad \forall x \in [0, 1[$

b) Montrer que $x^2 - 1$ et $x^2 \ln x$ ont même signe

Sur $[1, +\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$

$\forall x \in [1, +\infty[\quad x > 1$ donc $x^2 > 1$ donc $x^2 - 1 > 0$

$\forall x \in [1, +\infty[\quad x > 1$ donc $\ln x > \ln 1$ donc $\ln x > 0$

Car \ln est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Donc $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $[1, +\infty[$

On a $x^2 - 1 > 0$ et $2x^2 \ln x > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$

$\forall x \in]1, +\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x > 0$

On a $\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 - 1 \geq 0$ et $2x^2 \ln x \geq 0$

Donc $\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x \geq 0$

D'où $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) \ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ la droite d'équation $x = 0$

est une asymptote verticale à la courbe (C) .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) \ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \ln x}{x}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \right) \ln x$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) \ln x = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe (C_f) admet au voisinage

de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.



2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

$$f'(x) = 2x \ln x + (x^2 - 1) \frac{1}{x} = \frac{(x^2 - 1) + 2x^2 \ln x}{x}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 0$$

$f'(1) = 0$ la courbe (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

b) En déduire que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

On a $\forall x \in]0, 1] \quad g(x) \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$

Donc f est décroissante sur $]0, 1]$

On a $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

Donc f est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

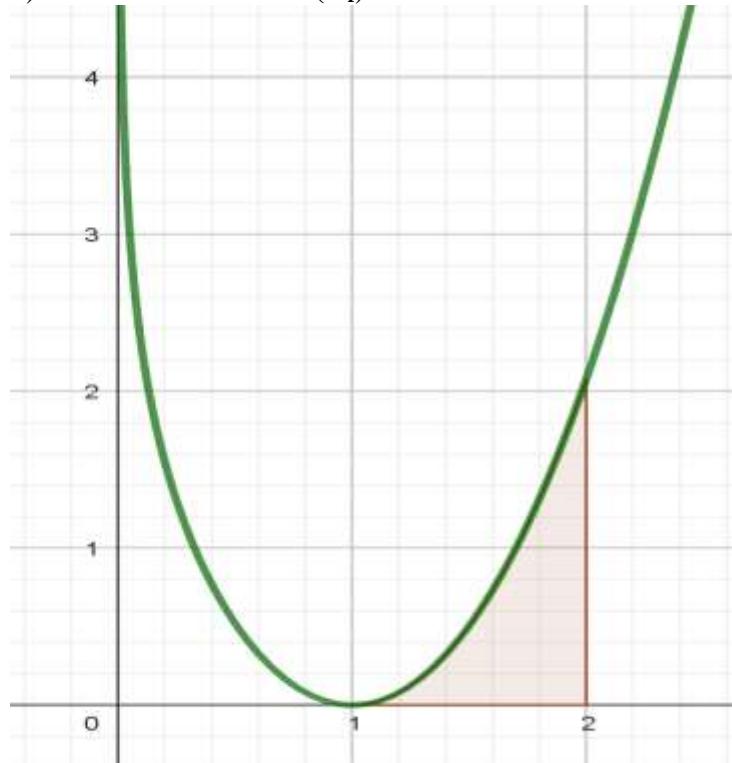
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

On a $f(1) = 0$ est le minimum de f sur I

Donc $f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in]0, +\infty[$

D'où $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

3) Construire la courbe (C_f) .



4) a - Montrer que $u: x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $v: x \rightarrow x^2 - 1$ sur \mathbb{R}

$$u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x \right)' = \frac{1}{3} 3x^2 - 1 = x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où $u: x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $v: x \rightarrow x^2 - 1$ sur \mathbb{R}

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln 2)$$

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \left[\left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \frac{1}{x} dx$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^2 - 1 \right) dx = \frac{2}{3} \ln 2 - \left[\frac{1}{9} x^3 - x \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 - \left(\frac{8}{9} - 2 - \frac{1}{9} + 1 \right) = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} + 1 = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{2}{9}$$

$$\text{D'où } \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln 2)$$

c - Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx \times 3 \text{cm} \times 3 \text{cm}$$

$$A = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx \times 9 \text{cm}^2 = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln 2) 9 \text{cm}^2$$

$$\text{D'où } A = (2 + 6 \ln 2) \text{cm}^2$$