

Exercice 1:

1) A(2; 1; 0) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ P(A ; \vec{u})

1^{ère} méthode :

Soit M(x ; y ; z) ∈ (P)

 $\vec{u}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal à (P)Donc (P) : $x + y - z + d = 0$ or A(2; 1; 0) ∈ (P)Donc $2 + 1 - 0 + d = 0$ donc $d = -3$ D'où (P) : $x + y - z - 3 = 0$ 2^{ème} méthode :

Soit M(x ; y ; z) ∈ (P) donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}; \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc $(x-2) \times 1 + (y-1) \times 1 + z(-1) = 0$

D'où (P) : $x + y - z - 3 = 0$

2) (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient:

 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère (S) de centre Ω le milieu du segment $[\overrightarrow{AB}]$ donc $\Omega \left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+0}{2} \right)$ donc

$\Omega(-1; 1; 0)$ et de rayon $R = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ donc

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{6^2 + 0 + 0} = 6$ D'où $R = 3$

3) a) $d(\Omega; (P)) = \frac{|-1+1-0-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

On a $d(\Omega; (P)) = \sqrt{3}$ et $R = 3$ donc $d(\Omega; (P)) < R$ donc le plan (P) coupe (S) suivant un cercle (C).b) Montrer que le centre du cercle (C) est $H(0; 2; -1)$. H le centre du cercle (C) est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P), donc c'est le point d'intersection entre la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P).On a $(\Delta) \perp (P)$ et $\vec{u}(1; 1; -1)$ est un vecteur normal à (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (Δ)Soit M(x ; y ; z) ∈ (Δ)

$(\Delta) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 - t \end{cases}$

H est le centre du cercle (C) donc $(\Delta) \cap (P) = \{H\}$ Première méthode :M(x ; y ; z) $M(x; y; z) \in (\Delta) \cap (ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$
$$-1 + t + 1 + t - t - 3 = 0 \Leftrightarrow 3t = 3 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\begin{cases} x_H = -1 + 1 \\ y_H = 1 + 1 \\ z_H = -1 \end{cases}$$
 d'où $H(0; 2; -1)$ est le centre du cercle (C)

Deuxième méthode :

On a $(\Delta) \cap (P) = \{H\}$

on a que $H(0; 2; -1) \in (P)$ car $0 + 2 - (-1) - 3 = 0$ il suffit de montrer que $H \in (\Delta)$ $H(0; 2; -1)$

$$\begin{cases} 0 = -1 + t \\ 2 = 1 + t \\ -1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$
 donc $H \in (\Delta)$

D'où $H(0; 2; -1)$ est le centre du cercle (C)4) Montrer que : $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$ puis calculer la surface du triangle OHB.

$$\overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \vec{i} \\ -1 & 0 & \vec{j} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -4 & \vec{i} \\ -1 & 0 & \vec{j} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 & \vec{k} \\ 2 & 1 & \vec{k} \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$

$$S_{OHB} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB}\| \text{ et } \|\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = 9$$

D'où $S_{OHB} = \frac{9}{2}$

Exercice 2:

I - On considère le nombre complexe a tel que :

$$a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

1) Montrer que le module du nombre complexe a est $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$$|a| = |2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2}$$

$$|a| = \sqrt{4 + 4\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{4(2 + \sqrt{2})}$$

D'où $|a| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

2) Vérifier que : $a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$

$$2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4} = 2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2i \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} = a$$

D'où $a = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$



3) a) En linéarisant $\cos^2 \theta$, θ est un nombre réel montrer que : $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ donc } \cos^2 \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{e^{i2\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-i2\theta}}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + i \sin 2\theta + 2 + \cos 2\theta - i \sin 2\theta}{4}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2 \cos 2\theta + 2}{4} = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

D'où $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$

b) Montrer que $\mathbf{a} = 4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre \mathbf{a} montrer que

$$\mathbf{a} = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 \mathbf{i}$$

On a $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta$ on prend $\theta = \frac{\pi}{8}$

$$1 + \cos \frac{\pi}{4} = 1 + \cos 2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8}$$

Et on sait que $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$

$$\text{Donc } \sin \frac{\pi}{4} = \sin 2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{On a } \mathbf{a} = 2(1 + \cos \frac{\pi}{4}) + 2i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 2(2 \cos^2 \frac{\pi}{8}) + 2i(2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8})$$

$$\mathbf{a} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{8} + i4 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Donc } \mathbf{a} = 4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \text{ or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{8} > 0$$

D'où $\mathbf{a} = 4 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ est une forme trigonométrique du nombre \mathbf{a} .

$$\text{On a } |\mathbf{a}| = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ et } \arg \mathbf{a} \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$$

$$\text{Donc } |\mathbf{a}^4| = |\mathbf{a}|^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4$$

$$\text{Et } \arg \mathbf{a}^4 \equiv 4 \arg \mathbf{a}[2\pi] \text{ donc } \arg \mathbf{a}^4 \equiv 4 \frac{\pi}{8}[2\pi]$$

$$\arg \mathbf{a}^4 \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\text{Donc } \mathbf{a}^4 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{D'où } \mathbf{a} = \left(2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^4 \mathbf{i}$$

II - On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ on considère les deux points Ω et A d'affixes respectives ω et a tels que :

$\omega = \sqrt{2}$; $\mathbf{a} = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que l'affixe b du point B image du point A par la rotation R est $2i$.

Le point B image du point A par la rotation R

$$\text{On a } \mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{b} - \omega = e^{\frac{i\pi}{2}}(\mathbf{a} - \omega)$$

$$\text{Donc } \mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{b} = e^{\frac{i\pi}{2}}(\mathbf{a} - \omega) + \omega$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}}(\mathbf{a} - \omega) + \omega = i(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}}(\mathbf{a} - \omega) + \omega = i(2 + i\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 2i - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2i$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}}(\mathbf{a} - \omega) + \omega = \mathbf{b} \text{ car } \mathbf{b} = 2i$$

D'où $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z - 2i| = 2$

On a $\mathbf{b} = 2i$ donc $|z - \mathbf{b}| = 2 \Leftrightarrow \mathbf{BM} = 2$

L'ensemble des points M d'affixes z tel que : $|z - 2i| = 2$

Est le cercle de centre B et de rayon 2.

Exercice 3 : (2015 Session annulée) (3pts)

Une caisse U_1 contient 7 boules : 4R ; 3V

Une caisse U_2 contient 5 boules : 3R ; 2V

I) on tire au hasard et en même temps 3 boules de U_1 .

$$\text{Card}(\Omega) = C_7^3 = 35$$

A" Obtenir une boule rouge et deux boules vertes"

$$\text{Card}(\mathbf{A}) = C_4^1 \times C_3^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{A})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{12}{35}$$

B" Obtenir trois boules de la même couleur"

$$\text{Card}(\mathbf{B}) = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{B})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

II) On tire au hasard et en même temps 2 boules de U_1 , puis on tire au hasard une boule de U_2 .

C" Obtenir trois boules rouges"

$$\text{Card}(\Omega') = C_7^2 \times C_5^1 = 105$$

$$\text{Card}(\mathbf{C}) = C_4^2 \times C_3^1 = 6 \times 3 = 18$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{C})}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{18}{105} = \frac{6}{35}$$

Problème : (2015 Session annulée) (8pts)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}(1-\ln \mathbf{x})}$$

I) 1) Montrer que : $\mathbf{D_f} =]0; e[\cup]e; +\infty[$

$$\mathbf{D_f} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{x} > 0 \text{ et } (1 - \ln \mathbf{x}) \neq 0\}$$

$$\mathbf{D_f} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / \mathbf{x} > 0 \text{ et } \ln \mathbf{x} \neq 1\}$$

$$\mathbf{D_f} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} / (\mathbf{x} > 0) \text{ et } (\mathbf{x} \neq e)\}$$

D'où $\mathbf{D_f} =]0; e[\cup]e; +\infty[$

2) a)

	0	e
1 - ln x	+	-

$$\lim_{x \rightarrow e^+} (1 - \ln x) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} (1 - \ln x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = +\infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty$$

la droite d'équation $x = e$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - x \ln x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)} = +\infty$$

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

$$3) a - \text{Montrer que: } \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})^2} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}(1 - \ln \mathbf{x})}$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\frac{(x(1 - \ln x))'}{x^2(1 - \ln x)^2} = -\frac{(1 - \ln x) + x \frac{-1}{x}}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = -\frac{1 - \ln \mathbf{x} - 1}{\mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})^2} = \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})^2}$$

$$\text{D'où } \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})^2} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$$

$$b) \text{On a } \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})^2} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$$

Le signe de $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ est celui de $\ln \mathbf{x}$ car

$$\frac{1}{\mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})^2} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$$

x	0	1	$+\infty$
ln x	-	0	+

$$\forall \mathbf{x} \in]0, 1] \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $]0, 1]$

$$\forall \mathbf{x} \in [1; e[\cup]e; +\infty[\quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ donc } f \text{ est croissante sur chacun des intervalles } [1; e[\text{ et }]e; +\infty[$$

b - Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbf{D_f}$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(\mathbf{x})$	-	0	+	
$f(\mathbf{x})$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

II) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})$$

(C_g) est la courbe représentative de g dans le repère orthonormé ($\mathbf{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}$) (voir figure)

1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation suivante (E) : $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0; \mathbf{x} \in]0; +\infty[$

La courbe de g coupe l'axe des abscisses en deux points donc l'équation $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ admet deux solutions

b) On a g est continue sur $[2, 2; 2, 3]$

$$\begin{cases} g(2, 2) = -0,02 \\ g(2, 3) = 0,12 \end{cases} \quad g(2, 2) \times g(2, 3) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires

l'équation $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ admet une solution α telle que : $2,2 < \alpha < 2,3$

$$2) a) \text{Vérifier que : } \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}(1 - \ln \mathbf{x})} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{x}(1 - \ln \mathbf{x})} - \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \frac{1 - \mathbf{x}^2(1 - \ln \mathbf{x})}{\mathbf{x}(1 - \ln \mathbf{x})} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}(1 - \ln \mathbf{x})}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\text{Or } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 1 \text{ ou } \mathbf{x} = \alpha$$

$$\text{Donc } \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 1 \text{ ou } \mathbf{x} = \alpha$$

On a $\forall x \in [1; \alpha] \quad g(x) \leq 0$ car (C_g) est en dessous de l'axe des abscisses.

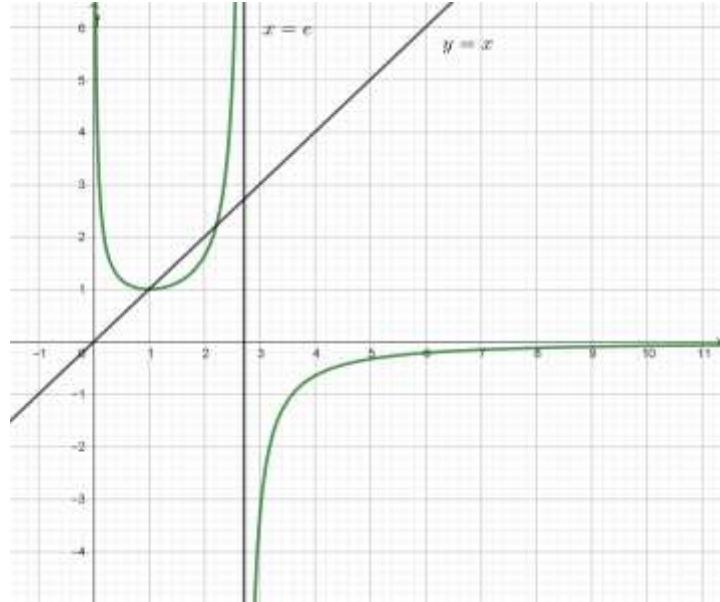
On sait que $\forall x \in [1; e] \quad x(1 - \ln x) > 0$

Donc $\forall x \in [1; \alpha] \quad x(1 - \ln x) > 0$ car $\alpha \in [1; e]$

Donc $\forall x \in [1; \alpha] \quad \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0$

D'où $\forall x \in [1; \alpha] \quad f(x) - x \leq 0$

3) Tracer dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (Δ) et la courbe (C_f) .



4) a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$

On pose $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$

On a $\frac{1}{x(1 - \ln x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \ln x} \quad \forall x \in D_f$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \ln x} dx$$

On a $(1 - \ln x)' = -\frac{1}{x}$

$$I = \int_1^{\sqrt{e}} -\frac{(1 - \ln x)'}{(1 - \ln x)} dx = -\left[\ln|1 - \ln x| \right]_1^{\sqrt{e}}$$

Donc

$$I = -(\ln|\sqrt{e} - \ln \sqrt{e}| - \ln|1 - \ln 1|) = -\ln\left|1 - \frac{1}{2}\ln e\right|$$

$$\text{Donc } I = -\ln\left|1 - \frac{1}{2}\right| = -\ln\frac{1}{2} \quad \text{donc } I = \ln 2$$

$$\text{D'où } \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$

$$A = \int_1^{\sqrt{e}} |f(x) - x| dx \times (2\text{cm} \times 2\text{cm})$$

On a (C_f) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $[1; \sqrt{e}]$ donc $|f(x) - x| = x - f(x) \quad \forall x \in [1; \sqrt{e}]$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} x - \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} x dx - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx$$

Car $x \rightarrow x - \frac{1}{x(1 - \ln x)}$ est continue sur $[1; \sqrt{e}]$

$$\int_1^{\sqrt{e}} x - f(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^{\sqrt{e}} - \ln 2 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$\text{Donc } A = (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2} - \ln 2) \times 4\text{cm}^2$$

$$\text{D'où } A = (2e - 2 - 4\ln 2)\text{cm}^2$$

III) On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et } U_0 = 2$$

1) Montrer que : $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 2$ donc $1 \leq U_0 \leq \alpha$

$(2, 2 < \alpha < 2,3)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $1 \leq U_n \leq \alpha$ et montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq \alpha$

On a f est croissante sur $[1; \alpha]$ et $1 \leq U_n \leq \alpha$

$f(1) \leq f(U_n) \leq f(\alpha)$ or $f(1) = 1$ et $f(\alpha) = \alpha$

Donc $1 \leq U_{n+1} \leq \alpha$

D'où $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II 2) c))

On a $f(x) \leq x \quad \forall x \in]0; +\infty[$

b - Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

On a $f(x) \leq x \quad \forall x \in [1; \alpha]$

Or $1 \leq U_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $f(U_n) \leq U_n$ donc $U_{n+1} \leq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

On a la suite (U_n) est décroissante et minorée par 1

D'où la suite (U_n) est convergente

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in [1; \alpha]$

f est continue sur $[1; \alpha]$ et $f([1; \alpha]) = [1; \alpha]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$ or les solutions de cette équation sont 1 et α donc $\lim U_n = 1$ ou $\lim U_n = \alpha$

On a (U_n) est décroissante donc $U_n \leq U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $1 \leq U_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2, 2 < \alpha < 2,3)$

Donc $1 \leq \lim U_n \leq 2 \quad \text{D'où } \lim U_n = 1$