

Exercice 1 :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 ; (P) : y - z = 0$$

1) a) Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1, 1, 1)$ et pour rayon 2.

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{-2}{-2} ; \quad \mathbf{b} = \frac{-2}{-2} ; \quad \mathbf{c} = \frac{-2}{-2} ; \quad \mathbf{d} = -1$$

Donc $\mathbf{a} = 1$; $\mathbf{b} = 1$; $\mathbf{c} = 1$; $\mathbf{d} = -1$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{d} = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1 = 4 > 0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1; 1; 1)$ et $R = \sqrt{4} = 2$

D'où $\Omega(1; 1; 1)$ et $R = 2$

b) Calculer $d(\Omega, P)$ et en déduire que le plan (P)

coupe la sphère suivant un cercle (C).

$$d(\Omega, P) = \frac{|1-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \text{ donc } \Omega \in (P)$$

$$d(\Omega, P) = 0 \text{ et } R = 2 \text{ Donc } d(\Omega, P) < R$$

D'où le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).
c – Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

Puisque $d(\Omega, P) = 0$ le plan (P) coupe la sphère selon le grand cercle de centre $\Omega(1; 1; 1)$ et de rayon $R = 2$.

2) Soit (Δ) la droite passant par le point A(1 ; -2 ; 2) et orthogonal au plan (P)

a) Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

On a (Δ) est orthogonal au (P) et $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur normal au plan (P) donc un vecteur directeur de (Δ)

b) Montrer que $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

$$\vec{\Omega A} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & \vec{i} \\ 1 & -1 & \vec{j} \\ 0 & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = 2\vec{i}$$

$$\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2^2} = 2 \text{ et } \sqrt{2}\|\vec{u}\| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

D'où $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$.

$$\text{On a } \|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\| \text{ donc } \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \sqrt{2}$$

$$\text{on sait que } d(\Omega; (\Delta)) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ donc } d(\Omega; (\Delta)) = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } d(\Omega; (\Delta)) = \sqrt{2} \text{ et } R = 2 \text{ donc } d(\Omega; (\Delta)) < R$$

D'où la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

c) Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{y} = -2 + t \\ \mathbf{z} = 2 - t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2 \\ (1-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (2-t-1)^2 = 4^2 \\ \Leftrightarrow (t-3)^2 + (1-t)^2 = 4^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \\ \text{donc } \Delta = 4 \text{ donc } t = 1 \text{ ou } t = 3 \end{array} \right.$$

$$\text{Si } t = 1 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{y} = -2 + 1 = -1 \\ \mathbf{z} = 2 - 1 = 1 \end{array} \right. \text{ si } t = 3 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = 1 \\ \mathbf{y} = -2 + 3 = 1 \\ \mathbf{z} = 2 - 3 = -1 \end{array} \right.$$

d'où $(\Delta) \cap (S) = \{E(1; -1; 1); F(1; 1; -1)\}$

Exercice 2 :

Un sac contient 10 boules, indiscernables au toucher.
5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules vertes



$$1) \text{ Montrer que } P(A) = \frac{8}{15} \text{ et } P(B) = \frac{19}{70}$$

5 B ; 3 R ; 2 V

On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac

$$\text{Card}(\Omega) = C_{10}^4 = 210$$

A "parmi les 4 boules tirées une boule exactement est verte"

$$2(V) \quad 8(\bar{V})$$

$$\text{Card}(A) = C_2^1 \times C_8^3 = 2 \times 56 = 112$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$$

B "parmi les 4 boules tirées trois boules sont exactement de même couleur "

$$5(B) \quad 5(\bar{B}) \quad 3(R) \quad 7(\bar{R})$$

$$\text{Card}(B) = C_5^3 \times C_5^1 + C_3^3 \times C_7^1 = 57$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70}$$

2) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules vertes tirées.

a) Montrer que $P(X = 2) = \frac{2}{15}$

$$2(V) - 8(\bar{V})$$

$$\text{card}(X = 2) = C_2^2 \times C_8^2 = 28$$

$$P(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique

$E(X)$ est égale à $\frac{4}{5}$

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\text{card}(X = 0) = C_8^4 = 70$$

$$P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{8}{15}$$

k	0	1	2
P(X=k)	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

(On a $\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = 1$)

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}$$

Exercice 3 :

1) Résoudre dans C : $z^2 + 4z + 8 = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 \Leftrightarrow \Delta = 16 - 32 \Leftrightarrow \Delta = -16$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = -2 - 2i$$

D'où $S = \{-2 - 2i; -2 + 2i\}$

2) A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 + 2i ; b = 4 - 4i ; c = 4 + 8i$$

a) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre

$$A \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{2}$$

Montrer que : $z' = -iz - 4$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - a) + a$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) (z + 2 - 2i) - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -i(z + 2 - 2i) - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz - 2i - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz - 4$$

D'où $z' = -iz - 4$

b) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

$$R(C) = B \Leftrightarrow b = -ic - 4 ?$$

$$b = -i(4 + 8i) - 4 \Leftrightarrow b = -4i + 8 - 4 \Leftrightarrow b = 4 - 4i$$

D'où $R(C) = B$

$$\text{On a } R(C) = B \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\vec{AC}; \vec{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

D'où ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

3) a) Montrer que $|c - \omega| = 6$

où l'affixe du point Ω , milieu du segment $[BC]$

$$\omega = \frac{b + c}{2} = \frac{4 - 4i + 4 + 8i}{2} = 4 + 2i \text{ donc } \omega = 4 + 2i$$

$$\text{Donc } |c - \omega| = |4 + 8i - 4 - 2i| = |6i| = 6|i| = 6$$

D'où $|c - \omega| = 6$

b) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

$$|z - \omega| = 6 \Leftrightarrow OM = 6 \quad M(z) \subset \Omega(\omega)$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle de centre Ω et de rayon 6.

On a $|c - \omega| = 6 \Leftrightarrow OC = 6$ or Ω est le milieu du segment $[BC]$ donc $\Omega B = \Omega C = 6$

$$|\mathbf{a} - \omega| = |-2 + 2i - 4 - 2i| \Leftrightarrow OA = |-6| \Leftrightarrow OA = 6$$

$$OA = \Omega B = \Omega C = 6$$

D'où l'ensemble des points M d'affixe z : tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 3 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 12 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 17$$

1) a) Montrer que : $U_n > 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 17$ donc $U_0 > 16$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 16$ et montrons que $U_{n+1} > 16$. Puisque $U_n > 16$ donc

$$U_n > 16 \Leftrightarrow \frac{1}{4}U_n > \frac{1}{4} \times 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}U_n + 12 > 4 + 12 \Leftrightarrow U_{n+1} > 16$$

D'où $U_n > 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et en déduire que la suite (U_n) est convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + 12 - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{48 - 3U_n}{4} = \frac{3}{4}(16 - U_n)$$

On a $U_n > 16$ donc $0 > 16 - U_n$

$$\frac{3}{4}(16 - U_n) < 0 \quad \text{Donc } U_{n+1} - U_n < 0$$

d'où (U_n) est décroissante.

On a (U_n) est décroissante et minorée par 16.

D'où la suite (U_n) est convergente

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}U_n + 12 - 16$$

$$= \frac{1}{4}U_n - 4 = \frac{1}{4}(U_n - 16) = \frac{1}{4}V_n$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

$$\text{b) En déduire que } U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

puis déterminer la limite de la suite (U_n) .

On a (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ de

$$\text{premier terme } V_0 = \frac{U_0 - 1}{3 - U_0} = 1$$

$$V_0 = U_0 - 16 = 17 - 16 = 1 \quad \text{et} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{Donc } V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ or } V_n = U_n - 16$$

$$\text{Donc } U_n = V_n + 16$$

$$\text{D'où } U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \left(16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 16 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\text{D'où} \quad \lim U_n = 16$$

c) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $U_n < 16,0001$

$$\text{On a } U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001 - 16 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-4} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{4}\right)^n < \log 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow n \log\left(\frac{1}{4}\right) < -4 \log 10 \Leftrightarrow -n \log(4) < -4$$

$$\Leftrightarrow n \log(4) > 4 \Leftrightarrow n > \frac{4}{\log(4)}$$

$$n > \frac{4}{\log(4)} \Leftrightarrow n > 6,6438$$

La plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $U_n < 16,0001$ est $n = 7$

Problème :

I) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$$

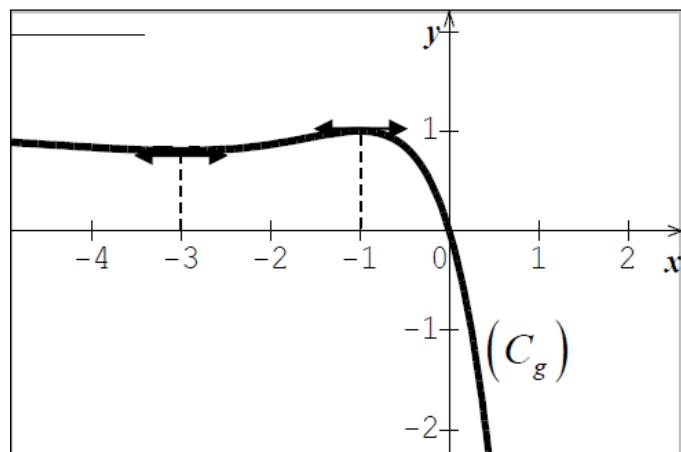
1) Vérifier que $g(0) = 0$

$$g(0) = 1 - (0+1)^2 e^0 = 1 - 1 = 0$$

2) Montrer que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$ et

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$$

A partir de la courbe représentative (C_g) de la fonction g



On sait que (C_g) est en dessous de l'axe des abscisses sur $[0; +\infty[$ d'où $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$

et (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty, 0]$ d'où $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$

II) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 2 cm)

$$1) \text{ a) Vérifier que } f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$$

Pour tout x de \mathbb{R} puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = x + 1 - 4 \frac{x^2}{4} e^{\frac{2x}{2}} - e^x$$

$$= x + 1 - x^2 e^x - e^x = x + 1 - (x^2 + 1)e^x = f(x)$$

$$\text{D'où } f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1)$ et en déduire que

La droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x - (x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0$ d'où la droite (D)

d'équation $y = x + 1$ est asymptote au voisinage de $-\infty$.

$$f(x) - (x + 1) = -(x^2 + 1)e^x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Car $(x^2 + 1) > 0$ et $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où (C_g) est en dessous de la droite (D) sur \mathbb{R}

2) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(On pourra écrire $f(x)$ sous forme $x \left[1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x \right]$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x + \frac{1}{x})e^x = -\infty$$

b) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} -(x + \frac{1}{x})e^x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction des ordonnées

3) a) Montrer que : $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

$$f'(x) = 1 - 2xe^x - (x^2 + 1)e^x = 1 - (x^2 - 2x + 1)e^x = 1 - (x+1)^2 e^x = g(x)$$

D'où $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que la fonction f est croissante sur $[-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau de la fonction f sur \mathbb{R} .

On a $f'(x) = g(x)$ or $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$

Et $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$ donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$

Et $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$ donc f est croissante sur $]-\infty; 0]$

X	0	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

c) Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses -3 et -1

On a $f'(x) = g(x)$

Donc

$$f''(x) = g'(x) = -2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x$$

$$f''(x) = (x+1)e^x(-2-x-1) = (x+1)(-x-3)e^x$$

Or $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(-x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ou } -x-3=0$$

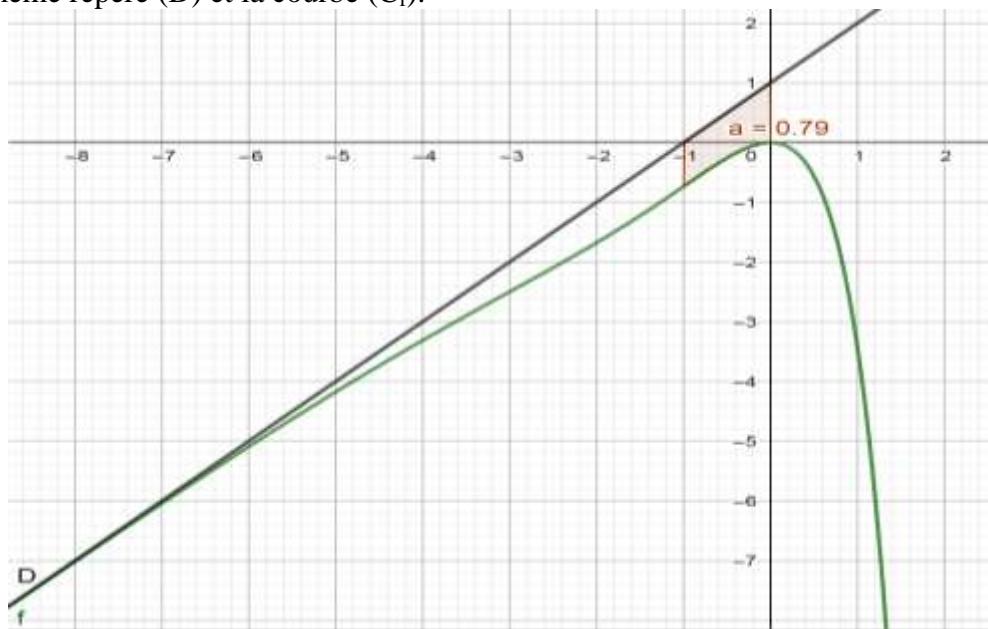
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=-3$$

	- ∞	-3	-1	$+\infty$
- $x-3$	+	0	-	-
$x+1$	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	-

la courbe (C) admet deux points d'inflexions d'abscisses -3 et -1



4) Tracer dans le même repère (D) et la courbe (C_f).



5) a) Vérifier $\mathbf{H}: \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}-1)e^{\mathbf{x}}$ est une fonction primitive de la fonction $\mathbf{h}: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}e^{\mathbf{x}}$ sur \mathbb{R} .

Puis montrer que $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}'(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{x}-1)e^{\mathbf{x}})' = e^{\mathbf{x}} + (\mathbf{x}-1)e^{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ &= (1+\mathbf{x}-1)e^{\mathbf{x}} = xe^{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

D'où H est une primitive de h sur \mathbb{R} $\int_{-1}^0 xe^x dx = \left[(\mathbf{x}-1)e^{\mathbf{x}} \right]_{-1}^0 = -1 + 2e^{-1} = \frac{2}{e} - 1$

D'où $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3(1 - \frac{2}{e})$$

$$u(x) = x^2 + 1 \quad u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx &= \left[(x^2 + 1)e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2xe^x dx \\ &= 1 - 2e^{-1} - 2 \int_{-1}^0 xe^x dx = 1 - 2e^{-1} - 2\left(\frac{2}{e} - 1\right) \quad \text{D'où } \int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right) \\ &= 3 - 6e^{-1} = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)\end{aligned}$$

c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D) l'axe des ordonnées et la droite $x = -1$

$$A = \int_{-1}^0 (x+1-f(x))dx \times 2\text{cm} \times 2\text{cm}$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx \times 4\text{cm}^2 = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)4\text{cm}^2$$

D'où $A = 12\left(1 - \frac{2}{e}\right)\text{cm}^2$