Année scolaire : 2022 – 2023	Solutions examen 2014 SN	AGOUZAL 2 BPCF - 2 BSVTF

Exercice 1 : (2014 SN) (3pts)
Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points A(0;3;1), B(-1;3;0) et C(0;5;0) et (S) la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ et en déduire que A, B et C sont non alignés.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
Soit M(x ;y ;z)∈ (ABC)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

$$(ABC):2x-y-2z+d=0$$

Or $A(0;3;1)\in(ABC)$

Donc $2\times0-3-2\times1+d=0\Leftrightarrow d=5$

D'où $(ABC):2x-y-2z+5=0$

2) a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2\ ;0\ ;0)$ et de rayon 3

$$(S):x^2+y^2+z^2-4x-5=0$$

$a=\frac{-4}{-2}$; $b=\frac{0}{-2}$; $c=\frac{0}{-2}$; $d=-5$

Donc $a=2$; $b=0$; $c=0$; $d=-5$

$a^2+b^2+c^2-d=2^2+0^2+0^2+5=9>0$

Donc le centre de (S) est $\Omega(2;0;0)$ et $R=\sqrt{9}=3$

D'où $\Omega(2;0;0)$ et rayon $R=3$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

$(ABC):2x-y-2z+5=0$ $\quad\Omega(2;0;0)$

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$$

On a $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=3$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).
H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)
Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;-1;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit M(x ;y ;z)∈ (Δ) $\quad\Omega(2;0;0)$

$(\Delta):\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=-t\\z=-2t\\2x-y-2z+5=0\end{cases}$$

$2(2+2t)-(-t)-2(-2t)+5=0$

Donc $9t+9=0\Leftrightarrow9t=-9\Leftrightarrow t=-1$

$\begin{cases}x=2-2=0\\y=1\\z=2\end{cases}$ donc $(\Delta)\cap(ABC)=\{H(0;1;2)\}$

D'où $H(0;1;2)$ est le point de contact de (S) et (ABC).

Exercice 2 :(2014 SN) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$

$\Delta=\sqrt{2}^2-4\times1\times2=-6$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$

D'où $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2) Soit le nombre complexe u tel que :

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

a) Ecrire u sous forme trigonométrique.

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|u|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|1+i\sqrt{3}|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+1}=\sqrt{2}$$

$$u=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$u=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

b) En déduire que u^6 est un réel.

$$u^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$

$$u^6 = 8\left(\cos\frac{6\pi}{3} + \sin\frac{6\pi}{3}\right)$$

$$u^6 = 8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 8(1 + i\times 0)$$

D'où $u^6 = 8$

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z′ en fonction de z

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image du point M par la rotation R.

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_O)$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

D'où $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

$$R(A) = B \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a \ ?$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - 4i\sqrt{3})$$

$$= 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6 = 8 = b$$

D'où $R(A) = B$

c) En déduire que le triangle OAB est équilatéral

$R(A) = B$ donc $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'où le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 3 : :(2014 SN) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 13$$

1) Montrer que : $U_n < 14 \qquad \forall n \in N$

Pour n = 0 on a $U_0 = 13$ donc $U_0 < 14$

Soit n ∈ ℕ supposons que $U_n < 14$ et montrons que $U_{n+1} < 14$

On a $U_n < 14$ donc

$$\frac{1}{2}U_n < \frac{1}{2}14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + 7 < 7 + 7 \Leftrightarrow U_{n+1} < 14$$

D'où $U_n < 14 \qquad \forall n \in N$

2) Soit (V_n) la suite définie par :

$$V_n = 14 - U_n \qquad \forall n \in N$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$? $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{n+1} = 14 - U_{n+1} = 14 - \frac{1}{2}U_n - 7 = 7 - \frac{1}{2}U_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}(14 - U_n) = \frac{1}{2}V_n$$

D'où $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

De premier terme $V_0 = 14 - U_0 = 14 - 13 = 1$

Donc $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

b) En déduire que : $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in N$

puis Calculer $\lim U_n$

On a $V_n = 14 - U_n$ donc $U_n = 14 - V_n$ et $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \forall n \in N$

$$\lim U_n = \lim\left(14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 14 \ \text{car} \ \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1$$

D'où $\lim U_n = 14$

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle

$$U_n > 13{,}99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13{,}99$$

$$\Leftrightarrow 14 - 13{,}99 > \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$$

la fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^n < \log 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n\log\frac{1}{2} < -2\log 10$$

$$\Leftrightarrow -n\log 2 < -2 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$$

Donc $U_n > 13{,}99 \Leftrightarrow n > \frac{2}{\log 2}$

$\frac{2}{\log 2} \approx 6{,}643$ d'où $n = 7$

Exercice 4 : (2014 SN) (3pts)

1) On tire simultanément et au hasard **deux jetons** du sac

Soit l'événement : A ″ la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 ″

Montrer que $P(A)=\frac{5}{9}$

5 (0) ; 4 (1)

$$Card(\Omega)=C_9^2=36$$

0 + 1 = 1

$$Card(A)=C_5^1\times C_4^1=20$$

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

2) a) Montrer que la probabilité de gain de Said est $\frac{1}{6}$

Soit B ″Obtenir deux jetons portant chacun le chiffre 1″

$$Card(B)=C_4^2=6$$

$$P(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

b) **Quelle est la probabilité** pour que Said gagne exactement deux fois.

La probabilité de gain de Said exactement deux fois

est : $C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$

D'où la probabilité demandée est : $\frac{5}{72}$

Problème : (2014 SN) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$$

1) Montrer que $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

et en déduire que g est croissante sur $]0;+\infty[$

$$g(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x\qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

$$g'(x)=-\frac{-2x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

D'où $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

On a $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0\quad \forall x>0$

D'où g est croissante sur $]0;+\infty[$

2) Vérifier que g(1) = 0 puis en déduire que :

$g(x)\le 0\ \forall\in]0,1]$ et $g(x)\ge 0\ \forall\in[1;+\infty[$

$$g(1)=1-\frac{1}{1^2}+\ln 1=1-1+0=0$$

Donc $g(1)=0$

$\forall\in]0,1]$ donc $0<x\le 1$

g est croissante sur $]0;+\infty[$ et $x\le 1$ **donc**

$$g(x)\le g(1)\Leftrightarrow g(x)\le 0$$

D'où $\forall\in]0,1]\quad g(x)\le 0$

$\forall\in[1;+\infty[\quad x\ge 1$ et g est croissante sur $]0;+\infty[$

donc $g(x)\ge g(1)\Leftrightarrow g(x)\ge 0$

D'où $\forall\in[1;+\infty[\quad g(x)\ge 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

par : $f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}$

1) Montrer que $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Car $\lim_{x\to0^+} x^2=0^+$ et $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$\lim_{x\to0^+}(1+\ln x)^2=+\infty$ et $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$

D'où $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

On a $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à la courbe (C).

2) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Car et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}(1+\ln x)^2=+\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ (on put poser $t=\sqrt{x}$ puis montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

On a $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow x=t^2$ Si $x\to+\infty$ donc $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1+\ln t^2)^2}{t^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+2\ln t}{t}\right)^2$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+2\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

D'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \ ?$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}+\frac{1}{x^3}=0$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$

D'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

c) Déterminer la branche infinie de **(C)** au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

3) a) Montrer que: $f'(x)=\frac{2g(x)}{x} \quad \forall\in]0;+\infty[$

puis en déduire que est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

$$f(x)=(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2} \quad \forall\in]0;+\infty[$$

$$f'(x)=2(1+\ln x)(1+\ln x)'-\frac{2x}{x^4}$$

$$f'(x)=2(1+\ln x)\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}$$

$$f'(x)=\frac{2}{x}\left(1+\ln x-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x}g(x)$$

D'où $f'(x)=\frac{2g(x)}{x} \quad \forall\in]0;+\infty[$

$g(x)\le 0 \ \forall\in]0,1]$ et $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[1;+\infty[$

$f'(x)\le 0 \quad \forall\in]0,1]$ donc f est décroissante sur $]0,1]$ et $f'(x)\ge 0 \ \ \forall x\in[1;+\infty[$ donc f est croissante sur $[1;+\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x)\ge 2 \ \ \forall x\in]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

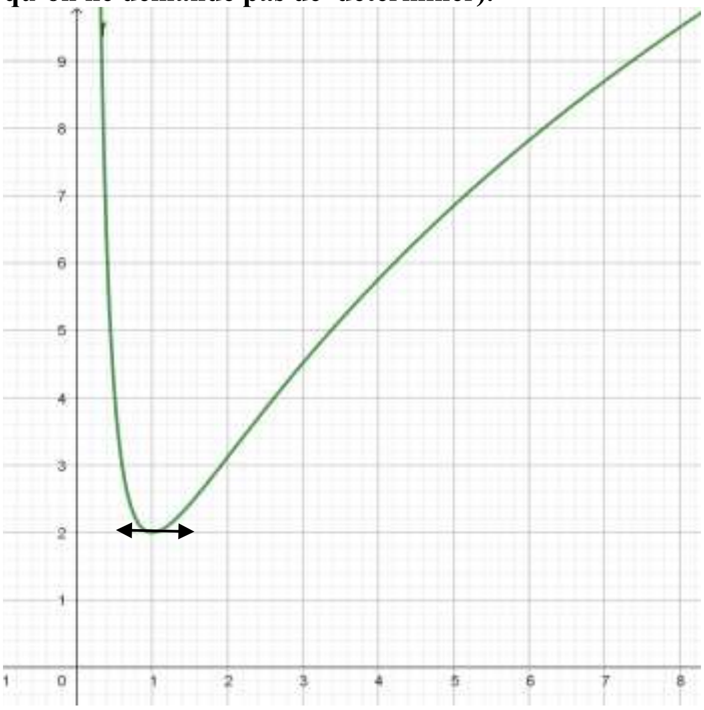
f(1) est le minimum de f sur $]0;+\infty[$

Donc $f(x)\ge f(1) \quad \forall x\in]0;+\infty[$ **or f(1) = 2**

D'où $f(x)\ge 2 \quad \forall x\in]0;+\infty[$

4) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).



5) On considère les intégrales I et J suivants:

$I=\int_1^e (1+\ln x)dx$ et $J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$

a) Montrer que $H: x\to x\ln x$ est une fonction primitive de $h: x\to 1+\ln x$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $I=e$.

$$H'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=1+\ln x=h(x)$$

$$H'(x)=h(x) \qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

D'où H est une primitive de h sur $]0;+\infty[$

$$\int_1^e(1+\ln x)=[x\ln x]_1^e=e\ln e-1\ln 1=e$$

D'où $\int_1^e(1+\ln x)=e$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer $J=2e-1$

$$J=\int_1^e(1+\ln x)^2dx$$

$u(x)=(1+\ln x)^2 \qquad u'(x)=2(1+\ln x)\frac{1}{x}$

$v'(x)=1 \qquad v(x)=x$

$$J=\left[x(1+\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2x(1+\ln x)\frac{1}{x}dx$$

$$J=4e-1-2\int_1^e(1+\ln x)dx=4e-1-2e$$

$$J=2e-1$$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $\mathbf{x = e}$

$$\mathbf{A = \int_1^e |f(x)| dx 1cm \times 1cm}$$

$$\mathbf{A = (\int_1^e f(x)dx)cm^2} \quad \mathbf{f(x) \geq 2 \ \forall x \in]0;+\infty[}$$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f(x)dx} = \int_1^{\mathbf{e}} (1+\ln \mathbf{x})^2 + \frac{1}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}$$

On a $\mathbf{x} \to \frac{1}{\mathbf{x}^2}$ et $\mathbf{x} \to (1+\ln \mathbf{x})^2$ sont continues sur $]0;+\infty[$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f(x)dx} = \int_1^{\mathbf{e}} (1+\ln \mathbf{x})^2\mathbf{dx} + \int_1^{\mathbf{e}} \frac{1}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx}$$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f(x)dx} = \int_1^{\mathbf{e}} (1+\ln \mathbf{x})^2\mathbf{dx} + \left[-\frac{1}{\mathbf{x}}\right]_1^{\mathbf{e}}$$

$$\int_1^{\mathbf{e}} \mathbf{f(x)dx} = 2\mathbf{e} - 1 - \frac{1}{\mathbf{e}} + 1 = \frac{2\mathbf{e}^2 - 1}{\mathbf{e}}$$

D'où $\mathbf{A} = \frac{2\mathbf{e}^2 - 1}{\mathbf{e}}\mathbf{cm}^2$