

Exercice 1 :

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(1;1;-1)$, $B(0;1;-2)$ et $C(3;2;1)$ et

(S) la sphère d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

1) Montrer que (S) est de centre $\Omega(1; 0; 1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$;

$$\mathbf{a} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{b} = \frac{0}{-2}; \quad \mathbf{c} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{d} = -1$$

Donc $\mathbf{a} = 1$; $\mathbf{b} = 0$; $\mathbf{c} = 1$; $\mathbf{d} = -1$

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{d} = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1 = 3 > 0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1;0;1)$ et $\mathbf{R} = \sqrt{3}$

D'où $\Omega(1;0;1)$ et rayon $\mathbf{R} = \sqrt{3}$

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \vec{i} - \vec{k}$ et vérifier que : $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

$C(3;2;1)$; $B(0;1;-2)$; $A(1;1;-1)$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} = \vec{i} - \vec{k}$

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } (ABC)$$

(ABC) : $1x + 0y - 1z + d = 0$ or $B(0;1;-2) \in (ABC)$

(ABC) : $x - z + d = 0$ or $B(0;1;-2) \in (ABC)$

Donc $0 - (-2) + d = 0$ donc $d = -2$

D'où (ABC) : $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$

b) Vérifier que : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1.

(ABC) : $\mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0$ $\Omega(1;0;1)$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

D'où $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$

On a $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ et $\mathbf{R} = \sqrt{3}$

Donc $d(\Omega, (ABC)) < \mathbf{R}$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle (Γ)

De rayon $\sqrt{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{3-2} = 1$

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + \mathbf{t} \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - \mathbf{t} \end{cases} \quad (\mathbf{t} \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

On a (Δ) est perpendiculaire au (ABC).

Donc $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}}(1;0;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc c'est un vecteur directeur de (Δ)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$ $\Omega(1;0;1)$

(Δ) : $\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + \mathbf{t} \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - \mathbf{t} \end{cases} \quad (\mathbf{t} \in \mathbb{R})$ est une représentation

paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) est (2;0;0)

$\mathbf{M}(\mathbf{x}; \mathbf{y}; \mathbf{z}) \in (\Delta) \cap (ABC)$ équivaut à

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + \mathbf{t} \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - \mathbf{t} \\ \mathbf{x} - \mathbf{z} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(1 + \mathbf{t}) - (1 - \mathbf{t}) - 2 = 0$$

$$\text{Donc } 1 + \mathbf{t} - 1 + \mathbf{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\mathbf{t} = 2 \Leftrightarrow \mathbf{t} = 1$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = 1 + 1 \\ \mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{z} = 1 - 1 \end{cases} \text{ d'où } \mathbf{H}(2;0;0)$$

$$(\Delta) \cap (ABC) = \{\mathbf{H}(2;0;0)\}$$

c) En déduire le centre du cercle (Γ)

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC)

Donc $\mathbf{H}(2;0;0)$ est le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 :

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $\mathbf{Z}^2 - 12\mathbf{Z} + 61 = 0$

$$\mathbf{Z}^2 - 12\mathbf{Z} + 61 = 0$$

$$\Delta = (12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100$$

Don l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1 = \frac{12 + i\sqrt{100}}{2} = \frac{12 + 10i}{2} = 6 + 5i \text{ et } \mathbf{z}_2 = \overline{\mathbf{z}_1} = 6 - 5i$$

D'où $\mathbf{S} = \{6 + 5i; 6 - 5i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 6 - 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4 - 2\mathbf{i}$, $\mathbf{c} = 2 + \mathbf{i}$

a) Calculer $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}}$ et en déduire que A, B et C sont alignés.

$$\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = \frac{6-5\mathbf{i}-2-\mathbf{i}}{4-2\mathbf{i}-2-\mathbf{i}} = \frac{4-6\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}$$

$$\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = \frac{2(2-3\mathbf{i})}{2-3\mathbf{i}} = 2$$

On a $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = 2$ donc $\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} \in \mathbb{R}$

D'où A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur \vec{u} d'affixe $1 + 5\mathbf{i}$
b) Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6\mathbf{i}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{C}) = \mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{c} + \text{aff}(\vec{u}) \Leftrightarrow \mathbf{d} = 2 + \mathbf{i} + 1 + 5\mathbf{i}$$

D'où $\mathbf{d} = 3 + 6\mathbf{i}$

c) Montrer que $\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = -1 + \mathbf{i}$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est un

argument de $-1 + \mathbf{i}$

$$\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = \frac{3+6\mathbf{i}-2-\mathbf{i}}{4-2\mathbf{i}-2-\mathbf{i}} = \frac{1+5\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}$$

$$\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = \frac{(1+5\mathbf{i})(2+3\mathbf{i})}{(2-3\mathbf{i})(2+3\mathbf{i})} = \frac{2-15+3\mathbf{i}+10\mathbf{i}}{2^2+3^2}$$

$$\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = \frac{13(-1+\mathbf{i})}{13} = -1 + \mathbf{i}$$

D'où $\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = -1 + \mathbf{i}$

$$|-1 + \mathbf{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$-1 + \mathbf{i} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} + \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-1 + \mathbf{i} = \sqrt{2} \left(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + \mathbf{i} \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \right)$$

$$\text{Donc } \frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}} = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + \mathbf{i} \sin(\frac{3\pi}{4}) \right)$$

D'où $\arg(\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

d) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathbf{CB}}; \overrightarrow{\mathbf{CD}})$

On sait que $(\overrightarrow{\mathbf{CB}}; \overrightarrow{\mathbf{CD}}) \equiv \arg(\frac{\mathbf{d}-\mathbf{c}}{\mathbf{b}-\mathbf{c}}) [2\pi]$

D'où $(\overrightarrow{\mathbf{CB}}; \overrightarrow{\mathbf{CD}}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

Exercice 3 :

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1 Et deux jetons portent les chiffres 2.

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.

1) A " Obtenir trois jetons portant des chiffres

différents deux à deux " Montrer que : $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{5}{28}$

5 (1) ; 2 (2) ; 1 (0)

$$\text{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_8^3 = 56$$

$$\text{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_5^1 \times \mathbf{C}_2^1 \times \mathbf{C}_1^1 = 10$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{A})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

2) B "la somme des chiffres portés par les jetons tirés est égal à 5 ". Montrer que : $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{5}{56}$

$$2 + 2 + 1 = 5$$

$$\text{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_2^2 \times \mathbf{C}_5^1 = 5$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{B})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{56}$$

3) C "la somme des chiffres portés par les jetons tirés est égal à 4 " Montrer que : $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = \frac{3}{8}$

$$2 + 2 + 0 = 4 ; 2 + 1 + 1 = 4$$

$$\text{Card}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}_2^2 \times \mathbf{C}_1^1 + \mathbf{C}_5^2 \times \mathbf{C}_2^1 = 21$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{C}) = \frac{\text{Card}(\mathbf{C})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

Exercice 4 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 11$$

1) Montrer que: $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} (U_n - 12) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11} U_n - \frac{120}{11}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} U_n - \frac{120}{11}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} (U_n - 12)$$

2) a) Montrer que : $U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 11$ donc $U_0 < 12$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n < 12$ et montrons que $U_{n+1} < 12$ c'est-à-dire $U_{n+1} - 12 < 0$
On a

$$U_n < 12 \Leftrightarrow U_n - 12 < 0 \Leftrightarrow \frac{10}{11} (U_n - 12) < 0$$

$$\text{Or } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11} (U_n - 12) \text{ donc } U_{n+1} - 12 < 0$$

$$\text{D'où } U_n < 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11} U_n + \frac{12}{11} - U_n$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{10U_n - 11U_n + 12}{11}$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{12 - U_n}{11} \quad \text{or } U_n < 12$$

$$\text{Donc } 12 - U_n > 0 \text{ donc } U_{n+1} - U_n > 0$$

D'où (U_n) est strictement croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente.
On a (U_n) est strictement croissante et majorée donc (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = U_n - 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis écrire V_n en fonction de n .

$$\text{Montrons que } V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = U_{n+1} - 12 \text{ or } U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{10}{11} V_n$$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

$$\text{On a } V_n = V_0 \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } V_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Montrer que $U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$

$$\text{On a } V_n = U_n - 12 \text{ donc } U_n = V_n + 12 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D'où } U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } \lim \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{10}{11} < 1$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 12$$

Problème :

I) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$$

1) a) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]0, 1[$ et en déduire que $\forall x \in]0, 1[\quad g(x) \leq 0$

$$\forall x \in]0, 1[\quad 0 < x < 1 \text{ et } \ln x < 0$$

$$0 < x^2 < 1 \text{ et } \ln x < 0 \quad x^2 > 0$$

$$\text{Donc } -1 < x^2 - 1 < 0 \text{ et } 2x^2 \ln x < 0$$

$$\text{Donc } x^2 - 1 \text{ et } 2x^2 \ln x \text{ ont même signe Sur }]0, 1[$$

$$\text{On a } x^2 - 1 < 0 \text{ et } 2x^2 \ln x < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$\text{Donc } x^2 - 1 + x^2 \ln x < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$\text{D'où } g(x) < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

b) Montrer que $x^2 - 1$ et $x^2 \ln x$ ont même signe Sur $]1, +\infty[$ et en déduire que $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad x > 1 \text{ donc } x^2 > 1 \text{ donc } x^2 - 1 > 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad x > 1 \text{ donc } \ln x > \ln 1 \text{ donc } \ln x > 0$$

$$\text{Car } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[$$

$$\text{Donc } x^2 - 1 \text{ et } 2x^2 \ln x \text{ ont même signe Sur }]1, +\infty[$$

$$\text{On a } x^2 - 1 > 0 \text{ et } 2x^2 \ln x > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$\forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x > 0$$

$$\text{On a } \forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 - 1 \geq 0 \text{ et } 2x^2 \ln x \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in [1, +\infty[\quad x^2 - 1 + 2x^2 \ln x \geq 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$$

II) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et en déduire

une interprétation géométrique du résultat.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ la droite d'équation } x = 0$$

est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \ln x}{x}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \right) \ln x$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) \ln x = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln x$$

$$f'(x) = 2x \ln x + (x^2 - 1) \frac{1}{x} = \frac{(x^2 - 1) + 2x^2 \ln x}{x}$$

D'où $f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$

$$f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 0$$

$f'(1) = 0$ la courbe (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

b) En déduire que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

On a $\forall x \in]0, 1] \quad g(x) \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1]$

Donc f est décroissante sur $]0, 1]$

On a $\forall x \in [1, +\infty[\quad g(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$

Donc f est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

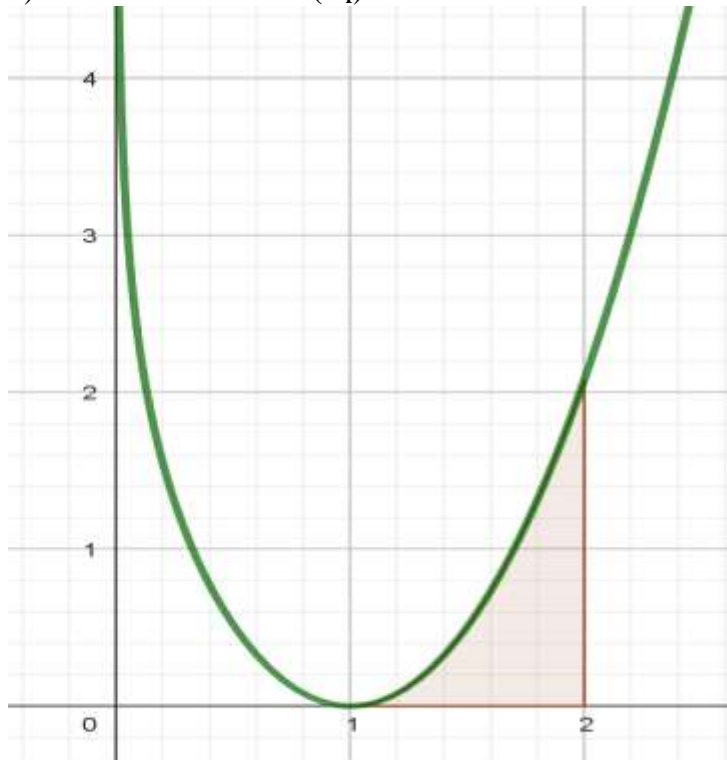
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$

On a $f(1) = 0$ est le minimum de f sur I

Donc $f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in]0, +\infty[$

D'où $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

3) Construire la courbe (C_f) .



4) a - Montrer que $u: x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $v: x \rightarrow x^2 - 1$ sur \mathbb{R}

$$u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x \right)' = \frac{1}{3} 3x^2 - 1 = x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où $u: x \rightarrow \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction

$v: x \rightarrow x^2 - 1$ sur \mathbb{R}

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln 2)$$

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^2 - 1 \quad v(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx &= \left[\left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2 \right) \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{3} x^2 - 1 \right) dx = \frac{2}{3} \ln 2 - \left[\frac{1}{9} x^3 - x \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \left(\frac{8}{9} - 2 - \frac{1}{9} + 1 \right) = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{7}{9} + 1 = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$D'où \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln 2)$$

c - Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx \times 3\text{cm} \times 3\text{cm}$$

$$A = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx \times 9\text{cm}^2 = \frac{2}{9} (1 + 3 \ln 2) 9\text{cm}^2$$

$$D'où A = (2 + 6 \ln 2) \text{cm}^2$$