



**Centro de Investigación y de Estudios
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional**

Unidad de Zacatenco

Departamento de Matemáticas

**Modelos estocásticos de tasas de interés con
aplicaciones a finanzas**

T E S I S

Que presenta

DAVID ALBERTO NAVARRETE LIZARDI

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Directores de Tesis:

Dr. Onésimo Hernández Lerma.

Dr. Héctor Jasso Fuentes.

Ciudad de México

Agosto 2023

Agradecimientos

Quiero agradecer al Conacyt, por el apoyo económico que me dieron por medio de la beca de maestría.

A mis asesores, por compartir conmigo su conocimiento y ser una guía para mí durante la parte más importante de mi vida.

A mis padres, que me criaron cual una planta en una tierra fértil, asegurándose que creciera como un árbol. Me dieron la educación y formación necesaria para convertirme en el esforzado varón que ahora soy; y ahora, descansando bajo el velo azul de Dios siguen guiando mi camino. Gracias por todo, los amaré por siempre.

Resumen

En este trabajo estudiamos algunos modelos estocásticos de tasas de interés. Se proporciona una descripción general de los mismos, acompañado de la habitual fórmula de Ito para ecuaciones diferenciales estocásticas, damos una alternativa para hallar la solución de los mismos y además se estudia brevemente la estabilidad de las soluciones obtenidas. El enfoque de dicha alternativa se basa en el uso de un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Finalmente, veremos una de las aplicaciones más comunes de estos modelos, como es el análisis de los bonos cupón cero. Se presentara la ecuacion diferencial parcial que determina su precio, se dará un método numérico para estimar sus parámetros y estudiaremos su representación más famosa en la economía mexicana (CETES).

Abstract

In this paper we study some stochastic models of interest rates. A general description of them is provided, accompanied by the usual Ito formula for stochastic differential equations, we give an alternative to find their solution and also briefly studies the stability of the solutions obtained. The approach of said alternative is based on the use of a method to solve linear ordinary differential equations.

Finally, we will see one of the most common applications of these models, which is the analysis of zero coupon bonds. The partial differential equation that determines its price will be presented, a numerical method will be given to estimate its parameters and we will study its most famous representation in the Mexican economy (CETES).

Índice general

Introducción	vii
1. Breve historia de las matemáticas financieras.	1
2. Modelos unifactoriales de tasa corta	7
2.1. Modelo de tasa corta de Vasicek	8
2.1.1. Modelo determinista de Vasicek	8
2.1.2. Modelo estocástico de Vasicek	10
2.1.3. Propiedades del modelo de Vasicek	11
2.1.4. Estabilidad del modelo de Vasicek	13
2.2. Modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross	13
2.2.1. Propiedades del modelo CIR	15
2.2.2. Estabilidad del modelo CIR	19
2.3. Modelo de tasa corta de Hull and White	21
2.3.1. Propiedades del modelo Hull and White	22
2.3.2. Estabilidad del modelo de Hull and White	23
2.4. Resumen	23
3. Aplicación a modelos financieros	25
3.1. Calibración del modelo de Vasicek utilizando mínimos cuadrados	25
3.2. Aplicación del modelo CIR al análisis de bonos de cupón cero . .	28
3.3. Ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero	31
4. Apéndice	33
4.1. Algunos conceptos económicos	33
4.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	34
4.3. Estabilidad en ecuaciones diferenciales estocásticas	36
4.4. Método de Euler-Maruyana	37
4.5. Gráficas de modelos estocásticos usando Matlab	39
Bibliografía	42

Introducción

En la actualidad se vive un entorno de incertidumbre debido a una desaceleración económica mundial intensificada en alcance, profundidad y celeridad por diversos aspectos geopolíticos, los cuales afectan el comportamiento de las tasas de interés. La capacidad de algunos modelos para describir y explicar, a través de parámetros, la existencia de tasas de interés negativas, como en el caso de Asia y Europa ha hecho que estos modelos ganen relevancia en nuestros días.

El objetivo de este trabajo es, siguiendo los pasos de Oksendal [14], Govindan [6, 5, 4] y Venegas [19], por mencionar algunos, hacer que la parte rigurosa de los modelos estocásticos presentados sea más accesible a un público más amplio con formación en finanzas y economía.

El trabajo consta de 5 capítulos, los cuales se organizan de la siguiente manera: en el capítulo 2 se platica brevemente acerca de la historia de estos modelos con el objetivo de darle al lector un rápido contexto histórico (sin embargo, si el lector así lo cree conveniente puede omitirlos); el capítulo 3 presenta un análisis de los modelos de Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross y Hull & White; en el capítulo 4 se da una aplicación basada en la discretización de los modelos mediante el método de Euler-Maruyana; finalmente, en el capítulo 5 damos un apéndice de material preliminar.

“Remember that all models are wrong; the practical question is how wrong do they have to be to not be useful.”

(George Box, Empirical Model-Building and Response Surfaces (1987))

Capítulo 1

Breve historia de las matemáticas financieras.

La historia del modelado de los activos con riesgo inicia con el concepto de movimiento browniano. El 29 de mayo 1900, es considerado por muchos el día que nació la matemática financiera. Ese día un estudiante de doctorado francés, Louis Bachelier, desarrolló un modelo del movimiento browniano al derivar el comportamiento dinámico del mercado de acciones de París [2].

Utilizando los conceptos del teorema central del límite y la idea de que el comportamiento del mercado no debería tener memoria, razonó que los incrementos de los precios de las acciones deberían ser independientes y normalmente distribuidos. Además, basado en sus observaciones de la bolsa de valores de París, Bachelier teorizó que había un cierto nivel de aleatoriedad que sustentaba las fluctuaciones de los precios. Argumentó que los precios toman “*caminatas aleatorias*” y dejando que los pasos de tiempo lleguen a cero definió el cambio máximo durante un intervalo de tiempo (para un movimiento browniano unidimensional).

El jurado, si bien señaló que el tema de su trabajo estaba “*muy alejado de los temas que solían considerar sus candidatos*”, valoró su alto grado de originalidad.

La teoría descrita por Bachelier ahora se conoce como el primer modelo de un proceso estocástico. Cinco años más tarde, un joven Albert Einstein ignorando lo hecho por Bachelier llegó a una conclusión similar estudiando el movimiento de las partículas suspendidas en un gas. Él teorizó que realizaban un movimiento aleatorio, el cual llamó “*movimiento browniano*” en honor al biólogo Robert Brown, quien había hecho observaciones similares 80 años atrás mientras observaba las partículas atrapadas dentro de un grano de polen en el agua.

Sin embargo, Bachelier luchó por encontrar trabajo como profesor. Su carre-

2CAPÍTULO 1. BREVE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS.

ra no solo fue interrumpida por el servicio militar durante la Primera Guerra Mundial, sino que luego se le negó una cátedra en la Universidad de Dijon después de que un colega se opusiera a su contratación, citando un aparente error que Bachelier había cometido en su trabajo de grado. El colega obtuvo el apoyo del destacado matemático francés Paul Lévy, quien escribió una carta en la que aceptaba que el trabajo de Bachelier era de mala calidad.

Años después, Lévy reevaluó el “error” de Bachelier y se dio cuenta de que el error lo había cometido él, sin embargo, el daño ya estaba hecho y el trabajo de Bachelier cargó esa estigma de “erroneo” mucho tiempo. Más tarde, Lévy se convirtió en un destacado defensor de la teoría del movimiento browniano que Bachelier había articulado.

En 1930, Ornstein y Uhlenbeck dieron solución a la ecuación de Langevin $dX(t) = -X(t)dt + \sigma dW(t)$ en su famoso paper “*on the theory of Brownian motion*”, en el cual continuando con lo realizado por Einstein años atrás estudiaban el movimiento de una partícula en un gas que es afectada por una fuerza de fricción proporcional a la presión. Posteriormente, en 1942, la solución dada por Ornstein y Uhlenbeck fue desarrollada de manera rigurosa por Doob.

En 1931, Kolmogorov mostró que los procesos markovianos continuos (llamadas difusiones) dependen esencialmente de sólo dos parámetros: uno para la velocidad de la deriva y el otro por el tamaño de la parte puramente aleatoria (el componente difusivo). También relacionó las distribuciones de probabilidad del proceso con las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales, que resolvió y que ahora se conocen como “*ecuaciones de Kolmogorov*”. En este artículo también se refiere y explica brevemente la construcción del movimiento browniano de Bachelier [10, pp. 64, 150-153]. Por supuesto, Kolmogorov no contaba con la integral de Ito por lo que se basó en un análisis del semigrupo y en las ecuaciones diferenciales parciales resultantes.

Después de Kolmogorov pasamos a la fascinante y trágica historia de Wolfgang Döblin. La familia Döblin huyó de los nazis de Alemania, primero a Suiza, y luego a París. Donde cambió su nombre a Vincent Doeblin y se convirtió en ciudadano francés. A finales de la década de 1920, la teoría de probabilidad se estaba poniendo de moda entre los matemáticos, especialmente en Moscú y París. Doeblin trabajó en las cadenas de Markov y posteriormente en procesos de Markov. Quería construir un proceso estocástico con trayectorias continuas que fuera consistente con la teoría analítica de Kolmogorov para los procesos de Markov. Finalmente desarrolló un marco para estudiarlos, lo que sería profético en lo que respecta a desarrollos futuros. Sin embargo, Doeblin fue reclutado para ir al frente de guerra. Antes de ir, escribió sus ideas y puso este trabajo en la caja fuerte de la Academia Nacional de Ciencias de Francia, para ser abierto solo por él o bien después de 100 años. Tras la caída de la línea Maginot en mayo de 1940, para evitar compartir sus ideas con los nazis, Doeblin primero quemó sus notas y luego se quitó la vida. La caja fuerte de la academia se abrió recién en

mayo del 2000, a pedido de su hermano, Claude Doebelin. En sus notas, utilizaba el nuevo concepto de martingalas propuesto por J. Ville recién en 1939 y vio la importancia de estudiar trayectorias, en lugar de depender exclusivamente de las propiedades de distribución. Una idea que tenía era ver el movimiento browniano mediante un reloj aleatorio: lo que hoy se conoce como cambio de tiempo. El cambio de tiempo se relacionó entonces con el coeficiente de difusión.

J. Doob hizo referencia extensamente al trabajo fundamental de Doebelin sobre las cadenas de Markov y los procesos de Markov. Paul Lévy escribió sobre él en un artículo dedicado a la apreciación de su trabajo después de su muerte, donde dice: “*Puedo decir, para dar una idea de la grandeza de Doebelin, que uno puede contar con los dedos de una mano los matemáticos quienes, desde Abel y Galois, han muerto tan jóvenes y han dejado tras de sí una obra tan importante*”[12].

En 1944, Kiyoshi Ito publicó su primer artículo sobre integración estocástica [9], el mismo año en que Kakutani conectaba el movimiento browniano con las funciones armónicas. En sus esfuerzos por modelar los procesos de Markov, Ito construyó una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + \mu(X_t)dt,$$

con W un proceso de Wiener. Ahora había encontrado dos complicaciones: la primera era darle sentido al termino $\sigma(X_t)dW_t$. El segundo reto con el que se encontró era conectar el trabajo de Kolmogorov sobre los procesos de Markov con su interpretación. Vio que la forma de hacer esto era relacionando las trayectorias de X con la función de transición de la difusión, lo cual equivalía a mostrar que la distribución de X resuelve la ecuación forward de Kolmogorov. Esto dio como resultado en 1951 su famoso artículo donde presenta la conocida fórmula de Ito [8]:

$$f(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d[X, X]_t.$$

No fue hasta la década de 1950, varios años después de la muerte de Bachelier, que su trabajo comenzó a tomar relevancia en el mundo de la economía. Paul Samuelson, un economista norteamericano, recibió una postal de L. J. “Jimmie” Savage, un matemático, pidiéndole que leyera la tesis de Bachelier. Con este hecho es que el trabajo de Bachelier comenzó a tomar relevancia y generó estudios alrededor de la teoría que había desarrollado.

En 1965, Paul Samuelson daba argumentos económicos de que los precios fluctuaban aleatoriamente [15], ¡61 años después de que Bachelier lo asumiera! Este artículo formó la base de lo que hoy conocemos como la “*hipótesis del mercado eficiente*”. También mostró que los cambios en los precios futuros no estaban correlacionados a lo largo del tiempo, lo cual es una generalización del modelo de caminata aleatoria. Además, mostró que esta proposición puede extenderse a funciones arbitrarias del precio spot (esto le abrió las puertas a una futura

aplicación a opciones).

En 1965, Samuelson en colaboración con H.P. McKean Jr. [16] (que ese mismo año estaba publicando un libro en colaboración con Ito) el cual desarrolló la parte matemática del apéndice, mostró que un buen modelo para el precio de las acciones es el que hoy conocemos como el “*geométrico browniano*”. Samuelson argumentó que el modelo de Bachelier no logra garantizar que los precios de las acciones sean siempre positivos, y que su modelo conduce a inconsistencias absurdas con los principios económicos, mientras que el movimiento geométrico browniano evita estas trampas (aunque el tiempo le daría de nueva cuenta la razón a Bachelier). También descubrieron la relación entre la opción americana y un problema de frontera libre para la ecuación de calor, esto les permitió determinar el precio de una opción americana. Curiosamente, Samuelson y McKean no se aprovechan de las herramientas del cálculo estocástico, al menos no explícitamente. Las técnicas que McKean utiliza en su apéndice son ecuaciones diferenciales parciales en el más puro espíritu de Kolmogorov.

En 1969, Samuelson y Merton, lograron derivar el postulado de que los pagos de opciones a descuento siguen una martingala como una implicación de una decisión de optimización del inversionista que maximiza la utilidad [13]. Esto, aunado a su trabajo con el movimiento geométrico browniano terminó de cimentar las conocidas formulas de Black-Scholes.

En 1977, Vasicek asumió que la tasa de interés instantánea bajo la medida del mundo real evolucionaba como un proceso de Orstein-Uhlenbeck con coeficientes constantes, en base a esto desarrolló la teoría general de los modelos de estructuras de plazos [17, p. 178]. En esta teoría se supone que:

- La tasa corta¹ sigue una trayectoria continua markoviana.

La propiedad de Markov implica que la tasa corta se caracteriza por una única variable de estado (su valor actual). Así la distribución de probabilidad del segmento $\{r(\tau), \tau \geq t\}$ está completamente determinado por el valor de $r(t)$.

- El precio de un bono se determina mediante la valuación, en un tiempo t , del segmento $\{r(\tau), t \leq \tau \leq T\}$ del proceso de tasa corta durante el plazo del bono.
- El mercado es eficiente, es decir, no hay costos de transacción, la información está disponible para todos los inversionistas simultáneamente y cada inversionista actúa racionalmente (prefiere más riqueza a menos y usa toda la información disponible).

El tercer supuesto implica que los inversionistas tienen expectativas homogéneas y que no es posible un arbitraje rentable sin riesgo. El primer supuesto nos dice

¹Se puede ver la definición en la sección 5.1 del apéndice

que, la dinámica de la tasa corta en un intervalo $[t, T]$, dados sus valores antes del tiempo t , depende sólo del valor actual $r(t)$. El segundo supuesto implica entonces que el precio del bono es una función de $r(t)$. Por tanto, el valor de la tasa corta es la única variable de estado para toda la estructura de plazo.

Durante gran parte de la historia que un modelo pudiera tomar valores negativos se veía como una cualidad indeseada de los mismos (de ahí el incentivo de crear un modelo como el Cox-Ingersoll-Rox que elimina esta característica), pero recientemente estos modelos han cobrado una mayor importancia por su capacidad para describir y explicar, a través de parámetros, la existencia de tasas de interés negativas.

A primera vista, las tasas de interés negativas parecen contraintuitivas. ¿Por qué un prestamista estaría dispuesto a pagarle a alguien para prestarle dinero, considerando que el prestamista es el que corre el riesgo de incumplimiento del préstamo? Sin embargo, hay momentos en que los bancos centrales se quedan sin opciones de política para estimular las economías de sus países y recurren a las tasas de interés negativas como una medida desesperada.

Las tasas de interés negativas son una herramienta de política monetaria reciente poco convencional. El banco central de Suecia fue el primero en implementarlas: en julio de 2009, el Riksbank recortó su tasa de depósito a la vista a -0.25% ². El Banco Central Europeo hizo lo mismo en junio de 2014 cuando redujo su tasa de depósito a -0.1% ³.

Desde entonces, otros países europeos junto con Japón han optado por ofrecer tipos de interés negativos, lo que ha dado lugar a una deuda pública por valor de \$9.5 billones de dólares con rendimientos negativos en 2017⁴.

Cuando se tienen tasas de interés negativas, el efectivo depositado en un banco genera un cargo por almacenamiento, en lugar de la oportunidad de obtener ingresos por intereses. Por ejemplo, uno de los efectos esperados al implementar estas tasas negativas es que al cobrar a los bancos por almacenar sus reservas en el banco central, los asegurados esperan alentar a los bancos a prestar más. En teoría, los bancos preferirían prestar dinero a los prestatarios y ganar al menos algo de interés en lugar de pagar por mantener su dinero en un banco central.

Otra razón principal por la que se ha recurrido a tipos de interés negativos es para reducir el valor del euro. Los rendimientos bajos o negativos de la deuda europea disuadirán a los inversores extranjeros, lo que debilitará la demanda del euro. Si bien esto reduce la oferta de capital financiero, el problema de Europa no es de oferta sino de demanda. Un euro más débil debería estimular la

²Sveriges Riksbank. "Repo Rate Cut to 0.25 Per Cent."

³European Central Bank. "ECB Introduces a Negative Deposit Facility Interest Rate."

⁴CNBC. "Negative-Yielding Government Debt 'Supernova' Jumps to \$9.5 Trillion."

6CAPÍTULO 1. BREVE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS.

demanda de exportaciones y, con suerte, animar a las empresas a expandirse.⁵

⁵Office of the Comptroller of the Currency, “Do Negative Interest Rate Policies Actually Work? (And at What Cost?)”

Capítulo 2

Modelos unifactoriales de tasa corta

Los modelos unifactoriales de tasa corta se utilizan para estudiar la evolución y comportamiento de la tasa de interés instantánea, también llamada tasa corta. Se dicen unifactoriales o de un solo factor ya que el riesgo o la incertidumbre viene dado por un único factor, la volatilidad de los tipos de interés.

De forma general estos modelos son representados por una ecuación diferencial estocástica, la cual está compuesta por una parte determinista y una parte estocástica de la forma:

$$dr(t) = \underbrace{\mu(t, r(t))dt}_{\text{parte determinista}} + \underbrace{\sigma(t, r(t))dW(t)}_{\text{parte estocástica}}, \quad (2.0.1)$$

donde $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ denota el movimiento browniano o proceso de Wiener definido sobre un espacio fijo de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual se puede interpretar como la información del mercado disponible hasta el tiempo t . A su vez $\mu(t, r(t))$ y $\sigma(t, r(t))$ son procesos adaptados a la filtración, estos representan la deriva (o tendencia) y la volatilidad de $r(t)$ respectivamente.

En su mayoría el desarrollo de la teoría financiera tiene por notación simplificada una ecuación diferencial estocástica. Sin embargo, el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica. Cuando nos refiramos a una ecuación de la forma (2.0.1) debemos tener en mente la siguiente integral estocástica

$$r(t) = r_0 + \int_0^t \mu(u, r(u))du + \int_0^t \sigma(u, r(u))dW(u)$$

Es importante señalar que la componente de naturaleza determinista normalmente representa crecimiento o decaimiento, es decir, una tendencia. Mientras

que la componente estocástica, que implica aleatoriedad, involucra la dispersión del proceso.

Una característica importante de estos modelos es la llamada “*regresión a la media*”, que consiste en que cuando el tiempo se va a infinito nuestro modelo tiende a tomar el valor de una “*tendencia*”. Este concepto puede llegar a parecer un tanto antinatural, pero es más común de lo que parece, por ejemplo, la “*tasa natural de desempleo*”. Esta ronda entre un 2% y 5% y forma parte dentro de lo que se considera natural en una economía saludable, ya que incluso encontrándose esta en un estado de pleno empleo, ciertas personas pueden decidir quedarse sin trabajo, en parte porque algunos trabajadores renuncian a su empleo, dejando de percibir ingresos por un tiempo, por distintas razones.

2.1. Modelo de tasa corta de Vasiceck

El modelo de Vasiceck es el modelo unifactorial más popular, ya que se utiliza para predecir los tipos de interés a largo plazo mediante la simulación de tipos de interés a corto plazo. Además, tiene en cuenta que los tipos de interés son distintos en diferentes períodos de tiempo (estructura temporal o dinámica de los tipos de interés).

2.1.1. Modelo determinista de Vasiceck

Como ya mencionamos, los modelos unifactoriales están compuestos por una parte estocástica y una determinista. Primeramente, nos vamos a enfocar en el análisis de esta última para posteriormente motivar la necesidad de introducir un modelo estocástico de tipos de interés a partir de este modelo determinista.

Podemos describir la evolución de los tipos de interés en su forma determinista mediante el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k(\mu - r(t))dt & k > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ r(0) &= r_0 & r_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde μ representa la tendencia y k la velocidad con la que el modelo regresa a esa tendencia. Este modelo es conocido como “*modelo determinista de tipos de interés con reversión a la media*”.

Demostremos la convergencia del modelo de Vasiceck a una tendencia viendo que $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \mu$.

De la interpretación geométrica de la derivada y de la ecuación (2.1.1) podemos observar lo siguiente:

- Si $\mu > r(t) \Rightarrow dr(t) > 0 \Rightarrow r(t)$ es creciente.
- Si $\mu < r(t) \Rightarrow dr(t) < 0 \Rightarrow r(t)$ es decreciente.

Lo anterior significa que si la tasa de interés actual, $r(t)$ es mayor (menor) que nuestra tendencia μ , entonces $r(t)$ tiende a decrecer (crecer).

Notemos que (2.1.1) es una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes de la forma:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (ax(t) + b)dt, \quad t_0 > 0, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Para resolver la ecuación anterior vamos a usar el siguiente método presentado en [20, p. 55]:

- Poner la ecuación linear en la forma estándar

$$\frac{dx(t)}{dt} + P(t)x(t) = f(t).$$

- De la forma estándar, identificar $P(t)$ y encontrar el factor integrante $e^{\int_0^t P(s)ds}$.
- Multiplicar la forma estándar por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es la derivada del producto $e^{\int_0^t P(s)ds}x(t)$:

$$\frac{d}{dt}[e^{\int_0^t P(s)ds}x(t)] = e^{\int_0^t P(s)ds}f(t). \quad (2.1.3)$$

- Integrando sobre el intervalo $[t_0, t]$ ambos lados de la ecuación (2.1.3) con respecto a t obtenemos:

$$x(t) = ce^{-\int_0^t P(s)ds} + e^{-\int_0^t P(s)ds} \int_{t_0}^t e^{\int_0^s P(s)ds} f(s)ds, \quad t > 0, \quad (2.1.4)$$

con $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria.

Por lo tanto, si $a \neq 0$, de las ecuaciones (2.1.2) y (2.1.4) tenemos

$$x(t) = (x_0 e^{-at_0} + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}e^{at_0}.$$

Comparando con (2.1.1) tenemos que $x(t) = r(t)$, $a = -k \neq 0$, $t_0 = 0$ y $b = k\mu$. Por tanto, la evolución temporal del tipo de interés está dado por:

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt}, \quad t \geq 0. \quad (2.1.5)$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ en (2.1.5) vemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \mu + (r_0 - \mu) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = \mu. \quad (2.1.6)$$

Esto indica que, aunque $r(t)$ esté fluctuando, a largo plazo tiende a regresar a la tendencia μ .

2.1.2. Modelo estocástico de Vasicek

En general, el modelado de tasas de interés es bastante complejo ya que estas se ven afectadas por una serie de factores que generan incertidumbre. Algunos de estos factores incluyen decisiones políticas, estado económico, leyes de oferta y demanda, intervención estatal, etc. Esto le da al modelo un alto grado de incertidumbre debido a la complejidad de los subfactores que lo determinan. Por tal motivo lo mejor es no tratar el factor μ como una cantidad determinista, sino como una cantidad aleatoria. Esto motiva la siguiente representación estocástica del parámetro μ :

$$\mu = \mu + \lambda dW(t), \quad \lambda > 0, \quad (2.1.7)$$

donde $W(t)$ es el movimiento browniano y $\lambda > 0$ su intensidad.

De las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.7) obtenemos la forma estocástica de la ecuación de Vasicek:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + \sigma dW(t), \\ r(0) &= r_0, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

donde realizamos la identificación

$$\sigma = k\lambda > 0.$$

La tendencia instantánea $k(\mu - r(t))$ en (2.1.8) representa la fuerza (o mecanismo) que lleva al proceso hacia su tendencia a largo plazo μ , y la constante k representa la velocidad de ajuste. El elemento estocástico $\sigma dW(t)$ hace que el proceso fluctúe alrededor de μ de forma aleatoria pero continua. A continuación, hallaremos la solución a (2.1.8).

Teorema 1 (Modelo de Vasicek). *La ecuación (2.1.8) tiene por solución*

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt} + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dW(s). \quad (2.1.9)$$

Demostración. Haciendo uso del cálculo de Ito (el cual se puede consultar en la sección 5.2 del apéndice), resolveremos (2.1.8), es decir, calcularemos $r(t)$.

Reformularemos (2.1.8) mediante el cambio de variable

$$X(t) = r(t) - \mu \Rightarrow \begin{cases} r(t) = X(t) + \mu \\ dr(t) = dX(t) \end{cases}$$

Con esto obtenemos un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (cuya característica distintiva es que su solución es similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden):

$$\begin{aligned} dX(t) &= -kX(t)dt + \sigma dW(t), \\ X(0) &= r_0 - \mu. \end{aligned}$$

Procedemos a usar la fórmula de Ito para calcular la solución del problema de valores iniciales, para ello tomamos $F(t, X) = e^{kt}X$ e identificamos los datos del problema

$$f(t, X) = -kX, \quad g(t, X) = \sigma.$$

Calculamos las siguientes derivadas parciales

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} = ke^{kt}X, \quad \frac{\partial F(t, X)}{\partial X} = e^{kt}, \quad \frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial X^2} = 0.$$

Con lo cual obtenemos:

$$d(e^{kt}X) = \sigma e^{kt}dW(t).$$

Por tanto, integrando ambos lados en $[0, t]$ con $t \leq T$ obtenemos:

$$e^{kt}X(t) - X(0) = \sigma \int_0^t e^{ks}dW(s) \Rightarrow X(t) = e^{-kt}(X(0) + \sigma \int_0^t e^{ks}dW(s)).$$

Deshaciendo el cambio de variable y simplificando obtenemos (2.1.9)

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt} + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)}dW(s).$$

□

Notemos que nuestra solución se distribuye de manera normal. Basta con recordar que la integral de una función determinista con respecto al browniano es gaussiana.

2.1.3. Propiedades del modelo de Vasiceck

Al analizar el caso determinista de este proceso pudimos observar que dado que es un proceso con reversión a la media este converge a una tendencia a largo plazo, pero entonces, naturalmente, uno puede preguntarse qué tan grande debe ser el horizonte para que el proceso tenga esta distribución límite. Para responder esto primero procederemos por hallar la esperanza y varianza del proceso.

Proposición 1 (Esperanza y varianza del proceso de Vasiceck). *Para el proceso en (2.1.9) tenemos que:*

$$\begin{aligned} E[r(t)] &= \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt}, \\ \text{Var}[r(t)] &= \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-kt}). \end{aligned}$$

Demostración. Para el caso de la esperanza, de (2.1.9) tenemos lo siguiente:

$$E[r(t)] = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt} + \sigma E\left[\int_0^t e^{-k(t-s)}dW(s)\right] = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt} \quad (2.1.10)$$

La última igualdad es consecuencia directa de la propiedad de la esperanza de una integral de Ito.

Procedemos hallar la varianza, de (2.1.9) y (2.1.10) tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Var}[r(t)] &= \text{E}[r(t) - \text{E}r(t)]^2 = \sigma^2 \text{E}\left[\int_0^t e^{-k(t-s)} dW(s)\right]^2 \\ &= \sigma^2 \text{E}\left[\int_0^t e^{-2k(t-s)} ds\right] = \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-kt})\end{aligned}\quad (2.1.11)$$

□

Ahora veamos qué sucede con la esperanza y la varianza cuando $t \rightarrow \infty$. En el caso de la esperanza tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{E}[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mu + (r_0 - \mu)e^{-kt}] = \mu.$$

Con esto podemos concluir que al igual que como vimos al analizar el caso determinista del modelo de Vasicek, este en su forma estocástica, a largo plazo tiende a una tendencia μ .

Para la varianza tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-kt})\right] = \frac{\sigma^2}{2k}.$$

Esto quiere decir que mientras mayor sea la velocidad de reversión a la media, mayor será la deriva hacia la media, lo que nos da una menor varianza.

Ahora que sabemos qué sucede con la distribución a medida que aumenta el horizonte, podemos preguntarnos cuánto tiempo tiene que pasar para que el proceso muestre este valor en la distribución. La respuesta es infinito, pero esta no es una respuesta significativa. Para obtener una respuesta más significativa sería mejor preguntarnos cuánto tiempo tiene que pasar para que el proceso alcance el valor de una constante $c \in \mathbb{R}$. Con lo cual la pregunta es operativa: queremos determinar H tal que

$$\text{E}[r_H] = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kH} = c.$$

Como vimos anteriormente existen dos casos $\mu < r(t)$ y $\mu > r(t)$. Sin pérdida de generalidad supongamos $\mu < r(t)$, de modo que $c \in (\mu, r(t))$ y $c = \mu + \delta$.

Despejando H obtenemos

$$H = \frac{-\ln(\frac{\delta}{r_0 - \mu})}{k}. \quad (2.1.12)$$

El problema con (2.1.12) es que depende de varios parámetros que puede que no conozcamos. Uno puede sortear en cierta medida estas dificultades dando una constante menos general, por ejemplo, usando como en el análisis de material radiactivo el concepto de “*vida media*”. Teniendo en mente este concepto ahora

nos preguntamos qué tan grande debe ser el horizonte para que la media del proceso esté a mitad de camino entre su valor actual y la tendencia. Lo cual se resume a la siguiente ecuación

$$E[r_H] = r_0 + \frac{\mu - r_0}{2}. \quad (2.1.13)$$

Desarrollando (2.1.13) tenemos

$$H = \frac{\ln 2}{k}.$$

Notemos que esta última expresión depende únicamente de la velocidad de reversión k , por lo que mientras mayor sea esta velocidad de reversión, menor será el periodo necesario para que se alcance el punto medio entre el valor actual del proceso y su media a largo plazo.

2.1.4. Estabilidad del modelo de Vasicek

En esta parte vamos a demostrar que el modelo de Vasicek es exponencialmente 2-estable (se puede ver la definición en la sección 4.3 del apéndice).

La ventaja de demostrar la estabilidad exponencial en el modelo de Vasicek es que esta nos garantiza una tasa mínima de decaimiento, es decir, una estimación de qué tan rápido convergen las soluciones.

Proposición 2. *La solución de la ecuación de Vasicek es exponencialmente 2-estable.*

Demostración. Sea $r^*(t)$ la solución de (2.1.8) que satisface la condición inicial $r^*(0) = r_0^*$. Entonces usando la ecuación correspondiente (2.1.9) para $r^*(t)$, tenemos

$$r(t) - r^*(t) = (r_0 - r_0^*)e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

Tomando esperanza en ambos lados de la ecuación pasada, obtenemos

$$E|r(t) - r^*(t)|^2 = E|r_0 - r_0^*|^2 e^{-kt} = |r_0 - r_0^*|^2 e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

Así, $r(t)$ es exponencialmente 2-estable con $t_0 = 0$. □

2.2. Modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross

En la literatura se pueden encontrar varias clases de modelos que describen el comportamiento de una tasa corta con reversión a la media. En particular, si la tasa corta sigue un proceso de la forma:

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + \sigma r(t)^\beta dW(t), \quad (2.2.1)$$

donde k , μ y σ son constantes positivas, $\beta \geq 0$, se obtiene una familia muy importante de modelos de tasa corta con parámetros constantes y reversión a la media.

Los casos en que $\beta = 0$ y $\beta = 1/2$ son muy relevantes, ya que representan modelos que pueden tratarse analíticamente. En particular, cuando $\beta = 0$ obtenemos el ya estudiado modelo de Vasicek, si $\beta = 1/2$ tenemos el modelo de Cox, Ingersoll y Ross. Los casos en que (2.2.1) toma valores de β distintos a los anteriores son poco utilizados, esto se debe a la complejidad y dificultad técnica que tienen al hacer un tratamiento analítico.

En este capítulo vamos a estudiar el caso cuando $\beta = 1/2$ en (2.2.1), el cual está representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad t > 0, \\ r(0) &= r_0. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Es importante observar que al considerar $\sqrt{r(t)}$ en el término estocástico, el proceso de la tasa corta deja de tener distribución normal. De hecho, en este caso, la distribución de la tasa corta corresponde a una χ^2 no central [3, p. 392]. Ya que el término $\mu(k - r(t))$ de este proceso es el mismo que el definido en el proceso de Vasicek, podemos concluir que la propiedad de reversión a la media se preserva.

Es imprescindible mencionar que la estructura de plazos generada con el modelo de Vasicek puede producir tasas negativas con probabilidad positiva. Esta característica desaparece en el modelo Cox-Ingersoll-Ross, ya que en este modelo las tasas siempre son positivas, lo cual es consecuencia de la condición de Feller (la solución está acotada por debajo por el cero). Si la condición $2\mu k \geq \sigma^2$ se satisface, entonces el origen se vuelve inaccesible para el proceso [3, p. 391]. De otra forma, la tasa de interés debe de ser cero. Pero, en su artículo, se nota que la tasa de interés, que es esencialmente no negativa, nunca puede tomar valores negativos. Esto es, el proceso CIR siempre toma valores no negativos, a diferencia de Vasicek.

Procedemos a encontrar la solución para el modelo de CIR. Para este propósito vamos a presentar un método alternativo a la fórmula de Ito (método que utilizamos para hallar la solución del modelo de Vasicek), el cual se basa en el método de solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias presentado en la sección 2.1.1, con la diferencia que ahora vamos a trabajar con la ecuación diferencial estocástica de primer orden

$$\frac{dr(t)}{dt} + P(t)r(t) = f(t, \omega), \quad t > 0, \tag{2.2.3}$$

donde $f(t, \omega) = f_1(t) + f_2(t)\xi(t, \omega)$ es un proceso estocástico. $P(t)$, $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones continuas de t con valores en los reales.

Teorema 2 (Modelo de Cox–Ingersoll–Ross). *La ecuación (2.2.2) tiene por solución*

$$r(t) = e^{-kt}r_0 + \mu(1 - e^{-kt}) + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \sqrt{r(s)} dW(s) \quad (2.2.4)$$

Demostración. Reescribimos la ecuación (2.2.2) en su forma estándar (2.2.3), esto es,

$$\frac{dr(t)}{dt} + kr(t) = k\mu + \sigma \sqrt{r(t)} \xi(t), \quad t > 0,$$

donde $\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt}$ es el ruido blanco gaussiano (el cual definimos en la sección 4.2 del apéndice).

La anterior es una ecuación diferencial estocástica de primer orden con $P(t) = k$, cuyo factor de integración está dado por $e^{\int_0^t k ds} = e^{kt}$. Multiplicando ambos lados por su factor de integración se sigue que

$$e^{kt} \frac{dr(t)}{dt} + e^{kt} kr(t) = e^{kt} k\mu + e^{kt} \sigma \sqrt{r(t)} \xi(t).$$

Así

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}r(t)) = e^{kt}k\mu + e^{kt}\sigma\sqrt{r(t)}\xi(t).$$

Integrando lo anterior sobre el intervalo $[0, t]$ se tiene

$$r(t) = ce^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} (k\mu + \sigma \sqrt{r(s)} \xi(s)) ds. \quad (2.2.5)$$

Aplicando la condición inicial $r(0) = r_0$ en (2.2.5), obtenemos (2.2.4). \square

2.2.1. Propiedades del modelo CIR

Una diferencia importante del modelo CIR con respecto al modelo de Vasicek es que el primero no tiene un término de volatilidad constante. Para poder apreciar esto de forma gráfica presentamos 5 simulaciones de cada modelo, en las cuales veremos las propiedades de su respectiva tasa corta, es decir, veremos como dicha tasa evoluciona a través del tiempo.

Empecemos viendo el caso cuando la tasa corta está por arriba del valor de la tendencia μ .

Para cada una de las trayectorias en las figuras 2.1 y 2.2 fijamos el valor inicial de la tasa corta (r_0) en 9 % y la tendencia (μ) en 6 %. Ahora, si escogemos una trayectoria del modelo de Vasicek (figura 2.1) y una trayectoria del mismo color en el modelo CIR (figura 2.2), observamos que ambos inician en el nivel de 9 %, sin embargo, a través del tiempo nuestras trayectorias son “atraídas” hacia el valor de μ , el cual resulta ser nuestro valor de equilibrio a largo plazo. Además,



Figura 2.1: Simulación del caso $r_0 > \mu = 6\%$ del modelo de Vasicek

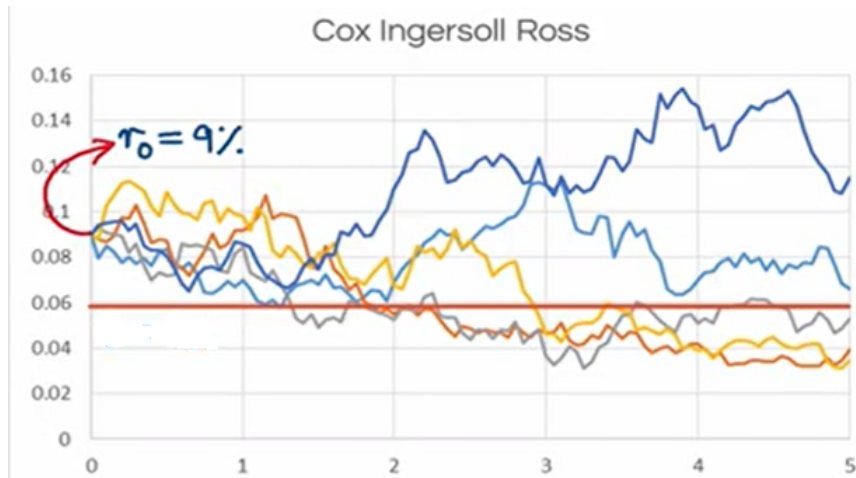


Figura 2.2: Simulación del caso $r_0 > \mu = 6\%$ del modelo de CIR

estas trayectorias lucen muy similares, con la diferencia que si observamos las simulaciones del modelo de CIR comparadas con las del modelo de Vasicek las primeras están más “*estiradas*” en el eje vertical, esto se puede interpretar como que la desviación estándar (o la volatilidad) de los cambios en la tasa corta en pequeños intervalos de tiempo parecen ser mayores en este modelo comparado con el otro.

Notemos que estamos hablando de trayectorias, las cuales de forma general están por encima del valor de equilibrio a largo plazo.

Veamos que pasa en el caso contrario, cuando la tasa corta esta por abajo del valor de la tendencia a largo plazo (Figuras 2.3 y 2.4).



Figura 2.3: Simulación del caso $r_0 < \mu = 6\%$ del modelo de Vasicek

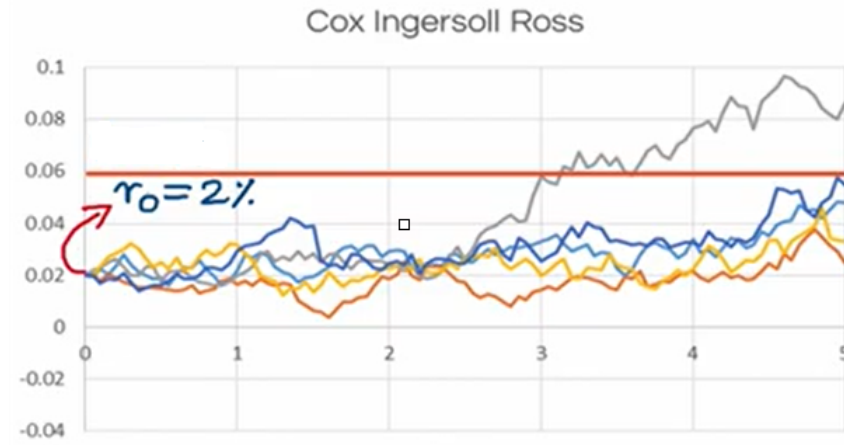


Figura 2.4: Simulación del caso $r_0 < \mu = 6\%$ del modelo de CIR

Haciendo un análisis análogo, notamos que para el modelo CIR sus trayectorias se notan más “contraídas” comparadas con las del modelo de Vasicek, por lo que la desviación estándar de los cambios de la tasa corta en intervalos pequeños de tiempo en el modelo CIR se ven más pequeños comparados con los de Vasicek.

Con lo anterior podemos observar como la desviación estándar de los cambios en la tasa corta para el modelo de Vasicek parece ser independiente del nivel de la tasa corta (la cual es constante), pero para el modelo CIR la desviación estándar de los cambios en la tasa corta depende del nivel de la tasa corta. Con lo cual observamos que cuando el nivel de la tasa es alto la desviación estándar es también alta y cuando el nivel de la tasa corta es bajo la desviación estándar es también baja en el modelo de CIR.

Procedamos a hallar la esperanza y varianza del proceso.

Proposición 3 (Esperanza y varianza del proceso CIR). *Para el proceso en (2.2.3) tenemos que:*

$$\begin{aligned} E[r(t)] &= e^{-kt}r_0 + \mu(1 - e^{-kt}), \\ \text{Var}[r(t)] &= \frac{\sigma^2}{k}r_0(e^{-kt} - e^{-2kt}) + \frac{\mu\sigma^2}{2k}(1 - e^{-kt})^2. \end{aligned}$$

Demostración. Para el caso de la esperanza tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[r(t)] &= e^{-kt}r_0 + \mu(1 - e^{-kt}) + \sigma e^{-kt}E\left[\int_0^t e^{ks}\sqrt{r(s)}dW(s)\right] \\ &= e^{-kt}r_0 + \mu(1 - e^{-kt}). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

La última igualdad es consecuencia directa de la propiedad de la esperanza de una integral de Ito.

Procedemos a hallar la varianza. De (2.2.4) y (2.2.6) tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Var}[r(t)] &= \mathbb{E}[r(t) - \mathbb{E}r(t)]^2 \\
&= \mathbb{E}[\sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \sqrt{r(s)} dW(s)]^2 \\
&= \sigma^2 e^{-2kt} \int_0^t e^{2ks} (\mathbb{E}[r(s)] ds) \\
&= \sigma^2 e^{-2kt} \int_0^t e^{2ks} (e^{-kt} r_0 + \mu(1 - e^{-kt})) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{k} r_0 (e^{-kt} - e^{-2kt}) + \frac{\mu \sigma^2}{2k} (1 - e^{-kt})^2.
\end{aligned}$$

□

Notemos que la esperanza es exactamente la misma que en el modelo de Vasicek (2.1.10). A diferencia de este, el parámetro $\sigma\sqrt{r(t)}$ no solo amplía la volatilidad, sino que cambia la forma del proceso y, por ende, la forma de la curva de rendimientos.

2.2.2. Estabilidad del modelo CIR

A diferencia del modelo de Vasicek cuyas soluciones son exponencialmente 2-estables, vamos a mostrar que las soluciones del modelo CIR (2.2.4) están uniformemente acotadas en probabilidad (se puede consultar la definición en la sección 4.2 del apéndice).

Aplicando la fórmula de Ito al proceso $X(t) = e^{kt}r(t)$ obtenemos

$$X(t) = r_0 + \mu(e^{kt} - 1) + \sigma \int_0^t e^{ks} \sqrt{r(s)} dW(s). \quad (2.2.7)$$

Tomando la esperanza a ambos lados de (2.2.6)

$$\mathbb{E}X(t) = r_0 + \mu(e^{kt} - 1). \quad (2.2.8)$$

Consideremos los procesos $X(t)$ y $X^*(t) = e^{kt}r^*(t)$, donde $r(t)$ y $r^*(t)$ son soluciones de (3.2.2) con condiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $r^*(0) = r_0^*$ respectivamente. Utilizando la fórmula de Ito, obtenemos la siguiente diferencial estocástica para $|X(t) - X^*(t)|^2$:

$$\begin{aligned}
d|X(t) - X^*(t)|^2 &= \sigma^2 e^{kt} (\sqrt{X(t)} - \sqrt{X^*(t)})^2 dt \\
&+ 2\sigma e^{kt/2} (X(t) - X^*(t)) (\sqrt{X(t)} - \sqrt{X^*(t)}) dW(t)
\end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Integrando a ambos lados de (2.2.9) y tomando la esperanza, obtenemos

$$\mathbb{E}|X(t) - X^*(t)|^2 = |r_0 - r_0^*|^2 + \sigma^2 \int_0^t e^{ks} \mathbb{E}(\sqrt{X(s)} - \sqrt{X^*(s)})^2 ds$$

De las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.10), se sigue que

$$\mathbb{E}|r(t) - r^*(t)|^2 \leq |r_0 - r_0^*|^2 e^{-kt} + \frac{3}{2}(r_0 + r_0^*)(1 - e^{-kt})e^{-kt} + \frac{3\sigma^2\mu}{k} \left(\frac{1}{2} - e^{-kt} + \frac{1}{2}e^{-2kt} \right), \quad t \geq 0. \quad (2.2.10)$$

Proposición 4. *Para el modelo CIR, tenemos*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|r(t) - r^*(t)|^2 \leq \frac{3\sigma^2\mu}{k} \quad (2.2.11)$$

Demostración. Se sigue de forma inmediata de (2.2.10). \square

Proposición 5. *Para el modelo CIR, $r(t)$ está uniformemente acotado en probabilidad en t .*

Demostración. Para la ecuación (2.2.4), consideremos el generador L [6, p. 164] aplicado a la función $V(r) = r^2$, $r > 0$:

$$L(V(r)) = V_r(r)f(r) + \frac{1}{2}g^2(r)V_{rr}(r) = (2\mu k + \sigma^2)r - 2kr^2. \quad (2.2.2.1)$$

De (2.2.12), tenemos que

$$L(V(r)) \leq 0 \quad \text{si} \quad r \geq \frac{2\mu k + \sigma^2}{2k}. \quad (2.2.2.2)$$

Ahora, tomamos la esperanza en la fórmula de Ito para $EV(r(t))$ y usando (2.2.13), obtenemos que si $r(t) \geq \frac{2\mu k + \sigma^2}{2k}$, entonces

$$\mathbb{E}|r(t)|^2 = EV(r(t)) = \mathbb{E}(V(r_0)) + \int_0^t \mathbb{E}L(V(r(t)))dt \leq EV(r_0) = \mathbb{E}|r_0|^2.$$

Finalmente, de la última desigualdad, si $R \geq \frac{2\mu k + \sigma^2}{2k}$, entonces

$$P\{|r(t, \omega)| > R\} \leq \frac{1}{R^2} \mathbb{E}|r(t)|^2 \leq \frac{1}{R^2} \mathbb{E}|r_0|^2,$$

con lo cual concluimos que $r(t)$ está uniformemente acotado en probabilidad en t . \square

2.3. Modelo de tasa corta de Hull and White

Hull y White (1990) ampliaron los modelos de Vasicek y CIR permitiendo que los parámetros, así como el riesgo de precio del mercado, dependan del tiempo. Esto tiene la ventaja de que el modelo se puede hacer consistente con los datos iniciales. Por ejemplo, haciendo μ función del tiempo, se puede hacer que el modelo se ajuste exactamente a la estructura de plazos inicial de las tasas de interés (lo que no es posible con modelos homogéneos en el tiempo). Del mismo modo, hacer la volatilidad σ una función del tiempo permite calibrar el modelo a la estructura de plazos de las volatilidades.

El modelo Hull and White está representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} dr(t) &= k[\mu(t) - r(t)]dt + \sigma(t)dW(t), \quad t > 0, \\ r(0) &= r_0, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Al igual que el modelo de Vasicek en el modelo Hull and White la tasa corta tiene distribución normal y además cumple la propiedad de reversión a la media. Lo anterior se puede ver haciendo un análisis similar al que hicimos con el modelo de Vasicek.

Procederemos a encontrar la solución de (2.3.1).

Teorema 3 (Modelo de Hull and White). *La ecuación (2.3.1) tiene por solución*

$$r(t) = e^{-kt}r_0 + \int_0^t e^{-k(t-s)}\mu(s)kds + \int_0^t e^{-k(t-s)}\sigma(s)dW(s). \quad (2.3.2)$$

Demostración. Reescribimos la ecuación (2.3.1) en la forma estándar (2.2.2), esto es,

$$\frac{dr(t)}{dt} + kr(t) = \mu(t)k + \sigma(t)\xi(t), \quad t > 0.$$

La anterior es una ecuación diferencial estocástica de primer orden, cuyo factor de integración está dado por e^{kt} . Multiplicando ambos lados por su factor de integración se sigue que:

$$e^{kt}\frac{dr(t)}{dt} + e^{kt}kr(t) = e^{kt}\mu(t)k + e^{kt}\sigma(t)\xi(t)$$

Así

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}r(t)) = e^{kt}\mu(t)k + e^{kt}\sigma(t)\xi(t)$$

Integrando lo anterior sobre el intervalo $[0, t]$ se tiene lo siguiente

$$r(t) = ce^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t e^{ks}(\mu(s)k + \sigma(s)\xi(s))ds. \quad (2.3.3)$$

Aplicando la condición inicial $r(0) = r_0$ en (2.3.3), obtenemos (2.3.2). \square

2.3.1. Propiedades del modelo Hull and White

Una característica importante del modelo Hull and White es que la varianza de la tasa de interés a corto plazo no depende del nivel de esta. Es decir, la volatilidad tomará valores en función del tiempo, pero no en función de que tan altas o bajas sean las tasas de interés.¹ Además, la tasa de interés en cualquier momento del tiempo sigue una distribución normal. Esto implica que existe la probabilidad de que éstas se tornen negativas. Estas dos características son las mayores debilidades del modelo. No obstante, el modelo permite la construcción de fórmulas analíticas para el precio de instrumentos derivados básicos de tipos de interés como lo son las opciones europeas sobre bonos de cupón cero.

Ahora procederemos a hallar la esperanza y varianza del proceso.

Proposición 6 (Esperanza y varianza del proceso de Hull and White). *Para el proceso en (2.3.1) tenemos que:*

$$\begin{aligned} E[r(t)] &= e^{-kt}r_0 + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \mu(s) ds, \\ \text{Var}[r(t)] &= e^{-2kt} \int_0^t e^{2ks} \sigma^2(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Demostración. De la ecuación (2.3.2) tenemos

$$\begin{aligned} E(r(t)) &= E[e^{-kt}r_0 + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \mu(s) ds + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \sigma(s) dW(s)] \\ &= e^{-kt}r_0 + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \mu(s) ds. \end{aligned}$$

La última igualdad es consecuencia directa de la propiedad de la esperanza de una integral de Ito.

Procedemos a encontrar la varianza.

$$\begin{aligned} \text{Var}[r(t)] &= \text{Var}[e^{-kt}r_0 + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \mu(s) ds + e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \sigma(s) dW(s)] \\ &= \text{Var}[e^{-kt} \int_0^t e^{ks} \sigma(s) dW(s)] \\ &= e^{-2kt} \int_0^t e^{2ks} \sigma^2(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

□

¹Es un hecho empírico que las tasas de interés cuando son bajas (altas) presentan una baja (alta) volatilidad, ver por ejemplo Chan et al. (1992).

2.3.2. Estabilidad del modelo de Hull and White

Al igual que el modelo de Vasicek, tenemos que Hull and White es exponencialmente 2-estable.

Proposición 7. *La solución de la ecuación de Hull and White es exponencialmente 2-estable.*

Demostración. Sea $r^*(t)$ la solución de (2.3.1) que satisface la condición inicial $r^*(0) = r_0^*$. Entonces usando la ecuación correspondiente (2.3.2) para $r^*(t)$, tenemos

$$r(t) - r^*(t) = (r_0 - r_0^*)e^{-kt}, \quad t \geq 0$$

Elevando al cuadrado y tomando la esperanza a ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$E|r(t) - r^*(t)|^2 = E|r_0 - r_0^*|^2 e^{-2kt} = |r_0 - r_0^*|^2 e^{-2kt}, \quad t \geq 0$$

Así, $r(t)$ es exponencialmente 2-estable. \square

2.4. Resumen

En resumen tenemos que:

- Es importante reconocer que el objetivo que persiguen los modelos de tasa corta no es el de elaborar pronósticos precisos (adivinar el valor futuro) de su nivel, sino explicar en términos estadísticos su comportamiento en el mercado. Así pues, estos modelos intentan describir esencialmente propiedades estadísticas del mercado, por ejemplo, tendencia, reversión, sesgo, curtosis, colas pesadas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia, precios promedio, etcétera.
- El modelo CIR, en particular, es el más sensible a los parámetros elegidos. Durante un período de baja volatilidad, el CIR puede ser un modelo increíblemente útil y preciso. Sin embargo, si el modelo se usa para predecir las tasas de interés durante un período de tiempo en el que la volatilidad se extiende más allá de los parámetros, el CIR tiene un alcance y una confiabilidad limitados. Lo anterior dicho se debe a que a una mayor volatilidad se obtiene una función de densidad más plana, este resultado se puede ver, por ejemplo, en [11] donde se observa la forma de la función de densidad de probabilidad con diferentes conjuntos de parámetros.
- Durante mucho tiempo se pensó que la incapacidad del modelo CIR para producir tasas negativas le otorgaba una gran ventaja sobre el modelo Vasicek. Sin embargo, la implementación de tipos negativos por parte de muchos bancos centrales en los últimos años ha llevado a reconsiderar esta postura.

- El modelo Hull and White a diferencia del modelo de Vasicek asume que la volatilidad será baja cuando las tasas de interés a corto plazo estén cerca de cero.
- Una desventaja que comparten estos modelos es que al ser unifactoriales la volatilidad del mercado (o riesgo de mercado) es el único factor que afecta los cambios en sus tasas de interés. Sin embargo, múltiples factores pueden afectar las tasas de interés en el mundo real, lo que los hace menos prácticos.

Podemos resumir sus principales características matemáticas con la siguiente tabla.

Modelo	Vasicek	Hull and White	CIR
Volatilidad	σ	$\sigma(t)$	$\sigma\sqrt{r(t)}$
Tasas de interés no negativas	No	No	Si
Reversión a la media	Lineal	Lineal	Lineal
Parámetros constantes	Sí	No	Si
Distribución de la tasa de interés	Normal	Normal	χ^2 no central

Capítulo 3

Aplicación a modelos financieros

3.1. Calibración del modelo de Vasicek utilizando mínimos cuadrados

En la sección 2.1 analizamos el modelo de Vasicek, sin embargo, puede ser complicado de calibrar (2.1.8) cuando los parámetros del tiempo de nuestros datos están representados por fechas. Por tal motivo nos vemos en la necesidad de representar el modelo de Vasicek en forma discreta y luego utilizar alguna técnica para estimar sus parámetros.

Nuestro objetivo en esta sección será, usando el método de Euler-Maruyama, representar (2.1.8) en términos discretos de tasas de interés y cambios discretos de tiempo Δt (por ejemplo, en el caso de tener datos semanales, Δt es una semana) para que, utilizando una aproximación por mínimos cuadrados, obtengamos una estimación de nuestros parámetros.

Como recordaremos la ecuación diferencial estocástica para el proceso de Vasicek está dada por:

$$\begin{aligned}dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + \sigma dW(t), \\ r(0) &= r_0,\end{aligned}$$

con k la tasa de reversión a la media, μ la tendencia y σ la volatilidad. Cuya solución del modelo es:

$$r(t) = \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt} + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dW(s).$$

Aquí las tasas de interés están normalmente distribuidas, además la esperanza y varianza están dadas por:

$$\begin{aligned} E(r(t)) &= \mu + (r_0 - \mu)e^{-kt}, \\ \text{Var}[r(t)] &= \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-kt}), \end{aligned}$$

cuando $t \rightarrow \infty$, el límite de la esperanza y varianza, convergen a μ y $\frac{\sigma^2}{2k}$ respectivamente. El esquema de Maruyama (ver sección 4.4 del apéndice) para este modelo es:

$$r(t + \Delta t) = r(t) + k(\mu - r(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z,$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

Una vez que tenemos una forma discretizada de (2.1.8) podemos proceder a encontrar una estimación de los parámetros de nuestro modelo, para esto vamos a utilizar el método de mínimos cuadrados. La idea de usar mínimos cuadrados es elegir estimaciones de parámetros que minimicen el residuo cuadrado entre los valores observados y esperados. Es decir, maximizamos el ajuste del modelo a los datos eligiendo el modelo más cercano, en promedio, a los datos. Reescribiendo nuestro esquema de Maruyama tenemos:

$$r(t + \Delta t) = r(t)(1 - k\Delta t) + k\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z.$$

Notemos que la relación entre las observaciones consecutivas $r(t + \Delta t)$ y $r(t)$ es lineal con un término aleatorio normal ϵ , esto es:

$$r(t + \Delta t) = ar(t) + b + \epsilon \quad (3.1.1)$$

o bien

$$r(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} r(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \epsilon$$

donde

$$\begin{aligned} a &= 1 - k\Delta t, \\ b &= k\mu\Delta t, \\ \epsilon &= \sigma\sqrt{\Delta t}Z. \end{aligned}$$

Procedemos a hallar una aproximación de los términos anteriores usando el método de mínimos cuadrados. De (3.1.1) tenemos que los residuos para el modelo están dados por:

$$R_i = r_{i+1} - (ar_i + b), \quad 1 \leq i \leq n - 1$$

donde n es el total de datos registrados. R_i es un parámetro que mide el error en la i -ésima medición de nuestra línea observada versus la línea óptima y r_i es el i -ésimo dato observado. Tenemos que la suma del cuadrado de los residuos está dada por:

$$S = \sum_{i=1}^n R_i^2 = \sum_{i=1}^n (r_{i+1})^2 + \sum_{i=1}^n (ar_i + b)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (r_{i+1}(ar_i + b)). \quad (3.1.2)$$

3.1. CALIBRACIÓN DEL MODELO DE VASICECK UTILIZANDO MÍNIMOS CUADRADOS 27

Derivando (3.1.2) con respecto a b e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ar_i + b) - 2 \sum_{i=1}^n r_{i+1},$$

$$\sum_{i=1}^n ar_i + nb = \sum_{i=1}^n r_{i+1}.$$

Despejando b obtenemos

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_{i+1} - \sum_{i=1}^n ar_i \right) \quad (3.1.3)$$

Análogamente, para a tenemos que

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ar_i + b)r_i - 2 \sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i),$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^n (ar_i + b)r_i = \sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i).$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^n ar_i^2 + \sum_{i=1}^n br_i = \sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i). \quad (3.1.4)$$

Sustituyendo (3.1.3) en (3.1.4) obtenemos

$$\sum_{i=1}^n ar_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \left(\sum_{i=1}^n r_{i+1} - \sum_{i=1}^n ar_i \right) = \sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i).$$

Esto es igual a

$$\sum_{i=1}^n ar_i^2 - \frac{1}{n} \left(a \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_i \right) + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i+1} \right) = \sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i).$$

Agrupando términos, tenemos

$$a \left[\sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_i \right) \right] = \sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i) - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i+1} \right).$$

Finalmente,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (r_{i+1}r_i) - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i+1} \right)}{\sum_{i=1}^n r_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_i \right)}. \quad (3.1.5)$$

Usando las ecuaciones (3.1.3) y (3.1.5) podemos estimar los parámetros del modelo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1 - \hat{a}}{\Delta t}, \\ \mu &= \frac{\hat{b}}{1 - \hat{a}}, \\ \sigma^2 &= \frac{Var(\epsilon)}{\Delta t}, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

con \hat{a} y \hat{b} en (3.1.5) y (3.1.3) respectivamente.

3.2. Aplicación del modelo CIR al análisis de bonos de cupón cero

En esta parte vamos a calibrar el modelo CIR para analizar un ejemplo de bonos cupón cero como son los CETES a 28 días del gobierno de México. Para encontrar una aproximación a los parámetros del modelo, primeramente haremos una calibración por mínimos cuadrados de nuestros datos de los CETES, cuyos datos fueron tomados del sitio web de Banxico.¹

Se analizarán dos grupos de datos que abarcan periodos históricos distintos con el objetivo de ver el comportamiento de los CETES antes y después de la pandemia de COVID-19.

A continuación, se muestra el rendimiento de los CETES a 28 días para el periodo de enero del 2015 a enero de 2020 (figura 3.1), sin impuestos. Para este periodo el cambio porcentual de la tasa anualizada, de un día a otro llego a alcanzar el 8,3 % (sin impuesto).

Asimismo, se muestra el rendimiento de los CETES a 28 días para el periodo de enero del 2018 a febrero del 2023 (figura 3.2). En este periodo el cambio porcentual de la tasa anualizada, de un día a otro no superó el 11 % (sin impuesto).

De (2.2.1) y (4.4.2) podemos obtener el esquema de Euler-Maruyama

$$\hat{r}(t_{i+1}) = \hat{r}(t_i) + \alpha(\mu - \hat{r}(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{|\hat{r}(t_i)|\Delta t}Z_i \tag{3.2.1}$$

donde $\hat{r}(0) = r(0)$ y Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1} son variables aleatorias gaussianas independientes. Aquí \hat{r} denota una aproximación discretizada definida sobre la partición $t_1 < t_2 < \dots < t_i$ con $i = 1, 2, \dots, n - 1$.²

El factor $\sqrt{\Delta t}Z_i$ puede explicarse ya que tiene la misma distribución que $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$. Es importante señalar que la aproximación de Euler del proceso de CIR es una versión discretizada de (2.2.1). Incluso si la r dada por

¹<https://www.banxico.org.mx/tipcamb/main.do?page=tas&idioma=sp>

²Ver sección 5.4 apéndice

3.2. APLICACIÓN DEL MODELO CIR AL ANÁLISIS DE BONOS DE CUPÓN CERO²⁹

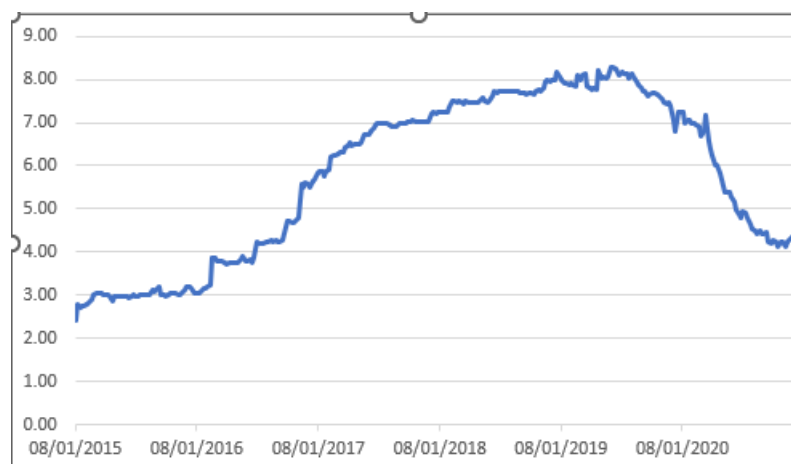


Figura 3.1: Rendimiento CETES a 28 días en el periodo de enero del 2015 a enero del 2020

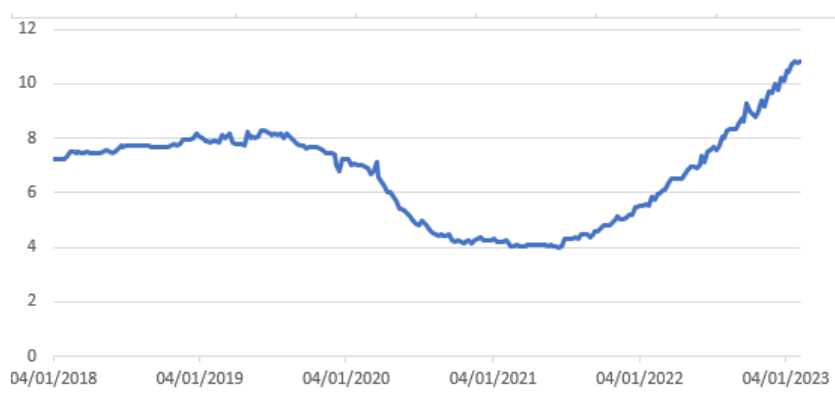


Figura 3.2: Rendimiento CETES a 28 días en el periodo de enero del 2018 a febrero del 2023

el modelo de CIR es positiva, una trayectoria de Euler puede ser negativa en algunos puntos debido al error de discretización del tiempo. Por este motivo incluimos el valor absoluto de \hat{r} en el término de dispersión.

Al hacer una calibración por mínimos cuadrados obtenemos las siguientes estimaciones para los parámetros de volatilidad (σ), tendencia (μ), velocidad de reversión (k) y la volatilidad a largo plazo (ν).

	2018-2023	2015-2020
σ	0.051	0.050
μ	4.424	6.679
k	-0.00603	0.00641
ν	0.115	0.046

Cuadro 3.1: Aproximaciones numéricas de los parámetros del modelo CIR en el análisis de CETES

Analizando los datos presentados en el cuadro 1, podemos observar que en ambos periodos tenemos una velocidad de reversión muy parecida, aproximadamente del 6 % (lo que significa que en el lapso de una semana nuestro modelo se acerca en un 6 % al valor de la tendencia). El signo negativo en el periodo de 2018-2023 nos indica que el modelo está por arriba de la tendencia, por lo cual se espera que este decrezca para la próxima semana. Análogamente, observamos que en el periodo de 2015-2020 el modelo está por debajo de la tendencia, por lo cual se espera que este crezca la próxima semana.

Un dato interesante es el de las volatilidades a largo plazo que son de 4,6 % (2015-2020) y de 11,5 % (2018-2023). Lo anterior nos muestra un claro incremento en la volatilidad de este instrumento (el cual es de los que presentan menor volatilidad). Esto suele involucrar entornos de alta inflación o entornos de políticas monetarias demasiado expansiva. Esto coincide con lo observado en el panorama nacional, ya que los bonos del gobierno de México a la fecha (febrero 2023) subieron durante la última subasta de valores de mes, ante la expectativa de que la política monetaria del Banco de México siga repuntando por los retos de la alta inflación que vive el país.

De ahí que la tasa de los CETES a 28 días, un instrumento sensible a los cambios en la expectativa de la política monetaria, ronda niveles no vistos desde del año 2001, los cuales aumentarían aún más, ya que en la minuta número 98³, el Banco de México confirmó que las tasas seguirán al alza un tiempo más.

³Banco de México "Reunión de la Junta de Gobierno del Banco de México, con motivo de la decisión de política monetaria anunciada el 9 de febrero de 2023"

3.3. Ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero

Una de las principales aplicaciones de los modelos de tasa corta la encontramos en el análisis de los bonos cupón cero, por tal motivo en esta sección vamos a determinar el precio de un bono cupón cero asociado al modelo de tasa corta de Hull and White.

Denotamos por $B = B(r(t), t; T)$ como el precio de un bono cupón cero al tiempo t que paga una unidad monetario al vencimiento T , o de forma más sencilla $B = B(t, T)$. Con esto la tasa corta es la única variable de estado del rendimiento al vencimiento.

Si suponemos que tanto k y σ fueron estimados por algún método estadístico y seleccionando $\mu(0)$ de manera que los valores observados coincidan con los teóricos, entonces (2.3.1) se transforma en:

$$dr(t) = k(\mu(t) - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (3.3.1)$$

La ecuación diferencial parcial que determina el precio de un bono cupón cero [18, p. 4] asociada a la tasa corta definida en (2.3.1) esta dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2 t} + k(\mu(t) - r(t)) \frac{\partial B}{\partial r(t)} - r(t)B = 0, \quad (3.3.2)$$

donde $B(t, T)$ es el precio de un cupón cero al tiempo t y fecha de vencimiento T , junto a la condición final $B(T, T) = 1$.

Suponemos una solución por variables separables (ya que (3.3.2) no tiene derivadas cruzadas), esto nos permitirá transformar la ecuación diferencial (3.3.2) en dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r(t)D(t, T)} \quad (3.3.3)$$

Notemos que, debido a la condición $B(T, T) = 1$ se tiene que $A(T, T) = 0$ y $D(T, T) = 0$.

Las derivadas parciales de (3.3.3) son:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial r} r(t) \right) B, \quad \frac{\partial B}{\partial r(t)} = -DB, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial r(t)^2} = D^2 B.$$

Sustituyendo en (3.3.2), obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial t} r(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - k(\mu(t) - r(t))D - r(t) = 0. \quad (3.3.4)$$

Derivando (3.3.4) con respecto de $r(t)$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(t, T)}{\partial t} &= kD - 1, \\ D(T, T) &= 0.\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

Cuya solución está dada por

$$D(t, T) = D(T, T)e^{-k(T-t)} - e^{-k(T-t)} \int_T^t e^{k(T-s)} ds = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \tag{3.3.6}$$

Procedamos a hallar $A(t, T)$. Sustituyendo (3.3.6) y (3.3.5) en (3.3.4), obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mu(t)(1 - e^{-k(T-t)}) - \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - e^{-k(T-t)})^2, \tag{3.3.7}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}A(t, T) &= \int_T^t \mu(s)(1 - e^{-k(T-s)}) ds - \frac{\sigma^2}{2k^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{k^2} \int_T^t e^{-k(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2k^2} \int_T^t e^{-2k(T-s)} ds \\ &= - \int_t^T \mu(s)(1 - e^{-k(T-s)}) ds - \frac{\sigma^2}{2k^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{k^3}(e^{-k(T-t)} - 1) - \frac{\sigma^2}{4k^3}(e^{-2k(T-t)} - 1) \\ &= - \int_t^T \mu(s)(1 - e^{-k(T-s)}) ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2k^2}(T - t + \frac{2}{k}e^{-k(T-t)} - \frac{1}{2k}e^{-2k(T-t)} - \frac{3}{2k}).\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

Una vez determinadas las funciones $D(t, T)$ y $A(t, T)$ en (3.3.6) y (3.3.8), podemos calcular la curva de rendimiento mediante

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) = \frac{r(t)D(t, T) - A(t, T)}{T-t}. \tag{3.3.9}$$

Además, esta se relaciona con la tasa de interés instantánea de la siguiente forma

$$r(t) = R(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T). \tag{3.3.10}$$

Capítulo 4

Apéndice

4.1. Algunos conceptos económicos

Definición 1 (Cuenta bancaria). Definimos $B(t)$ como el valor de una cuenta bancaria al tiempo $t \geq 0$. Asumimos que $B(0) = 1$ y que la cuenta bancaria evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1, \quad (4.1.1)$$

donde $r(t)$ es una función del tiempo. Como consecuencia,

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}. \quad (4.1.2)$$

La definición anterior nos dice que al invertir una cantidad unitaria al tiempo 0 produce en el tiempo t el valor en (4.1.2) y $r(t)$ es la **tasa instantánea** a la que la cuenta bancaria incrementa. Esta tasa instantánea es comúnmente referida como **tasa corta**.

Si tomamos una expansión de primer orden en Δt tenemos,

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t),$$

lo que equivale a decir que, en cualquier intervalo pequeño de tiempo arbitrario $[t, t + \Delta t)$,

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)} = r(t)\Delta(t).$$

Con esto concluimos que la cuenta bancaria crece a cada instante de tiempo t a una tasa $r(t)$.

Definición 2 (Bono cupón cero). Los **bonos de cupón cero** son un tipo de bono que no tiene pago periódico de intereses, sino que estos son abonados en su totalidad en el momento de su amortización. Suelen ser emitidos al descuento, es decir, que los intereses que devengan se descuentan del precio de adquisición.

El **rendimiento al vencimiento** (también conocido en la literatura como estructura de plazos o curva de rendimiento) al tiempo t de un bono con vencimiento T , está dada por

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T), \quad T > t. \quad (4.1.3)$$

4.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Diremos que $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria si X es una función medible. Una colección de variables aleatorias con respecto a un parámetro t , denotado por $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso estocástico. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener definido de la siguiente manera.

Definición 3 (Proceso de Wiener). *El proceso de Wiener es un proceso estocástico a tiempo continuo $\{W(t), t \geq 0\}$ que satisface las siguientes condiciones:*

- $W(0) = 0$ a.s.;
- Las trayectorias $t \mapsto W(t)$ son continuas a.s.;
- Para $0 \leq s < t < \infty$, el incremento $W(t) - W(s)$ es independiente de $W(s)$;
- Para $0 \leq s < t < \infty$, el incremento $W(t) - W(s)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.

Definición 4 (Ruido blanco gaussiano). *El ruido blanco gaussiano es un proceso gaussiano estacionario $\xi(t)$ con $-\infty < t < \infty$. El ruido blanco gaussiano es informalmente definido como la derivada del proceso de Wiener $W(t)$, esto es:*

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t). \quad (4.2.1)$$

Tiene esperanza $E[\xi(t)] = 0$ y covarianza $E[\xi(t)\xi(s)] = \delta(t - s)$, donde δ es la delta de Dirac.

La definición anterior se puede ver con más detalle en [1, p. 53].

Teorema 4 (Formula de Ito). *Considere $X(t)$ la solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE)*

$$dX(t) = udt + v dW(t) \quad (4.2.2)$$

Considere $g(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbb{R})$. Entonces

$$Y(t) = g(t, X(t))$$

satisface la EDE

$$dY(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))(dX(t))^2, \quad (4.2.3)$$

donde

$$dt dt = dt dW(t) = dW(t) dt = 0, \quad dW(t) dW(t) = dt.$$

Consideremos la siguiente EDE de Ito:

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad 0 < t \leq T < \infty, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

o en su forma integral

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s), \quad (4.2.5)$$

para $0 \leq t \leq T < \infty$, donde $f(t, x)$ y $g(t, x)$ están definidas sobre $[0, T] \times \mathbb{R}$ y son funciones medibles y deterministas. La variable aleatoria X_0 es una condición inicial.

A la segunda integral de (4.2.5) se le conoce como la integral de Ito. Si $g \equiv 0$ y X_0 es constante, (4.2.5) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)), \quad X(0) = X_0. \quad (4.2.6)$$

Para entender mejor la diferencia entre (4.2.4) y (4.2.6) supongamos que una persona tiene dos posibles inversiones:

- Una inversión riesgosa, por ejemplo, una acción donde el precio $P_1(t)$ por unidad de tiempo t satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = (a + b\alpha)P_1(t). \quad (4.2.7)$$

Con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ y α un "ruido".

- Una inversión segura, por ejemplo, un bono donde el precio $P_2(t)$ por unidad de tiempo t crece exponencialmente:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = cP_2(t). \quad (4.2.8)$$

con $0 < c < a$.

Decimos que un proceso estocástico $\{X(t), t \in [0, T]\}$ es la solución de (4.2.4) si $X(t)$ es \mathcal{F}_t -medible para toda $t \in [0, T]$ y además satisface la ecuación (4.2.5) (ver [1, p. 101]).

Teorema 5 (Existencia y unicidad de la solución). *Suponga una ecuación diferencial estocástica del tipo (4.2.4) con condición inicial $X(0) = X_0$, con X_0 una variable aleatoria independiente de $W(t)$ para todo $t \geq 0$. Sean $f(t, x)$ y $G(t, x)$ funciones medibles y reales sobre $[0, T] \times \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes hipótesis, llamadas las condiciones de Ito. Existe una constante $K > 0$ tal que*

- (Condición de Lipschitz)

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |G(t, x) - G(t, y)| \leq K|x - y| \quad (4.2.9)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ y } t \in [0, T],$$

- (Condición de crecimiento)

$$|f(t, x)|^2 + |G(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \quad (4.2.10)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ y } t \in [0, T].$$

Así, la ecuación (4.2.4) tiene a $X(t)$ como solución única en el intervalo $[0, T]$, que satisface la condición inicial $X(0) = X_0$, es decir, si $X(t)$ y $Y(t)$ son soluciones de la ecuación (3.2.4) con el mismo valor inicial, entonces

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0\right\} = 0.$$

Esta demostración se puede consultar en, por ejemplo, [1, p. 105].

4.3. Estabilidad en ecuaciones diferenciales estocásticas

En 1892, A.M. Lyapunov introdujo el concepto de estabilidad en sistemas dinámicos. La estabilidad significa la insensibilidad del estado de un sistema a cambios pequeños en el estado inicial o de los parámetros del sistema. Para un sistema estable, las trayectorias que están próximas entre sí en un instante específico deben mantenerse cercanas entre sí en los instantes posteriores.

Consideremos la siguiente ecuación estocástica

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad t > t_0, \quad (4.3.1)$$

donde las funciones $f(t, x)$ y $g(t, x)$ son deterministas y $\{W(t)\}_{t \geq t_0}$ es un proceso de Wiener. Sea $f(t, 0) = g(t, 0) = 0$, así la ecuación anterior admite la solución trivial $x(t) \equiv 0$. Vamos a asumir la existencia y unicidad de la solución de los modelos como en el teorema 5.

Sea $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ una solución de (4.3.1) con condición inicial $x(t_0) = x(t_0; t_0, x_0) = x_0$, donde $x_0 \in \mathbb{R}$ es una constante. Sea $x^*(t; t_0, x_0^*)$ otra solución para (4.3.1) que cumple $x^*(t_0; t_0, x_0^*) = x_0^*$. Tenemos la siguiente definición.

Definición 5 (Exponencialmente 2-estable). *La solución $x(t)$ se dice exponencialmente estable en el sentido cuadrático, o exponencialmente 2-estable si existen constantes positivas K y γ tal que*

$$\mathbb{E}|r(t) - r^*(t)|^2 \leq K\mathbb{E}|r_0 - r_0^*|^2 e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (4.3.2)$$

Definición 6 (Acotado en probabilidad). *La solución $x(t)$ se dice uniformemente acotada en probabilidad en t si*

$$\sup_{t \geq t_0} P\{|r(t)| > M\} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad M \rightarrow \infty. \quad (4.3.3)$$

4.4. Método de Euler-Maruyana

El método de Euler es un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con un valor inicial dado. Lleva el nombre de Leonhard Euler quien describió este modelo en su libro (*Institutionum calculi integral*, 1768-1770).

Gisiro Maruyana en 1955 mostró una respuesta única para las ecuaciones diferenciales estocásticas con aproximación de Euler y demostró la convergencia “mean-square” de la aproximación de Euler de un proceso de Ito sin saltos.

Para la simulación de soluciones de modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas, necesitamos usar un método numérico. El método de Euler es uno de los métodos más simples para generar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Nosotros usaremos el método de Euler-Maruyama. Este método es el análogo del método de Euler de las ecuaciones diferenciales ordinarias pero aplicado a ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para facilitar el cálculo al aplicar este método sobre el intervalo $[0, T]$ vamos a considerar $\Delta t = T/N$ para un entero positivo N y los puntos discretos $t_j = j\Delta t$ en el intervalo $[0, T]$ con $j = 0, 1, \dots, N$.

Entonces, el método de Euler-Maruyana está descrito como sigue. Dada una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t) \quad (4.4.1)$$

y tamaño del paso Δt , la aproximamos mediante la ecuación

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})\Delta W_j, \quad (4.4.2)$$

donde $X_j = X(t_j)$, $\Delta W_j = |(W(t_j) - W(t_{j-1}))|$ con $j = 1, \dots, N$.

La ecuación anterior la obtenemos reescribiendo (4.4.1) en su forma integral, como en (4.2.5)

$$X(T) = X_0 + \int_0^T f(X(t))dt + \int_0^T g(X(t))dW(t). \quad (4.4.3)$$

Ahora, tomando $T = t_j$ y $T = t_{j-1}$ en (4.4.3), obtenemos

$$X(t_j) = X_0 + \int_0^{t_j} f(X(t))dt + \int_0^{t_j} g(X(t))dW(t)$$

y

$$X(t_{j-1}) = X_0 + \int_0^{t_{j-1}} f(X(t))dt + \int_0^{t_{j-1}} g(X(t))dW(t).$$

Restando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$X(t_j) = X_{t_{j-1}} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(t))dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} g(X(t))dW(t). \quad (4.4.4)$$

Notemos que cada término del lado derecho de la ecuación (4.4.1) aproxima el término correspondiente del lado derecho de la ecuación (4.4.4). Esto es,

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(X(t))dt \approx f(X_{j-1})(t_j - t_{j-1}) = f(X_{j-1})\Delta t \quad (4.4.5)$$

y

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} g(X(t))dW(t) \approx g(X_{j-1})\Delta W_{j-1}. \quad (4.4.6)$$

Así, de las ecuaciones (4.4.4), (4.4.5) y (4.4.6) obtenemos la fórmula de Euler-Maruyana (4.4.2).

Finalmente es importante señalar que la cuestión crucial a la hora de simular ecuaciones diferenciales estocásticas es saber cómo modelar la variable aleatoria gaussiana ΔW_j (para más detalles ver [7]).

Observe que todo número aleatorio ΔW_j es una variable aleatoria independiente que puede ser calculada como

$$\Delta W_j = Z\sqrt{\Delta t_j}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

4.5. Gráficas de modelos estocásticos usando Matlab

A continuación se muestra el código en matlab utilizado para realizar las simulaciones presentadas en la sección 2.2.

```
%dx(t)=ax(t)dt+bx(t)dW(t)
%for exaple a=2, b=0.5
t0=0;                                %begin time
T=1;                                %terminal time
n=100;                               %number of steps
dt=(T-t0)/n                          %set delta t
a=2;                                 %input a
b=0.5;                              %input b
dw=zeros(1,n);
axis=[t0+dt:dt:T];
x=zeros(1,n);
x(1)=2;                             %x(1)=x0=2 initial condition

for k=2:n
    dw(k)=sqrt(dt)*randn;
    x(k)=x(k-1)+a*x(k)*dt +b*x(k-1)*dw(k-1);
end

grid on
hold on
plot(axis,x)
```


Bibliografía

- [1] L. Arnold, Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974.
- [2] Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure (Vol. 17, pp. 21-86).
- [3] Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (2005). A theory of the term structure of interest rates. In Theory of valuation (pp. 129-164).
- [4] Flores, S., & Govindan, T. E. (2018). An Alternative to Itos Formula to Solve Linear Financial Stochastic Differential Equations. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 25, 419-434.
- [5] Flores, S., & Govindan, T. E. (2016). Stability of Some Stochastic Interest Rate Models. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 11(4), 185-196.
- [6] T. E. Govindan and R. S. Acosta Abreu, Stability behavior of some well-known stochastic financial models, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 3, (2008) No. 28, 1367 - 1378.
- [7] Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. SIAM review, 43(3), 525-546.
- [8] Itô, K. (1951). On a formula concerning stochastic differentials. Nagoya Mathematical Journal, 3, 55-65.
- [9] Itô, K. (1944). 109. stochastic integral. Proceedings of the Imperial Academy, 20(8), 519-524.
- [10] Kolmogorov, A. N. (1938). On analytic methods in probability theory. Uspekhi Mat. Nauk, 5, 5-41.
- [11] León Nieto, D. I. (2018). El proceso estocástico de Feller y el modelo Cox-Ingersoll-Ross: modelación de tasas de interés y valoración de bonos.
- [12] Lévy, P. (1955). W. Doeblin (V. Doblin)(1915-1940). Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 8(2), 107-115.

- [13] Merton, R. C., & Samuelson, P. (1969). A complete model of warrant pricing that maximizes utility. *Industrial Management Review*, 10(2), 17-46.
- [14] Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.
- [15] Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. In *The world scientific handbook of futures markets* (pp. 25-38).
- [16] Samuelson, P. A. (1965). Rational theory of warrant pricing. In Henry P. McKean Jr. *Selecta* (pp. 195-232). Cham: Springer International Publishing.
- [17] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), 177-188.
- [18] Venegas, F. (2014). Caracterización del Precio de un Bono Cupón Cero en un Modelo de Equilibrio General (Characterization of the Price of a Zero-Coupon Bond in a General Equilibrium Model). Available at SSRN 2407197.
- [19] Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre* (Vol. 1). Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional.
- [20] Zill, D. G., & Wright, W. S. (2012). *Differential equations with boundary-value problems*. Cengage Learning.