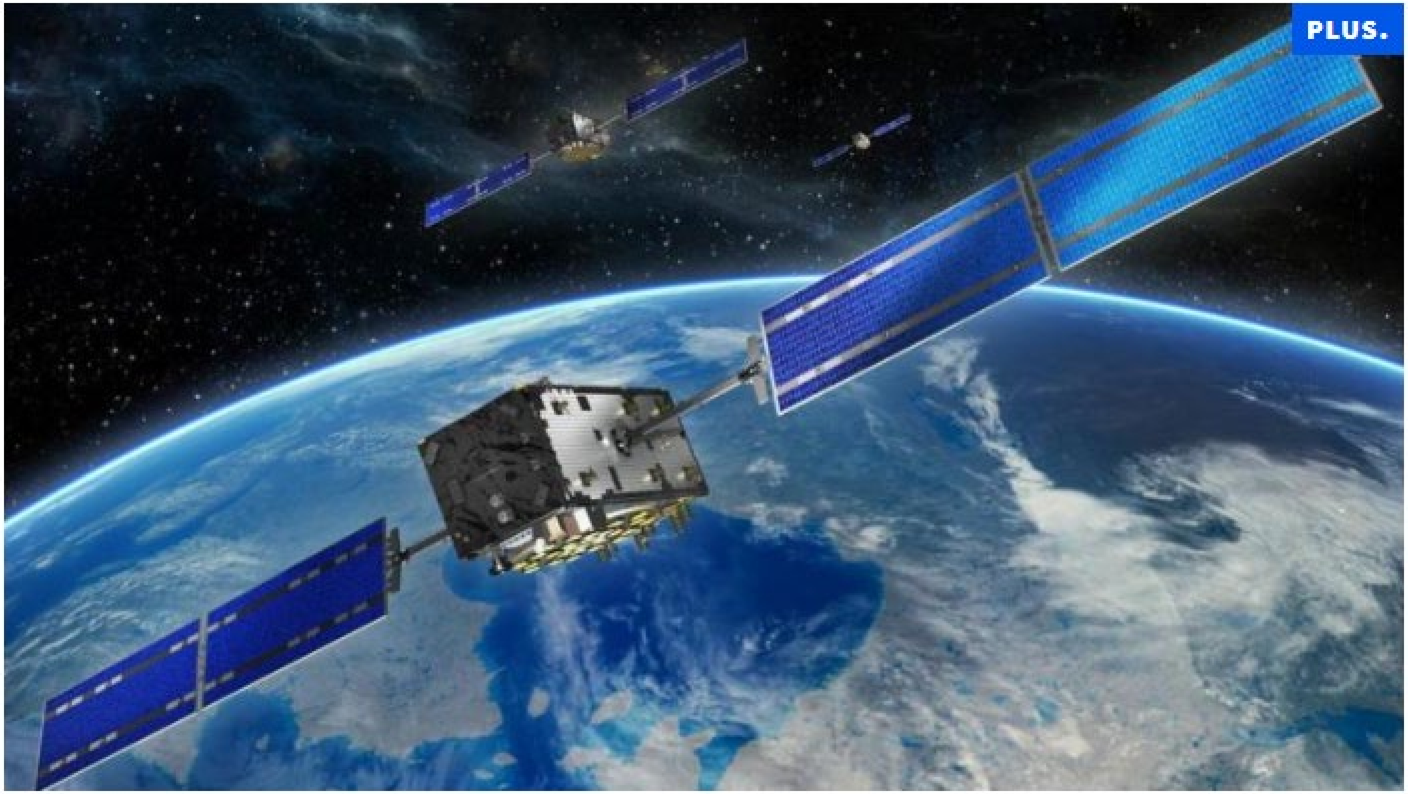
10054 Kinematik

Carsten Knudsen

DTU Fysik
Institut for Fysik

ing.dk forside, 20230208 10:20

ELEKTRONIK 8. FEB 5:00 2



Baner vejen for autonom kørsel: Galileo finder position med en nøjagtighed på 20 cm

De europæiske Galileo-satellitters nye tjeneste tilpasses nu det danske koordinatsystem.

Mål for forelæsning og gruppperegning i dag:

Kunne anvende begreberne position, hastighed og acceleration på bevægelse i én og to dimensioner.
Kunne analysere simple bevægelser som

1. retlinjet bevægelse i én dimension
2. skråt kast i to dimensioner
3. cirkelbevægelse i to dimensioner

fx under anvendelse af formlerne for konstant acceleration.

Definition af kinematiske størrelser

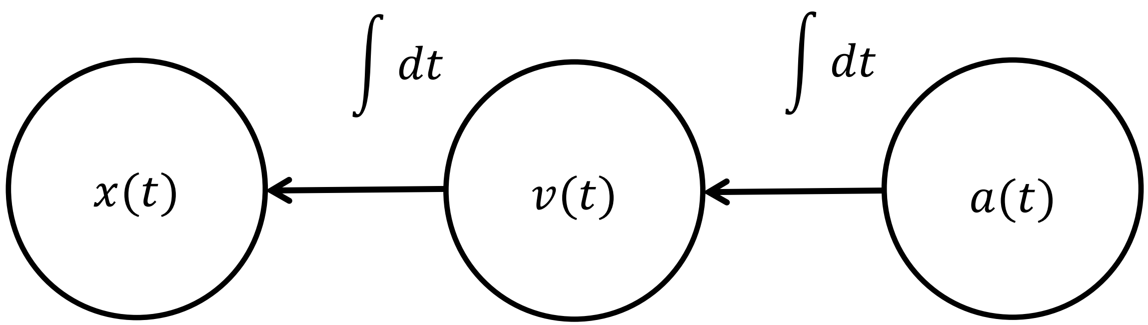
x	Position, har fortegn.
$v = \frac{dx}{dt}$	Hastighed, har fortegn.
$a = \frac{dv}{dt}$	Acceleration, har fortegn.
$v = \left\lvert\frac{dx}{dt}\right\rvert$	Fart, positiv eller nul.

Begreberne kan umiddelbart generaliseres til højere orden med vektoriel notation: $\vec{r}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Kinematiske størrelser – 1D

$$x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t)$$

Kinematiske størrelser – 1D



Kinematiske størrelser – 1D

$$v = \frac{dx}{dt}, x(0) = x_0$$
$$a = \frac{dv}{dt}, v(0) = v_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v\,dt \qquad \Delta x = x(t) - x_0 = \int_0^t v\,dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a\,dt \qquad \Delta v = v(t) - v_0 = \int_0^t a\,dt$$

Enhedskonverering m/s $\leftrightarrow$ km/h

$$v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\frac{1\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{m}}\,\frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}}\ \text{(gang med 3.6)}$$

$$v = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,\frac{1000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{km}}\,\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}}\ \text{(divider med 3.6)}$$

Bevægelse med konstant acceleration

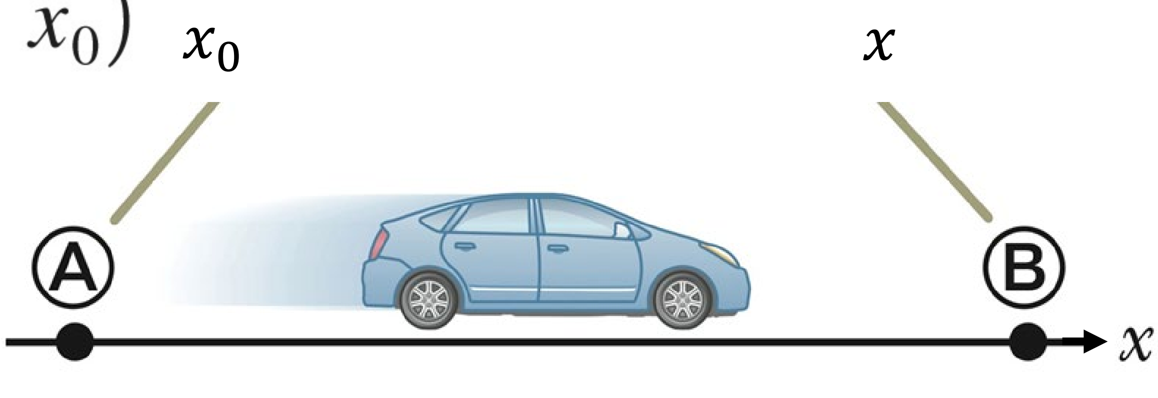
Formlerne kæder forskellige kinematiske størrelser (position, hastighed, acceleration) til to forskellige tider/steder sammen.

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

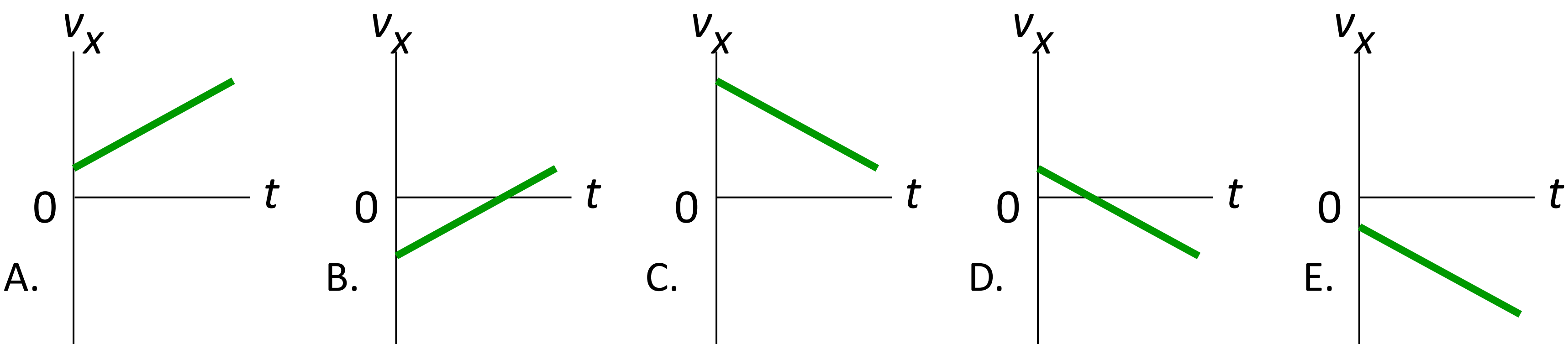


Konstant acceleration - ligninger

Equation	Contains
$v = v_0 + at$	v, a, t; no x
$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	x, v, t; no a
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	x, a, t; no v
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	x, v, a; no t

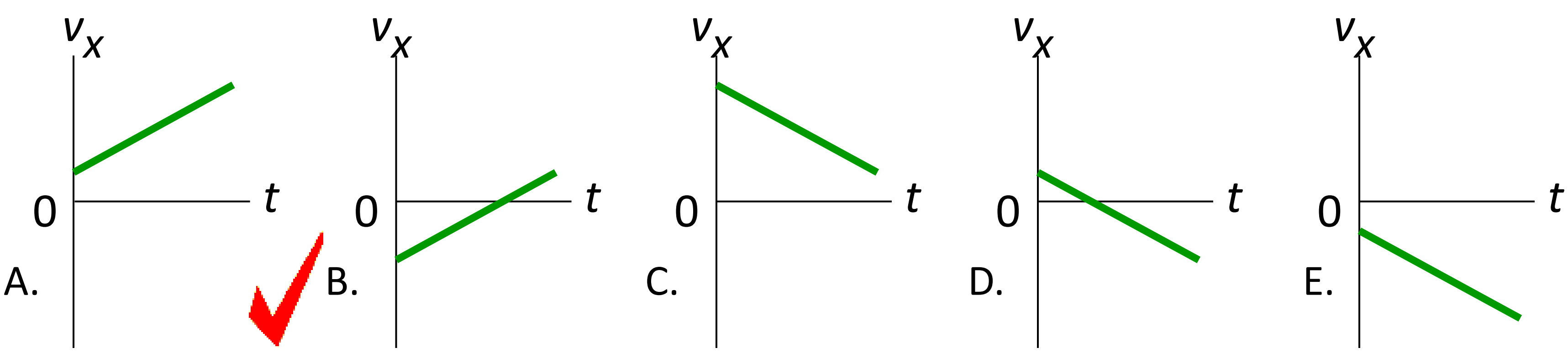
En partikel bevæger sig langs en x-akse med konstant acceleration. Startpositionen x_0 er positiv, starthastigheden er negativ og accelerationen er positiv.

Hvilken af følgende v_x-t grafer beskriver bedst den beskrevne bevægelse?



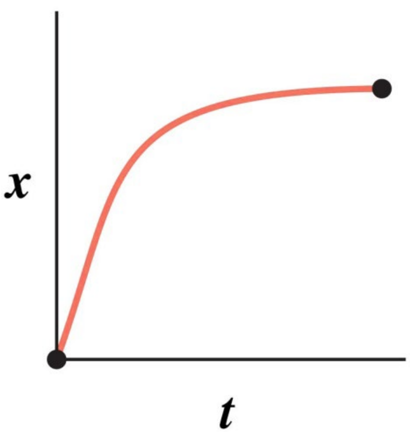
En partikel bevæger sig langs en x-akse med konstant acceleration. Startpositionen x_0 er positiv, starthastigheden er negativ og accelerationen er positiv.

Hvilken af følgende v_x-t grafer beskriver bedst den beskrevne bevægelse?

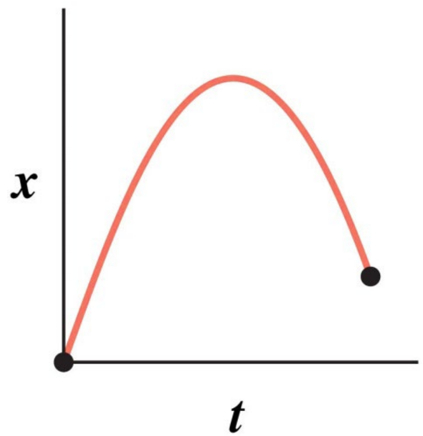


Figurerne viser position som funktion af tiden for fire forskellige legemer.

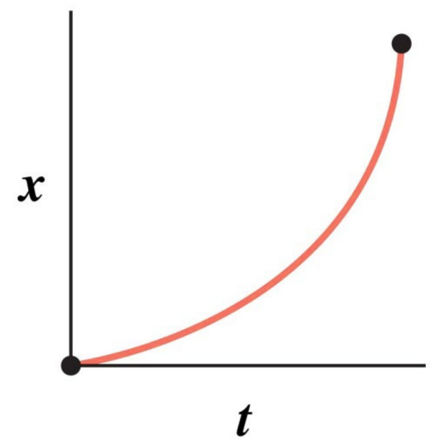
Hvilken figur viser legemet starte langsomt og dernæst øge farten?



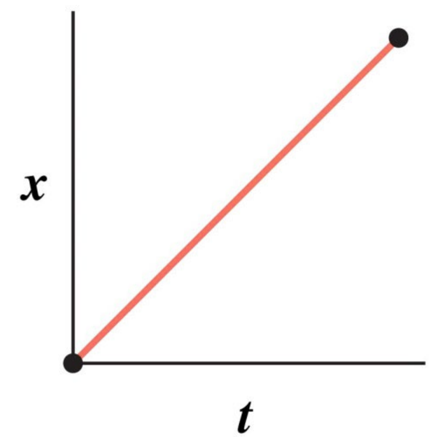
A.



B.



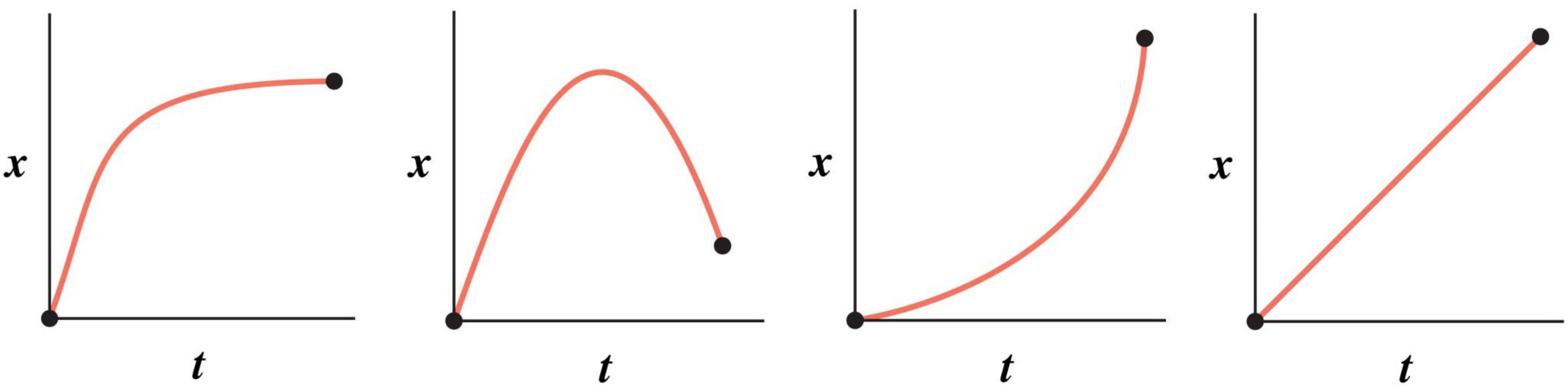
C.



D.

Figurerne viser position som funktion af tiden for fire forskellige legemer.

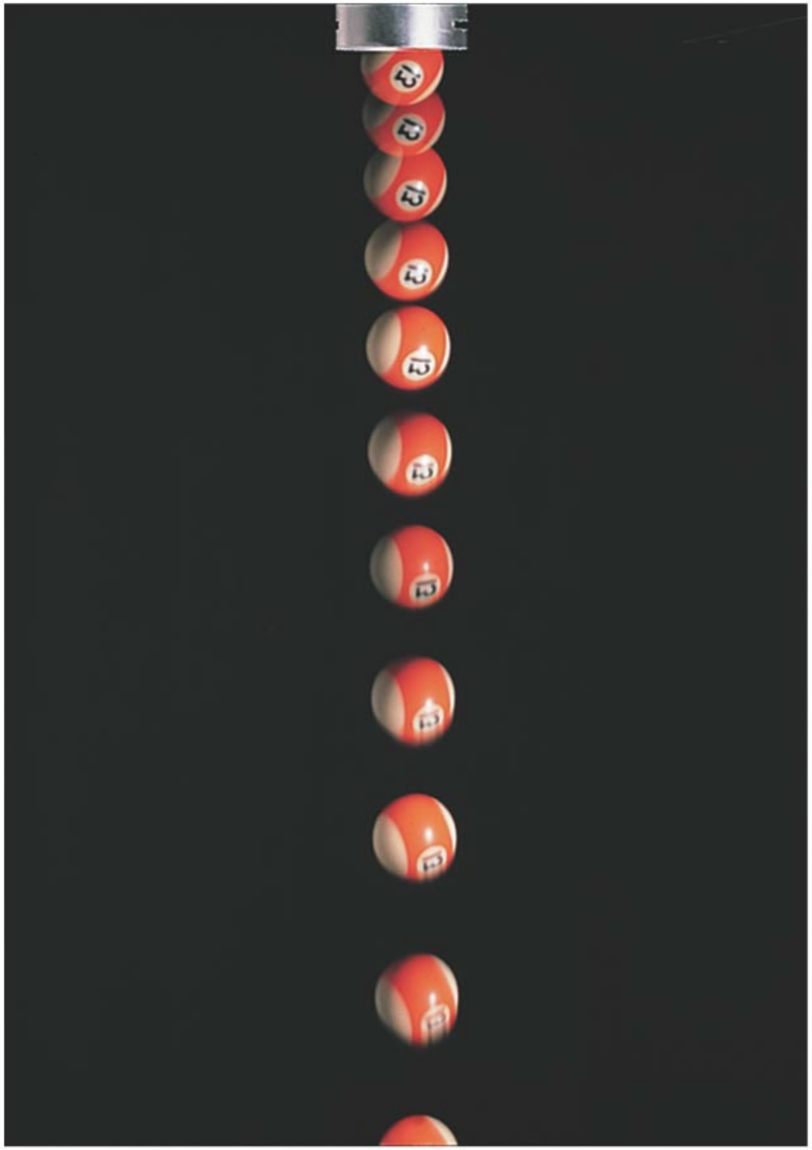
Hvilken figur viser legemet starte langsomt og dernæst øge farten?



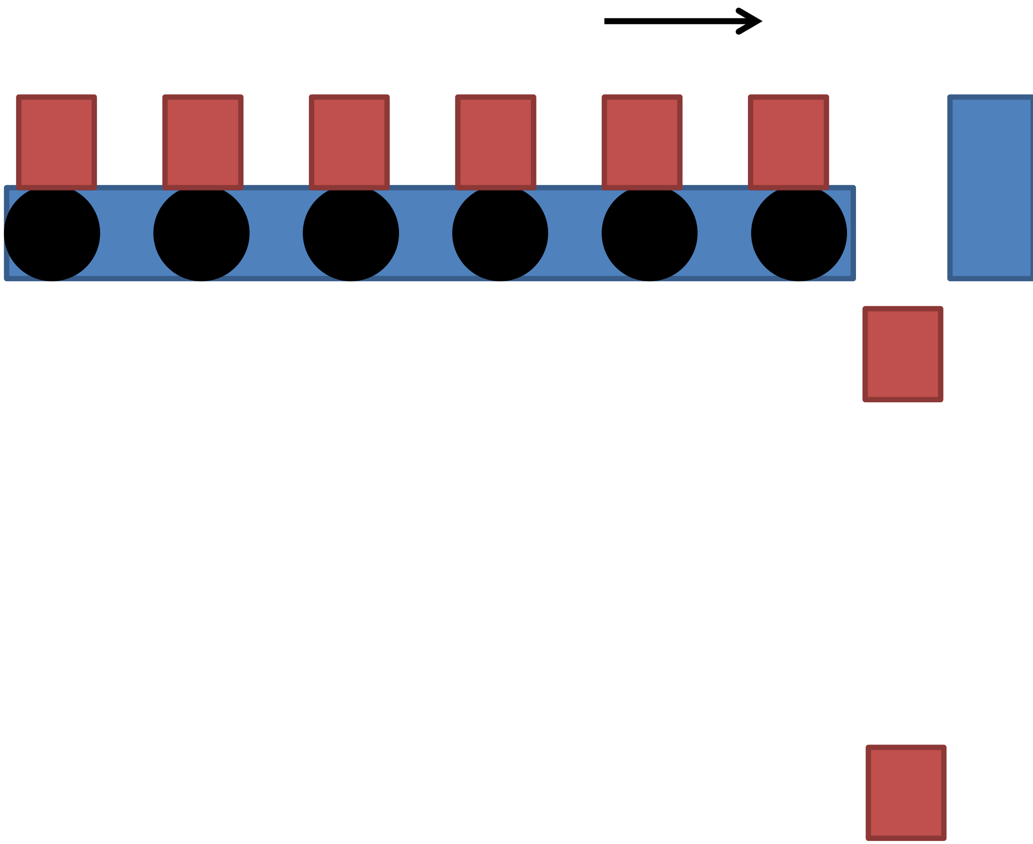
A. B. C. D.

Frit fald

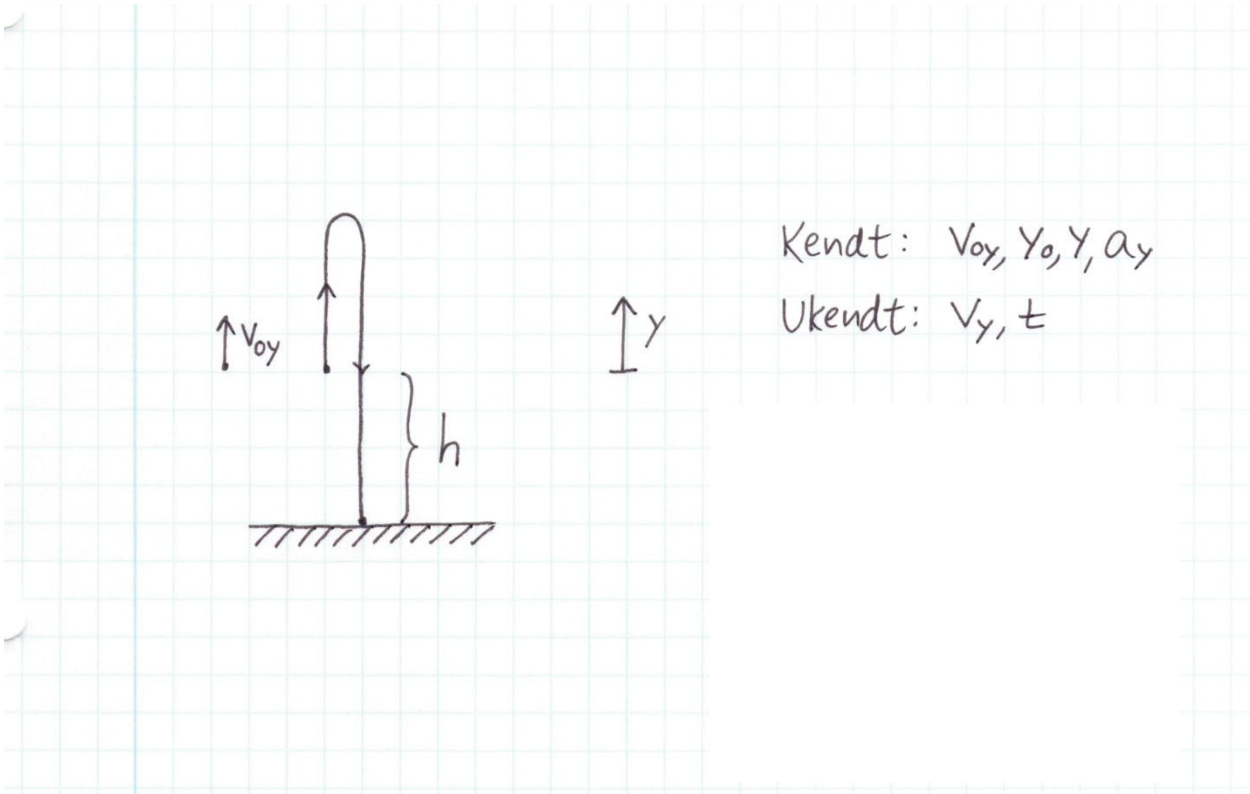
Tæt på jordoverfladen falder alle legemer med konstant acceleration, tyngdeaccelerationen (uden luftmodstand).
Accelerationen er $g = 9.82\ \mathrm{m/s}^2$
Accelerationen afhænger ikke af legemets masse.



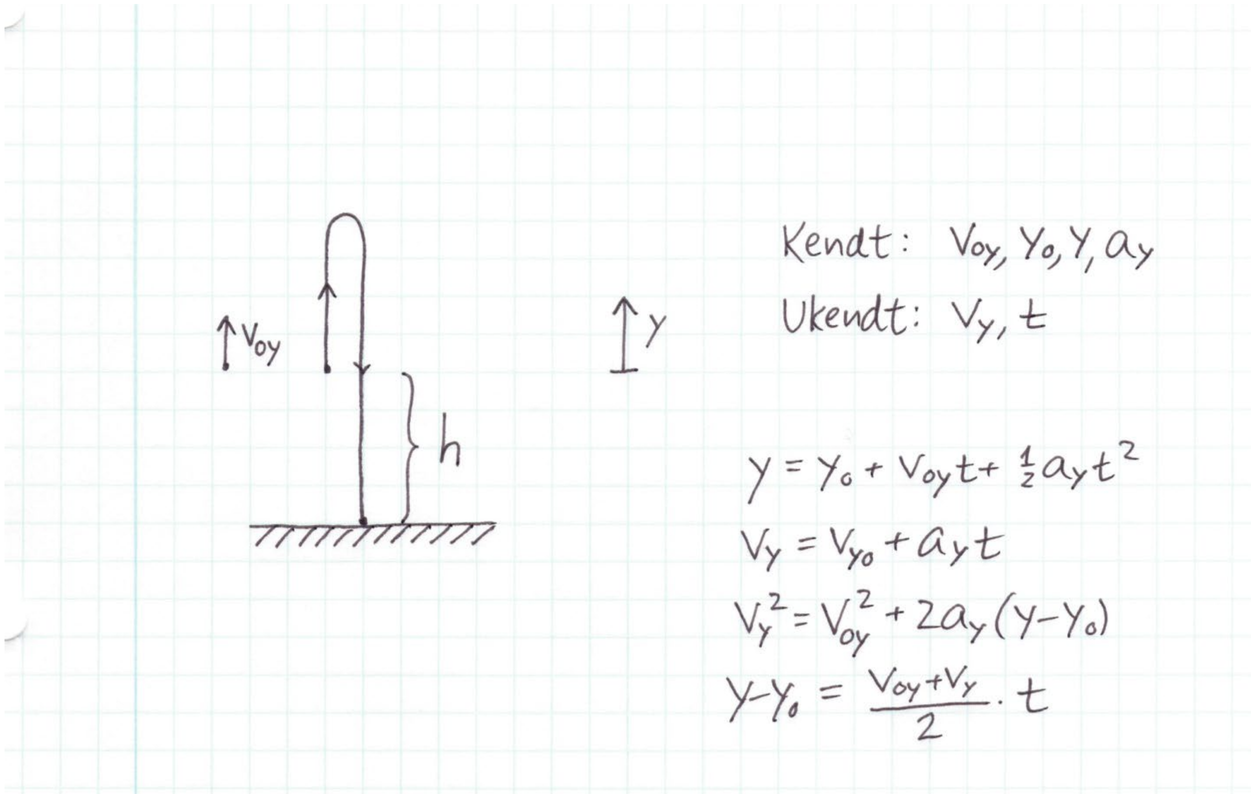
Frit fald



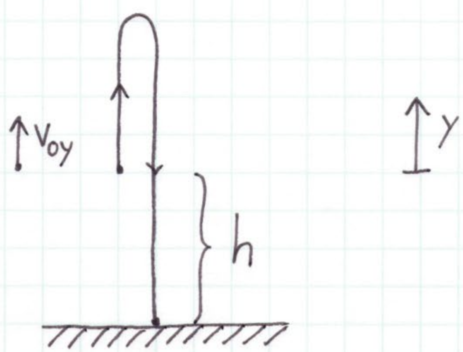
Bold kastes op i luften – hvornår rammer den jorden og med hvilken hastighed?



Bold kastes op i luften –
hvornår rammer den jorden og med hvilken hastighed?



Bold kastes op i luften –
hvornår rammer den jorden og med hvilken hastighed?



Kendt: v_{0y}, y_0, y, a_y

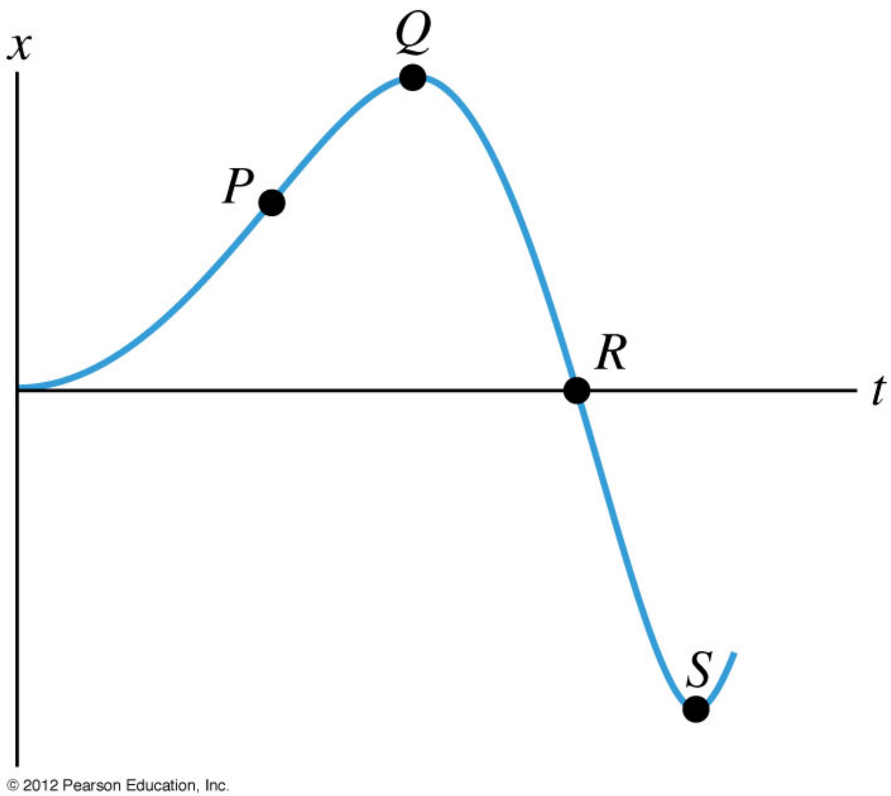
Ukendt: v_y, t

$$y = y_0 + v_{0y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_y = v_{y0} + a_y t$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2 a_y (y - y_0)$$

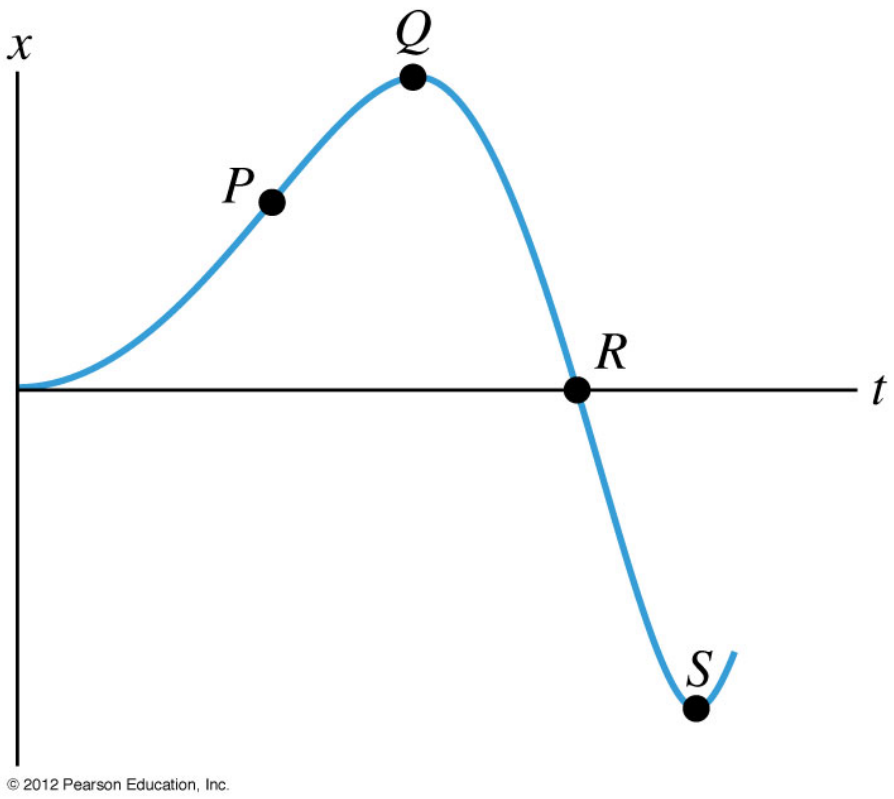
$$y - y_0 = \frac{v_{0y} + v_y}{2} \cdot t$$



Figuren viser en *x*-*t* graf for bevægelsen af en partikel. Ved hvilket af punkterne *P, Q, R* eller *S*, er hastigheden v_x størst?

A. Punkt *P.* B. Punkt *Q.* C. Punkt *R.* D. Punkt *S.*

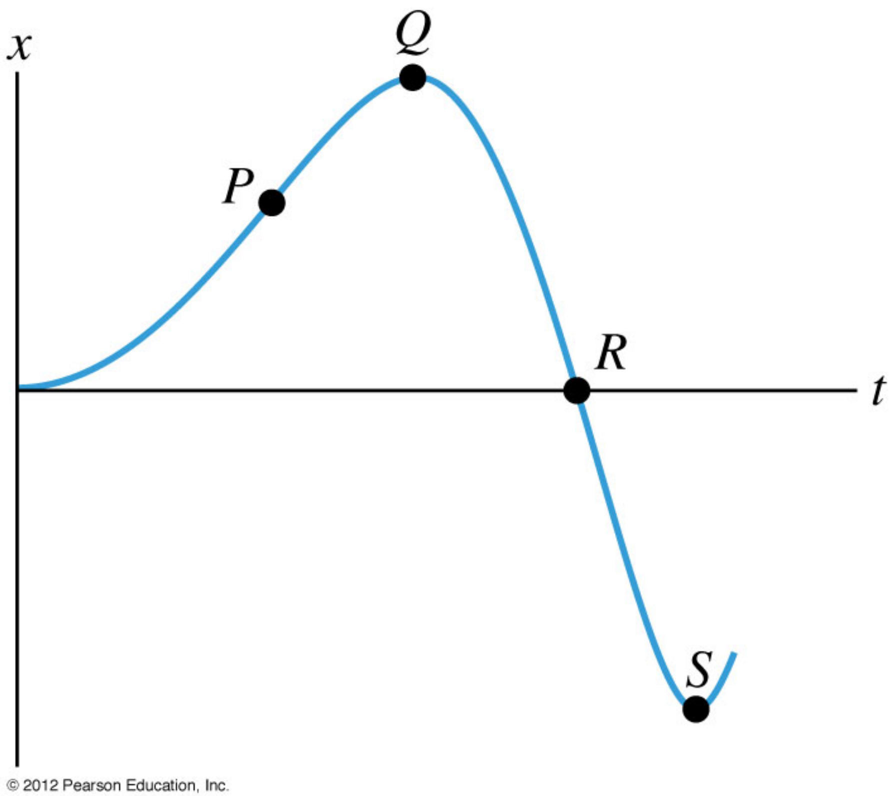
E. Der mangler information på grafen for at det kan afgøres.



Figuren viser en *x*-*t* graf for bevægelsen af en partikel. Ved hvilket af punkterne *P*, *Q*, *R* eller *S*, er hastigheden v_x størst?

A. Punkt *P*. B. Punkt *Q*. C. Punkt *R*. D. Punkt *S*.

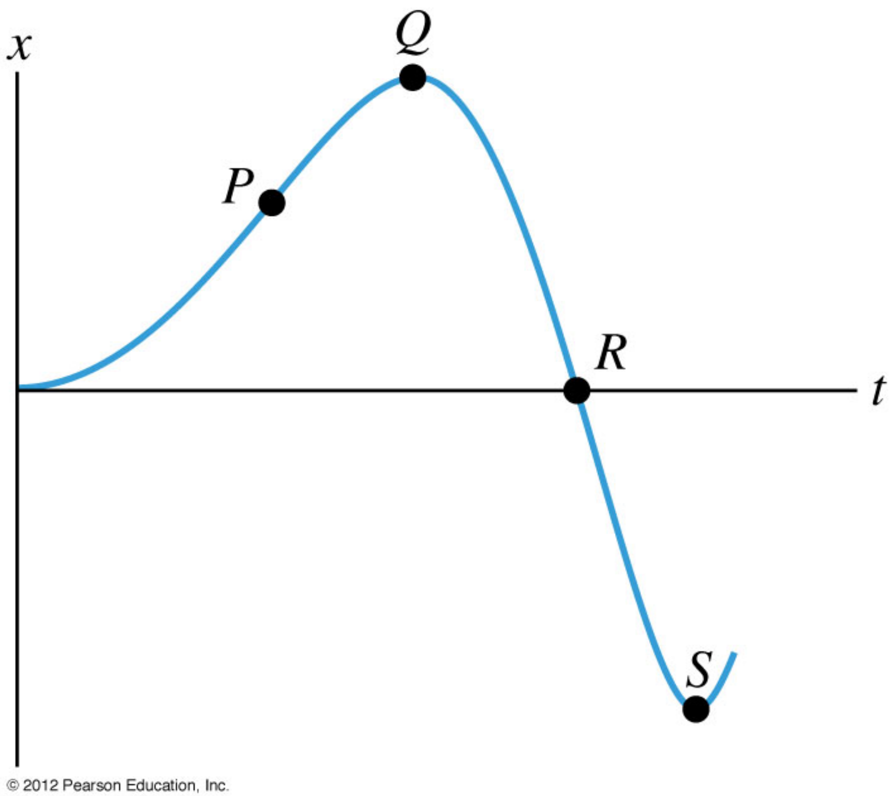
E. Der mangler information på grafen for at det kan afgøres.



Figuren viser en *x*-*t* graf for bevægelsen af en partikel. Ved hvilket af punkterne *P, Q, R* eller *S*, er farten størst?

A. Punkt *P.* B. Punkt *Q.* C. Punkt *R.* D. Punkt *S.*

E. Der mangler information på grafen for at det kan afgøres.



Figuren viser en *x*-*t* graf for bevægelsen af en partikel. Ved hvilket af punkterne *P, Q, R* eller *S*, er farten størst?

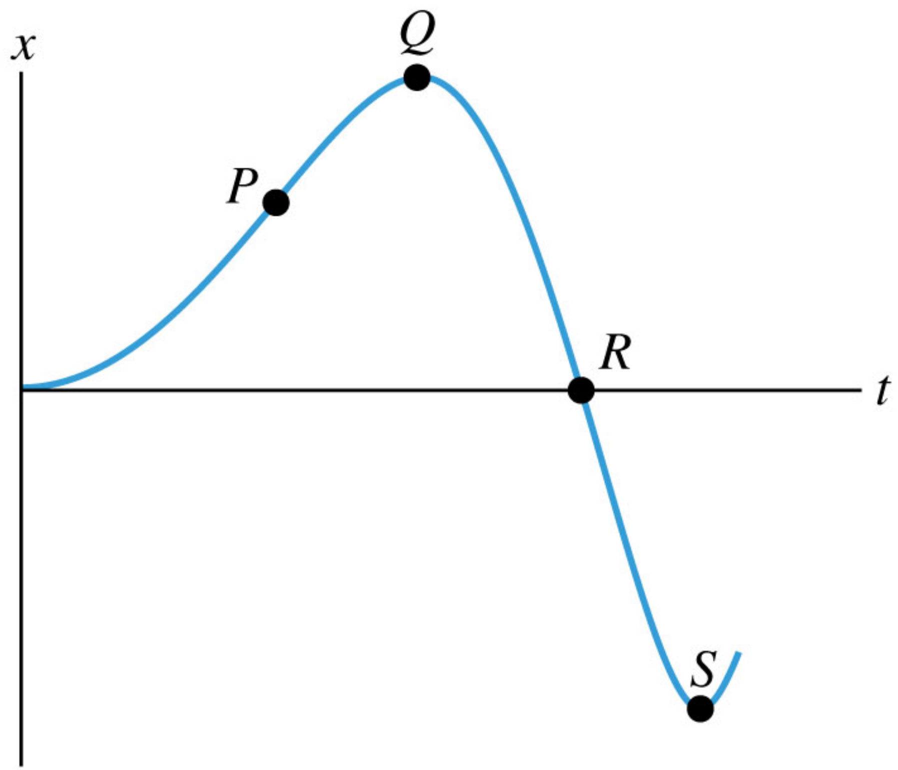
A. Punkt *P.*

B. Punkt *Q.*

C. Punkt *R.*

D. Punkt *S.*

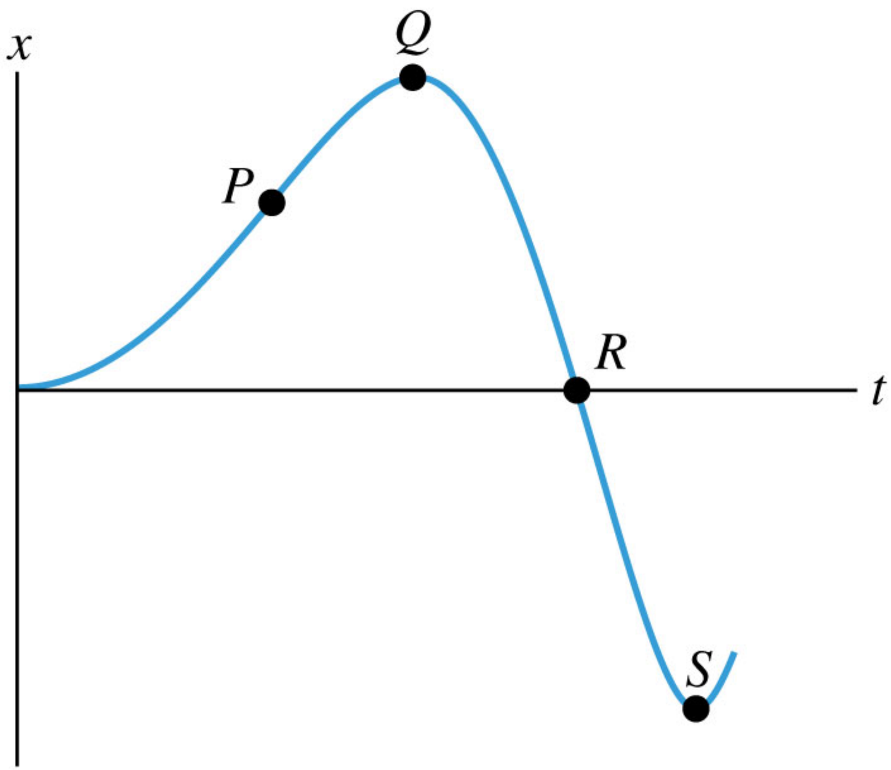
E. Der mangler information på grafen for at det kan afgøres.



Figuren viser en *x*-*t* graf for bevægelsen af en partikel. Ved hvilket af punkterne *P, Q, R* eller *S*, er accelerationen a_x størst?

A. Punkt *P.* B. Punkt *Q.* C. Punkt *R.* D. Punkt *S.*

E. Der mangler information på grafen for at det kan afgøres.



Figuren viser en *x*-*t* graf for bevægelsen af en partikel. Ved hvilket af punkterne *P*, *Q*, *R* eller *S*, er accelerationen a_x størst?

A. Punkt *P*.

B. Punkt *Q*.

C. Punkt *R*.

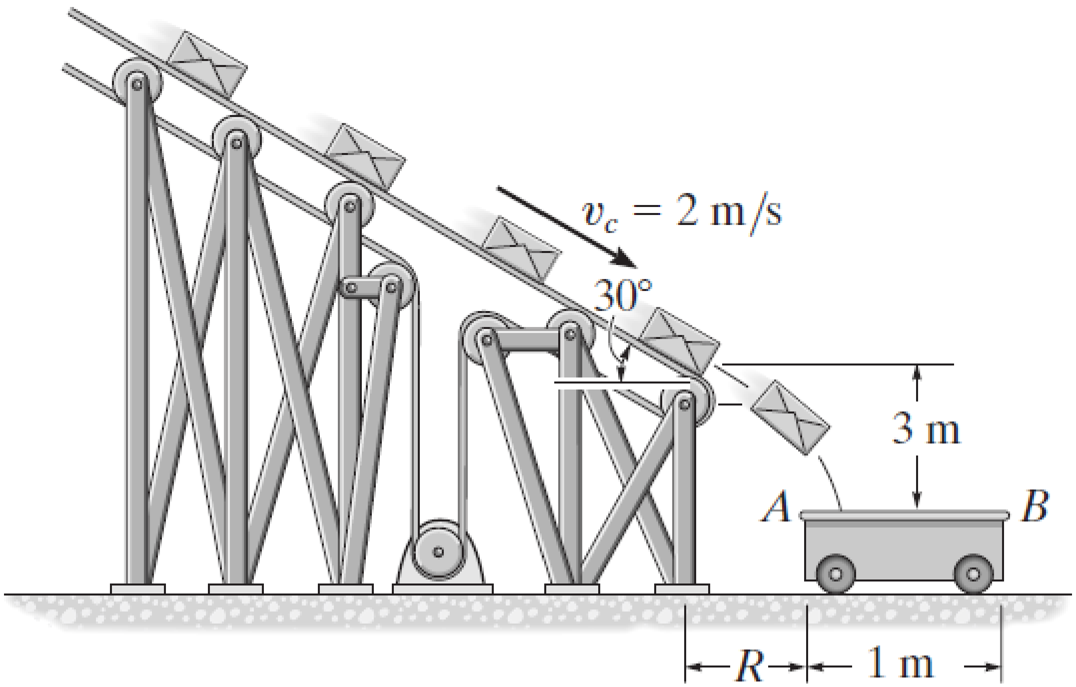
D. Punkt *S*.

E. Der mangler information på grafen for at det kan afgøres.

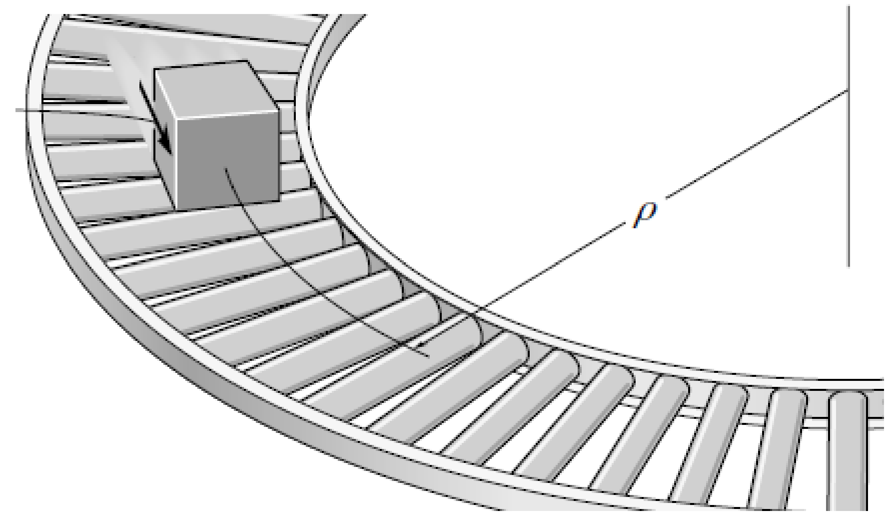
Konstant acceleration - ligninger

Equation	Contains
$v = v_0 + at$	v, a, t; no x
$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	x, v, t; no a
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	x, a, t; no v
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	x, v, a; no t

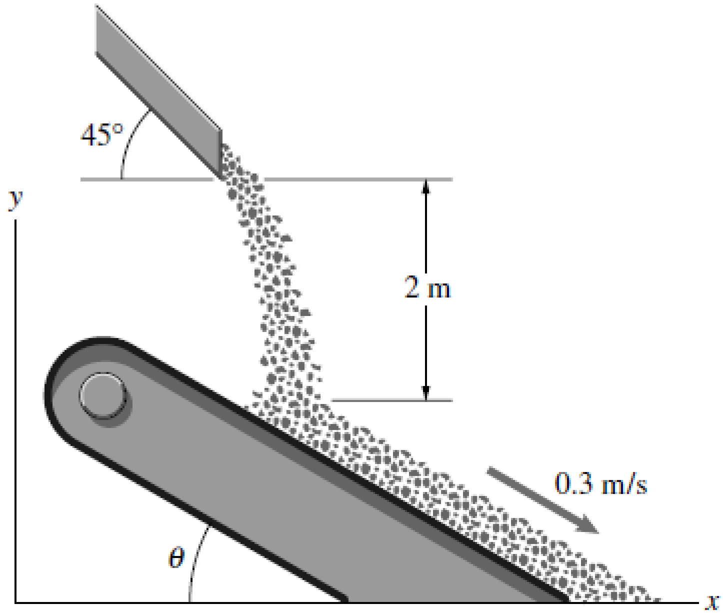
Skråt kast

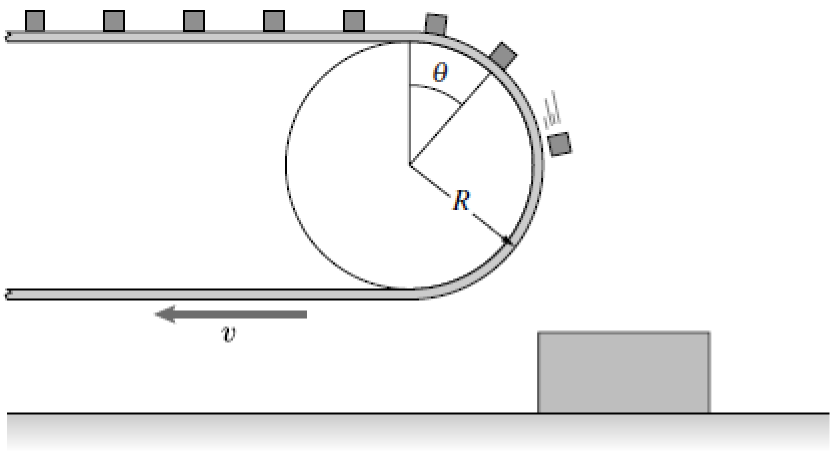


Cirkelbevægelse



Kombination af bevægelserne





Det skrå kast – start i origo

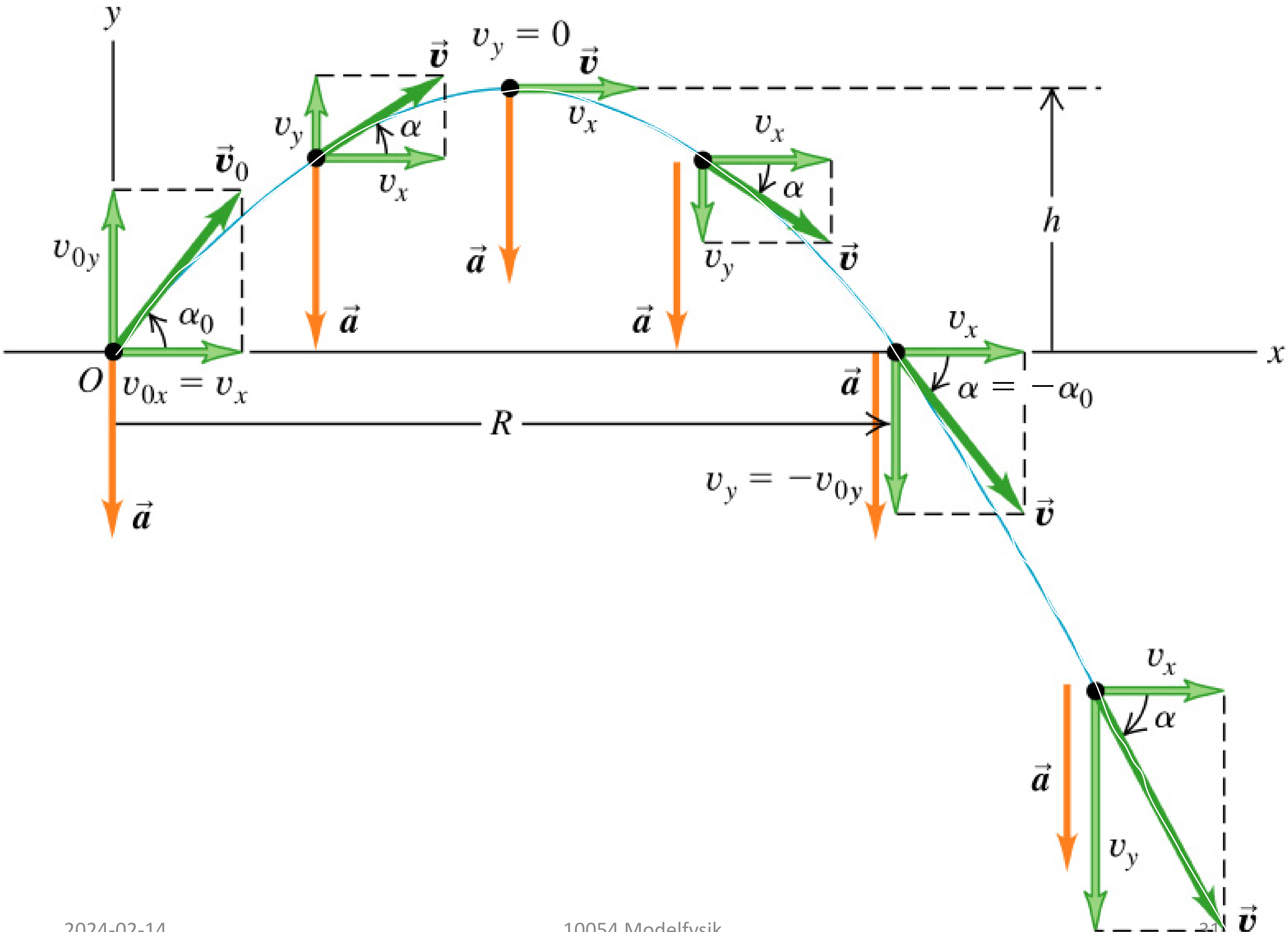
Formlerne kræver at det skrå kast starter i origo i det valgte koordinatsystem og at vinklen måles mht. x-aksen.

$$x = v_0 \cos(\theta) t$$

$$y = v_0 \sin(\theta) t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos(\theta)$$

$$v_y = v_0 \sin(\theta) - g t$$



y
$v_y = 0$
$\vec{v}$
$\vec{v}$
v_y
α
v_x
v_x
$\vec{v}_0$
v_x
α
h
v_{0y}
$\vec{a}$
v_y
$\vec{v}$
α_0
$\vec{a}$
$\vec{a}$
v_x
x
O
$v_{0x} = v_x$
$\vec{a}$
$\alpha = -\alpha_0$
R
$v_y = -v_{0y}$
$\vec{v}$
$\vec{a}$
v_x
α
$\vec{a}$
v_y
$\vec{v}$

Kasteparablen

$$x = v_0 \cos\theta\, t$$

$$y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Kasteparablen

$$x = v_0 \cos\theta \, t$$

$$y = v_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

Karakteristiske størrelser for det skrå kast

Optimal vinkel med højdeforskel?

Et skråt kast med bold starter højere end det ender.

Med hvilken vinkel skal man kaste en bold for at den lander længst væk?

Er den optimale vinkel 45 grader eller større eller mindre end 45 grader?

A 45 grader er optimal

B Mindre end 45 grader er optimalt

C Større end 45 grader er optimalt

Optimal vinkel med højdeforskel?

Et skråt kast med bold starter højere end det ender.

Med hvilken vinkel skal man kaste en bold for at den lander længst væk?

Er den optimale vinkel 45 grader eller større eller mindre end 45 grader?

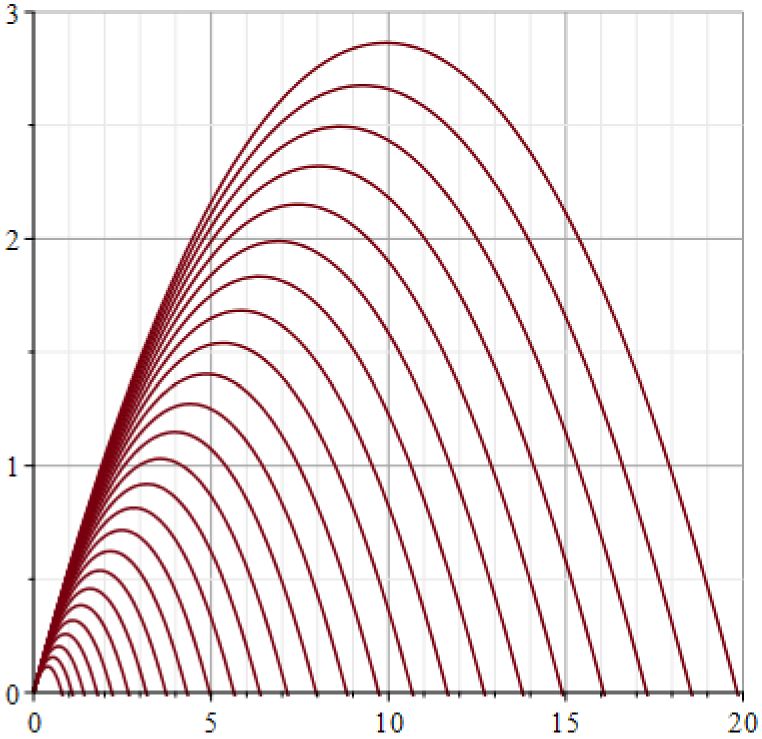
A 45 grader er optimal

B Mindre end 45 grader er optimalt

C Større end 45 grader er optimalt

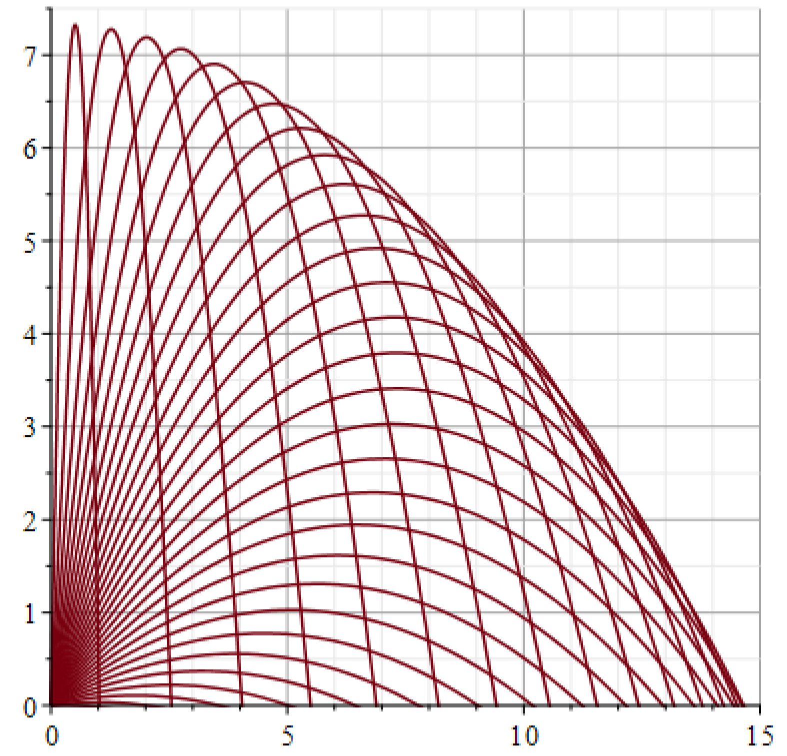
Kasteparabler - varierende startfart

```
restart;
with(plots);
x := v__0*cos(theta)*t;
y := v__0*sin(theta)*t-(1/2)*g*t^2;
theta := (30.0*Pi)/(180.0);
g := 9.82;
P := {};
for v__0 from 3.0 by .5 to 15.0 do
  P := {op(P),
          plot([x, y, t = 0 .. 2.0],
          0 .. 20, 0 .. 3,
          gridlines = true)}
end do;
display(P);
```

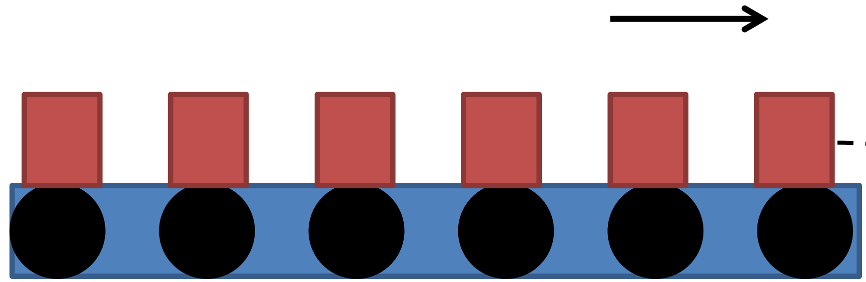


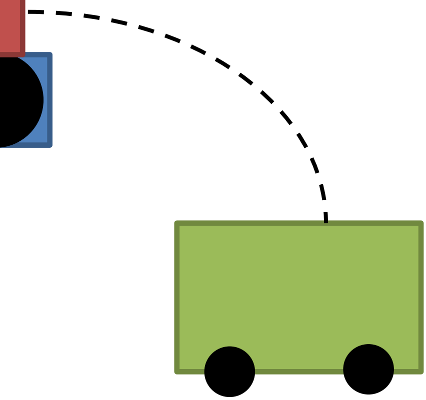
Kasteparabler - varierende startvinkel

```
restart;
with(plots);
x := v__0*cos(theta)*t;
y := v__0*sin(theta)*t-(1/2)*g*t^2;
v__0 := 12.;
g := 9.82;
P := {};
for vinkel from 1.0 by 3.0 to 89.0 do
  theta := vinkel*Pi/(180.);
  P := {op(P),
           plot([x, y, t = 0 .. 3.0],
                0 .. 15, 0 .. 7.5,
                gridlines = true)}
end do;
display(P);
```



Eksempel





En kasse forlader et vandret transportbånd med farten v.

Kassen skal ende i en transportvogn hvis bagerste ende

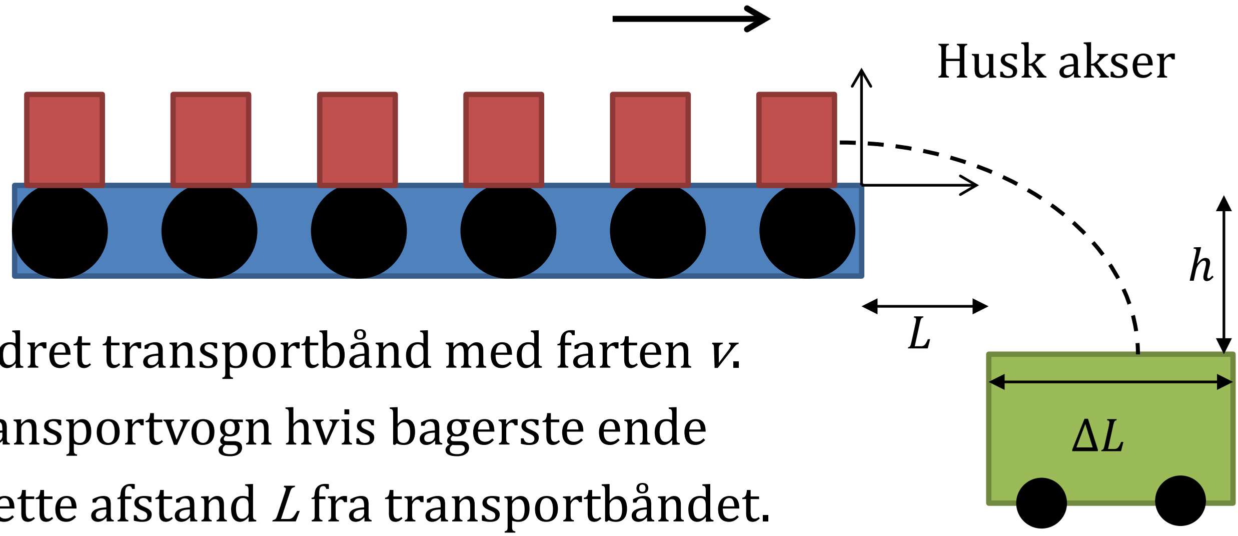
befinder sig i den vandrette afstand L fra transportbåndet.

Vognen har bredden ΔL. Transportvognen befinder sig højden h under transportbåndet.

Bestem de værdier af transportbåndets fart hvor kassen vil

ende i transportvognen.

Eksempel



En kasse forlader et vandret transportbånd med farten v.

Kassen skal ende i en transportvogn hvis bagerste ende befinder sig i den vandrette afstand L fra transportbåndet.

Vognen har bredden ΔL. Transportvognen befinder sig højden h under transportbåndet.

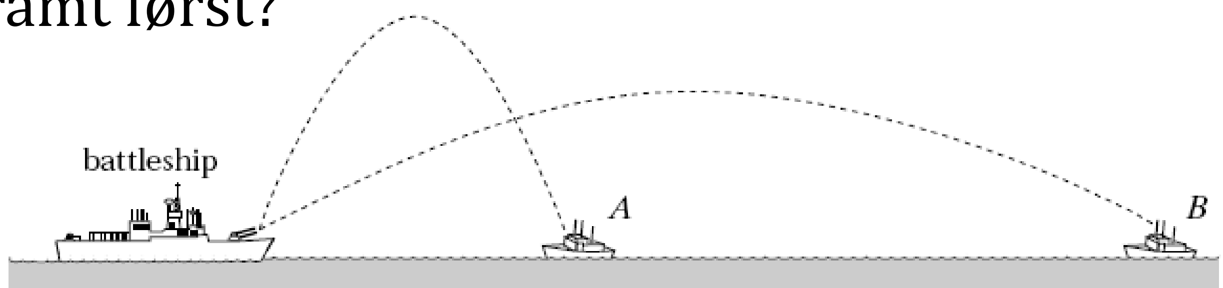
Bestem de værdier af transportbåndets fart hvor kassen vil ende i transportvognen.

$$L = v_{\text{min}} t$$
$$-h = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$L + \Delta L = v_{\text{max}} t$$
$$-h = -\frac{1}{2} g t^2$$

Et krigsskib affyrer samtidigt to projektiler mod to skibe *A* og *B*. Projektilerne følger de viste parabolske baner.

Hvilket skib bliver ramt først?



A. A

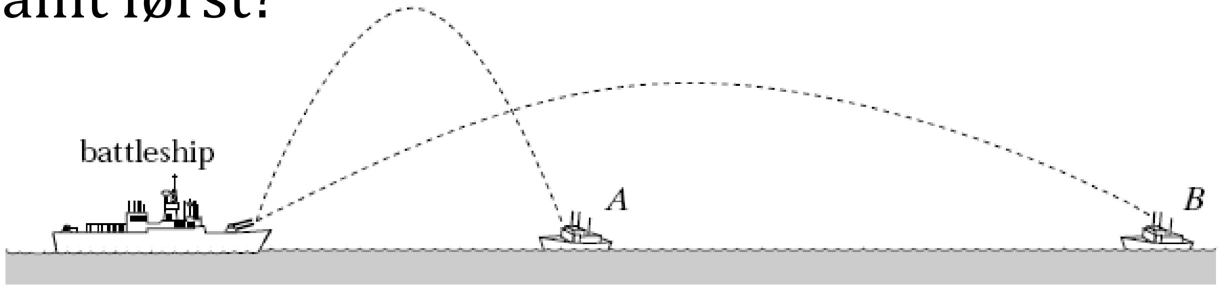
B. B

C. De bliver ramt samtidigt

D. Der mangler information

Et krigsskib affyrer samtidigt to projektiler mod to skibe *A* og *B*. Projektilerne følger de viste parabolske baner.

Hvilket skib bliver ramt først?



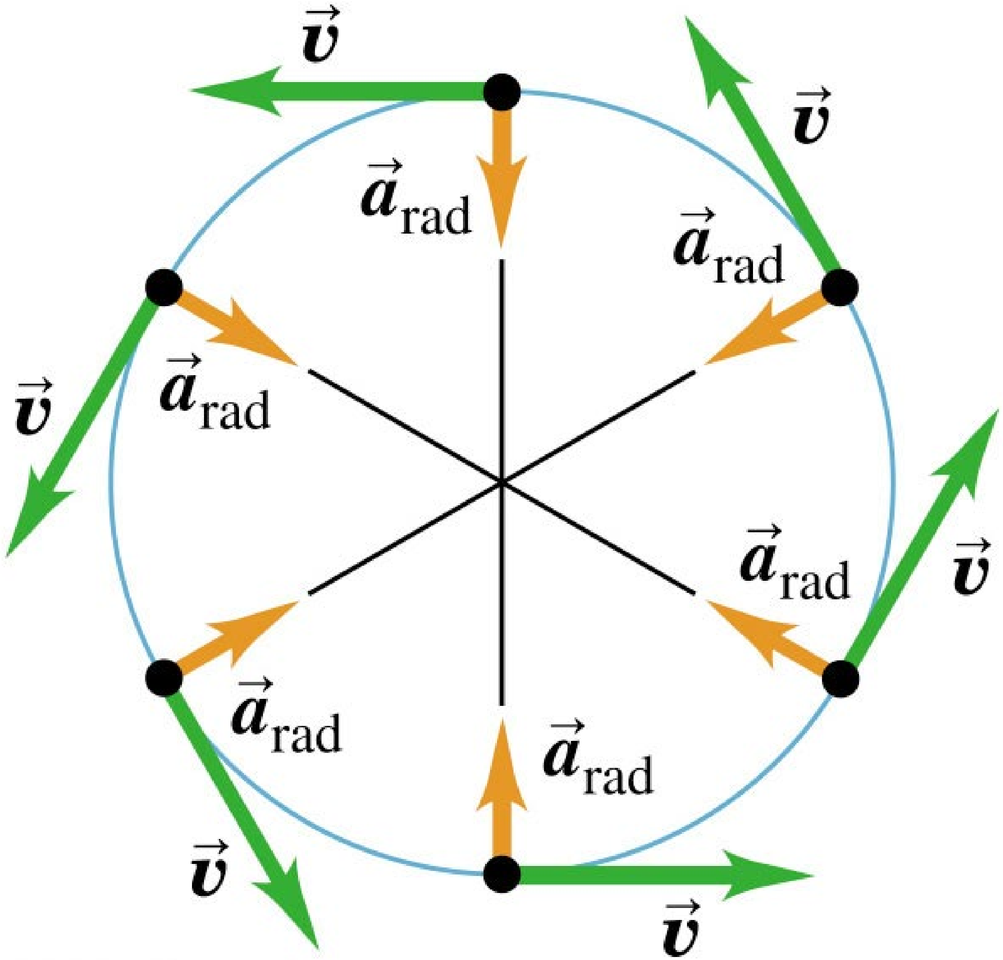
A. A

B. B

C. De bliver ramt samtidigt

D. Der mangler information

Jævn cirkelbevægelse



Jævn cirkelbevægelse

I en jævn cirkelbevægelse er farten v konstant. Hvis radius i cirkelbevægelsen er R og omløbstiden er T kan farten beregnes af

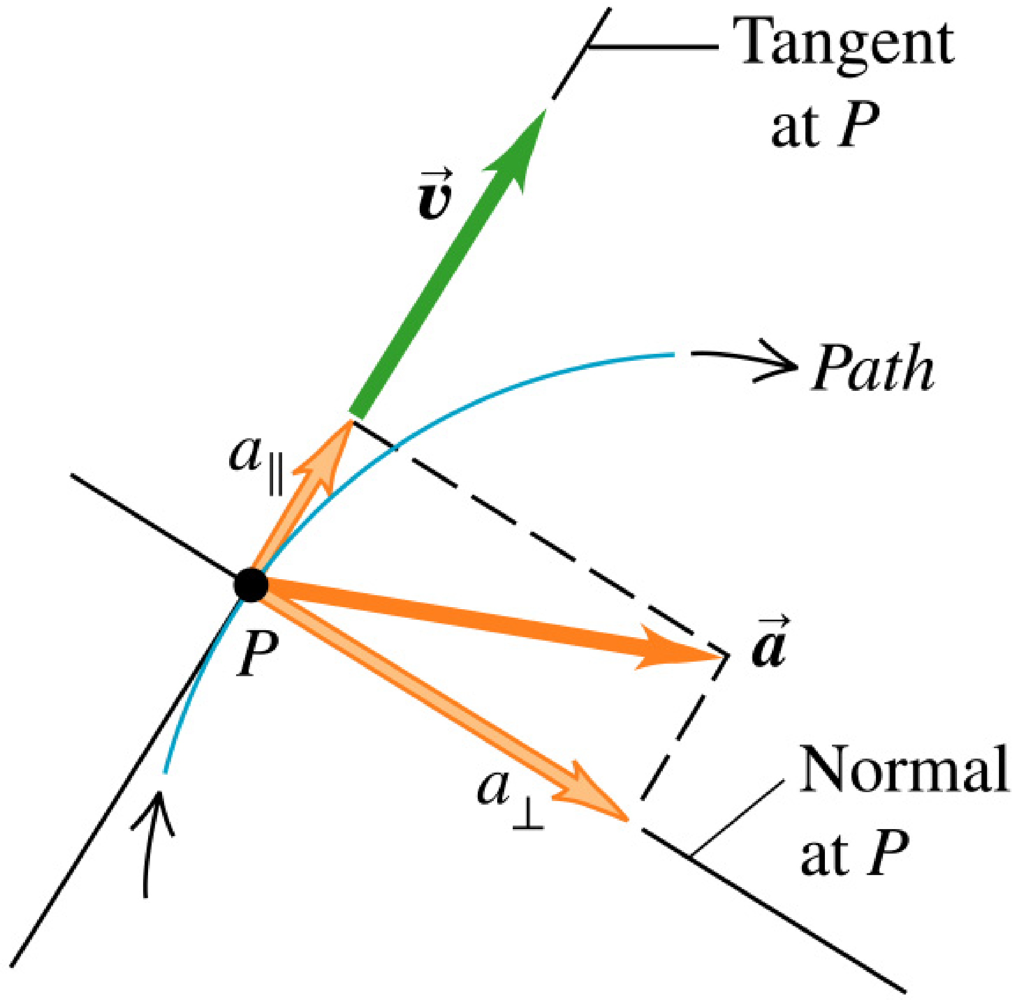
$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

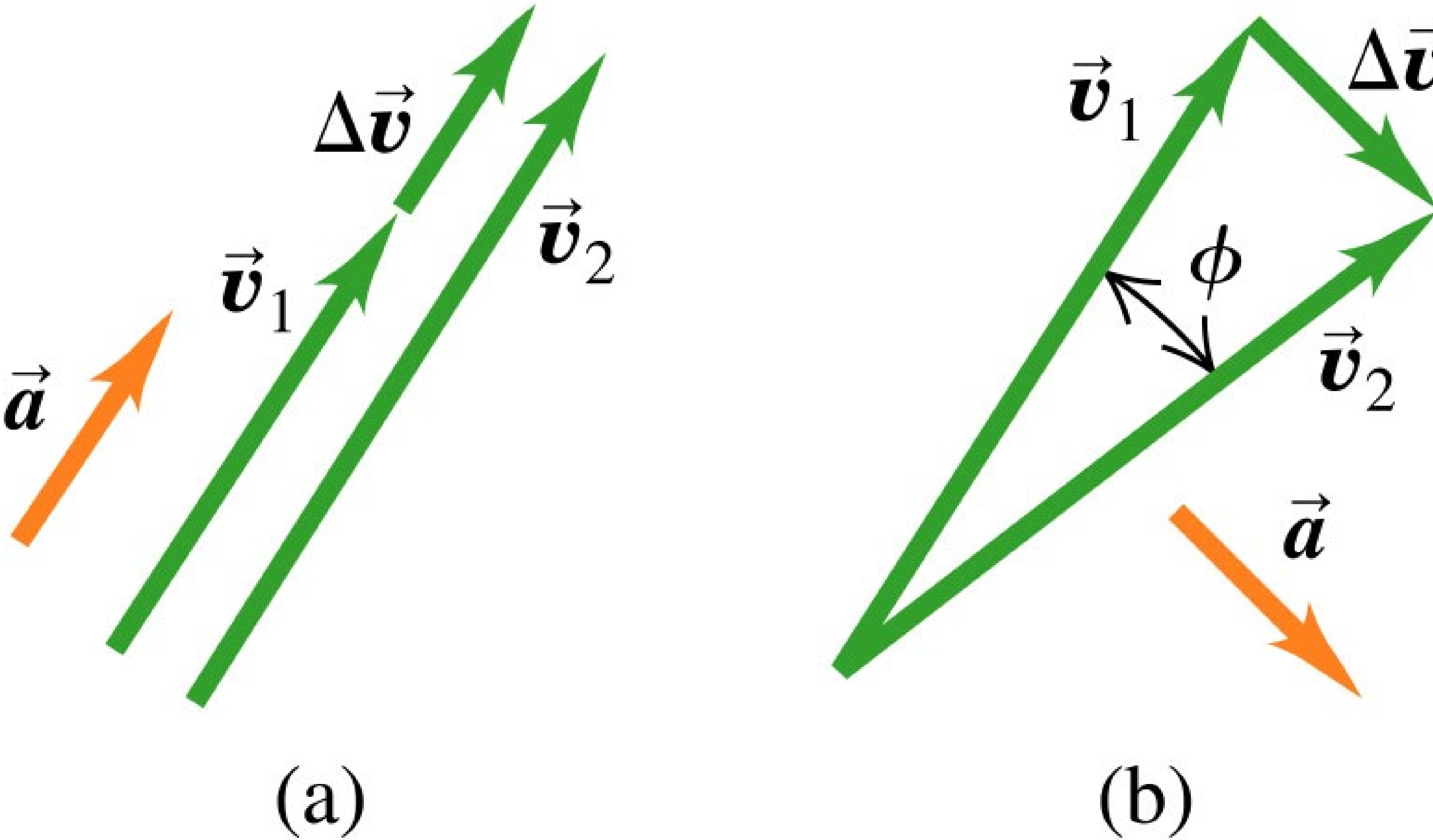
Accelerationen har samme størrelse og er hele tiden rettet mod centrum i cirkelbevægelsen.

Accelerationen ændrer kun retningen af bevægelsen.

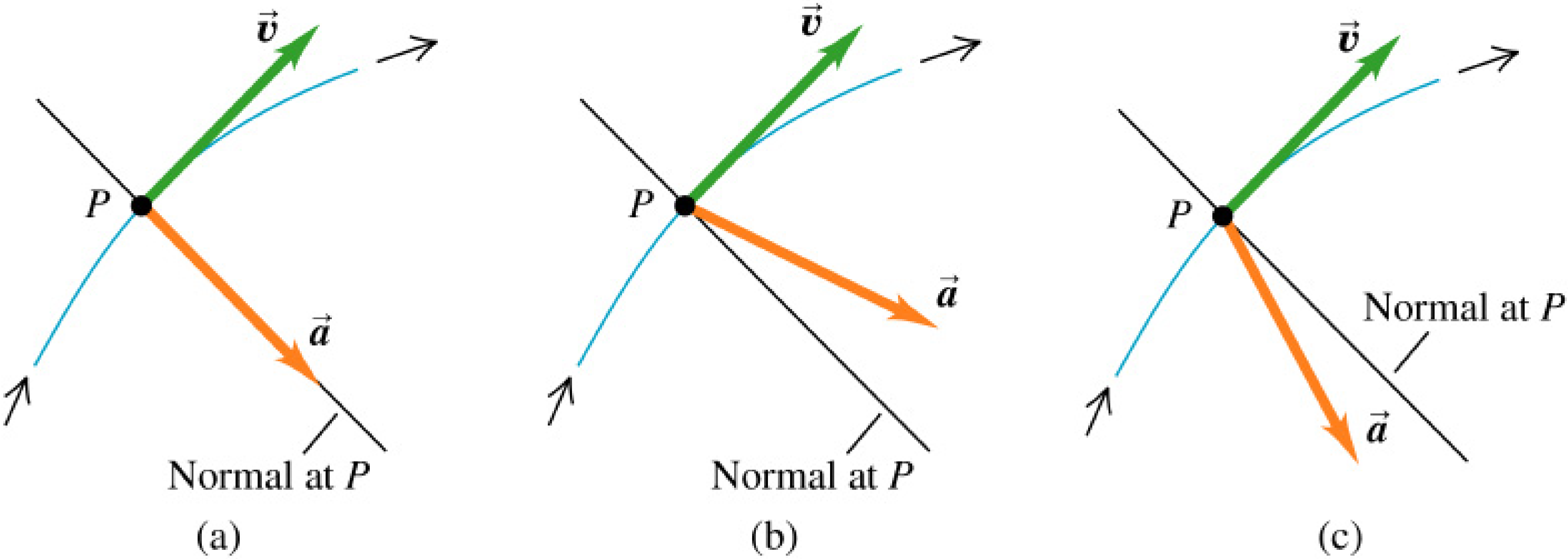
$$a_{\mathrm{rad}} = \frac{v^2}{r}$$

Acceleration i cirkelbevægelse





$\vec{a}$
$\vec{v}_1$
$\Delta\vec{v}$
$\vec{v}_2$
(a)
$\vec{v}_1$
$\Delta\vec{v}$
ϕ
$\vec{v}_2$
$\vec{a}$
(b)



$\vec{v}$
P
$\vec{a}$
Normal at P
(a)
$\vec{v}$
P
$\vec{a}$
Normal at P
(b)
$\vec{v}$
P
Normal at P
$\vec{a}$
(c)

Generel cirkelbevægelse

Accelerationen i en cirkelbevægelse kan deles op i en radial og en tangentiel komposant.

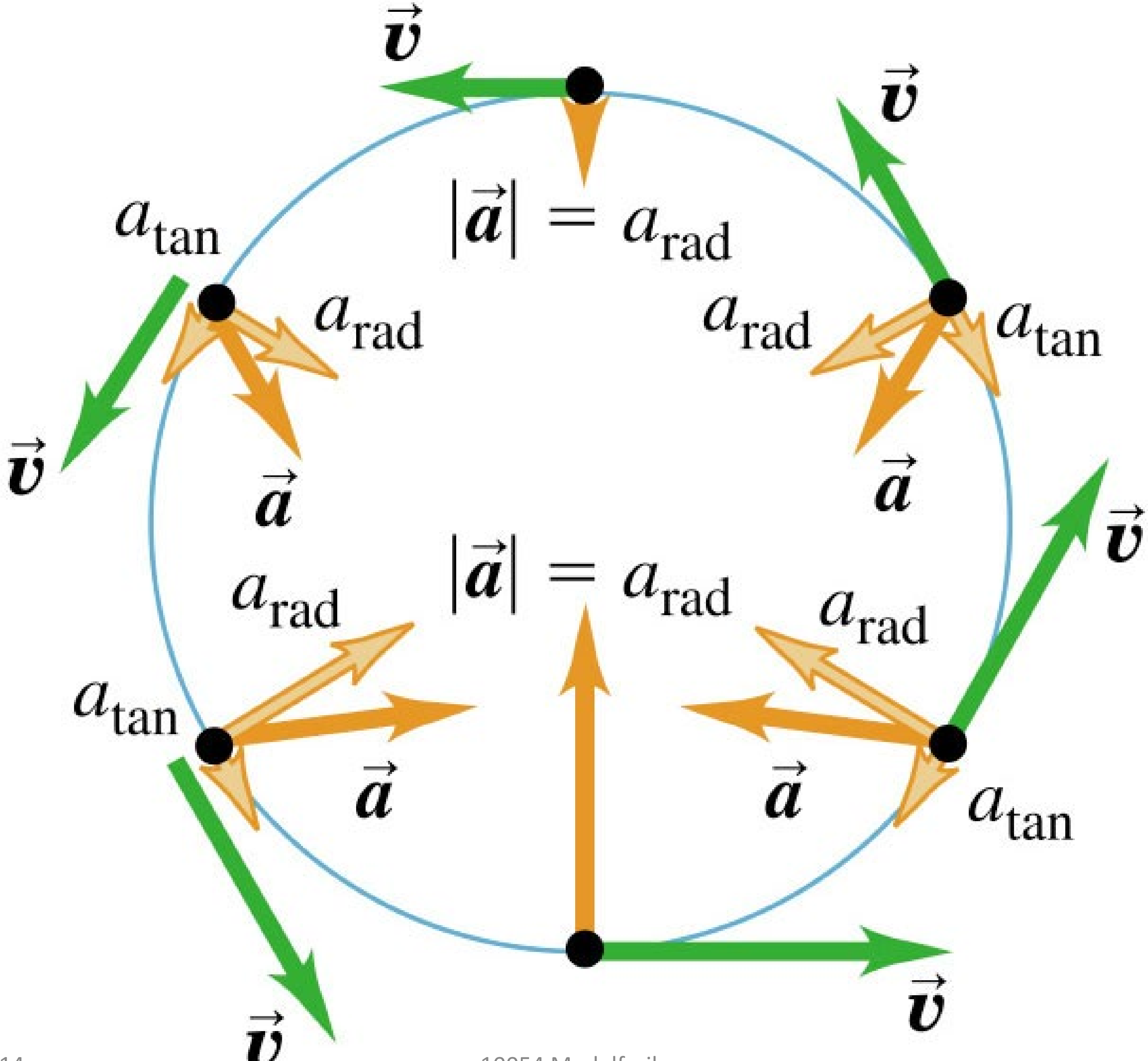
Det gælder desuden mere generelt at en krum bevægelse lokalt kan tilpasses en del af en cirkel; i det tilfælde kaldes *r* for krumningsradius.

Den radiale komposant ændrer kun retningen af bevægelsen.

Den tangentiale komposant ændrer kun farten.

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r}$$

$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt}$$


$\vec{v}$
$|\vec{a}| = a_{rad}$
a_{tan}
a_{rad}
$\vec{a}$
a_{rad}
a_{tan}
$\vec{v}$
$\vec{a}$
$|\vec{a}| = a_{rad}$
a_{rad}
a_{rad}
a_{tan}
$\vec{a}$
$\vec{a}$
a_{tan}
$\vec{v}$
$\vec{v}$
$\vec{v}$
$\vec{v}$

Et pendul med en kugle for enden svinger frem og tilbage, med en maksimal vinkel på 45° Hvilken af pilene viser retningen af kuglens acceleration når den bevæger sig fra venstre til højre gennem punktet *Q*?

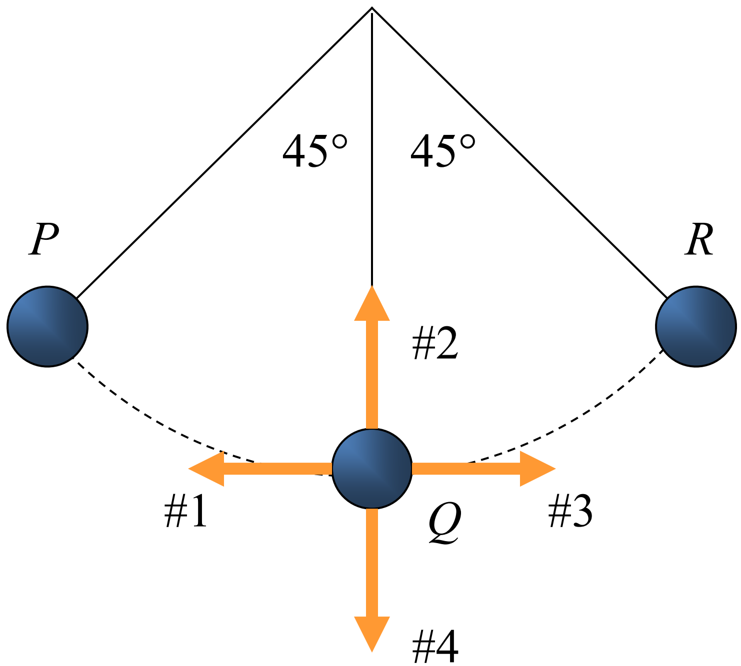
A. #1 (mod venstre)

B. #2 (lodret op ad)

C. #3 (mod højre)

D. #4 (lodret ned ad)

E. Spørgsmålet er forkert — accelerationen er nul ved *Q*



Et pendul med en kugle for enden svinger frem og tilbage, med en maksimal vinkel på 45° Hvilken af pilene viser retningen af kuglens acceleration når den bevæger sig fra venstre til højre gennem punktet *Q*?

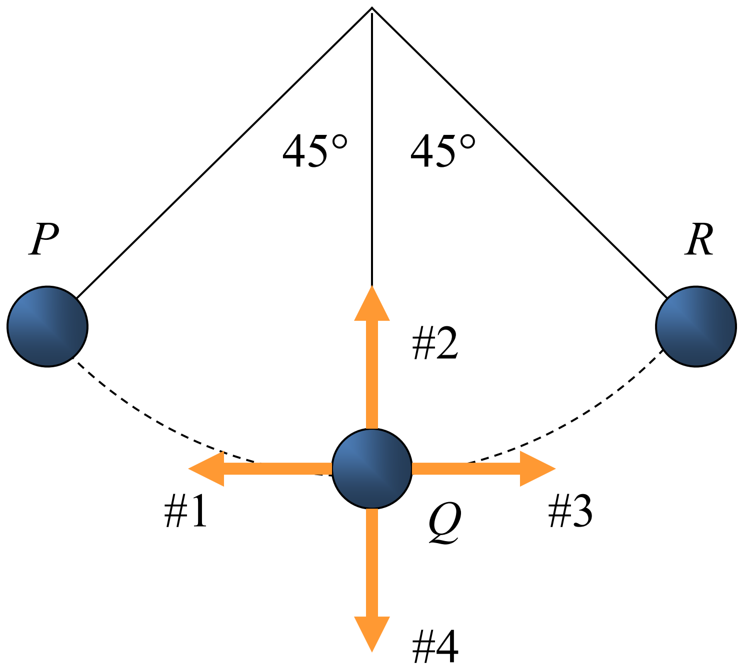
A. #1 (mod venstre)

B. #2 (lodret op ad)

C. #3 (mod højre)

D. #4 (lodret ned ad)

E. Spørgsmålet er forkert — accelerationen er nul ved *Q*



Et pendul med en kugle for enden svinger frem og tilbage, med et maksimalt udsving på 45°. Hvilket af pilene viser retningen af kuglens acceleration ved *P*?

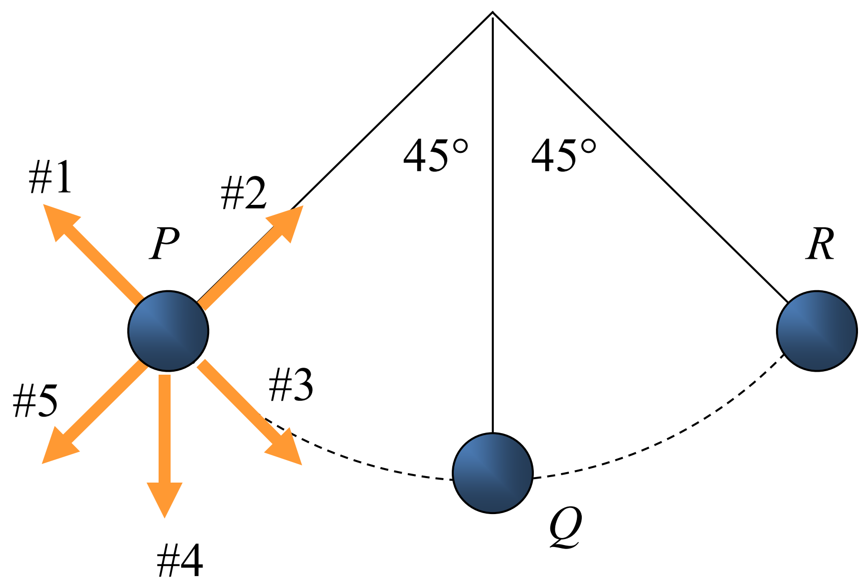
A. #1 (op og mod venstre)

B. #2 (op og møde højre)

C. #3 (ned og mod højre)

D. #4 (lodret ned ad)

E. #5 (ned og mod venstre)



Et pendul med en kugle for enden svinger frem og tilbage, med et maksimalt udsving på 45°. Hvilket af pilene viser retningen af kuglens acceleration ved *P*?

A. #1 (op og mod venstre)

B. #2 (op og møde højre)

C. #3 (ned og mod højre)

D. #4 (lodret ned ad)

E. #5 (ned og mod venstre)