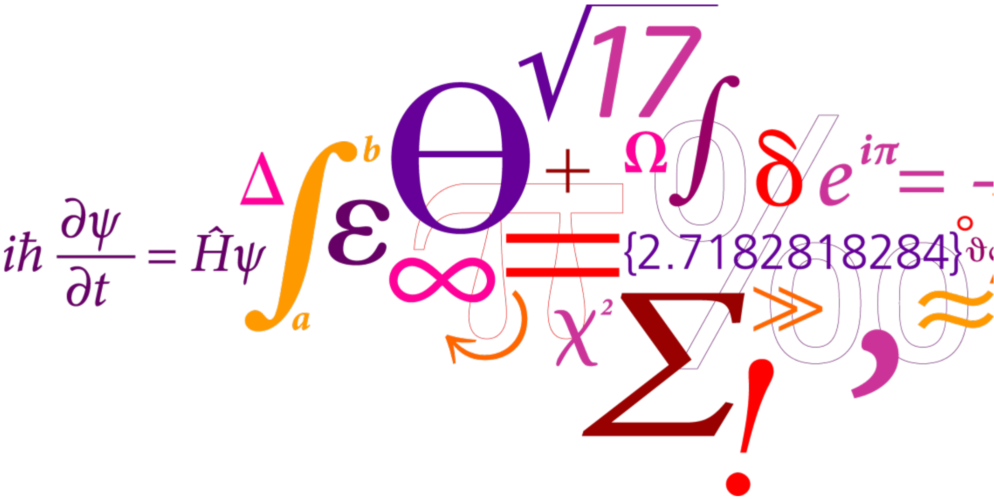
10054 Usikkerhedsvurdering

Carsten Knudsen



DTU Fysik
Institut for Fysik

Usikkerhedsvurdering – Hvorfor?

Vurdere målingers troværdighed/brugbarhed
Hjælpe med at forbedre målinger

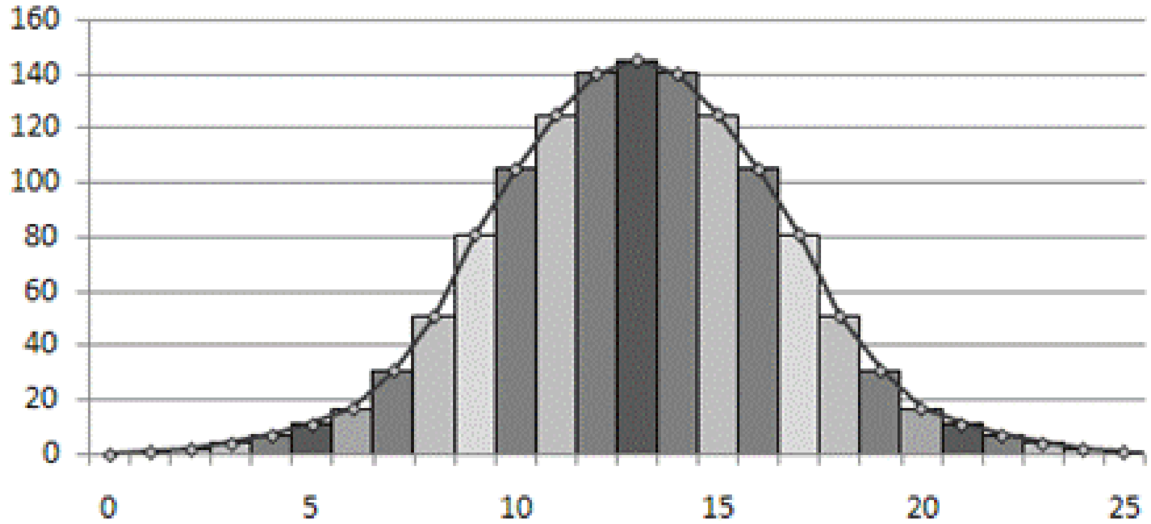
Usikkerhedsvurdering – Hvad?

Usikkerhed ved målinger

Statistisk analyse ved måleserie

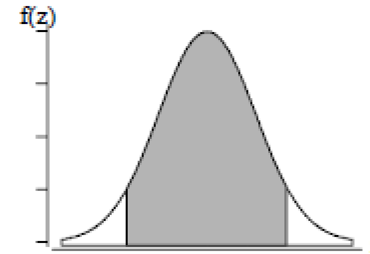
Skelne mellem beregninger på usikre størrelser
- addition/subtraktion
- multiplikation/division
- alt andet (fejlophobningsloven)

Målinger – der findes ikke ét resultat



Målinger er ofte normalfordelte

68% ligger indenfor én standardafvigelse.
95% ligger indenfor to standardafvigelser.



0.00	0%
0.25	20%
0.50	38%
0.75	55%
1.00	68%
1.25	79%
1.50	87%
1.75	92%
2.00	95.4%
2.50	98.8%
3.0	99.7%
3.5	99.95%
4.0	99.99%

Angivelse af usikkerhed

x bedste bud på størrelse
δx usikkerhed, positiv størrelse

$x \pm \delta x$ absolut usikkerhed

$\frac{\delta x}{|x|}$ relativ usikkerhed

Antallet af cifre i bedste bud og usikkerhed skal stemme overens.

$L = 10.0 \pm 0.3 \text{ m}$

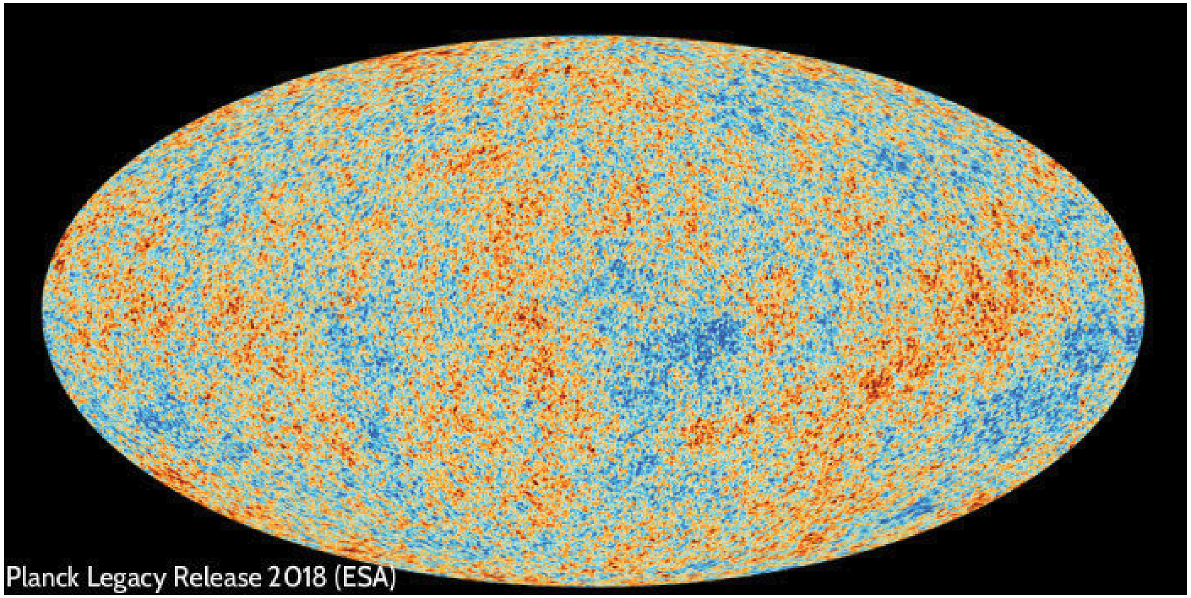
$A = 24.43 \pm 0.13 \text{ m}^2$

$L = 10.0 \text{ m} \pm 1\%$

Afrunding af resultat og usikkerhed

Normalt afrundes usikkerheden til ét betydende ciffer. Hvis dette ciffer er 1 eller 2 medtages et ekstra ciffer for at undgå for stor afrundingsfejl.

$\delta x = 0.34566 \rightarrow \delta x = 0.3$
$\delta x = 0.14327 \rightarrow \delta x = 0.14$



Planck Legacy Release 2018 (ESA)

Flot pris afslutter historisk kortlægning af universet

Rumforskning Astrofysik

MANDAG 27 AUG 18 | Af Morten Garly Andersen

DTU Space har ydet væsentlige videnskabelige bidrag til den europæiske Planck-mission. Nu får folkene bag forskningen en prestigefyldt pris for deres indsats, som omfatter den mest præcise beregning af universets alder.

Efter næsten et årti i rummet afslutter den europæiske rumorganisation ESA nu den banebrydende Planck-mission. Den blev sendt i rummet i 2009 for at udforske universets oprindelse i tiden efter Big Bang.

Blandt andet har forskere med data fra Planck beregnet, at universet er lige omkring 13,8 mia. år gammelt (13.787 mia. år +/- 0,020 mia. år) og dermed lidt ældre end hidtil antaget.

Kontakt

Hans Ulrik Nørgaard-Nielsen
Seniorforsker
DTU Space
45 25 97 28
hunn@space.dtu.dk

Planck-missionen

Planck-missionen blev sendt i rummet 14. maj 2009 og blev

Afrunding af resultat og usikkerhed

Afrunding til ét ciffer
0.10 -> 0.1 (ingen fejl)
0.11 -> 0.1 (10% fejl)
0.14 -> 0.1 (40% fejl)
0.22 -> 0.2 (10% fejl)
0.24 -> 0.2 (20% fejl)

Derfor afrunder vi til to cifre når mest betydende ciffer er 1 eller 2.

Beregning med størrelser med usikkerhed

Usikkerhed ved addition/subtraktion

Afhængige fejl

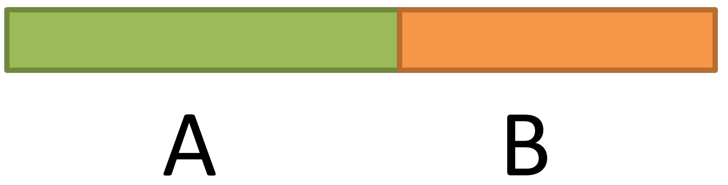
$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - y_1 - y_2 - \cdots - y_m$$

$$\delta z = \delta x_1 + \delta x_2 + \cdots + \delta x_n + \delta y_1 + \delta y_2 + \cdots + \delta y_m$$

$$\delta z = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots + \delta x_n^2 + \delta y_1^2 + \delta y_2^2 + \cdots + \delta y_m^2}$$

Uafhængige fejl

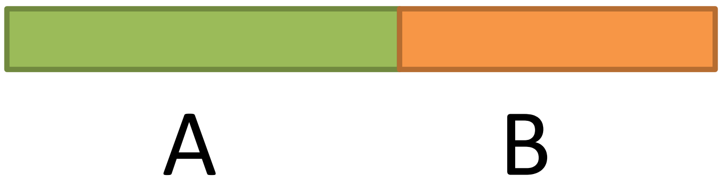
Længdemåling



Længderne af A og A+B måles uafhængigt med samme usikkerhed δx.

Hvad er usikkerheden på længden af B hvis denne beregnes?

Længdemåling



Længderne af A og A+B måles uafhængigt med samme usikkerhed δx.

Hvad er usikkerheden på længden af B hvis denne beregnes?

Hvis længderne af A og B senere skal bruges i andre beregninger skal vi huske at de nu er afhængige størrelser.

Usikkerhed ved multiplikation/division

Afhængige fejl

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_m}$$

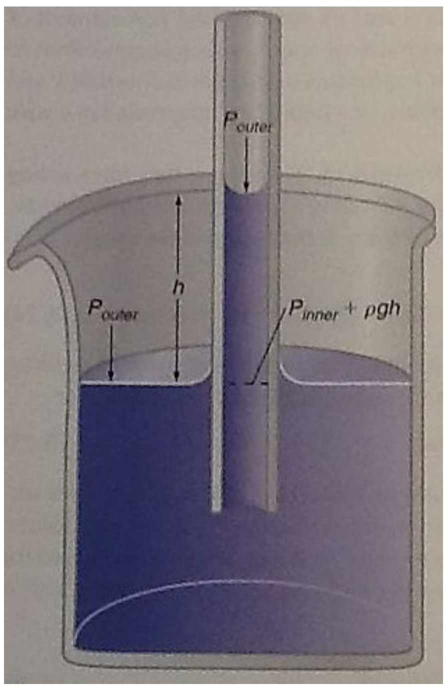
$$\frac{\delta z}{|z|} = \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \frac{\delta x_2}{|x_2|} + \dots + \frac{\delta x_n}{|x_n|} + \frac{\delta y_1}{|y_1|} + \frac{\delta y_2}{|y_2|} + \dots + \frac{\delta y_m}{|y_m|}$$

$$\frac{\delta z}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_2}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta x_n}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_1}{y_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_2}{y_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta y_m}{y_m}\right)^2}$$

Uafhængige fejl

Kapillareffekt

Kapillareffekt:
Højde h
Overfladespænding γ
Densitet ρ
Tyngdeaccelerationen g
Radius r



$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

$$\frac{\delta h}{h} = \sqrt{\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\delta r}{r}\right)^2}$$

Areal af bord

Hvad er mest rigtigt?

1. $A = 2650 \pm 268 \text{ cm}^2$
2. $A = 2700 \pm 300 \text{ cm}^2$
3. $A = 2652 \pm 6 \text{ cm}^2$
4. $A = 2650 \pm 367 \text{ cm}^2$
5. $A = 2650 \pm 260 \text{ cm}^2$

Areal af bord

Bedste bud:

$A = b \cdot d = 51 \cdot 52 = 2652\ \text{cm}^2$

Relativ usikkerhed pga. produktform:

$$\frac{\delta A}{A} = \sqrt{\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\delta d}{d}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{51}\right)^2 + \left(\frac{5}{52}\right)^2} = 0.0981$$

$\delta A = 0.0981 \cdot A = 260\ \text{cm}^2$ (nullet er ikke betydende)

$A = 2650 \pm 260\ \text{cm}^2$ let læst (nuller er ikke betydende)

$A = 265 \cdot 10^1 \pm 26 \cdot 10^1 \text{cm}^2$ mere korrekt;svært at læse

Areal af bord i Maple

Maple regner som udgangspunkt med uafhængige fejl.

$with(ScientificErrorAnalysis)$:

$bredde := Quantity(51., 1.)$

$$Quantity(51., 1.)$$

$dybde := Quantity(52., 5.);$

$$Quantity(52., 5.)$$

$areal := combine(bredde \cdot dybde, errors);$

$$Quantity(2652., 260.2479587)$$

$ApplyRule(areal, \mathrm{round}[1]);$

$$Quantity(2700., 300.)$$

$ApplyRule(areal, round3g[1]);$

$$Quantity(2650., 260.)$$

Maple kommandoer

```
with(ScientificErrorAnalysis): # giver adgang til beregninger med usikkerhed

x:=Quantity(5.0,0.3); # størrelse med 0.3 i absolut usikkerhed
y:=Quantity(6.0,0.12,'relative'); # størrelse med 12% relativ usikkerhed

GetValue(x); # få fat i det bedst bud, middelværdien
GetError(x); # få fat i usikkerheden (absolut)

z:=combine(x+y,errors); # beregning af sum med usikkerheder

ApplyRule(z,round[1]); # afrunding  af usikkerhed til et ciffer
ApplyRule(z,round3g[1]); # afrunding af usikkerhed til et eller to cifre
```

Usikkerhedsvurdierng i Maple

$with(ScientificErrorAnalysis):$
$masse := Quantity(m, \delta m);$

$$Quantity(m, \delta m)$$

$\mathrm{fart} := Quantity(\mathrm{v}, \delta v);$

$$Quantity(v, \delta v)$$

$K := combine\left(\frac{1}{2} \cdot masse \cdot fart^2, errors\right);$

$$Quantity\left(\frac{1}{2}\, m\, v^2, \frac{1}{2}\sqrt{4\, m^2\, v^2\, \delta v^2 + v^4\, \delta m^2}\right)$$

Addition i kvadratur

Ved addition i kvadratur (det gælder både for absolutte og relative usikkerheder) er der ofte få bidrag der dominerer over de andre. Disse bidrag er dem der skal reduceres hvis man ønsker at få et mere nøjagtigt resultat.
Udover at lave en samlet beregning af usikkerheden er det en god ide at lave en beregning for hvert bidrag alene. Det giver information om hvilke bidrag der dominerer og dermed hvordan et mere nøjagtigt resultat kan opnås.

Addition i kvadratur

```
x := Quantity(2.0, .2);
y := Quantity(3.0, .1);
z := Quantity(5.0, .2);
w := combine(x*y*z, errors);
                    Quantity(30.00, 3.382306905)
x := Quantity(2.0, .2);
y := Quantity(3.0, 0);
z := Quantity(5.0, 0);
w := combine(x*y*z, errors);
                    Quantity(30.00, 3.000000000)
x := Quantity(2.0, 0);
y := Quantity(3.0, .1);
z := Quantity(5.0, 0);
w := combine(x*y*z, errors);
                    Quantity(30.00, 1.0000)
x := Quantity(2.0, 0);
y := Quantity(3.0, 0);
z := Quantity(5.0, .2);
w := combine(x*y*z, errors);
                    Quantity(30.00, 1.200000000)
```

Hvilken er den korrekte beregning

$$z = \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+\dfrac{y}{x}}, \; x = 1.0 \pm 0.1, \; y = 3.0 \pm 0.3$$

A)

$$combine\left(\frac{Quantity(1.0, 0.1)}{Quantity(1.0, 0.1) + Quantity(3.0, 0.3)}, 'errors' \right);$$

$$Quantity(0.2500000000, 0.03186887196)$$

B)

$$combine\left(\frac{1}{1 + \dfrac{Quantity(3.0, 0.3)}{Quantity(1.0, 0.1)}}, 'errors' \right);$$

$$Quantity(0.2500000000, 0.02651650429)$$

Hvilken er den korrekte beregning

$$z = \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+\frac{y}{x}},\ x = 1.0 \pm 0.1,\ y = 3.0 \pm 0.3$$

$x := Quantity(1.0, 0.1);$

$x := Quantity(1.0, 0.1)$

$y := Quantity(3.0, 0.3);$

$y := Quantity(3.0, 0.3)$

$combine\left(\frac{x}{x+y}, 'errors'\right);$

$Quantity(0.2500000000, 0.02651650429)$

$combine\left(\frac{1}{1+\frac{y}{x}}, 'errors'\right);$

$Quantity(0.2500000000, 0.02651650429)$

Vægtede data

Givet måledata $x_1 \pm \delta x_1$ og $x_2 \pm \delta x_2$ (forskellige usikkerheder).
Vi indfører vægte på data ved $w_1 = \frac{1}{\delta x_1^2}$ osv.

Jo mindre usikkerhed, jo mere vægter vi målingen.
Et bedre bud på x og usikkerheden δx er

$$x = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2}{w_1 + w_2}$$

$$\delta x = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2}}$$

Udtrykkene kan umiddelbart generaliseres til flere målinger.

Vægtede data

```
x1 := Quantity(0.123, 0.017);
x2 := Quantity(0.131, 0.04);
w1 := 1/GetError(x1)^2;
                w1 := 3460.207612
w2 := 1/GetError(x2)^2;
                w2 := 625.0000000
x := (w1*GetValue(x1)+w2*GetValue(x2))/(w1+w2);
                x := 0.1242239280
dx := 1/sqrt(w1+w2);
               dx := 0.01564562561
x := Quantity(x, dx);
        x := Quantity(0.1242239280, 0.01564562561)
ApplyRule(x, round3g[1]);
               Quantity(0.124, 0.016)
```

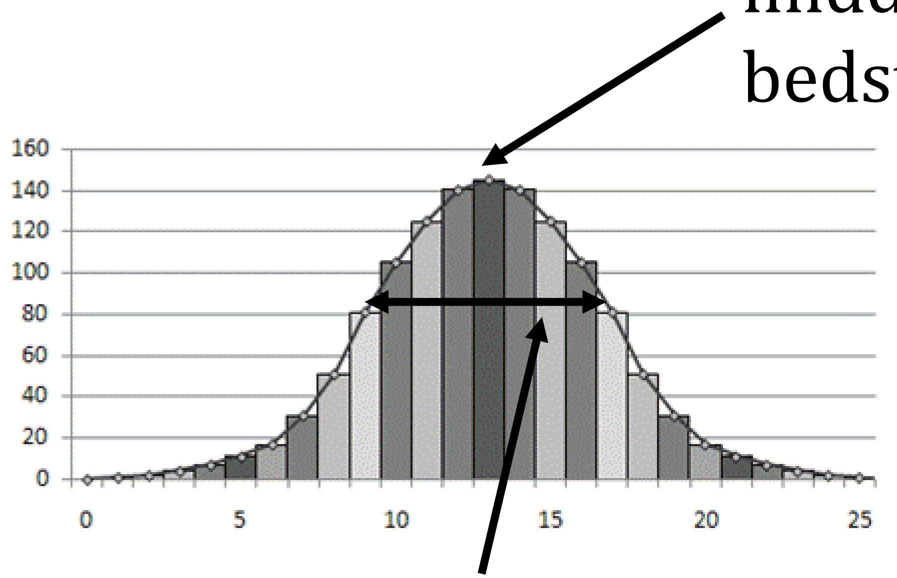
Bemærk at usikkerheden er lidt mindre end den mindste usikkerhed.

Måledata

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N$ målinger

Målinger – der findes ikke ét resultat

middelværdi;
bedste bud



spredning;
standardusikkerhed

Statistik - stikprøve

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ middelværdi

$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$ standardafvigelse

$\delta x = s_x$ usikkerhed på den enkelte måling

$\delta \bar{x} = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$ usikkerhed på middelværdi

Måledata

4.32 g

4.35 g

4.31 g

4.36 g

4.37 g

4.34 g

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = 4.342 \text{ g}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\delta x = s_x = 0.023 \text{ g}$$

$$\delta \bar{x} = 0.009 \text{ g}$$

$$m = 4.342 \pm 0.009 \text{ g}$$

Hvilke andre usikkerheder kan vi overveje?

Massemåling i Maple

$with(Statistics)$:
$x := [4.32, 4.35, 4.31, 4.36, 4.37, 4.34];$ $[4.32, 4.35, 4.31, 4.36, 4.37, 4.34]$

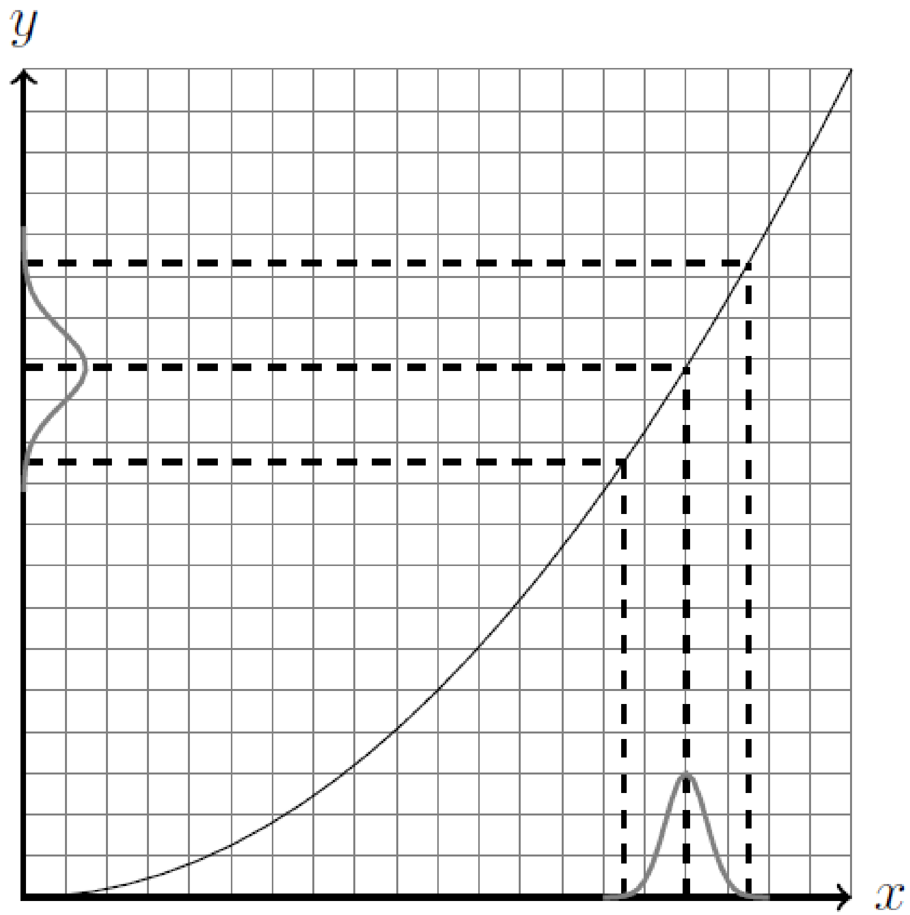
$Mean(x);$ 4.34166666666667

$StandardDeviation(x);$ 0.0231660671385256

$StandardError(Mean, x);$ 0.00945750730607414

$$m = 4.342 \pm 0.009 \text{ g}$$

Udbredelse af fejl - funktioner

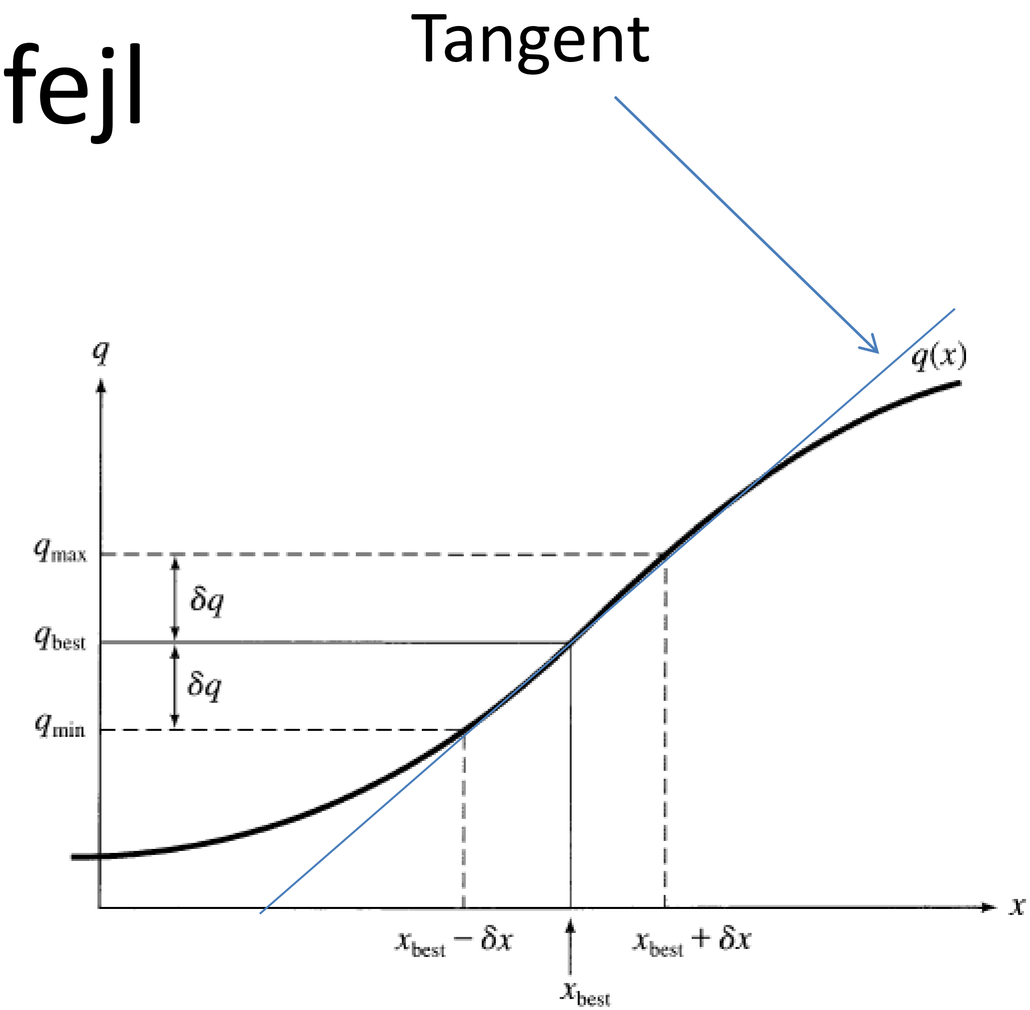


Udbredelse af fejl

$$z = f(x)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

$$\delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x$$



Fejlophobningsloven

$$z = f(x, y)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Afhængige fejl

$$\delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y$$

Uafhængige fejl

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y \right)^2}$$

Specielle regler

$z = Ax$	$z = x^n$
$dz = A dx$	$dz = n x^{n-1} dx$
$\frac{\delta z}{\lvert z \rvert} = \frac{\delta x}{\lvert x \rvert}$	$\frac{\delta z}{\lvert z \rvert} = n \frac{\delta x}{\lvert x \rvert}$

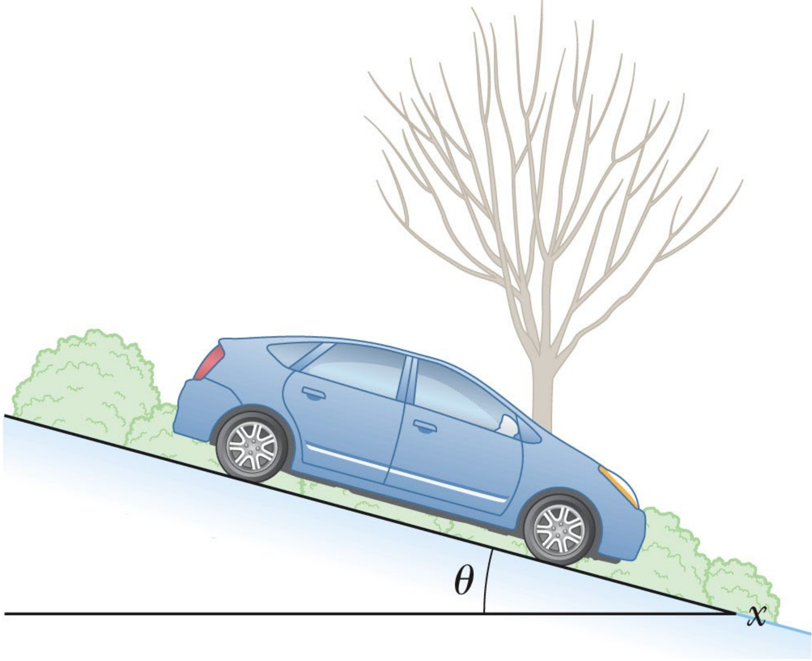
$z = \sin x$	$z = \cos x$
$dz = \cos x \, dx$	$dz = -\sin x \, dx$
$\delta z = \lvert \cos x \rvert \, \delta x$	$\delta z = \lvert \sin x \rvert \, \delta x$

Ned ad skråplan

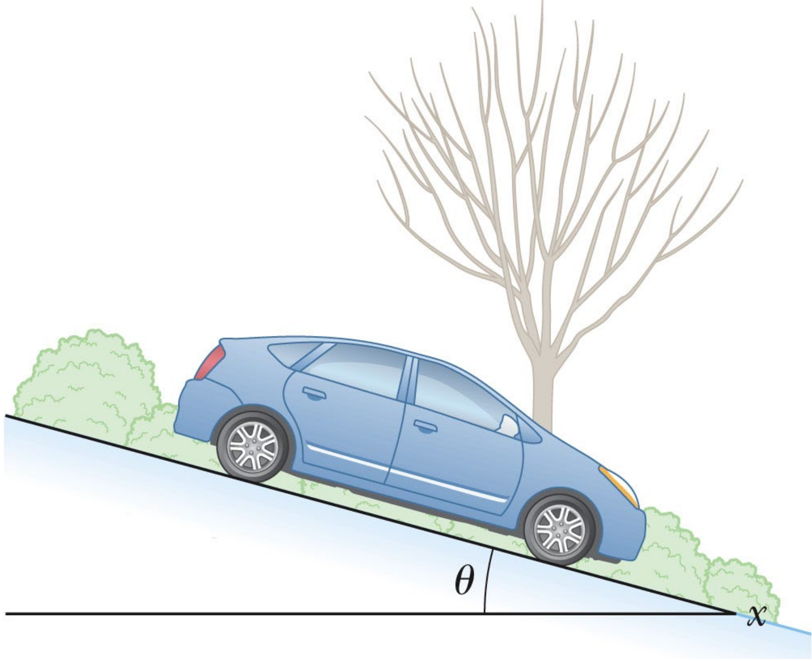
$$a = g\sin\theta$$

$$\theta = 30.0 \pm 1.2^{\circ}$$

$$g = 9.82 \pm 0.01\ \mathrm{m/s^2}$$



Ned ad skråplan



$$a = g\sin\theta$$

$$da = \frac{\partial a}{\partial g}dg + \frac{\partial a}{\partial \theta}d\theta$$

$$da = \sin\theta dg + g\cos\theta d\theta$$

$$\delta a = \left|\sin\theta\right|\delta g + \left|g\cos\theta\right|\delta\theta$$

$$\delta a = \sqrt{\sin^2\theta\cdot\delta g^2 + g^2\cos^2\theta\cdot\delta\theta^2}$$

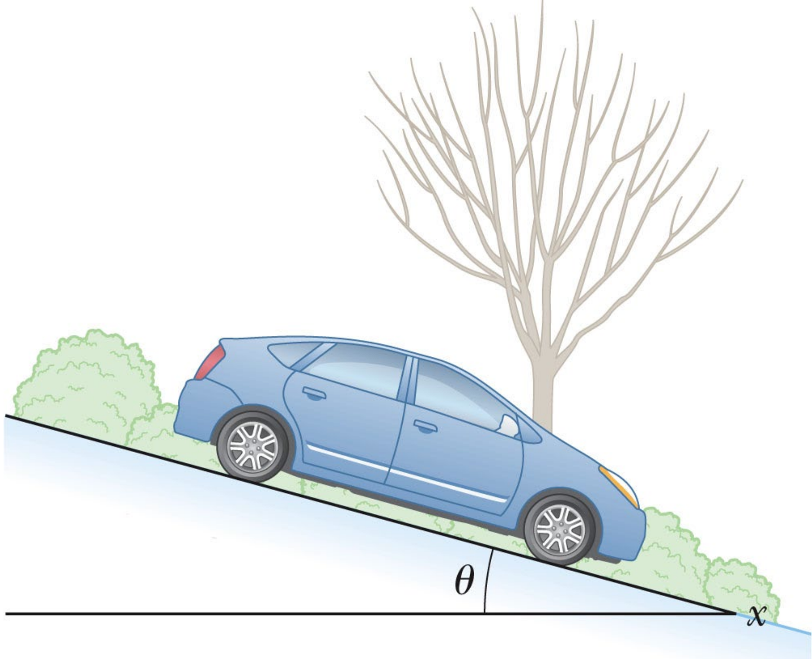
$$\theta = 30.0 \pm 1.2^{\mathrm{o}} \quad g = 9.82 \pm 0.01\ \mathrm{m/s^2}$$

Ned ad skråplan

$$a = g\sin\theta$$

$$\theta = 30.0 \pm 1.2^{\circ}$$

$$g = 9.82 \pm 0.01\ \mathrm{m/s^2}$$




```
> g := Quantity(9.82, 0.01);
```

$$g := \mathit{Quantity}(9.82, 0.01)$$

```
> theta := Quantity(30.0·Pi/180, 1.2·Pi/180);
```

$$\theta := \mathit{Quantity}(0.1666666667\,\pi, 0.006666666667\,\pi)$$

```
> a := combine(g·sin(theta),'errors');
```

$$a := \mathit{Quantity}(4.910000002, 0.1781852631)$$

```
> ApplyRule(a, round3g[1]);
```

$$\mathit{Quantity}(4.91, 0.18)$$

Snorspænding

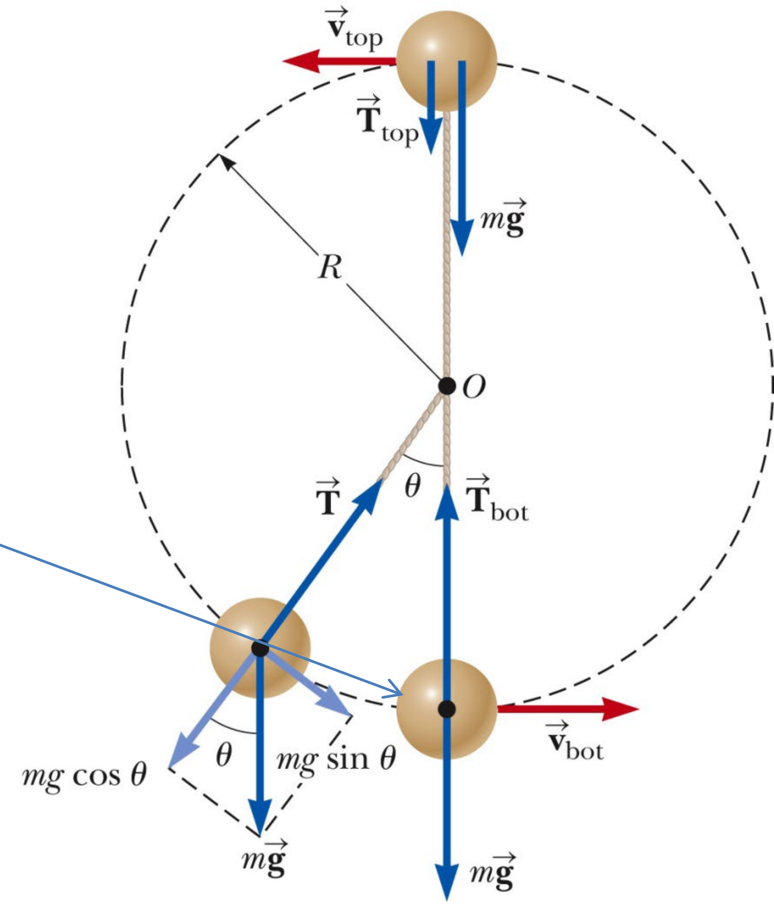
$$T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)$$

$$m = 50 \pm 2 \text{ g}$$

$$v = 7.3 \pm 0.2 \text{ m/s}$$

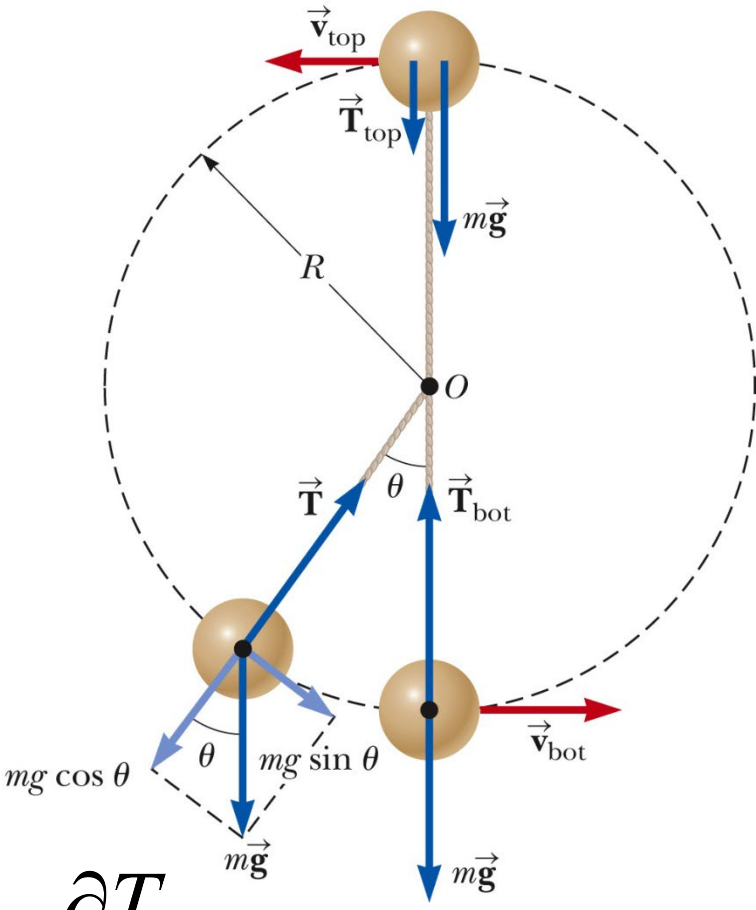
$$g = 9.82 \pm 0.01 \text{ m/s}^2$$

$$R = 25.0 \pm 0.5 \text{ cm}$$



Snorspænding

$$T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)$$



$$dT = \frac{\partial T}{\partial m}dm + \frac{\partial T}{\partial g}dg + \frac{\partial T}{\partial v}dv + \frac{\partial T}{\partial R}dR$$

Snorspænding

$$T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial m}dm + \frac{\partial T}{\partial g}dg + \frac{\partial T}{\partial v}dv + \frac{\partial T}{\partial R}dR$$

$$dT = \left(\frac{v^2}{R} + g\right)dm + mdg + \frac{2mv}{R}dv - \frac{mv^2}{R^2}dR$$

$$\delta T = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R} + g\right)^2 \delta m^2 + m^2\delta g^2 + \frac{4m^2v^2}{R^2}\delta v^2 + \frac{m^2v^4}{R^4}\delta R^2}$$

Snorspænding

> $m := Quantity(0.050, 0.002);$

$$m := Quantity(0.050, 0.002)$$

> $g := Quantity(9.82, 0.01);$

$$g := Quantity(9.82, 0.01)$$

> $v := Quantity(7.3, 0.2);$

$$v := Quantity(7.3, 0.2)$$

> $R := Quantity(0.25, 0.005);$

$$R := Quantity(0.25, 0.005)$$

> $T := combine\left(m \cdot \left(\frac{v^2}{R} + g\right), 'errors'\right);$

$$T := Quantity(11.14900000, 0.7650972208)$$

> $ApplyRule(T, \mathrm{round}[1]);$

$$Quantity(11.1, 0.8)$$

> $ApplyRule(T, round3g[1]);$

$$Quantity(11.1, 0.8)$$