15. Kinematik

Kinematik beskæftiger sig med beskrivelsen af et legemes bevægelse. Påvirkning af et legemes bevægelse bliver behandlet i mekanikken i afsnit 16

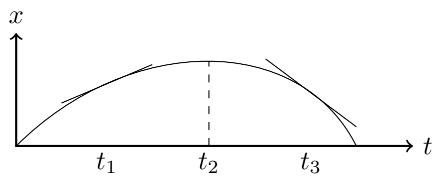
15.1. Position, hastighed og acceleration

For at beskrive en partikel position er det altid nødvendigt at indføre et koordinatsystem fra hvilket partiklens bevægelse ønskes beskrevet. Vi betragter en retlinjet bevægelse i en enkelt dimension. Vi betegner positionen af en partikel med funktionen $x(t)$.

Vi definerer er partikels hastighed ved differentialkvotienten af positionen mht tiden.

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{600}$$

Størrelsen af hastigheden kaldes for farten, $|v|$. I figuren er vist et eksempel på et legemes position som funktion af tiden. Der på figuren indikerer tre tidspunkter, $t_1 < t_2 < t_3$. For $t = t_2$ når positionen en maksimal værdi og grafen har vandret tangent, derfor må både hastighed og fart være nul, $v\left(t_2\right) = 0$. Til tiderne t_1 og t_3 er der indtegnet en tangent til kurven, der viser at hastigheden $v\left(t_1\right) > 0$ og $v\left(t_3\right) < 0$. Det ses at $v(t) > 0$ for $0 < t < t_1$ og at $v(t) < 0$ for $t_2 < t < t_3$. Det ses ved at inspicere størrelsen af hældningen at der for farten gælder at $|v\left(t_1\right)| < |v\left(t_3\right)|$.



Figuren viser positionen af et legeme som funktioin af tiden. For tider mindre end tiden angivet ved den lodrette stiplede linje er hastigeheden positiv, for tider større end denne værdie er hastigheden negativ.

En partikels acceleration defineres ved differentialkvotienten af hastigheden mht tiden.

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{601}$$

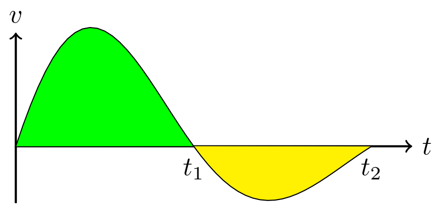
Vi kan ud fra accelerationen bestemme hastigheden ved at integrere accelerationen, forudsat at vi har en startbetingelse $v\left(t_0\right)$.

$$v = v\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} a dt \tag{602}$$

Ligeledes kan vi ud fra hastigheden finde positionen, hvis vi har fastsat en startbetingelse $x\left(t_0\right)$.

$$x = x\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} v dt \tag{603}$$

I figuren er vist en graf over en partikels hastighed som funktion af tiden, i et tidsinterval hvor hastigheden både kan være positiv og negativ. Forskydningen af partiklen i forhold til startpositionen, Δx, er lig med arealet under hastighedskurven regnet med fortegn. I intervallet fra 0 til t_1 er arealet under kurven, $\int_0^{t_1} v(t)dt > 0$, så forskydningen af partiklen er positiv. I det efterfølgende tidsinterval er forskydningen derimod negativ, da arealet under kurven er $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt < 0$. Ud fra figuren kan vi se at det positive areal er større end det negative areal hvorfor partiklen under bevægelsen i tidsintervallet $t \in [0, t_2]$ har forskudt sig i den positive retning, som defineret af et koordinatsystem.



Figuren viser hastigheden af en partikel som funktion af tiden. Arealerne mellem kurven og tidsaksen er farvet, grøn når hastigheden er positiv og gul når hastigheden er negativ.

15.2. Konstant acceleration

Det er ofte tilfældet at accelerationen er konstant, og i de tilfælde bliver ligningerne (602) og (603) simplere:

$$v\left(t\right) = v\left(t_0\right) + a\left(t - t_0\right) \tag{604}$$

$$x\left(t\right) = x\left(t_0\right) + v\left(t_0\right)\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}a\left(t - t_0\right)^2 \tag{605}$$

Da ligningerne ofte bruges til at kæde et start- og et slutpunkt for et legeme sammen skrives ligningerne som

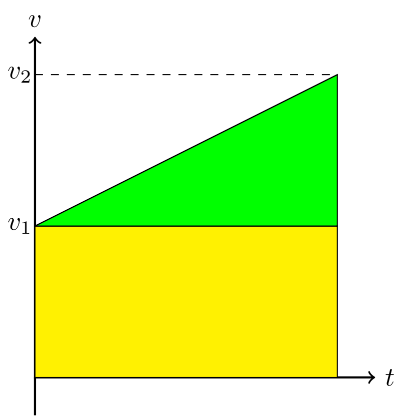
$$v_2 = v_1 + at \tag{606}$$

$$x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{607}$$

hvor vi desuden har sat $t = 0$ i startpunktet. Isolerer vi tiden i den første ligning og indsætter denne i den anden ligning får vi ligningen

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\left(x_2 - x_1\right) \tag{608}$$

Figuren viser hastigheden som funktion af tiden for en bevægelse med



Figuren viser hastigheden af en partikel som funktion af tiden. Arealerne mellem kurven og tidsaksen er farvet, grøn når hastigheden er positiv og gul når hastigheden er negativ.

konstant acceleration. Arealet under kurven er lig med forskydningen, $\Delta x = x_2 - x_1$. Arealet under hastighedskurven kan bestemmes som summen af arealet af det gule rektangel og arealet af den grønne trekant.

$$\text{Areal} = v_1 t + \frac{1}{2}\left(v_2 - v_1\right)t = \frac{v_1 + v_2}{2}t \tag{609}$$

Denne formel bliver så til

$$x_2 - x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}t \tag{610}$$

De fire grundlæggende formler samlet:

$$v_2 = v_1 + at \tag{611}$$

$$x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{612}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}t \tag{613}$$

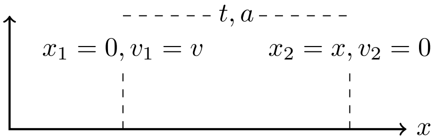
$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\left(x_2 - x_1\right) \tag{614}$$

15.3. Kinematiske problemer i retlinjet bevægelse

En air bag er et sikkerhedsudstyr i biler. Formålet med en air bag er at sikre passagerer i biler så deres acceleration begrænses hvis bilen de befinder sig i kommer ud for et uheld. Vi betragter et uheld hvor en bil kører med farten $v > 0$ da den pludselig kører ind i en forhindring. Under opbremsningen bremses passageren op af en air bag over en afstand $x = 0$.

Hvad er accelerationen af passageren under opbremsningen hvis denne antages konstant og hvor lang tid tager opbremsningen?

Det er altid en god ide opskrive hvad der er kendte størrelser og hvad det er for størrelser man ikke kender, men ønsker at bestemme. I vores eksempel er der to ubekendte, a og t så vi ved at der som minimum må opstilles to ligninger med to ubekendte for at løse for disse.
Kendt: $x_1 = 0, x_2 = x, v_1 = v, v_2 = 0$
Ukendt: a, t
Udover at klargøre kendte og ukendte størrelser er det næsten altid nødvendigt, at tegne en tegning over problemet. I dette simple tilfælde kunne en figur være som følger, hvor vi bemærker at førsteaksen er stedet. I nogle situationer er det mere relevant at have en tidsakse som førsteakse og positionen som andenakse. I den viste situation giver figuren information om kendte og ukendte størrelser snarere end information om selve bevægelsen. Vi kan opstille en ligning for opbremsningen der



Figuren viser en skitse over problemet. Symboler for størrelserne i endepunkter er angivet samt de størrelser der gælder for hele bevægelsen.

ikke indeholder tiden, dvs.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x1) \tag{615}$$

der med kendte størrelser indsat giver

$$-v^2 = 2ax \tag{616}$$

hvor af accelerationen ses at være

$$a = \frac{-v^2}{2x} \tag{617}$$

Vi kan se af udtrykket at acceleration er negativ, og det er selvfølgelig det den skal være da hastighedsændringen er i negativ retning, dvs. modsat retning af x-aksen.

Nu kendes accelerationen og til bestemmelse af tiden for opbremsningen bruger vi

$$v_2 = v_1 + at \tag{618}$$

der med indsatte værdier giver.

$$0 = v + at \tag{619}$$

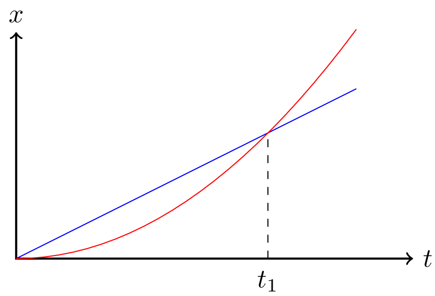
Vi løser ligningen for t og indsætter resultatet for a, hvorved vi får udtryk vores ukendte udelukkende ved kendte størrelser.

$$t = \frac{-v}{\frac{-v^2}{2x}} \tag{620}$$

$$t = \frac{2x}{v} \tag{621}$$

Vi bemærker at tiden er positiv som forventet.

Lad os se på et andet eksempel. En bilist kører $v_{b,1} = 80$ km/h på en vej. Bilisten passerer en politibil der holder stille på vejen, $v_{p,1} = 0$ km/h. Politibilen begynder at accelerere med konstant acceleration, a_p, i det øjeblik bilisten passerer politibilen. Vi kan illustrere bevægelse med en tegning af positionen af bilisten og politibilen som funktion af tiden, se figuren. Vi ønsker at finde ud af hvor lang tid der går før politibilen har indhentet bilisten, hvor langt politibilen har kørt for at indhente bilisten og den hastigehed politibilen har når den indhenter bilisten. Vi starter med at opskrive kendte og ukendte størrelser.
Kendt: $x_{b,1} = x_{p,1} = 0, v_{b,1} = v_{b,2} = 80$ km/h$, a_b = 0, v_{p,1} = 0, a_p =$ 2m/s^2
Ukendt: $t, x_{b,2} = x_{p,2}, v_{p,2}$



Figuren viser positionen af en bilist (blå retlinjet kurve) og en politibil (rød parabelformet kurve) som funktion af tiden. Det ses at politibilen indhenter bilisten til tiden t_1.

Når politibilen indhenter bilisten har de samme position, vi kan skrive positionerne som funktion af tiden ved

$$x_b = v_{b,1}t \tag{622}$$
$$x_p = \frac{1}{2}a_p t^2 \tag{623}$$

og løse for det tidspunkt hvor de har samme position:

$$x_b = x_p \Rightarrow v_{b,1}t = \frac{1}{2}a_p t^2 \tag{624}$$

$$t = \frac{2v_{b,1}}{a_p} = 22.2 \text{ s} \tag{625}$$

Bemærk, at vi har set bort fra løsningen $t = 0$ (hvorfor?). Hastigheden af politibilen til dette tidspunkt kan nu beregnes til at være

$$v_{p,2} = a_p t = a_p \frac{2v_{b,1}}{a_p} = 2v_{b,1} = 44.4 \text{ m/s} = 160 \text{ km/h} \tag{626}$$

Endelig kan vi finde den tilbagelagte strækning, forskydningen, under jagten.

$$x_{p,2} = \frac{1}{2}a_p t^2 = \frac{1}{2}a_p\left(\frac{2v_{b,1}}{a_p}\right)^2 = \frac{2v_{b,1}^2}{a_p} = 493 \text{ m} \tag{627}$$

15.4. Faseplanen i retlinjet bevægelse

Faseplanen er ofte et effektivt værktøj til at beskrive bevægelse i én dimension. I faseplanen beskriver første aksen ved positionen, x, og anden aksen ved hastigheden, v. Pga. den simple sammenhæng mellem de to kinematiske størrelser position og hastighed, $\dot{x} = v$, bliver det generelle udtryk for dynamik i faseplanen

$$\dot{x} = f(x, v) \tag{628}$$
$$\dot{v} = g(x, v) \tag{629}$$

reduceret til det meget simplere

$$\dot{x} = v \tag{630}$$
$$\dot{v} = g(x, v) \tag{631}$$

Her kan vi allerede aflæse vigtig information idet nulklinen $\dot{x} = 0$ blot er $v = 0$. Det betyder at første aksen, dvs. x-aksen, er nulklin svarende til lodrette skæringer. Vi vil analysere faseplanen for mekaniske systemer når vi har introduceret dynamik, der beskriver kræfter og deres betydning for kinematikken.

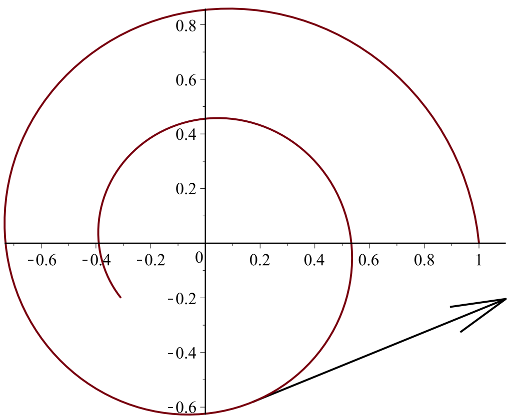
15.5. Position, hastighed og acceleration i højere dimensioner

I højere dimensioner betegnes positionen ofte med $\vec{r}$. Hastigheden indføres igen som den tidsafledede af positionen.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{632}$$

Kurven $\vec{r}(t)$ kaldes for banekurven eller trajektorien. Størrelsen af hastigheden kaldes også for farten, $|\vec{v}|$, i højere dimensioner. Hastigheden af en partikel, $\vec{v}(t)$, er tangent til banekurven, $\vec{r}(t)$.

```
restart:with(plots):
x:=t->exp(-t)*cos(10.0*t);
y:=t->exp(-t)*sin(10.0*t);
vx:=unapply(diff(x(t),t),t);
vy:=unapply(diff(y(t),t),t);
display({plot([x(t),y(t),t=0..1]),
arrow([x(0.5),y(0.5)],[vx(0.5),vy(0.5)],
shape=arrow,length=1.0,scaling=constrained)});
```



Figuren viser banekurven, $(x(t), y(t))$ samt hastigheden, indtegnet som en vektor, til tiden $t = 0.5$. Det ses, at hastigheden er tangent til banekurven.

Accelerationen defineres, som før, ved den tidsafledede af hastigheden.

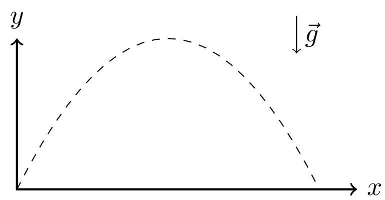
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{633}$$

15.6. Skråt kast

Det skrå kast betegner den situation hvor en partikel bevæger sig frit i luften, og hvor man som regel ignorerer luftmodstand. Denne bevægelse er karakteriseret ved at accelerationen altid er lig med tyngdeaccelerationen, g, der peger ned ad. Hvis vi indfører et koordinatsystem med en vandret og en lodret akse, hvor den sidste peger op ad, er accelerationens komposanter givet ved

$$a_x = 0 \tag{634}$$
$$a_y = -g \tag{635}$$

$$v_x = v_{x0} \tag{636}$$
$$v_y = v_{y0} - gt \tag{637}$$



Figuren viser positionen af en partikel der udfører et skråt kast der starter i origo.

Hvis ikke det skrå kast starter i origo men fx i (x_0, y_0) bliver ligningerne for det skrå kast modificeret til

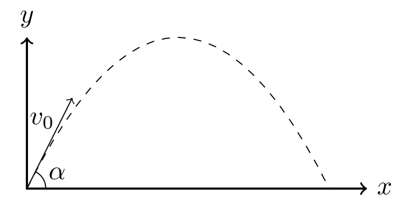
$$x = x_0 + v_{x0}t \tag{638}$$
$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{639}$$

Ofte er starthastigheden for et skråt kast ikke specificeret ved hastighedens komposanter, men i stedet angivet ved startfarten, v_0 og den vinkel som starthastigheden danner med vandret, α. I det tilfælde er hastighedsvektoren

$$\vec{v} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \tag{640}$$

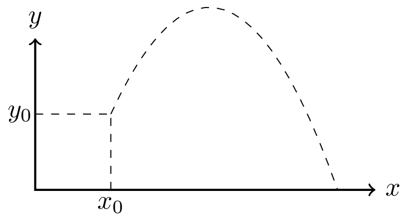
og ligningerne for det skrå kast kan skrives på formen

$$x = x_0 + v_0 \cos(\alpha)\, t \tag{641}$$
$$y = y_0 + v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{642}$$



Figuren viser starthastigheden i det skrå kast sammen med definitionen af vinklen α.

Figuren viser et skråt kast der starter væk fra origo i punktet (x_0, y_0). Vi vil i det følgende antage at vi altid lægger koordinatsystemets origo



Figuren viser positionen af en partikel der udfører et skråt kast der starter i origo.

i startpunktet for det skrå kast.

Det skrå kast omtales ofte som en kasteparabel, men det fremgår ikke af ligningerne vi har set på hidtil da de udelukkende er funktioner af tiden. Vi vil nu eliminere tiden fra den første af ligningerne og indsætte dette udtryk i den anden ligning.

$$x = v_0 \cos(\alpha) t \tag{643}$$

$$y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{644}$$

Udtrykket for t bliver

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \tag{645}$$

der indsat giver

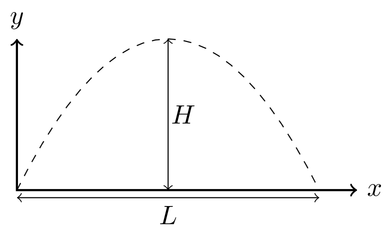
$$y = v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 \tag{646}$$

$$y = \tan(\alpha) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} \tag{647}$$

Det sidste udtryk viser at det skrå kast er en kasteparabel idet y er givet ved et anden grads polynomium i x. Vi ser at det første led indeholder starthældningen idet $\tan(\alpha)$ præcis er hældningen i startpunktet.

15.6.1 Karakteristiske størrelser ved det skrå kast

Lad os anvende ligningerne for det skrå kast til at beregne et par karakteristiske størrelser. Her tænker vi på længden af det skrå kast, L, og højden af det skrå kast, H, samt flyvetiden for det skrå kast, T. Længden og højden af det skrå kast er illustreret i figuren. Vi starter



Figuren viser starthastigheden i det skrå kast sammen med definitionen af vinklen α.

med at finde højden, H. For at gøre det bemærker vi at i toppunktet er $v_y = 0$. Det kan vi bruge til at opstille en ligning for tiden det tager at nå toppunktet.

$$v_y = v_0 \sin(\alpha) - gt = 0 \tag{648}$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \tag{649}$$

$$H = v_0 \sin(\alpha) \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \right)^2 \tag{650}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} \tag{651}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \tag{652}$$

Vi bemærker at udtrykket for højden af det skrå kast indeholder specialtilfældet hvor kastet er lodret, dvs. $\alpha = 90°$, her får vi $H = \frac{v_0^2}{2g}$ der kan genkendes fra én-dimensionel bevægelse.

Da bevægelsen er symmetrisk og tiden kun afhænger af den lodrette bevægelse vil flyvetiden, T, være det dobbelte af den ovenfor fundne tid.

$$T = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \tag{653}$$

Flyvetiden kunne også findes ved at sætte $y = 0$, dvs. ligningen

$$0 = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{654}$$

og så se bort fra løsningen $t = 0$ der giver startpositionen. Den positive løsning til ligningen giver det samme resultat som udtrykket for flyvetiden.

Længden af det skrå kast kan bestmmes ud fra x-ligningen og udtrykket for flyvetiden der giver

$$L = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} \tag{655}$$

$$L = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} \tag{656}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \tag{657}$$

I den sidste simplificering har vi benyttet den trigonometriske identitet $\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Sinusfunktionen har maksimum når argumentet er $90°$ og da $2\alpha = 90°$ har vi det længste skrå kast når $\alpha = 45°$, der har værdien

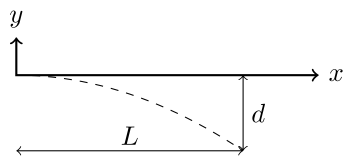
$$L_{\mathsf{max}} = \frac{v_0^2}{g} \tag{658}$$

Vi ser at det længste kast er dobbelt så langt som det højeste kast er højt.

Længde, højde og flyvetid kan også defineres for skrå kast der starter og slutter fra forskellige højder, men vi vil ikke forfølge disse udtryk.

15.6.2 Eksempler på anvendelser af det skrå kast

En bil kører på en vandret vej og overser at vejen længere fremme er skyllet væk af en oversvømmelse. Hullet efter vejen har dybden $d = 1.7$ m. Bilens fart er $v = 31$ m/s.
Hvor langt flyver bilen før den rammer jorden og hvor lang tid varer



Figuren viser bilens skrå kast med vandret starthastighed. Symbolerne er også defineret i figuren.

flyveturen? De kendte og ukendte størrelse med angivelse udtrykt ved det opgive er
Kendt: $y = -d, v_0 = v, \alpha = 0°, g$
Ukendt: x, t
Læg specielt mærke til fortegnene. Ligningerne for vandret og lodret bevægelse er

$$L = vt \tag{659}$$

$$-d = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{660}$$

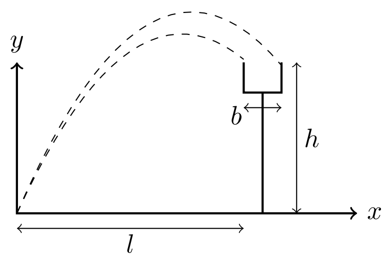
Løses de to ligninger med de to ubekendte fås

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}} \tag{661}$$

$$L = v\sqrt{\frac{2d}{g}} \tag{662}$$

Enhederne i udtrykkene passser. Vi kan også se at jo større d jo længere tager flyveturen og jo længere flyver bilen. Længden bliver også længere med større v hvorimod t ikke afhænger af v, hvilket passer fint med at starthastigheden er vandret og derfor ikke påvirker y-bevægelsen. Med indsættelse af værdier fås $t = 0.59$ s og $L = 18$ m.

Lad os betragte et andet eksemel i form af et kast i basketball. Vi vil regne med et partikelformet bold for at simplificere lidt. Vi lægger origo i det punkt hvor bolden slipper basketballspillerens hånd. Fra dette punkt er den vandrette afstand til kurve l og kurven er i højden h over startpunktet. Kurven har set fra siden bredden b. Situationen er skitseret i figuren. Følgende værdier benyttes i opgaven: $\alpha = 40°$, $l = 4$ m, $h = 1.0$ m og $b = 0.10$ m. Vi antager at bolden kastes så startvinklen α er fast. Problemet består nu i at finde de værdier af startfarten, v_0 der vil ende med en scoring. Vi skal altså finde to værdier for startfarten,v_{min} og v_{max} der præcis giver anledning til de to stiplede kasteparabler vist i figuren. For alle værdier af startfarten $v_{\mathsf{min}} \leq v_0 \leq v_{\mathsf{max}}$ vil vi få en



Figuren viser starthastigheden i det skrå kast sammen med definitionen af vinklen α.

scoring. For den nederste af kasteparablerne kan vi opstille ligningerne

$$l = v_{\mathsf{min}} \cos(\alpha) t \tag{663}$$

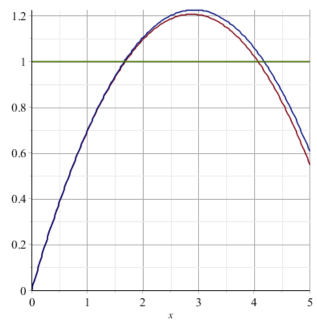
$$h = v_{\mathsf{min}} \cos(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{664}$$

og for den øverste af kasteparablerne får vi lignignerne

$$l + b = v_{\mathsf{max}} \cos(\alpha) t = l + b \tag{665}$$

$$h = v_{\mathsf{max}} \cos(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{666}$$

Med indsættelse af værdierne $\alpha = 40°$, $l = 4$ m, $h = 1.0$ m og $b = 0.10$ m finder vi fartintervallet til at være 7.57 m/s $\leq v_0 \leq 7.63$ m/s.



Figuren viser de to skrå kast der akkurat ender med en scoring. Pga. den meget begrænsede bredde af kurven ligger de to kurver tæt på hinanden.

15.7. Jævn cirkelbevægelse

En partikel siges at udføre en jævn cirkelbevægelse hvis dens banekurve er en cirkel og den bevæger sig med konstant fart. Hvis partiklen har gennemført én omgang i en cirkelbane har den tilbagelagt en strækning svarende til omkredsen af cirklen

$$O = 2\pi R \tag{667}$$

hvor R er radius i cirkelbevægelsen. Hvis omløbstiden, T, for cirkelbevægelsen er kendt kan farten bestemmes ved udtrykket

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{668}$$

eller hvis farten kendes kan man bestemme omløbstiden.

$$T = \frac{2\pi R}{v} \tag{669}$$

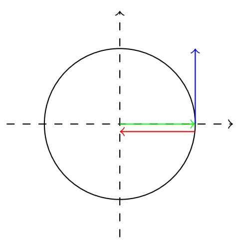
I en jævn cirkelbevægelse er accelerationen altid rettet mod centrum, i såkaldt radial retning, i cirkelbevægelsen og har størrelsen

$$a_{\mathsf{rad}} = \frac{v^2}{R} \tag{670}$$

som også kan beregnes ud fra omløbstiden.

$$a_{\mathsf{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{671}$$

Udtrykket for en radiale acceleration vil blive udledt senere. I figuren er vist en partikel under en cirkelbevægelse, med indtegnet postion, hastighed og acceleration. Hastighedsvektoren ses at være vinkelret på



Figuren viser en partikel i en cirkelbevægelse. Partiklen befinder sig yderst til højre i cirkelbevægelsen. Positionsvektoren er vist med grøn, hastighedesvektoren med blå, og accelerationsvektoren med rødt. Accelerationsvektoren er skubbet en lille smule ned for at undgå at den ligger oven i positionsvektoren.

positionen og accelerationsvektoren ses at være modsat rettet positionen.

Som et eksempel kan vi se på en jævn cirkelbevægelse hvor positionen er en parameteriseret funktion af tiden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t) \\ A\sin(\omega t) \end{pmatrix} \tag{672}$$

Hastigeheden og accelerationen findes ved at differentiere udtrykket for positionen og giver udtrykkene

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega A\sin(\omega t) \\ \omega A\cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{673}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\omega^2 A\cos(\omega t) \\ -\omega^2 A\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r} \tag{674}$$

Af det sidste udtryk ses at accelerationsvektoren og positionsvektoren er modsat rettede og af prikproduktet mellem position og hastighed

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} A\cos(\omega t) \\ A\sin(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\omega A\sin(\omega t) \\ \omega A\cos(\omega t) \end{pmatrix} = 0 \tag{675}$$

ses at positionsvektoren og hastighedsvektoren er vinkelrette på hinanden.

I udtrykkene optræder størrelsen ω, der kaldes for vinkelhastigheden.

15.8. Generel cirkelbevægelse

For generel cirkelbevægelse gælder samme relation for den radiale acceleration

$$a_{\mathsf{rad}} = \frac{v^2}{R} \tag{676}$$

men da farten ikke længere kan antages konstant, kommer der også et udtryk for den tangentielle komposant, der er givet ved

$$a_{\mathsf{tan}} = \frac{dv}{dt} \tag{677}$$

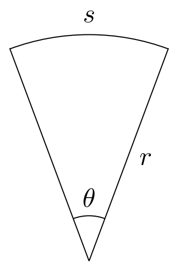
Det ses at den tangentielle acceleration er lig med ændringen i fart per tid.

Buelængden, s, kan udtrykkes ved $r\theta$, svarende til en brøkdel af udtrykket for en cirkels omkreds, $O = 2\pi r$,

$$s = r\theta \tag{678}$$

Differentierer vi begge sider får vi et udtryk for farten, nogle gange kaldet den tangentielle hastighed udtrykt ved radius og vinkelhastighed.

$$v = r\dot{\theta} = r\omega \tag{679}$$



Figuren viser et udsnit af en cirkelbevægelse.

Differentierer vi en gang til finder vi et udtryk for den tangentielle acceleration udtrykt ved radius og vinkelaccelerationen.

$$a_t = r\ddot{\theta} = r\dot{\omega} = r\alpha \tag{680}$$

Sammenfattende har vi for cirkelbevægelse at de kan beskrives med vinkel, vinkelhastighed og vinkelacceleration, der er analoge til position, hastighed og acceleration:

$$\dot{\theta} = \omega \tag{681}$$
$$\dot{\omega} = \alpha \tag{682}$$

Disse størrelser kan bruges til løse kinematiske problemer for cirkelbevægelse og de samme ligninger for gælder i øvrigt.

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t \tag{683}$$
$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{684}$$
$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \tag{685}$$
$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\left(\theta_2 - \theta_1\right) \tag{686}$$

Bemærk at SI enhederne er $[\theta] = \text{rad}$, $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $[\alpha] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Man kan udelades radianer da det ikke er en fysisk enhed, så det fremgår at vinkler er dimensionsløse.

En generel cirkelbevægelse kan skrives på parameteriseret form hvor vinklen $\theta = \theta(t)$ er en funktion af tiden.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} A\cos(\theta) \\ A\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{687}$$

Hastigheden kan udtrykkes ved følgende udtryk hvor vi har husket at θ er en funktion af tiden og udnyttet af $\dot{\theta} = \omega$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega A\sin(\theta) \\ \omega A\cos(\theta) \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} -A\sin(\theta) \\ A\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{688}$$

Udtrykket ligninger det tidligere fundne hvor vi havde konstant vinkelhastighed.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\alpha A\sin(\theta) - \omega^2 A\cos(\theta) \\ \alpha A\cos(\theta) - \omega^2 A\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{689}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \begin{pmatrix} A\cos(\theta) \\ A\sin(\theta) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -A\sin(\theta) \\ A\cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{690}$$

Det første led i accelerationen ses at være modsat rettet positionsvektoren og proportional med $A\omega^2$. Da amplituden her er radius i cirkelbevægelsen bliver dette udtryk til $r\omega^2 = v^2/r$ hvor vi har brugt de tidligere udledte formler.

Et eksempel på cirkelbevægelse ses i centrifuger, hvor man kan generere et kunstigt tyngdefelt med accelerationer der langt overstiger tyngdeaccelerationen, i ultracentrifuger kan man opnå accelerationer $a > 2,000,000g$. En bestemt ultracentrifuge roterer med 50,000 rpm (omdrejninger per minut). En partikel befinder sig i et reagensglas i afstanden $r = 6.0$ cm fra centrum af rotationsaksen. Vi må først omregne omdrejningstallet til en omløbstid, T.

$$T = \frac{1}{50,000 \text{ rpm} \cdot \frac{1}{60}\text{min/s}} = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1.2 \text{ ms} \tag{691}$$

Dernæst kan vi finde farten af partiklen

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi 0.060 \text{ m}}{1.2 \text{ ms}} = 314 \text{ m/s} = 1130 \text{ km/h} \tag{692}$$

Vi kan nu bestemme den radiale acceleration som partiklen udsættes for i ultracentrifugen.

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(314 \text{ m/s})^2}{0.06 \text{ m}} = 1643 \text{ m/s}^2 = 168,000g \tag{693}$$

Som eksemplet ovenfor viser er det vigtigt, at huske enhederne da man i forbindelse med cirkelbevægelse/rotation ofte får opgivet størrelser der ikke er i SI enheder, som fx rpm. I forbindelse med en enhed som rpm der skal omsættes til en anden enhed skal man huske at omdrejning skal omsættes til radianer og minutter til sekunder, som det ses anvendt i eksemplet herunder.

En noget langsommere rotation end i ultracentrifuger ses i en cd afspiller Pga. forskellen i omkreds vil vinkelhastigheden i starten være $\omega_1 = 509$ rpm og mod slutning er den $\omega_2 = 221$ rpm. CDen har en afspilningstid på $\tau = 77.6$ min. Det antages at rotationen foregår med konstant vinkelacceleration. Hvad er den radiale og tangentielle acceleration af et punkt 5 cm fra rotationsaksen i starten og i slutningen af afspilingen. For at regne med vinkelhastighederne skal vi have den omsat til den rigtige SI enhed, s^{-1}.

$$\omega_1 = 509 \text{ rpm} \cdot 2\pi\text{rad/rev} \cdot \frac{1}{60}\text{min/s} = 53.3 \text{ s}^{-1} \tag{694}$$

$$\omega_2 = 221 \text{ rpm} \cdot 2\pi\text{rad/rev} \cdot \frac{1}{60}\text{min/s} = 23.1 \text{ s}^{-1} \tag{695}$$

Vi kan nu bestemme vinkelaccelerationen, α, ved at anvende formlen for konstant vinkelacceleration, $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t$, der giver

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\tau} = \frac{23.1 \text{ s}^{-1} - 53.3 \text{ s}^{-1}}{77.7\text{min} \cdot 60 \text{ s/min}} = -0.0065 \text{ s}^{-2} \tag{696}$$

Fortegnet passer fint med at vinkelhastigheden bliver mindre med tiden.

$$a_{\text{rad,start}} = \alpha r_{\text{ydre}} = -0.0065 \text{ s}^{-2} \cdot 5 \text{ cm} = 0.000325 \text{ m/s}^2 \tag{697}$$

$$a_{\text{tan,start}} = \omega_1^2 r_{\text{ydre}} = (53.3 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 5 \text{ cm} = 142 \text{ m/s}^2 \tag{698}$$

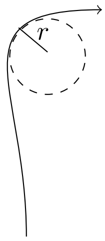
$$a_{\text{rad,slut}} = \alpha r_{\text{indre}} = -0.0065 \text{ s}^{-2} \cdot 2 \text{ cm} = 0.00013 \text{ m/s}^2 \tag{699}$$

$$a_{\text{tan,slut}} = \omega_1^2 r_{\text{ydre}} = (23.1 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 2 \text{ cm} = 10.7 \text{ m/s}^2 \tag{700}$$

Vi ser at de radiale komposanter dominerer over den tangentielle komposanter.

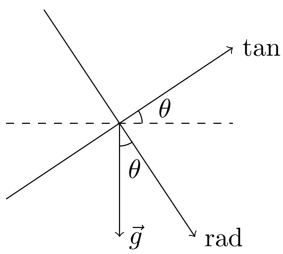
15.9. Generel bevægelse

Generel cirkelbevægelse kan også bruges til at beskrive bevægelser der ikke nødvendigvis er cirkelformede, fx parabler. Der gælder her de to samme ligninger for radial og tangentiel acceleration som før, hvor radius i cirkelbanen er erstattet af den såkaldte krumningsradius, der er radius til en cirkel der lokalt approksimerer kurvens krumning. Dette er illustreret i figuren.



Figuren viser en partikels bevægelse langs den kurvede bane. I et punkt hvor banen krummer er indtegnet et cirkel med krumningsradius, r, svarende til banens krumning. Formlerne for generel cirkelbevægelse kan anvendes lokalt i dette punkt.

Som et eksempel på en bevægelse der ikke er cirkulær kan vi betragte et skråt kast, der overalt er parabelformet. Vi vil vise at hvis vi kender krumningsradius i startpunktet, r_1, og krumningsradius i toppunktet, r_2, så kan vi fra denne ekstremt lokale information genskabe det fulde skrå kast. Overalt er accelerationen lige med tyngdeaccelerationen, der peger ned ad. Til gengæld drejer de radiale og tangentielle retninger under bevægelse. Vi betragter først situationen i startpunktet der er vist i figuren. Den tangentialle retning er tangent til banen og den radiale



Figuren viser accelerationsvektoren, $\vec{g}$, samt de radiale og tangentielle retninger i begyndelsen på det skrå kast.

er vinkelret på denne. Ud fra figuren ses det at den radiale acceleration kan skrive som

$$a_{\text{rad,start}} = g\cos(\theta) = \frac{v_0^2}{r_1} \tag{701}$$

I toppunktet er den radiale retning lodret ned ad, tilgengælg har hastigheden ingen lodret komposant i toppunktet. Her er hastigheden vandret med størrelsen, $v_0\cos(\theta)$.

$$a_{\text{rad,top}} = g = \frac{v_0^2\cos^2(\theta)}{r_2} \tag{702}$$

Ved at dividere venstre- og højresiderne i de to ligninger kan vi løse for vinklen

$$\cos(\theta) = \sqrt[3]{\frac{r_2}{r_1}} \tag{703}$$

Når vinklen er bestemt kan denne indsættes i en af de to andre ligninger og startfarten kan så findes. Med starthastigheden på plads er det skrå kast altså fastlagt ud fra to meget lokale informationer.