4. Dimensionsanalyse

Dimensionsanalyse er et værktøj der kan hjælpe med at forudsige hvordan en fysisk sammenhæng mellem variable der indgår i beskrivelsen af et fænomen kan se ud. Et simpelt eksempel på et fænomen kan være et frit fald i et lufttomt rum ved jordens overflade. Her kan man være interesseret i at vide hvor stor en fart, v, en partikel med massen m opnår ved et frit fald fra højden h over jordens overflade. Her er farten den afhængige variabel, og der i hvertfald to uafhænigige variable, m og h. Det er oplagt at også tyngdeaccelerationen, g, kan spille en rolle, og vi regner derfor tillige denne for en uafhængig variabel. Gættet på den fysiske sammenhæng er at der findes en funktion, f, så den afhængige variabel farten kan skrives som en funktion af de uafhængige variable, $v = f(m, h, g)$.

Dimensionsanalyse kan hjælpe med at finde ud af hvordan funktionen, f ser ud, udelukkende ved at betragte de indgående variables dimensioner eller enheder. Grundlæggende set kræver vi for alle fysiske ligninger at de opfylder det man kalder dimensionel homogenitet. Det er en fin måde at sige på, at vi ikke kan blande pærer og æbler. En fysisk ligning giver kun mening hvis dimensionerne passer, dvs. at $A+B$ giver kun mening hvis A og B har samme enheder, $A-B$ giver kun mening hvis A og B har samme enheder, $\sin(A)$ og lignende funktioner giver kun mening hvis A er dimensionsløs. Kun produkter, divisioner og potenser kan give nye enheder.

Strategien i dimensionsanalyse er at omskrive ligninger som den før nævnte, $v = f(m, h, g)$, til formen $F(v, m, h, g) = 0$. En matematisk sætning vil tillade en omkrivning til en form $F(\pi_1, \pi_2) = 0$. Den sidstnævnte funktion vil have færre parametre og alle disse vil være dimensionsløse. De dimensionsløse parametre vil være af formen $\pi_1 = v^a m^b h^c g^d$ hvor a, b, c og d skal bestemmes. Når vi har bestemt a, b, c og d vil det være muligt at løse den oprindelige ligning, $v = f(m, h, g)$, dog vil der typisk være en ukendt faktor eller en ukendt funktion i udtrykket, eksperimenter vil kunne levere den sidste information. Kapitlet vil forsøge at gennemgå trinene i denne strategi.

Før vi går til elementerne i dimensionsanalysen ser vi lidt på enheder og dimensioner.

I 1983 løb et canadisk rutefly tør for brændstof. I stedet for 22300 kg brændstof havde man pumpet 22300 pund brændstof på flyet før afgang.

I 1999 mistede NASA Mars Climate Orbiter da den kom 100 km længere ned i Mars atmosfære end beregnet. En gruppe der arbejdede på pro-

jektet havde arbejde med SI enheder, en anden gruppe havde arbejdet med engelske enheder.

4.1. Enheder og Dimensioner

Fysiske størrelser udtrykkes som produktet af et måltal og en enhed.

$$\text{fysisk størrelse} = \text{måltal} \cdot \text{enhed} \tag{64}$$

fx kan en længde udtrykkes ved

$$L = 6.4 \text{ m} \tag{65}$$

hvor 6.4 er måltallet og m (meter) er enheden. I praksis kan man nøjes med at arbejde med syv grundenheder. Det mest benyttede er det internationale enhedssystem, SI systemet, hvor man har de syv grunenheder som vist i tabellen. Alle andre enheder kan afledes af disse ved

Størrelse	SI enhed	Symbol	Dimension
Masse	kilogram	kg	M
Længde	meter	m	L
Tid	sekund	s	T
Temperatur	kelvin	K	Θ
Strømstyrke	ampere	A	A
Stofmængde	mol	mol	n
Lysstyrke	candela	Cd	b

Tabel over grundenheder.

at bestemme simple potensprodukter af grundenhederne. Disse kaldes for afledte enheder. Fx er enheden af fart $[\text{fart}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ og enheden af acceleration er $[\text{acceleration}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Visse afledte enheder benyttes så meget at de har deres egen betegnelse, fx $[\text{kraft}] = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = \text{newton}$. I tabellen er vist nogle af de mest benyttede afledte enheder samt den måde de udtrykkes på ved grundenhederne. I forbindelse med enheder benytter man ofte symboler for præfikser så størrelser som tidsintervallet $\Delta t = 0.0000012$ s kan skrives mere kompakt og let læseligt som $\Delta t = 1.2$ μs. I tabellen ses de mest benyttede præfikser. Det anbefales at man ikke benytter præfikserne deka, hekto, centi og deci når man arbejder med SI systemet. Bemærk at nogle af symboler nogle gange bruges med en anden betydning, for eksempel bruges μ som en længde med definitionen $\mu = 10^{-6}$ m, dette frarådes når man arbejder med SI systemet.

Hvis man har behov for at bestemme enheden af en størrelse man ikke kender, kan man finde den ved at betragte en formel som den indgår i. Fx

Størrelse	Enhed	Symbol	Udtrykt i grundenheder
Kraft	newton	N	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Tryk	pascal	Pa	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Effekt	watt	W	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-3}$
Energi, arbejde	joule	J	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Frekvens	hertz	Hz	s^{-1}
Elektrisk ladning	coulomb	C	$\mathrm{s} \cdot \mathrm{A}$
Elektrisk spænding	volt	V	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$
Elektrisk modstand	ohm	Ω	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}$
Kapacitans	farad	F	$\mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{4} \cdot \mathrm{A}^{2}$
Induktans	henry	H	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{2} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-2}$

Tabel over afledte enheder samt hvordan de udtrykkes i grundenheder.

Faktor	Præfiks	Symbol	Faktor	Præfiks	Symbol
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deka	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hekto	ha
10^{-18}	atto	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	mikro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	milli	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y

Tabel over præfikser.

kan man bruge Newtons anden lov, $F = ma$, til at bestemme enheden af kraften, F, hvis man kender enheden af massen, m, og accelerationen, a. Enheden af tryk, p, kan findes ud fra definitionen som kraft per areal, $p = F/A$, med ligningerne $[F] = [m]\,[a]$ og $[p] = [F]\,/\,[A]$.

I Maple kan man regne med fysiske størrelse, dvs. tal med tilhørende enheder. Der er andre måder at gøre det på og afhængigt af sammenhængen kan den ene metode være bedre end den anden. Som det ses i følgende eksempel kan man referere til en fysisk størrelses enhed ved at multiplicere med den. Bemærk hvordan produktet af masse og acceleration automatisk får enhed af newton (N) og ligeledes med arbejde der giver joule (J) og effekt der giver watt (W). Output er her ikke så elegant men det kan forhåbentlig læses.

```
with(Units[Natural]);
længde := 1.10*m;
```

```
                     1.10 Units:-Unit('m')
masse := 7.5*kg;
                     7.5 Units:-Unit('kg')
acceleration := 1.24*m/s^2;
                                    / 'm'  \
                    1.24 Units:-Unit|------|
                                    |     2|
                                    \('s') /
kraft := masse*acceleration;
                     9.300 Units:-Unit('N')
arbejde := kraft*længde;
                   10.23000 Units:-Unit('J')
effekt := arbejde/tid;
                  3.008823530 Units:-Unit('W')
```

4.2. Ændring af enheder

Det er altid tilladt at ændre enhederne i et problem, så man fx i stedet for at regne i meter benytter centimeter eller kilometer. Et af vores mål vil være at finde naturlige enheder for konkrete problemer. I dette afsnit ser vi kort på hvordan man kan skifte enheder.

Som et eksempel ønsker vi at finde en naturlig længdeskala (λ) og en naturlig tidsskala (τ) således at tyngdeaccelerationen (g_0 betegner nu størrelsen 9.82) bliver én i de nye enheder og farten 110 km/h (v_0 betegner nu de 110 km/h men omregnet til 30.56 m/s) også skal være én i de nye enheder. Der må gælde følgende to ligninger

$$v_0 \cdot \mathsf{m/s} = 1 \cdot \lambda/\tau \tag{66}$$

$$g_0 \cdot \mathsf{m/s}^2 = 1 \cdot \lambda/\tau^2 \tag{67}$$

Vi dividerer nu enhederne fra venstre over på højresiden.

$$v_0 = 1 \cdot \frac{\lambda}{\mathsf{m}} \cdot \frac{\mathsf{s}}{\tau} \tag{68}$$

$$g_0 = 1 \cdot \frac{\lambda}{\mathsf{m}} \cdot \frac{\mathsf{s}^2}{\tau^2} \tag{69}$$

Ligningerne er ikke-lineære, men hvis vi tager logaritmen på begge sider af ligningen får vi lineære ligninger i $\ln \frac{\lambda}{\mathsf{m}}$ og $\ln \frac{\tau}{\mathsf{s}}$.

$$\ln v_0 = \ln \frac{\lambda}{\mathsf{m}} - \ln \frac{\tau}{\mathsf{s}} \tag{70}$$

$$\ln g_0 = \ln \frac{\lambda}{\mathsf{m}} - 2 \ln \frac{\tau}{\mathsf{s}} \tag{71}$$

Dette system af ligninger kan skrives på matrixform

$$\begin{pmatrix} \ln v_0 \\ \ln g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln \frac{\lambda}{\mathsf{m}} \\ \ln \frac{\tau}{\mathsf{s}} \end{pmatrix} \tag{72}$$

Matricen er regulær og vi kan derfor finde dens inverse og gange med denne på begge sider af lighedstegnet.

$$\begin{pmatrix} \ln \frac{\lambda}{\mathsf{m}} \\ \ln \frac{\tau}{\mathsf{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln v_0 \\ \ln g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln v_0 - \ln g_0 \\ \ln v_0 - \ln g_0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

Indsættelse af værdierne $g_0 = 9.82$ og $v_0 = 30.56$ giver vores nye skalaer

$$\lambda = 95.10\,\mathsf{m} \tag{74}$$

$$\tau = 3.11\,\mathsf{s} \tag{75}$$

Hvis man beregner λ/τ og λ/τ^2 genfinder vi de oprindelige værdier for acceleration og fart.

I nogle tilfælde ønsker man at skifte dimension, dvs. i stedet for at regne i masse, længde og tid (M,L og T) at kunne man fx regne i masse, længde og kraft (M, L og F). Fra tidligere har vi at $F = M \cdot L \cdot T^{-2}$ Hvis vi har en størrelse hvis dimension udtrykkes ved potenserne x, y og z i MLF så kan vi regne enhederne a, b og c i MLT ud ved

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{76}$$

hvor vi bemærker at matricen indeholder dimensioner M, L og F udtrykt ved M, L og T i søjlerne. Inverteres matricen kan vi opskrive dem omvendte transformation.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{77}$$

Hastighed har dimensionen $\mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-1}$, dvs. $a = 0$, $b = 1$ og $c = -1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \text{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-1/2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{78}$$

dvs. vi har dimensionen af hastighed i MLF er $\mathsf{M}^{-1/2} \cdot \mathsf{L}^{1/2} \cdot \mathsf{F}^{1/2}$.

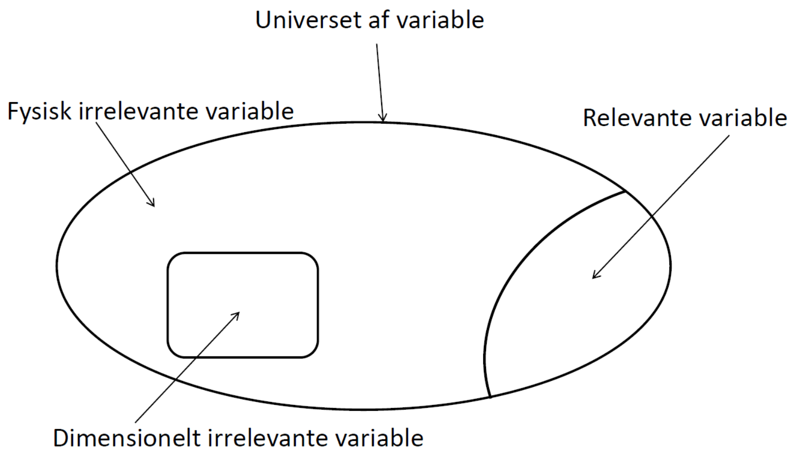
Acceleration har dimensionen $\mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-2}$, dvs. $a = 0$, $b = 1$ og $c = -2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

Det passer fint med at acceleration kan beregnes som kraft per masse. Vi vil som regel holde os til MLT dimensionerne.

4.3. Beskrivelse af et fænomen

Dimensionsanalyse af et fænomen kræver at man identificerer de variable eller parametre, der har betydning for fænomenet. En af styrkerne ved dimensionsanalyse er at den kan identificere visse overflødige variable, dvs. variable man har inkluderet i sin analyse, men som i virkeligheden ikke har nogen betydning. Man kan inddele universet af alle variable i forskellig kategorier. Den første kategori er de relevante variable, dvs. dem vi skal identificere for at få en korrekt beskrivelse. De øvrige variable



Figuren illustrerer opdelingen af universet af variable i forbindelse med et fænomen.

tilhører kategorien af fysisk irrelevante variable. En underinddeling af denne kategori er de dimensionelt irrelevante variable, som er de variable som dimensionsanalysen kan afgøre ikke kan have nogen betydning og derfor kan udelades. I figuren er universet af variable for et fænomen illustreret. På den anden side skal man være klar over at man kan få meningsløse resultater hvis man medtager parametre der ikke har nogen betydning. Fx kan inkludere højden og massen af den der foretager et eksperiemt, der er variable der typiske ikke har noget betydning for udfaldet, men det kan ikke nødvendigvis afsløres af analysen. Her er det viden om fænomenet og intuition der er afgørende.

4.4. Dimensionsmatricen

Når vi betragter et fænomen er det første man gør at opstille en såkald dimensionsmatrix for fænomenet. Man starter med at identificere de (forhåbentlig) relevante variable. Vi kan fx være interesseret i at finde ud af hvilken fart, v, en sten opnår hvis den slippes i højden, h over jordoverfladen. Vi vil antage at luftmodstanden kan ignoreres, vi vil vende tilbage til hvad der sker når den medtages senere. Det er rimeligt at antage at både v og h er relevante variable. Derudover kunne man forestille sig at stenens masse, m, samt tyngdeaccelerationen, g, er relevante variable. Vi vil antage at disse fire variable er de relevante, men som vi skal se er det ikke helt korrekt, men det vil blive afsløret af metoden i afsnit 4.5. Dimensionsmatricen er et skema der giver et overblik over de variable og deres dimensioner. I første række angiver vi de variable, det er en god ide at placere de afhængige variable til venstre og de uafhængige variable til højre. Under den første række placeres en række for hver dimension der indgår i de varible, her masse, M, længde, L, og tid, T. Ud for en bestemt variabel og en bestemt dimension angives den potens som dimension har for variablen. Eksemplet har den viste dimensionsmatrix. Vi ser nu på reduktioner af dimensionsmatricen.

	v	g	h	m
M	0	0	0	1
L	1	1	1	0
T	-1	-2	0	0

Dimensionmatrix for frit fald uden luftmodstand.

1. Hvis en række udelukkende indeholder nuller, så skal denne dimension ikke medtages og rækken fjernes.
2. Hvis en række kun indeholder ét element der ikke er nul, så skal både rækken og søjlen der deler ikke-nul elementet fjernes.
3. Hvis en søjle kun indeholder nuller så er variablen dimensionsløs.

I vores dimensionsmatrix ovenfor ser vi at der i rækken med dimensionen M, kun er ét ikke-nul element. Det betyder at vi kan fjerne både rækken og søjlen som ikke-nul elementet ligger i, og dermed fjernes massedimensionen fra problemet. Vi har her fået en vigtig information, nemlig at massen ikke har nogen betydning for det betragtede fænomen, massen er her dimensionelt irrelevant. Den reducerede dimensionsmatrix får nu udseendet som vist herunder, der kan ikke reduceres yderligere.

	v	g	h
L	1	1	1
T	-1	-2	0

Reduceret dimensionmatrix for frit fald uden luftmodstand.

Hvis vi vil inkludere luftmodstand hvor størrelsen af kraften er proportional med farten dvs. $F = kv$, er det oplagt at vi må inkludere parameteren k i vores dimensionsanalyse. Vi må derfor første bestemme dimensionen af parameteren k.

$$k = F/v \Rightarrow [k] = [F]/[v] = [m][a]/[v] = \mathsf{MLT}^{-2}\mathsf{L}^{-1}\mathsf{T} = \mathsf{MT}^{-1} \quad (80)$$

Opskrives dimensionsmatricen for faldet med luftmodstand fås
Vi bemærker, at der ikke umiddelbart er mulighed for at reducere di-

	v	g	h	m	k
M	0	0	0	1	1
L	1	1	1	0	0
T	-1	-2	0	0	-1

Dimensionmatrix for frit fald med luftmodstand.

mensionsmatricen i dette lidt mere komplicerede tilfælde.

4.5. Dimensionsløse parametre

Dimensionsløse parametre, er lige præcis det: Det er parametre der er dimensionsløse. Kendte eksempler på dimensionsløse parametre er fx en vinkel og en friktionskoefficient. Man kan dog danne nye dimensionsløse paramtre, fx kan man indføre forholdet mellem bredden og højden af en kassse som en dimensionsløs parameter. Det viser sig, at alle fysiske fænomener kan beskrives ved dimensionsløse parametre, hvorfor vi nu vil demonstrere hvorledes disse kan bestemmes for et givet fænomen. I afsnit 4.6 vil vi introducere hvorledes de dimensionsløse parametre indgår i de fysiske relationer.

Lad os se på det førnævnte eksempel med frit fald uden luftmodstand, hvor vi ser på den oprindelige dimensionsmatrix fremfor de reducerede versioner. Vi ønsker at danne et dimensionsløst produkt, π, med de indgående parametre. Vi danner et produkt af parametrene, hver opløftet til en ukendt potens, idet det som tidligere nævnt kun er produkter, forhold og potenser der giver nye enheder.

$$\pi = v^a g^b h^c m^d \quad (81)$$

Da venstre siden per definition er dimensionsløs har vi

$$[\pi] = 1 \quad (82)$$

der derfor også må gælde for højresiden af ligningen, pga dimensionel homogenitet, at

$$\left[v^a g^b h^c m^d\right] = 1 \quad (83)$$

Vi indsætter nu dimensionerne af størrelserne og finder

$$\mathsf{L}^a\mathsf{T}^{-a}\mathsf{L}^b\mathsf{T}^{-2b}\mathsf{L}^c\mathsf{M}^d = 1 \tag{84}$$

$$\mathsf{L}^{a+b+c}\mathsf{T}^{-a-2b}\mathsf{M}^d = 1 \tag{85}$$

For at ligningen skal være opfyldt må alle potenserne på venstresiden være nul, det giver de tre ligninger.

$$a + b + c = 0 \tag{86}$$

$$-a - 2b = 0 \tag{87}$$

$$d = 0 \tag{88}$$

Den sidste ligning viser at massen af dimensionelle årsager ikke kan indgå i sammenhængen, den er dimensionelt irrelevant. De to første ligninger indeholder tre ubekendte, og har derfor ikke en unik løsning. Én af de tre størrelser skal fastlægges, da den afhængige variabel er farten, vælger vi at potensen af denne skal være én, dvs. $a = 1$.

$$1 + b + c = 0 \tag{89}$$

$$-1 - 2b = 0 \tag{90}$$

Nu har vi to ligninger med to ubekendte, og der findes en unik løsning til dette ligningssystem, nemlig $b = -\frac{1}{2}$ og $c = -\frac{1}{2}$. Vi ender altså med en dimensionsløs parameter $\pi = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ der beskriver det frie fald uden luftmodstand. Andre valg af a end værdien 1 ville have givet dimensionsløse produkter $\left(\frac{v}{\sqrt{gh}}\right)^a$, der i virkeligheden dækker over samme løsning.

Ligningssystemet til bestemmelse af a, b, c og d ovenfor kan skrives på formen

$$1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + 0 \cdot d = 0 \tag{91}$$

$$-1 \cdot a - 2 \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d = 0 \tag{92}$$

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d = 0 \tag{93}$$

hvilket lægger op til en matrixformulering der ser således ud

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{a} \\ \mathsf{b} \\ \mathsf{c} \\ \mathsf{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{94}$$

Her genkendes matricen til venste som værende identisk med dimensionsmatricen. Det er her klart at bestemmelse af dimensionsløse parametre er det samme som at løse et homogent, lineært ligningssystem. Antallet af lineært uafhængige løsninger til et sådant system er $n - \text{rang}(A)$ når $\text{rang}(A) < n$, hvor A er dimensionsmatricen og n er antallet af variable. I Maple kan vi finde rangen af dimensionsmatricen ved

```
restart:
with(LinearAlgebra):
A:=Matrix([[1,1,1,0],[1,-2,0,0],[0,0,0,1]]);
Rank(A);
```

Beregningen giver at rangen er rang$(A) = 3$. Det betyder at der er $n -$ rang$(A) = 4 - 3 = 1$ løsning, hvilket stemmer overens med det vi så tidligere. Når ligningerne skal løses er det ofte en fordel at indtaste dem direkte fremfor med lineær algebra i Maple. Din tidligere fundne løsning findes ved at skrive ligningerne samt kravet at $a = 1$ for at få den afhængige variabel, v, på en så simpel form som muligt.

```
restart:
solve({a+b+c=0,-a-2*c=0,d=0,a=1},[a,b,c,d]);
```

Lad os nu betragte det frie fald med luftmodstand. Her må vi lede efter dimensionsløse parametre af typen

$$\pi = v^a g^b h^c m^d k^e \tag{95}$$

men vi kan nu direkte skrive ligningerne op for de ukendte potenser a, b, c, d og e, hvilket giver ligningerne.

$$d + e = 0 \tag{96}$$
$$a + b + c = 0 \tag{97}$$
$$-a - 2b - e = 0 \tag{98}$$

eller på matrixform

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{a} \\ \mathsf{b} \\ \mathsf{c} \\ \mathsf{d} \\ \mathsf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{99}$$

Rangen af dimensionsmatricen kan beregnes til at være 3. Det betyder at der er $n-$rang$(A) = 5-3 = 2$ dimensionsløse parametre. Før vi løser ligningerne for at finde de to dimensionsløse parametre kommer vi lige med et par kommentarer der vedrører bestemmelse af dimensionsløse parametre, det er ikke altid en fordel at springe til standardløsningen.

1. Hvis en dimensionsløs parameter kendes for et problem som udgøres af en delmængde af de variable, er denne også en dimensionsløs parameter for det fulde problem.

2. Hvis to variable har samme enheder er forholdet mellem dem en dimensionsløse parameter.
3. En dimensionsløs variabel i problemet er en dimensionsløs parameter.

Den første kommentar gælder præcis her, så vi har allerede, uden nogen yderligere beregninger, én af de to dimensionsløse parametre: $\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}$. Den anden kan bestemmes på forskellig vis, vi vælger at sætte $a = 1$ og $e = 1$, det giver for de øvrige potenser: $b = -1$, $c = 0$ og $d = -1$. $\pi_2 = \frac{kv}{mg}$. Bemærk, at alle fem variable indgår i de dimensionsløse parametre, men nogle kan være fraværende i nogle af de dimensionsløse parametre. Der er mange måder man kan vælge/finde dimensionsløse parametre, et andet valg kunne være at sætte $a = 1$ og $c = 1$ der leder til $b = -2$, $d = -3$ og $e = 3$, og dermed den dimensionsløse parameter $\pi_3 = \frac{vhk^3}{g^2m^3}$. Den sidste er dog ikke uafhængig af de to andre og da den indeholder samtlige variable måske ikke helt optimal.

4.6. Buckinghams sætning

Betragt et fysisk fænomen der kan beskrives med ligningen

$$F\left(x_1, x_2, x_, \ldots, x_n\right) = 0 \tag{100}$$

hvor de variable $x_1, x_2, x_, \ldots, x_n$ kan være både dimensionsløse og med dimensioner. Dimensionsmatricen for fænomenet kalder vi for A. Buckinghams sætning siger at der findes en funktion f og $m = n - \text{rang}(A)$ dimensionsløse parametre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ så ligning 100 kan udtrykkes på den simplere form

$$f\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\right) = 0 \tag{101}$$

Fordelen ved ligning 101 fremfor ligning 100 er at den indeholder færre parametre og de dimensionsløse parametre den indeholder er desuden de centrale parametre for fænomenet.

Før vi går i gang med at bruge Buckinghams sætning vil vi se på hvordan det kan være at vi kan reducere antallet af parametre i et problem. Det hænger sammen med at vi kan vælge naturlige skalaer, som vi så på i afsnit 32. Betragt et sædvanligt, matematisk pendul der består af et lille lod med masse m, der hænger for enden af en snor med længde l. Vi forestiller os nu at vi trækker loddet lidt ud til siden, fx den vandrette afstand A, og slipper det. Loddet vil nu svinge frem og tilbage. Hvis vi ønsker at bestemme den svingningstid, T, som loddet svinger med forventer vi at denne afhænger af m, l, A samt tyngdeaccelerationen g.

$$T = f(m, l, A, g) \tag{102}$$

Normalt vil vi i et sådan problem benytte skalerne (for MLT) 1 kg, 1 m og 1 s. Vi introducerer nu nye skalaer (med ukendte vægte μ, λ og τ).

$$1 \text{ kg'} = \mu \text{ kg} \tag{103}$$

$$1 \text{ m'} = \lambda \text{ m} \tag{104}$$

$$1 \text{ s'} = \tau \text{ s} \tag{105}$$

hvor ' indikerer vores nye skalaer. Vi kan skifte enheder i ligningen for ved at gange fx m med 1 kg'/μ kg. Det giver ligningen

$$\frac{T}{\tau} = f\left(\frac{m}{\mu}, \frac{l}{\lambda}, \frac{A}{\lambda}, \frac{g}{\frac{\lambda}{\tau^2}}\right) \tag{106}$$

Vi skal nu bestemme nogle fornuftige valg af μ, λ og τ så ligningen bliver så simpel som muligt.

$$\mu = m \tag{107}$$

$$\lambda = l \tag{108}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{109}$$

Indsættes disse i ligningen fås

$$\frac{T}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = f\left(\frac{m}{m}, \frac{l}{l}, \frac{A}{l}, \frac{g}{\frac{l}{\frac{l}{g}}}\right) \tag{110}$$

$$\frac{T}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = f\left(1, 1, \frac{A}{l}, 1\right) \tag{111}$$

Det centrale her er at valget af bestemte skalaer reducerer antallet af variable fra fire til én, uanset de konkrete værdier vil skaleringen altid give anledning til de tre ét-taller. Dette er en betragtelig simplificering af problemet. Vi kan derfor også skrive svingningstidsformlen

$$\frac{T}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = F\left(\frac{A}{l}\right) \tag{112}$$

I det konkrete eksempel ser vi at det er forholdet mellem amplituden af svingningen og længden af pendulsnoren der skal varieres for at undersøge systemets opførsel.

Lad os nu se på hvordan man løser de ligninger der kommer fra Buckinghams sætning, vi starter med situationer hvor der kun er én dimensionsløs parameter.

$$f(\pi_1) = 0 \tag{113}$$

Løses ligningen for π_1 fås at denne må være en konstant, da alt andet end denne må være dimensionsløse konstanter, dvs. tal.

$$\pi_1 = \text{konstant} \tag{114}$$

Det kræver kun et enkelt eksperiment at fastlægge konstanten hvorefter sammenhængen af entydig.

Lad os løse ligningen for det tidligere eksempel med frit fald uden luftmodstand. I eksemplet fandt vi at der kun var en dimensionsløs parameter, $\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}$. Ligningen fra Buckinghams sætning er

$$f\left(\frac{v}{\sqrt{gh}}\right) = 0 \tag{115}$$

der har løsningen

$$\frac{v}{\sqrt{gh}} = k \tag{116}$$

$$v = k\sqrt{gh} \tag{117}$$

Til gengæld ved vi at vi blot skal finde et enkelt sæt af sammenhørende værdier af v, g og h, så er konstanten bestemt. Dette kan gøres ved et enkelt eksperiment. Da g er nogenlunde konstant på Jorden, kan vi vælge en enkelt værdi af højden, h, og så bestemme værdien af v, så finder vi den dimensionsløse konstant. Udføres flere eksperimenter kan vi fastlægge værdien af konstanten, k, mere præcist og desuden beregne usikkerheden på denne bestemmelse, se afsnit 3.5.3. I afsnit 15 udledes det at $k = \sqrt{2}$.

$$v = \sqrt{2}\sqrt{gh} \tag{118}$$

Lad os se på et andet eksempel. Når en homogen skive roterer omkring en akse gennem dens midte og vinkelret på skivens plan opstår der en spænding i skiven. Spændingen T afhænger af vinkelhasigheden ω, massetætheden per længde q og radius af skiven R. Dimensionsmatricen for problemet er

Vi søger løsninger af formen $\pi = T^a\omega^b r^c R^d$, og da rangen af dimensionsmatricen er 3 er der kun én løsning.

$$a + c = 0 \tag{119}$$
$$a - c + d = 0 \tag{120}$$
$$-2a - b = 0 \tag{121}$$

	T	ω	q	R
M	1	0	1	0
L	1	0	-1	1
T	-2	-1	0	0

Dimensionmatrix for spænding i roterende skive.

Da T er den afhængige variabel sætter vi $a = 1$ og løser vi ligningssystemet finder vi $b = -2$, $c = -1$ og $d = -2$. Den dimensionsløse parameter er $\pi = T^a \omega^{-2} r^{-1} R^{-1}$. Løses $f(\pi) = 0$ får vi $\pi = T\omega^{-2} r^{-1} R^{-1} = k$ dvs. at $T = kq\omega^2 R^2$. Vi ser at spændingen er proportional med massetætheden, den er proportional med kvadratet på vinkelhastigheden og ligeledes proportional med kvadratet på radius.

Går vi vil situationen med to dimensionsløse parametre har vi ligningen

$$f(\pi_1, \pi_2) = 0 \tag{122}$$

og hvis vi isolerer π_1 må den anden side af ligningen kun afhænge af π_2 samt dimensionsløse konstanter.

$$\pi_1 = g(\pi_2) \tag{123}$$

For at fastlægge sammenhængen her må vi lave en række forsøg hvor vi varierer en i π_2 forekommende parameter. Dernæst kan vi tabellægge eller kurvetilpasse en funktion der fastlægger sammehængen.

I det tidligere betragtede eksempel med frit fald med luftmodstand fandt vi to dimensionsløse parametre $\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ og $\pi_2 = \frac{kv}{mg}$. Vi skal derfor løse ligningen

$$f\left(\frac{v}{\sqrt{gh}}, \frac{kv}{mg}\right) = 0 \tag{124}$$

Da den uafhængige variabel, v, indgår i begge udtryk er det ikke muligt at isolere v, men vi kan alligevel få konkret viden.

$$\frac{v}{\sqrt{gh}} = g_2\left(\frac{kv}{mg}\right) \tag{125}$$

$$v = \sqrt{gh} \cdot g_2\left(\frac{kv}{mg}\right) \tag{126}$$

I grænsen hvor luftmodstanden bliver mindre må vi nærme os resultatet fra det frie fald uden luftmodstand, det betyder at der for den ukendte funktion g_2 gælder, at $g_2(0) = \sqrt{2}$. Vi kan nu besvare det naturlige spørgsmål, hvornår kan vi ignorere luftmodstand. Svaret er at argumentet til g_2 skal være småt, dvs. at vi kan ignorere luftmodstand når kravet

$kv \ll mg$ er opfyldt. Med andre ord skal luftmodstanden være meget mindre end tyngdekraften.

Skal vi bestemme v som en funktion af de øvrige variable skal vi bruge en dimensionsløs parameter hvor v ikke indgår. Hvis vi fx sætter $a = 0$ og $c = 1$ finder vi $\pi_4 = \frac{hk^2}{gm^2}$.

$$f\left(\frac{v}{\sqrt{gh}}, \frac{hk^2}{gm^2}\right) = 0 \tag{127}$$

$$v = \sqrt{gh} \cdot g_3\left(\frac{hk^2}{gm^2}\right) \tag{128}$$

For at bestemme funktionen g_3 kan vi nøjes med at lave en række eksperimenter hvor vi vælger forskellige værdier af h og måler slutfarten, v. Alle andre værdier fastholdes, således at vi kan bestemme sammenhørende værdier (π_1, π_4), Med andre ord kan en enkelt måleserie løse alle frie fald der falder ind under modellen, uanset hvilke værdier de andre parametre antager.

Situationer med tre eller flere dimensionsløse parametre følger mønsteret så fx har ligningen

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \tag{129}$$

løsningen

$$\pi_1 = g(\pi_2, \pi_3) \tag{130}$$

I dette tilfælde kræver det lidt flere eksperimenter at fastlægge sammenhængen.

4.7. Skalamodeller og prototyper

Indenfor teknisk videnskab er det ofte dyrt at fremstille prototyper. For at overkomme dette problem benyttes det i udstrakt grad at fremstille skalamodeller, som man kan lave eksperimenter på. Spørgsmålet er nu hvordan man oversætter sine måleværdier fra skalamodellen til prototypen. Det er heldvis let at gøre, og det kræver ikke engang at man forsøger at løse ligningen fra Buckinghams sætning. Hvis en skalamodel og en prototype beskrives ved samme fysiske relation er kravet for at de opfører sig ens, at deres dimensionsløse parametre er parvis ens. Hvis de dimensionsløse parametre for skalamodellen betegnes med $\pi_{1,s}, \pi_{2,s}, \ldots, \pi_{m,s}$

og de for prototypen betegnes med $\pi_{1,p}, \pi_{2,p}, \ldots, \pi_{m,p}$ så lyder kravet

$$\pi_{1,s} = \pi_{1,p} \tag{131}$$
$$\pi_{2,s} = \pi_{2,p} \tag{132}$$
$$\vdots$$
$$\pi_{m,s} = \pi_{m,p} \tag{133}$$

Et simpelt eksempel kunne være brugen af en model i forbindelse med en filmoptagelse. I filmen skal en person falde fra taget af en bygning, men det er farligt og i stedet beslutter man at bygge en mindre model i et studie, hvor man vil filme en dukkes fald fra taget af modellen. Man kan ikke umiddelbart indsætte optagelsen fra modellen i filmen, da faldet fra modellen tager meget kortere tid end et rigtigt fald fra taget af en bygning. Spørgsmålet er hvorledes skal skalere tiden i modeloptagelsen for at det ser naturligt ud? Hvis vi ignorerer luftmodstand leder vi efter en dimensionsløs parameter der kæder højden, h, tiden for faldet, t og tyngdeaccelerationen sammen. Den dimensionsløse parameter er

$$\pi = \frac{h}{gt^2} \tag{134}$$

Kravet for at de to fald er "ens"er at deres dimensionsløse parametre er ens

$$\pi_s = \pi_p \tag{135}$$
$$\frac{h_s}{gt_s^2} = \frac{h_p}{gt_p^2} \tag{136}$$

Vi kan nu bestemme forholdet mellem faldtiderne til at være

$$\frac{t_p}{t_s} = \sqrt{\frac{h_p}{h_s}} \tag{137}$$

ud fra de kendte værdier af højderne og den målte faldtid fra modeloptagelsen kan vi beregne hvad tiden bør være i den endelige film

$$t_p = t_s\sqrt{\frac{h_p}{h_s}} \tag{138}$$

4.8. Udvidelser af metoderne

Der er flere måder at udvide de metoder vi allerede har diskuteret. Da færre dimensionsløse parametre giver en simplere beskrivelse er det oplagt at forsøge at reducere størrelsen $n - \text{rang}(A)$. Dette kan gøre på to måder, enten ved at reducere antallet af parametre (n) eller øge rangen af A. Vi vil se på begge muligheder.

Vi kan reducere antallet af paramtre hvis vi fx ved at kun produktet af/forholdet mellem to parametre er af betydning. I forbindelse med elektrisk tiltrækning benyttes Coulombs lov, der siger at tiltrækningen mellem to ioner, hver med en enkelt elementarladning, er givet ved $F = k_C e^2 r^{-2}$. Ofte vil variablene k_C og e kun indgå udtrykket $k_C e^2$, og man kan derfor indføre udtrykket i stedet for k_C og e. Herved har vi reduceret antallet af variable med én, og hermed kan antallet af dimensionsløse parametre blive reduceret med en. Det er dog ikke altid at man kan få reduktionen. Præcessionsvinkelhastigheden, Ω ($[\Omega] = \mathsf{T}^{-1}$), for et gyroskop afhænger af gyroskopets intertimoment, I ($[I] = \mathsf{ML}^2$), samt tyngdekraften på gyroskopet, F_t ($[F_t] = \mathsf{MLT}^{-2}$) og tyngdekraftens arm, r ($[r] = \mathsf{L}$). Her er det kun de to produkter $I\omega$ og $F_t r$ der har betydning, så vi kan reducere n med to, men får kun én færre dimensionsløs parameter.

Den anden mulighed for at reducere antallet af dimensionsløse parametre ligger i at øge rangen af dimensionsmatricen. Dette kan opnås ved at introducere flere dimensioner. Dette kan lyde lidt paradoksalt idet der jo er de grundenheder der nu engang er. De grundlæggende dimensioner kan dog optræde med lidt forskellig betydning. Masse kan fx måle mængden af stof eller det kan måle inerti eller træghed. Hermed kan man indføre M_m og M_i som uafhængige dimensioner. For længdedimensionen kan man fx indføre en vandret længdedimension L_x og en lodret længdedimension L_y. Tyngdeaccelerationen, g, vil så have dimension $[g] = \mathsf{L}_x\mathsf{T}^{-2}$, og en vandret starthastighed, v, vil have dimension $[v] = \mathsf{L}_x\mathsf{T}^{-1}$. Tiden er dog altid tiden og den kan ikke deles op.

4.9. Bestemmelse af karakteristiske størrelser

Det er ikke altid at man ønsker sammenhængen mellem de variable som Buckinghamssætning giver. I nogle tilfælde er man interesseret i at bestemme karakteristiske størrelser i modeller, fx karakteristiske tider forbundet med bestemte fænomener. I afsnit 5 vil vi indføre et værktøj til at finde sådanne karakteristiske størrelser, men analyserne vil ofte kun levere én karakteristisk tid hvor der kan være flere i et system.

Lad os betragte et eksempel, en dæmpet oscillator, hvor x er positionen af en klods med massen m der er forbundet til en fjeder med fjederkonstant k og udsat for en dæmpningskraft der er proportional med hastigheden og modsat rettet denne. Dæmpningskraften er desuden proportional med en dæmpningsparameter d. Vi ønsker at bestemme karakteristiske tider for klodsens bevægelse. Bevægelsesligningen for klodsen er en anden ordens differentialligning i positionen x:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \tag{139}$$

hvor en prik betyder differentiation med hensyn til tiden. Dimensionerne af de tre parametre er $[m] = \mathsf{M}$, $[d] = \mathsf{M} \cdot \mathsf{T}^{-1}$, $[k] = \mathsf{M} \cdot \mathsf{T}^{-2}$. Vi starter med at opskrive dimensionsmatricen præcis som tidligere. Hvor

	m	d	k
M	1	1	1
L	0	0	0
T	0	-1	-2

Dimensionmatrix.

vi før ledte efter dimensionsløse parametre leder vi nu efter parametre af typen $\tau = m^a d^b k^c$ hvor τ har tidsdimension i stedet for at være dimensionsløs. Hvis vi indsætter dimensionerne i ligningen får vi $\mathsf{T}^1 = \mathsf{M}^{a+b+c}\mathsf{L}^0\mathsf{T}^{-b-2c}$. Det giver os de to ligninger (den anden er triviel, $0 = 0$) for massedimensionen har vi $a+b+c = 0$ og for tidsdimensionen har vi $-b - 2c = 1$, som vi bemærker udgør et ikke-homogent ligningssystem. Vi bemærker, at dimensionsmatricen som tidligere er koefficientmatricen for det lineære system, højresiden afhænger af hvilken type karakteristisk størrelse vi leder efter. Før vi løser ligninger skal vi lige se på hvor mange løsninger der er.

I det generelle tilfælde har vi n variable (i eksemplet er $n = 3$), og dimensionsmatricen har rangen m (i eksemplet er $m = 2$). Antallet af lineært uafhængige løsninger, dvs. forskellige karakteristiske tider, er $n - m + 1$ såfremt antallet af ikke-nuller på højresiden af ligningssystemerne (i eksemplet er der en) er positivt og dette antal ikke overstiger rangen af dimensionsmatricen.

I eksemplet har vi, at $n = 3$ og $m = 2$, dvs. at der er $n - m + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ løsninger dvs. karakteristiske tider, τ_1 og τ_2. Vi løser nu de to ligninger $a + b + c = 0$ og $-b - 2c = 1$. Hvis vi ser på den anden ligning kan vi se at vi fx kan finde en løsning når $b = 0$ og en når $c = 0$. Det første tilfælde $b = 0$ giver $c = -1/2$ og $a = 1/2$ dvs. vi har løsningen $\tau_1 = \sqrt{m/k}$. Det andet tilfælde $c = 0$ giver $b = -1$ og $a = 1$, dvs. vi har løsningen $\tau_1 = m/d$. Det er klart at vi ud fra disse to løsninger kan generere uendelig mange andre løsninger fx af formen $\tau = \tau_1^\alpha \tau_2^{1-\alpha}$, men det er τ_1 og τ_2 der mest sandsynligt har en fysisk betydning. Ser man nærmere på fysikken i problemet finder man at τ_1 siger noget om hvor hurtigt klodsen bevæger sig frem og tilbage, og τ_2 siger noget om hvor hurtigt amplituden af klodsens svingninger aftager (der er dæmpning i systemet).

I det ovenstående eksempel gav længdedimensionen den trivielle ligning $0 = 0$, det skyldes at systemet er lineært i position x, hastighed $v = \dot{x}$ og acceleration $a = \ddot{x}$. Vi prøver derfor at se på en modificeres model hvor vi erstatter den lineære fjeder med en ikke-lineær fjeder. Modellen er

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + k_3x^3 = 0 \tag{140}$$

Den nye parameter har dimensionen $[k_3] = \mathsf{M} \cdot \mathsf{L}^{-2} \cdot \mathsf{T}^{-2}$. Vi leder efter karakteristiske tider af formen $\tau = m^a d^b k_3^c$. Vi kan nu opstille dimensionsmatricen for det modificerede system. For at finde karakte-

	m	d	k_3
M	1	1	1
L	0	0	-2
T	0	-1	-2

Dimensionmatrix.

ristiske tider skal vi løse ligningssystemet $a + b + c = 0$, $-2c = 0$ og $-b - 2c = 1$. Vi undersøger hvor mange løsninger der er. Der er $n - m + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$ løsning, da matricen har fuld rang, dvs. 3. Den anden ligning medfører at $c = 0$ dvs. at k_3 ikke har betydning for karakteristiske tider. Det er lidt overraskende, men forklaringen ses af dimensionsmatricen, der skal være en ekstra variabel som har længdedimension for at k_3 har betydning. Denne ekstra variabel kunne fx være startværdien for $x(0) = x_0$. Hvis vi tilføjer denne får vi dimensionsmatricen Matricen har stadigvæk fuld rang men der er en variabel mere,

	m	d	k_3	x_0
M	1	1	1	0
L	0	0	-2	1
T	0	-1	-2	0

Dimensionmatrix.

der er derfor $n - m + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$ løsninger. Nu leder vi efter de to løsninger de er af fomen $\tau = m^a d^b k_3^c x_0^e$ der skal adlyde ligningerne $a + b + c = 0$, $-2c + e = 0$ og $-b - 2c = 1$. Der er tale om tre ligninger med fire ubekendte så vi skal specificere en enkelt værdi for at finde en unik løsning. Vi sætter $c = 0$ og finder løsningen $a = 1$, $b = -1$ og $e = 0$, det giver tidskonstanten $\tau_1 = m/d$ der er identisk med den ene vi fandt tidligere uden k_3. Den anden tidskonstant kan vi finde ved at sætte $b = 0$ (derved sikrer vi at de to løsninger er lineært uafhængige) der giver $a = 1/2$, $c = -1/2$ og $e = -1$. Den anden tidskontant er dermed $\tau_2 = sqrtm/k_3/x_0$. Vi ser at τ_2 afhænger af startamplituden x_0 og dermed vil man kunne observere forskellige tidsintervaller hvis man ændrer startamplituden, modsat situationen uden k_3 hvor tidskonstanterne er ens og uafhængige af startamplituden.

4.10. Generel teori

Vi betragter igen en situation med n fysiske variable hvori der indgår m grundenheder. Vi vil nu kort skitsere hvordan man kan finde alle dimensionsløse parametre i det tilfælde at dimensionsmatricen har fuld rang m. Vi opstiller dimensionsmatricen på formen Her er A en kvadrisk $m \times m$

	$x_1, \ldots, x_{n-m}$	$x_{n-m+1}, \ldots, x_n$
d_1		
$\vdots$	B	A
d_m		

Dimensionmatrix.

matrix og B er en $m \times (n-m)$ matrix. Det kan være nødvendigt at bytte om på variabelrækkefølgen så matricen A er regulær, dvs. $\det(A) \neq 0$. Kravet på A skyldes at vi får behov for at invertere den i de senere beregninger. Vi indfører dog først en udvidet dimensionsmatrix hvor vi tilføjer to matricer C og D der indeholder potenserne af de fysiske variable $x_1, \ldots, x_n$ der indgår i de dimensionsløse parametre $\pi_1, \ldots, \pi_{n-m}$. C er en $(n-m) \times m$ matrix og D er en $(n-m) \times (n-m)$ matrix. Den udvidede matrix får strukturen: Det homogene ligningssystem der

	$x_1, \ldots, x_{n-m}$	$x_{n-m+1}, \ldots, x_n$
d_1		
$\vdots$	B	A
d_m		
π_1		
$\vdots$	D	C
π_{n-m}		

Udvidet dimensionmatrix.

skal løses for at finde de dimensionsløse parametre kan skrives som

$$AC^T + BD^T = 0 \tag{141}$$

Vi isolerer nu matricen C og finder udtrykket

$$C = -(A^{-1}BD^T)^T \tag{142}$$

Vi skal specificere matricen D for at finde en løsning og det simpleste valg er identitetsmatricen, dvs. vi kan sætte $D = I$. Det giver os den simplere løsning

$$C = -(A^{-1}B)^T \tag{143}$$

der kun afhænger af A og B. Med den fundne C og $D = I$ kan man så opskrive de dimensionsløse parametre for problemet.

Vi anvender nu metoden på et frit fald med luftmodstand der er lineær i farten. v er slutfarten, h er højden, m er massen, g er tyngdeaccelerationen og k er luftmodstandskoefficienten. Problemet har dimensionsmatricen Vi kan direkte aflæse A og B matricerne

	h	v	g	m	k_1
M	0	0	0	1	1
L	1	1	1	0	0
T	0	-1	-2	0	-1

Dimensionmatrix for frit fald med luftmodstand.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{144}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{145}$$

og vi kan bestemme den inverse af A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{146}$$

Med disse kan vi nu beregne C

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{147}$$

Vi kan nu aflæse de dimensionsløse parametre fra den udvidede dimensionsmatrix hvor vi ser på de to sidste rækker, det giver de dimensionsløse parametre $\pi_1 = h^1 g^{-1} m^{-2} k_1^2 = \frac{hk_1^2}{m^2 g}$ og $\pi_2 = v^1 g^{-1} m^{-1} k_1^1 = \frac{k_1 v}{mg}$.

	h	v	g	m	k_1
M	0	0	0	1	1
L	1	1	1	0	0
T	-1	-2	0	0	-1
π_1	1	0	-1	-2	2
π_2	0	1	-1	-1	1

Udvidet dimensionsmatrix for frit fald med luftmodstand.