

3. Usikkerhedsvurdering

Kvantitative fysiske målinger er altid behæftet med usikkerhed. Derfor vil beregninger med data fra fysiske målinger ligeledes være behæftet med usikkerhed. Vi vil præsentere de forskellige typer af bidrag til usikkerhed, komme ind på hvordan man estimerer usikkerheden på en målt størrelse, samt introducere værktøjer til at bestemme usikkerheden på en beregnet størrelse, når en eller flere af de indgående størrelser er behæftet med usikkerhed.

I 1985 havde man første gang data der støttede hypotesen om huller i ozonlaget. NASA havde siden 1978 regelmæssigt målt ozonlaget men ikke fundet huller. En nærmere granskning viste, at lave målinger var blevet afvist som målefejl.

3.1. Fejltyper

Der optræder tre forskellige typer af fejl der leder til usikkerhed ved en fysisk måling. Den første type fejl kaldes for personlige fejl, og skyldes at man fx aflæser forkert på et instrument, noterer en anden værdi ned end den aflæste værdi, eller en fejl i efterfølgende beregninger. Personlige fejl kan og bør helt elimineres ved at være grundig i sin metode. De to andre typer af fejl er forskellige fra personlige fejl i og med at de ikke kan elimineres fuldstændigt. Systematiske fejl er fejl der gør at målinger bliver systematisk større eller mindre end de burde blive. Ofte skyldes systematiske fejl instrumenter, og de kan derfor være vanskelige at eliminere. Et forkert kalibreret instrument kan fx give et udslag der er 90% af den rigtige værdi, her er der tale om en relativ fejl. Alternativt kan instrumentet give et udslag hvor det burde give nul, så fejlen er en absolut fejl. Systematiske fejl kan også opstå i beregninger hvis en effekt der spiller en ikke negligerbar rolle udelades af beregningerne, det kunne fx være luftmodstand. Man bør gøre hvad man kan for at eliminere systematiske fejl, men det er ikke altid muligt fx at udskifte udstyr. Den tredje type fejl er de såkaldt tilfældige fejl, som er dem vi vil bruge mest tid på, systematiske fejl vil vi vende tilbage til i afsnit 3.5.4.

Når det kommer til bestemmelse eller estimering af usikkerheder skelner man mellem type A og type B usikkerheder.

Type A usikkerhed dækker over alle usikkerheder der er bestemt ved statistiske beregninger foretaget på en måleserie.

Type B usikkerhed dækker over alle andre usikkerheder forbundet med fx aflæsning af instrumenter (se afsnit 3.5.1 og 3.5.2), usikkerhed i forbindelse med kalibrering af instrumenter, fx et amperemeter der ikke viser nul, selvom det ikke er forbundet samt menneskelige fejl. Der kan

Usikkerhedsvurdering 7

indgå er række forskellige type B usikkerheder i forbindelse med et eksperiment. Både type A og type B usikkerheder indgår i det endelige usikkerhedsregnskab for et eksperiment, se afsnit 3.5.5.

3.2. Nøjagtighed og præcision

Man hører ofte begreberne nøjagtighed og præcision i forbindelse med usikkerhedsvurdering. De to begreber kan lyde som dækkende over det samme, men de er forskellige begreber. En nøjagtig måling betyder, at den målte værdi ligger tæt på den korrekte værdi, hvilket kræver at man har forudgående viden om den korrekte værdi. En præcis måling dækker over, at de målinger man har foretaget ligger meget tæt på hinanden. Bemærk, at stor præcision kun medfører stor nøjagtighed hvis man har elimineret systematiske fejl. Med væsentlige systematiske fejl er det muligt at have stor præcision uden at resultatet er særlig nøjagtigt.

3.3. Notation

Eksperimentelt bestemte værdier er altid behæftet med usikkerhed. Vi angiver værdier som et bedste bud på værdien og en tilhørende usikkerhed

$$x \pm \delta x \quad (9)$$

hvor x betegner der bedste bud og δx usikkerheden. Usikkerheden er altid en positiv størrelse. Et eksempel på en måling kunne være en længde målt til

$$\text{målt værdi af længde} = 12.5 \pm 0.3 \text{ cm} \quad (10)$$

Denne type angivelse af usikkerhed kaldes absolut usikkerhed. I nogle tilfælde opgives i stedet en relativ usikkerhed, defineret som

$$\text{relativ usikkerhed} = \frac{\delta x}{|x|} \quad (11)$$

Relative usikkerheder opgives ofte i procent.

3.4. Afrunding

De fleste eksperimentelt målte størrelses usikkerhed afrundes til ét betydende ciffer. Fx afrundes usikkerheden 0.325 m til 0.3 m. Hvis det mest betydende ciffer er 1 eller 2 medtages ét ekstra ciffer, dvs. at usikkerheden 0.262 m afrundes til 0.26 m, og usikkerheden 0.267 m afrundes til 0.27 m.

8

Ved normal afrunding vil man runde ned hvis det næste ciffer er 0, 1, 2, 3 eller 4, og runde op hvis det er 5, 6, 7, 8 eller 9. Det anbefales normalt at man benytter en anden regel hvis det sidste ciffer er 5, vi vil dog ikke benytte denne regel men nævner reglen hvis man skulle møde den senere. Når tallet der afrundes slutter med 5 følges den specielle regel, at der afrundes til den nærmeste hele afrundingsværdi af det sidst medtagne ciffer. Fx vil 1.05 afrundes til 1.0, mens både 1.15 og 1.25 afrundes til 1.2. Tabellen illustrerer afrundingsreglen.

Tal	Afrundet
1,05	1,0
1,15	1,2
1,25	1,2
1,35	1,4
1,45	1,4
1,55	1,6
1,65	1,6
1,75	1,8
1,85	1,8
1,95	2,0

Afrunding af tal der ender med 5 afrundes så det sidste ciffer er lige.

En fordel ved afrundingsmetoden er at hvis man dividerer et tal og det afrundede tal med 2 får man samme resultat. For eksempel giver afrundingen $1,35/2 = 0,675 \rightarrow 0,7$, $1,4/2 = 0,7 \rightarrow 0,7$. og $1,45/2 = 0,725 \rightarrow 0,7$, hvor \rightarrow indikerer afrunding.

3.5. Usikkerhed i eksperimenter

Vi skelner mellem situationer hvor vi foretager en enkelt måling på et system og hvor vi foretager en række målinger på et system. Den sidstnævnte situation hvor vi har en målerække med målinger af den samme størrelse, behandler vi i afsnit 3.5.3. I det tilfælde at gentagne målinger giver præcis samme værdi giver det ikke mening at tale om en målerække, disse tilfælde behandles i afsnittene 3.5.1 og 3.5.2.

3.5.1 Usikkerhed ved digital aflæsning

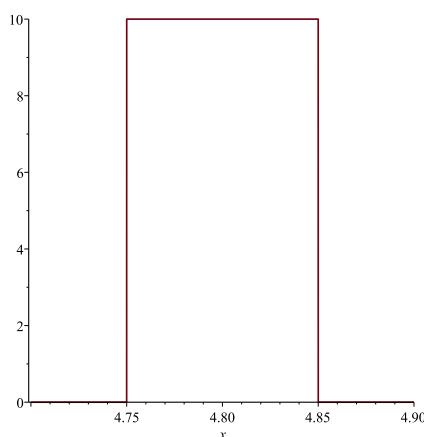
Digitale instrumenter er lette at aflæse, men de kan kun måle til en vis præcision. Figuren viser et velkendt digital instrument, et ur, der er let at aflæse. Hvis man med et digitalt pH-meter aflæser en pH-

Usikkerhedsvurdering 9



Figuren viser et digitalt ur. Der er næppe nogen tvivl om aflæsningen.

værdi på 4.8, må man formode at værdien kunne ligge et vilkårligt sted mellem 4.75 og 4.85. Vi antager at instrumentet vi bruger kan foretage en korrekt afrunding. Det er ikke givet at alle instrumenter kan dette, men modellen vi ser på vil formentlig stadig give brugbare resultater selvom afrundingen ikke er præcis. Var værdien mindre end 4.75 ville aflæsningen være 4.7 og ligeledes, hvis værdien var større end 4.85 ville aflæsningen være 4.9. Vi formoder derfor at vi kun kan konkludere at værdien, x , ligger i intervallet $4.75 \leq x \leq 4.85$. For at inddrage denne usikkerhed, vil vi beskrive måling med en uniform fordeling. I figuren er vist denne fordelingsfunktion for det konkrete eksempel.



Figuren viser en uniform fordelingsfunktion for et eksperiment hvor måleværdien er 4.8, hvor aflæsningen har to betydende cifre.

For at kunne bestemme standardafvigelsen af fordelingen ser vi på en

10

generel uniform fordeling, hvor de mulige udfald ligger i intervallet $a \leq x \leq b$. Det vil sige at sandsynlighedsfordelingen uden for dette interval er 0. I intervallet må sandsynlighedsfordelingen i dette interval være $\frac{1}{b-a}$, for at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Fordelingsfunktionen kan skrives som

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (12)$$

Den generelle formel for standardafvigelsen for en kontinuert fordeling er

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx} \quad (13)$$

hvor μ er middelværdien. Standardafvigelsen kan nu bestemmes ved indsættelse af fordelingsfunktionen og middelværdien der er $\mu = (a + b)/2$:

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx} \quad (14)$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (15)$$

For det ovenstående eksempel finder vi standardafvigelsen der er et mål for hvor præcist vores bedste bud, 4.8, er.

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{4.85 - 4.75}{\sqrt{12}} = 0.029 \quad (16)$$

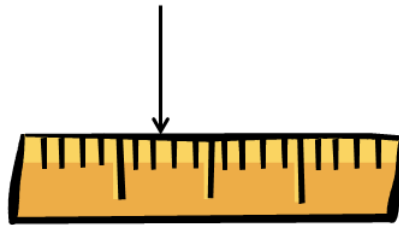
Den korrekte måde at notere sit svar vil være 4.80 ± 0.03 .

3.5.2 Usikkerhed ved analog aflæsning

Aflæsning af en analog skala, som fx en lineal eller et instrument med visere, er lidt mere kompliceret end aflæsning af en digital skala. Som i tilfældet med digital aflæsning ønsker vi en fordelingsfunktion der indeholder den usikkerhed der hører til aflæsningen. For at få en fordelingsfunktion bestemmer man først en værdi man er sikker på er mindre end måleværdien, samt en værdi man er sikker på er større end måleværdien. Det er dog vigtigt at finde værdier der ligger så tæt på måleværdien som muligt. Da de to yderværdier ikke er mulige, hvorimod midtpunktet mellem dem er mere sandsynligt, er en triangulær fordelingsfunktion mellem de to yderværdier en god model.

Vi betragter en generel, symmetrisk triangulær fordeling, hvor de mulige udfald ligger i intervallet $a \leq x \leq b$. Udenfor dette interval er

Usikkerhedsvurdering 11



Figuren viser en lineal med et punkt der skal aflæses. Hvilken værdi aflæser du?



Figuren viser et speedometer med viser. Hvilken fart aflæser du?

fordelingsfunktionen 0. Hvis fordelingen skal være symmetrisk, og vi vil kun se på symmetriske fordelinger, så må den maksimale værdi af sandsynlighedsfordelingen i intervallet være $\frac{2}{b-a}$. Fordelingsfunktionen har formen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{(b-a)^2} (x-a) & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{4}{(b-a)^2} (b-x) & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (17)$$

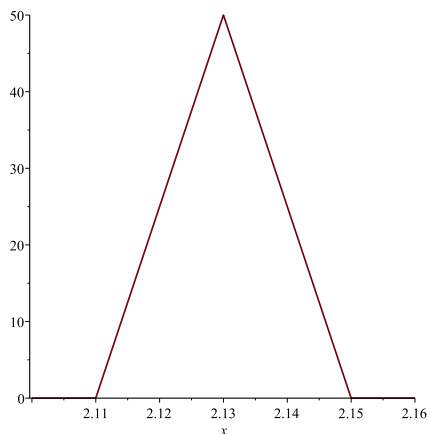
Hvis vi udnytter symmetrien i fordelingen kan standardafvigelsen beregnes ved

$$\sigma = \sqrt{2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{4}{(b-a)^2} (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx} \quad (18)$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{24}} = \frac{b-a}{2\sqrt{6}} \quad (19)$$

Vi finder nu standardafvigelsen for aflæsningen og dermed bestemmer

12



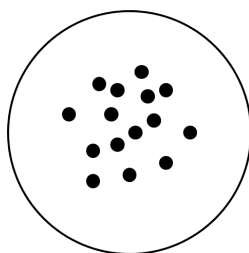
Figuren viser en triangulær fordelingsfunktion for et eksperiment hvor det er vurderet at måleværdien ligger mellem 2.11 og 2.15.

vi et mål for hvor præcist midtpunktet, 2.13, er.

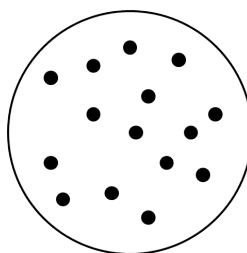
$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{24}} = \frac{2.15-2.11}{\sqrt{24}} = 0.0082 \quad (20)$$

Her vil det være korrekt at skrive måleresultatet som 2.130 ± 0.008 .

3.5.3 Usikkerhed ved målerække



(a) Måleserie med lille tilfældig fejl.



(b) Måleserie med stor tilfældig fejl.

Vi har en måleserie, x_1, x_2, \dots, x_N , der udgør en stikprøve. Det bedste gæt på den korrekte værdi af størrelsen ud fra stikprøven, er gennemsnittet der beregnes ved

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (21)$$

Usikkerhedsvurdering 13

Variationen af måleserien mht gennemsnittet er standardafvigelsen der for en stikprøve beregnes ved

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (22)$$

Standardafvigelsen er et mål for usikkerheden, og indgår i det endelige usikkerhedsregnskab.

Standardafvigelsen siger noget om usikkerheden på de enkelte målinger, men vi er som regel interesseret i at vide noget om usikkerheden på vores bedste bud, gennemsnittet. Til dette har vi standardafvigelsen af gennemsnittet, der kan beregnes ved

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \quad (23)$$

hvis der er tale om en stikprøve, og ud fra

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (24)$$

hvis vi har hele populationen.

Lad os betragte et simpelt eksempel, Hookes lov der siger at kraften fra en fjeder er proportional med fjederens forlængelse, $F = k\Delta x$, hvor k kaldes for fjederkonstanten. I tabellen er vist en række målinger af kraften, F for en bestemt fjeder, hvor fjederen er strukket forskellige længder, Δx . Samme datasæt er benyttet i afsnittene om lineær regression. I den sidste søjle er fjederkonstanten bestemt for hvert målesæt, vist afrundet lidt hårdere end vi normalt ville gøre det, beregningerne har flere betydende cifre.

$\Delta x(\text{m})$	$F(\text{N})$	$k(\text{N/m})$
0,01	0,095	9,5
0,02	0,22	11,0
0,03	0,31	10,3
0,04	0,38	9,5
0,05	0,53	10,6
0,06	0,58	9,7
0,07	0,72	10,3
0,08	0,79	9,9
0,09	0,91	10,1
0,10	1,12	11,2
0,11	1,19	10,8

Tabel over fjederforlængelser og tilhørende kraftmåling.

14

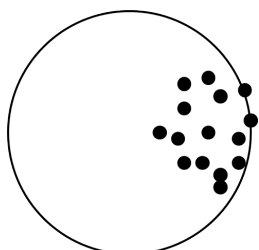
Beregning med ovenstående formler giver en middelværdi for fjederkonstanten, $\bar{k} = 10,26272793$, med standardafvigelse, $s_k = 0,5951438$, og usikkerhed $\delta_{\bar{k}} = 0,188200994$. Afrunding leder til det endelige resultat $k = 10,26 \pm 0,19 \text{ N/m}$.

3.5.4 Systematiske fejl

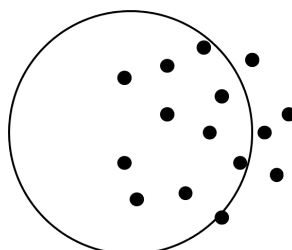
Systematisk fejl er fejl der skubber den målte værdi i en bestemt retning. Systematiske fejl kan fx være et voltmeter der konsekvent viser en for stor værdi. Systematiske fejl antages at være uafhængige af de tilfældige fejl, således at de to bidrag kan adderes i kvadratur.

$$\delta z = \sqrt{(\delta z_{\text{tilfældig}})^2 + (\delta z_{\text{systematisk}})^2} \quad (25)$$

Bemærk at de tilfældige fejl her, $\delta z_{\text{tilfældig}}$, dækker over summen af alle forskellige bidrag som beskrevet ovenfor.



(c) Måleserie med stor systematisk fejl og lille tilfældig fejl.



(d) Måleserie med stor systematisk fejl og stor tilfældig fejl.

3.5.5 Usikkerhedsregnskab for målinger

Efter at man har bestemt alle bidrag til usikkerheden i et eksperiment laver man et såkaldt usikkerhedsregnskab. I usikkerhedsregnskabet lægges alle usikkerhedsbidragene sammen i kvadratur, svarende til at de bidragene er uafhængige. I forskellige eksperimenter kan der være et forskelligt antal bidrag.

$$\delta x = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_n^2} \quad (26)$$

Lad os betragte et eksempel. I en måleserie har man målt værdien af et tidsinterval. Målingerne er foretaget med et digitalt stopur. De

Usikkerhedsvurdering 15

målte værdier er 3.40, 3.55, 3.39, 3.34, 3.51, 3.34, 3.40, 3.40, 3.27, 3.30, hvor alle værdier er målt i sekunder. Lad os første betragte type A fejl, der er de statistiske bidrag. Beregning, uden afrunding, giver et gennemsnit på $\bar{t} = 3.39$ s, en standardafvigelse på $s_t = 0.086795$ s og en standardafvigelse på gennemsnittet som er $\sigma_{\bar{t}} = 0.027447$ s.

Dernæst kan vi se på type B fejlene. I dette tilfælde er det det digitale stopur der angiver måleværdier med tre betydende cifre.

$$\sigma_{\text{digital}} = \frac{0.01 \text{ s}}{\sqrt{12}} = \frac{0.01 \text{ s}}{2\sqrt{3}} = 0.002887 \text{ s} \quad (27)$$

Vi kan nu samle de to bidrag og beregne den samlede usikkerhed.

$$\sigma_t = \sqrt{s_{\bar{t}}^2 + \sigma_{\text{digital}}^2} = 0.028 \text{ s} \quad (28)$$

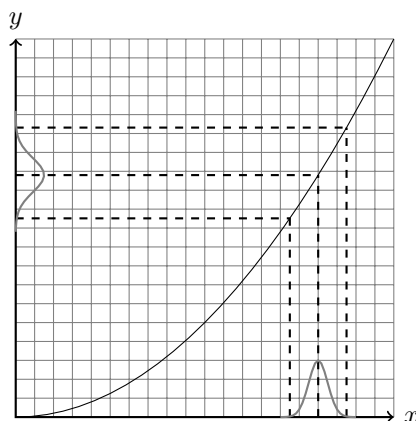
Vi bemærker, at usikkerheden fra aflæsning af det digitale stopur er omkring en tiendedel af usikkerheden fra spredningen af målingerne. Den endelige usikkerhed ses at være domineret af type A fejlen.

3.6. Usikkerhed i forbindelse med beregninger

Det er ofte tilfældet at den størrelse man er interesseret i ikke kan måles direkte, men kan beregnes på grundlag af de målte størrelser samt evt. andre størrelser. Det er nu spørgsmålet hvordan usikkerheder på de indgående størrelser påvirker resultatet af beregningen. Hvis vi har en størrelse x med usikkerhed, hvordan er usikkerheden på en størrelse, y , beregnet som funktion af x , $y = f(x)$? Figuren illustrerer usikkerheden på den uafhængige variabel og på den afhængige variabel. Som figuren illustrerer ændres usikkerheden. Vi vil se hvor fejlophobningsloven kan bruges til at bestemme usikkerheden på y . I figuren er fejlen på y tilsyneladende større end usikkerheden på x , men det kan også være omvendt. Vi vil også se på tilfældet med flere uafhængige variable med usikkerhed, dvs. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. I det efterfølgende vil vi se på konsekvenserne af beregning med usikre værdier når usikkerhederne er små. Ved større afvigelser vil vores metoder ikke være så nøjagtige. Større usikkerheder bliver behandlet i afsnit 3.7.

3.6.1 Simple beregninger - Afhængige fejl

Vi betragter en simpel sum af to størrelser med usikkerhed, hvor x og y er vores bedste bud på størrelserne og δx og δy er de tilhørende



Figuren illustrerer beregning af en funktion af en størrelse med usikkerhed. Den uafhængige variabels fordeling er vist nær x -aksen og usikkerheden på den beregnede størrelse er vist nær y -aksen.

usikkerheder.

$$z = x \pm \delta x + y \pm \delta y \quad (29)$$

$$= x + y + \pm (\delta x + \delta y) \quad (30)$$

Her ses det at den mindste værdi er $x + y - \delta x - \delta y$ og den største værdi er $x + y + \delta x + \delta y$. Usikkerheden på en sum af to størrelser er derfor summen af usikkerhederne, $\delta x + \delta y$.

Generelt gælder, at for udtryk der kun indeholder summer og differencer af størrelser med afhængige fejl

$$z = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n \quad (31)$$

kan usikkerhederne på de indgående størrelser adderes direkte.

$$\delta z = \delta x_1 + \delta x_2 + \dots + \delta x_n \quad (32)$$

Hvis vi har et produkt af to størrelser med usikkerhed får vi

$$z = (x \pm \delta x)(y \pm \delta y) \quad (33)$$

$$= xy \pm (x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y) \quad (34)$$

Da leddet med produktet af usikkerhederne, $\delta x\delta y$, kan vi ignorere dette led og får

$$z = xy \pm (x\delta y + y\delta x) \quad (35)$$

Usikkerhedsvurdering 17

Dividerer vi med $z = xy$ kan vi opskrive udtrykket for den relative usikkerhed på z :

$$\frac{\delta z}{|z|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \quad (36)$$

Vi ser at den relative usikkerhed på produktet er summen af de relative usikkerheder.

Generelt har vi at hvis der er tale om et udtryk der kun indeholder multiplikation og division kan de relative usikkerheder adderes direkte.

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} \quad (37)$$

$$\frac{\delta z}{|z|} = \frac{\delta x_1}{|x_1|} + \dots + \frac{\delta x_n}{|x_n|} + \frac{\delta y_1}{|y_1|} + \dots + \frac{\delta y_n}{|y_n|} \quad (38)$$

3.6.2 Simple beregninger - Uafhængige fejl

Når der er tale om uafhængige fejl giver de nævnte formler for afhængige fejl et for pessimistisk bud på fejlen. I stedet kan man benytte at fejlene kan adderes i kvadratur, hvilket giver mere realistiske estimater for usikkerheden. For udtryk der kun indeholder summer og differencer af størrelser med uafhængige fejl

$$z = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n \quad (39)$$

kan usikkerhederne på de indgående størrelser adderes i kvadratur som angivet i følgende formel

$$\delta z = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_n^2} \quad (40)$$

Her kan man tænke på at de uafhængige fejl som liggende i forskellige indbyrdes uafhængige retninger, således at udtrykket anvender pythagoras læresætning i højere dimensioner.

For udtryk der kun indeholder multiplikation og division af størrelser med uafhængige usikkerheder

$$z = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} \quad (41)$$

kan man ligeledes benytte addition i kvadratur, men for de relative usikkerheder

$$\frac{\delta z}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta x_n}{x_n}\right)^2 + \left(\frac{\delta y_1}{y_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta y_n}{y_n}\right)^2} \quad (42)$$

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (43)$$

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2} \quad (44)$$

3.6.3 Fejlphobningsloven

Vi betragter en funktion, $z = z(x, y)$, af de to variable, x og y , hvor hver af de to variable har en tilknyttet usikkerhed, δx og δy .

$$z = f(x, y) \quad (45)$$

Vi er interesseret i at bestemme usikkerheden på z , δz , der afhænger af usikkerhederne, δx og δy . Hvis differentialerne tænkes at repræsentere små afvigelser, giver differentialet information om hvor meget z ændres. Vi bestemmer derfor differentialet dz , der viser afhængigheden af differentialerne dx og dy .

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (46)$$

Fortegnene af de partielle afledede kan naturligvis være enten positive eller negative, hvorimod usikkerhederne altid har positive fortegn. For at bruge ovenstående formel for differentialet til usikkerheder må vi erstatte de partielle afledede med deres numeriske værdi. Det giver følgende ligning for usikkerheden i z

$$\delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \delta y \quad (47)$$

Ligningen er et eksempel på fejlphobningsloven anvendt på afhængige fejl.

I den situation at usikkerhederne er uafhængige giver ovenstående udtryk et for pessimistisk resultat. I stedet for at addere de enkelte bidrag, adderes man fejlene i kvadratur, som det fremgår af formlen

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2} \quad (48)$$

De ovenstående beregninger kan let generaliseres til flere uafhængige variable.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (49)$$

Usikkerhedsvurdering 19

For afhængige usikkerheder fås

$$\delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \delta x_n \quad (50)$$

og for uafhængige usikkerheder fås

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \right)^2} \quad (51)$$

I de næste to delafsnit er angivet de mest gængse formler der bruges i forbindelse med beregninger der involverer usikkerheder.

3.6.4 Eksempler på usikkerhedsvurdering

Lad os betragte et rektangulært bord med sidelængderne a og b . Måles hver af disse uafhængigt med måleværdierne $a = 2.35 \pm 0.01$ m og $b = 1.24 \pm 0.01$ m. Vi ønsker at bestemme arealet, A , af bordet.

$$A = ab = 2.914 \text{ m}^2 \quad (52)$$

Usikkerheden på arealet findes ved at anvende fejlophobningsloven for uafhængige usikkerheder.

$$\delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a} \delta a \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b} \delta b \right)^2} \quad (53)$$

$$\delta A = \sqrt{(b \delta a)^2 + (a \delta b)^2} \quad (54)$$

$$\delta A = 0.02657 \text{ m}^2 \quad (55)$$

Arealet af bordet er dermed bestemt til at være $A = 2.914 \pm 0.027 \text{ m}^2$.

Vi fortsætter med bordeksmplet, men forestiller os nu at vi i stedet for de to sidelængder har målt den ene sidelængde a og omkredsen O . Vi kan selvfølgelig bestemme den andensidelængde, b ud fra formelen for omkredsen, det har dog den bagdel at så er b bestemt ud fra a og dermed er de to størrelser afhængige. Vi kan i stedet omskrive udtrykket for arealet så det kun afhænger af den ene sidelængde, a , og omkredsen, O . Omkredsen kan beregnes af udtrykket

$$O = 2(a + b) \quad (56)$$

og dermed kan sidelængden, b bestemmes til at være

$$b = \frac{O}{2} - a \quad (57)$$

20

Arealet kan nu udtrykkes om funktion af de to uafhængige størrelser, a og O .

$$A = ab = a \left(\frac{O}{2} - a \right) = \frac{aO}{2} - a^2 \quad (58)$$

Usikkerheden på arealet findes ved at anvende fejlophobningsloven for uafhængige usikkerheder endnu en gang.

$$\delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial a} \delta a \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial O} \delta O \right)^2} \quad (59)$$

$$\delta A = \sqrt{\left(\left(\frac{O}{2} - 2a \right) \delta a \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \delta b \right)^2} \quad (60)$$

3.6.5 Usikkerhedsvurdering i Maple

Maple kan arbejde fysiske størrelser med tilknyttet usikkerhed og automatisk anvende fejlophobningsloven for enten afhængige eller uafhængige usikkerheder. For at få adgang til usikkerhedsberegning skal man starte med kommandoen `with(ScientificErrorAnalysis)`: der herefter er udeladt i Maple kode eksemplerne.

Når man opretter fysiske størrelser i Maple skal de være af typen `Quantity`, og kan oprettes med enten absolut eller relativ usikkerhed. Oprettelsen foregår som i kommandoerne

```
x_a:=Quantity(2.93,0.03);
x_t:=Quantity(1.43,0.05,relative);
fart:=combine(x_a/x_t,errors);
```

hvor x_a har den absolutte usikkerhed 0.03 og x_t har 5% relativ usikkerhed.

I nogle tilfælde kan det være nødvendigt at regne videre med enten værdien eller usikkerheden, disse kan da ekstraheres med kommandoerne

```
GetValue(x_a);
GetError(x_a);
```

der returnerer sædvanlige tal.

Det tidligere nævnte eksempel med arealet af et bord kan i Maple kode beregnes med

Usikkerhedsvurdering 21

```
a:=Quantity(2.35,0.01);
b:=Quantity(1.24,0.01);
Area:=combine(a*b,errors);
```

Det er også muligt at regne symbolsk når det kommer til usikkerheder.

```
afstand:=Quantity(L,dL);
tid:=Quantity(T,dT);
fart:=combine(afstand/tid,errors);
```

Resultatet ses at være en generel formel der kan bruges til videre beregninger.

3.6.6 Afrunding af resultater i Maple

I Maple er det også muligt at lave afrundinger af resultater. Der er to standardmetoder, den første afrunder resultatet så usikkerheden har n betydende cifre, den metode hedder `ApplyRule(resultat,round[n])` og kaldes med et første argument der er et resultat af typen `Quantity`, og et andet argument der er et objekt der repræsenterer afrunding. Hvis man ønsker at følge vores tidligere tommelfinger regel om at hvis det sidste betydende ciffer i usikkerheden er 1, så medtages et ekstra ciffer, så skal man benytte kaldes `ApplyRule(resultat,round3g[n])`.

Lad os betragte et eksempel hvor vil vil bestemme arealet af et nyt bord. Vi har, målt bordets sidelængder til at være 0.44 ± 0.02 m og 0.66 ± 0.02 m. I Maple kan vi oprette resultatet af de to målinger og beregne arealet, med en efterfølgende afrunding.

```
bredde:=Quantity(0.44,0.02);
længde:=Quantity(0.66,0.02);
areal:=combine(bredde*længde,errors);
ApplyRule(areal,round[1]);
ApplyRule(areal,round3g[1]);
```

Udføres beregningerne bemærker man forskellen på de to afrundinger. Den første afrunding giver resultatet 0.29 ± 0.02 m². Den anden der tager højde for den tidligere nævnte regel, at hvis det sidste betydende ciffer i resultatet er et ét-tal så tages der et ekstra ciffer med: 0.290 ± 0.016 m².

22

3.7. Beregninger ved store usikkerheder

I tilfælde hvor usikkerhederne ikke er små kan vi ikke forvente at fx fejlophobningsloven vil give nøjagtige resultater. Vi vil i det følgende undersøge hvad der sker når fejlene ikke er små.

Beregningerne vi udfører nedenfor kræver at vi har fat i et par pakker i Maple men for at spare plads udelades nedenstående kommandoer:

```
with(ScientificErrorAnalysis);
with(Statistics);
with(plots);
```

Lad os starte med et eksempel med en lille usikkerhed hvor vi genererer 100000 datapunkter fra en normalfordelt stokastisk variabel med fordelingen $N(2, 0.1)$. Efter vi har genereret datapunkterne konstruerer vi et histogram og tegner desuden fordelingsfunktionen for fordelingen.

```
xm := 2.0:
xs := 0.1:
X := Quantity(xm,xs):
Y := combine(X^2,errors):
Z := RandomVariable(Normal(xm,xs)):
N := 100000:
x := Sample(Z,N):
h1 := Histogram(x,frequenceyscale=relative,color=green);
n1 := plot(exp(-(t-xm)^2/(2*xs^2))/(sqrt(2.*Pi)*xs),
            t=1.5..2.5,color=black);
display(h1,n1);
```

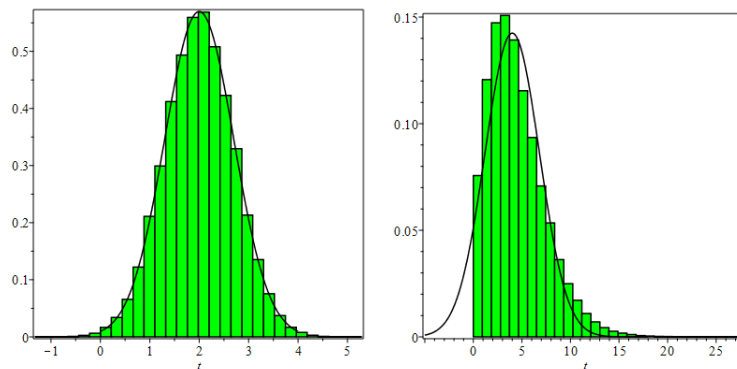
Nu vil vi så udsætte det genererede input for den simple beregning x^2 hvorved vi genererer en ny vektor på 100000 data punkter. Vi beregner desuden normalfordelingen med parametre (middelværdi og spredning) som bestemt ud fra fejlophobningsloven.

```
y := Vector(N):
for i to N do y(i) := x(i)^2 end do:
h2 := Histogram(y,frequenceyscale=relative,color=green);
ym := GetValue(Y);
                                4.00
ys := GetError(Y);
                                0.4000000000
n2 := plot(exp(-(t-ym)^2/(2*ys^2))/(sqrt(2.*Pi)*ys),
```

$+$

24

```
for i to N do y(i) := x(i)^2 end do;
h2 := Histogram(y,frequenceyscale=relative,color=green);
n2 := plot(exp(-(t-ym)^2/(2*ys^2))/(sqrt(2.*Pi)*ys),
           t=-5..18,color=black);
display(h2,n2);
```



(c) Histogram over 100000 punkter der følger normalfordelingen $N(2.0, 0.7)$ vist sammen med normalfordelingen beregnet ud fra fejlophobningsloven.
(d) Histogram over x^2 beregnet på 100000 punkter vist sammen med normalfordelingen beregnet ud fra fejlophobningsloven.

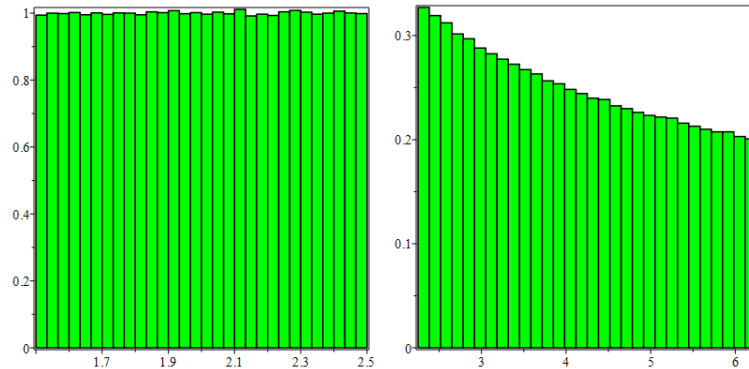
Data ses at være fint repræsentative for den genererede normalfordeling men ikke for de beregnede x^2 -data, her er store afvigelser. Fordelingen er ikke symmetrisk og der er betydelige afvigelser mellem histogrammet og den viste normalfordelingen over det hele.

Det er naturligvis også muligt at data ikke er normalfordelt som i forbindelse med aflæsning af et digitalt instrument. Her benytter vi en uniform fordeling i et interval omkring måleværdien. Nedenstående Maple kode udfører beregninger som ovenfor men blot med uniformt fordelte data, vi har valgt 1000000 data punkter.

```
Z := RandomVariable(Uniform(1.5,2.5));
N := 1000000;
x := Sample(Z,N);
Histogram(x,frequenceyscale=relative,color=green);
y := Vector(N);
for i to N do y(i) := x(i)^2 end do;
Histogram(y,frequenceyscale=relative,color=green);
```

Man ser at det venstre histogram fint repræsenterer en uniform fordeling. Det højre diagram viser at fordelingen er langt fra uniform, den

Usikkerhedsvurdering 25



(e) Histogram for 1000000 datapunkter valgt fra en uniform fordeling mellem 1.5 og 2.5. (f) Histogram for beregning af x^2 for datapunkterne bag histogrammet til venstre.

aftager hen gennem intervallet, der er billedet af intervallet $[1.5, 2.5]$ under x^2 der giver intervallet $[2.25, 6.25]$. Fordelingsfunktionen er højere til venstre hvilket skyldes at fordelingen til højre spredes med da differentialkvotienten $2x$ er en voksende funktion. Den udsmykning der sker kan illustreres med figuren på side 216.

3.8. Beregninger med fordelingsfunktionen

Når man har beregnet et histogram der illustrerer fordelingsfunktionen er det oplagt at beregne fx middelværdi og spredning ud fra fordelingen, hvor middelværdien giver et bedste bud på værdien og spredningen giver et bud på usikkerheden.

Lad os starte med at se på hvordan vi får data der beskriver fordelingsfunktionen ud så vi kan udføre yderligere beregninger. Vi starter med at generere data, der er en numerisk løsning til en stokastisk differentiaalligning (gennemgås i afsnit 19) som vi løser 1000 gange med samme startbetingelser. Vi opsamler slutværdien i en vektor u .

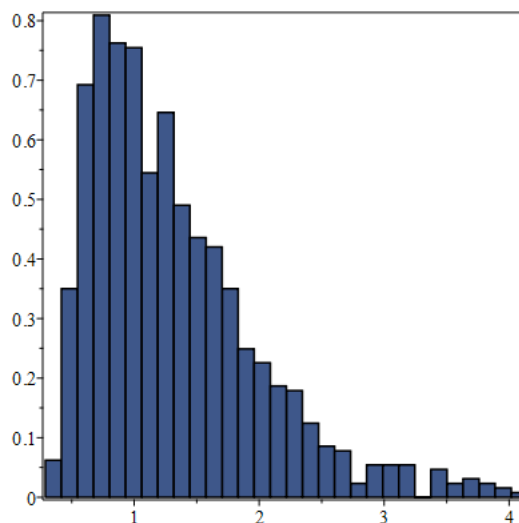
```
M:=1000:
u:=Vector(M):
Z := RandomVariable(Normal(0, 1)):
for k from 1 to M do
  N := 1000:
  eps := 0.1:
  noise := Sample(Z, N):
  dt := 0.1e-1:
  T := N*dt:
```

26

```

a := 1.0; b := 2.8;
X := 0.; Y := 0.;
x := Vector(N+1): y := Vector(N+1): t := Vector(N+1):
x(1) := X: y(1) := Y: t(1) := 0:
for i to N do
  dX := (X^2*Y-X*b-X+a)*dt+eps*noise(i)*sqrt(dt);
  dY := (-X^2*Y+X*b)*dt;
  X := max(0, X+dX);
  Y := max(0, Y+dY);
  t(i+1) := t(i)+dt; x(i+1) := X; y(i+1) := Y
end do:
u(k):=x(N+1)
end do:
display(Histogram(u));

```



Histogram over 1000 punkter der er løsning til en stokastisk differential-ligning.

```

n:=30:
data := TallyInto(u, default, bins = n)

```

Vi beder her om at få inddelt de beregnede værdier i u vektoren i 30 intervaller. Data der returneres fra metoden TallyInto har udseendet som vist nedenfor og det kræver lidt yderligere behandling for at kunne indgå i beregninger.

Usikkerhedsvurdering 27

```
data := [0.289125737391046..0.417650820688798=8,
0.417650820688798..0.546175903986550 = 45,... ]
```

Vi får en række data for hvert interval, det første er nedre og øvre grænse for intervallet og det andet er antallet af punkter fra u der ligger i dette interval. Vi vil nu ekstrahere midtpunkterne for intervallerne i en vektor x og i en anden vektor p vil vi lægge sandsynlighederne for de forskellige intervaller. Det kan gøres med koden:

```
x:=Vector(n):
p:=Vector(n):
for i from 1 to n do
  x(i):=0.5*(lhs(lhs(data[i]))+rhs(lhs(data[i]))):
  p(i):=rhs(data[i]):
end do:
psum:=0.0:
for m from 1 to n do
  psum:=psum+p(m):
end do:
for i from 1 to n do
  p(i):=p(i)/psum:
end do:
```

Nu indeholder x værdierne (midtpunktet) og p sandsynligheden for at et punkt ligger i dette interval. Når vi har en sandsynlighedsfordeling som her kan vi beregne middelværdien som

$$\mu = \sum_i p_i \cdot x_i \quad (61)$$

og standardafvigelsen af gennemsnittet kan beregnes som

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_i p_i \cdot x_i^2 - \mu^2} \quad (62)$$

De data vi har kan nu bruges til at beregne middelværdien (forventningsværdien):

```
mean := 0;
for j from 1 to n do mean := mean+x(j)*p(j) end do;
mean;
```

Resultatet af beregningen er $\mu = 1.31835460443944$.

28

```
sd := 0; for j to n do sd := sd+x(j)^2*p(j) end do;
sd := sqrt(sd-mean^2);
```

Resultatet er at standardafvigelsen af gennemsnittet er $s_{\bar{x}} = 0.68$. Afrundet er resultatet at middelværdien med usikkerhed er 1.32 ± 0.68 . Bemærk at resultatet ikke reflekterer det asymmetriske i fordelingen. For at kvantificere skævheden af fordelingen kan man beregne størrelsen

$$\frac{\mu - \text{mode}}{s_{\bar{x}}} \quad (63)$$

dvs. forskellen på gennemsnit og mode divideret med standardafvigelsen af gennemsnittet. Mode er den x -værdi hvor fordelingsfunktionen har et maksimum (hvis et sådant eksisterer). Ovenstående mål kaldes for skævheden af fordelingen (på engelsk: skewness). For eksemplet ovenfor er størrelsen af skævheden 0.85 som nedenstående beregning viser.

Først skal vi finde den x værdi for fordelingsfunktionen har maksimum. Vi kan se det ligger i starten så vi inspicerer de første værdier. Der ses det at det er den fjerde værdi og vi slår x -værdien op for det fjerde element (eller rettere midtpunktet for det fjerde interval).

```
for i to 5 do i, p(i) end do;
    1, 0.008000000000
    2, 0.045000000000
    3, 0.089000000000
    4, 0.104000000000
    5, 0.098000000000

mode := x(4);
0.7389635289331784
(mean-mode)/sd;
0.85
```

Den positive værdi indikerer at skævheden er mod højre.