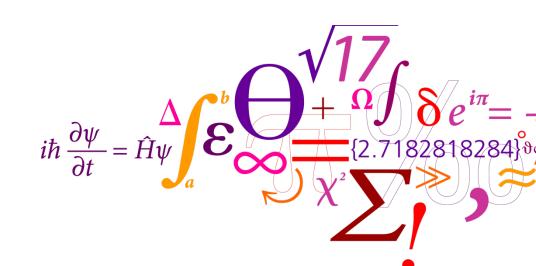


10054 Mekanik

Carsten Knudsen



DTU Fysik Institut for Fysik

Konstant acceleration - ligninger

| Equation | Contains |
|-------------------------------------|--|
| $v = v_0 + at$ | <i>v</i> , <i>a</i> , <i>t</i> ; no <i>x</i> |
| $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ | x, v, t; no a |
| $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | <i>x</i> , <i>a</i> , <i>t</i> ; no <i>v</i> |
| $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | <i>x</i> , <i>v</i> , <i>a</i> ; no <i>t</i> |

© 2012 Pearson Education, Inc.

Det skrå kast – start i origo

Formlerne kræver at det skrå kast starter i origo i det valgte koordinatsystem og at vinklen måles mht. *x*-aksen.

$$x = v_0 \cos(\theta)t$$

$$y = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = v_0 \cos(\theta)$$

$$v_y = v_0 \sin(\theta) - gt$$

Generel cirkelbevægelse

- Accelerationen i en cirkelbevægelse kan deles op i en radial og en tangentiel komposant.
- Det gælder desuden mere generelt at en krum bevægelse lokalt kan tilpasses en del af en cirkel; I det tilfælde kaldes r for krumningsradius.
- Den radiale komposant ændrer kun retningen af bevægelsen.
- Den tangentiale komposant ændrer kun farten.

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r}$$
$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt}$$

Mål for forelæsning og grupperegning i dag:

Kunne skitsere kraftdiagrammer og anvende Newtons love på systemer bestående af få vekselvirkende legemer der udfører retlinjet eller cirkulær bevægelse.

Kræfter

Der er kun to typer af kræfter (som vi skal kende):

- 1) Tyngdekraften, der virker over en afstand
- 2) Kontaktkræfter der kræver at legemer er i fysisk kontakt.

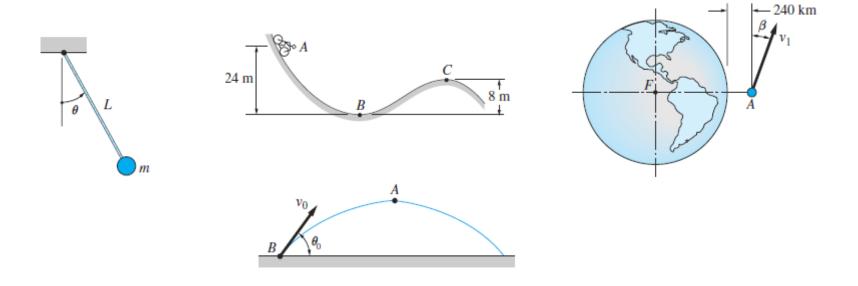
Kræfter

Der er kun to typer af kræfter i mekanikken:

- 1. Tyngdekraften der virker over en afstand
- 2. Kontaktkræfter der kræver at legemer er i fysisk kontakt.
 - i. Normalkraft
 - ii. Friktionskraft
 - iii. Snorkraft
 - iv. Fjederkraft

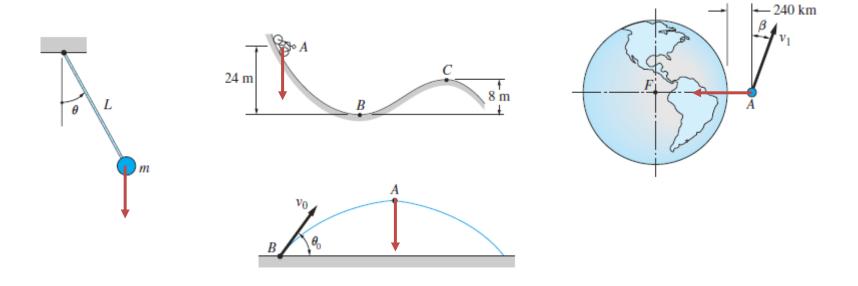
Tyngdekraften

Er altid rettet mod centrum af Jorden. Skal altid medtages.



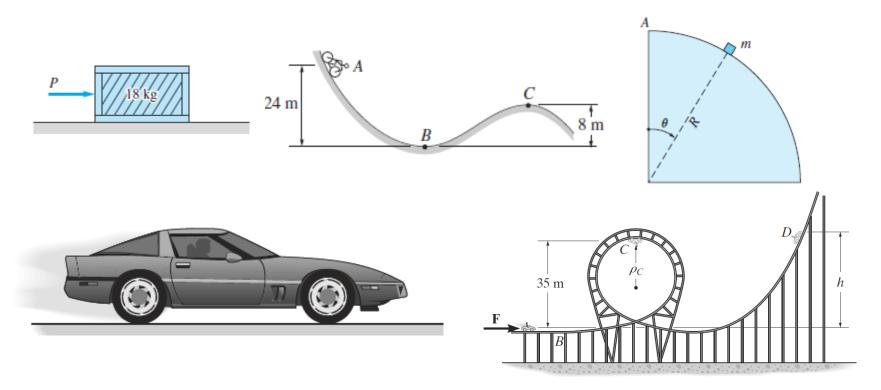
Tyngdekraften

Er altid rettet mod centrum af Jorden. Skal altid medtages.



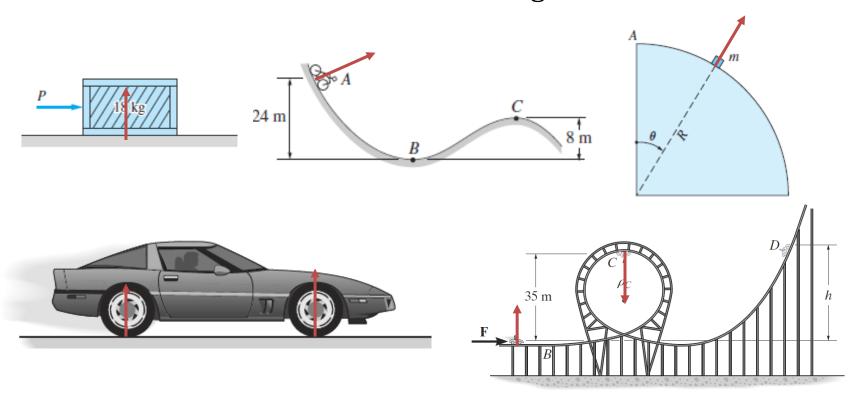
Normalkræfter

Er en kontaktkraft der kun virker når to legemer er i fysisk kontakt. Virker altid vinkelret væk fra overfladen.



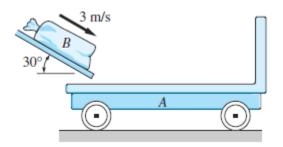
Normalkræfter

Er en kontaktkraft der kun virker når to legemer er i fysisk kontakt. Virker altid i vinkelret retning, væk fra overfladen.



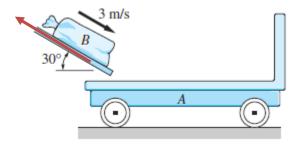
Friktionskræfter – kinematisk friktion

Kinematisk friktion virker når to legemer er i kontakt og overfladerne bevæger sig i forhold til hinanden. Kraften virker langs overfladen og modsat den relative bevægelse.



Friktionskræfter – kinematisk friktion

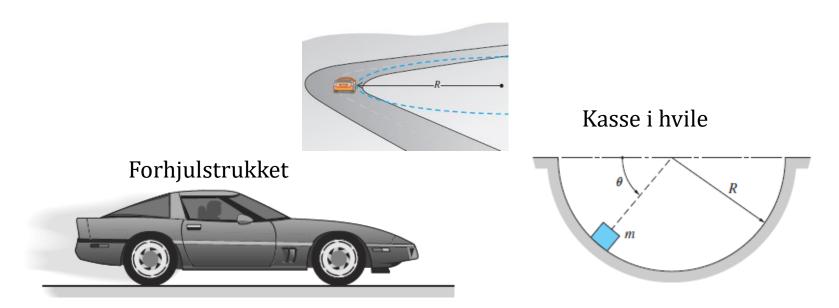
Kinematisk friktion virker når to legemer er i kontakt og overfladerne bevæger sig i forhold til hinanden. Kraften virker langs overfladen.



13

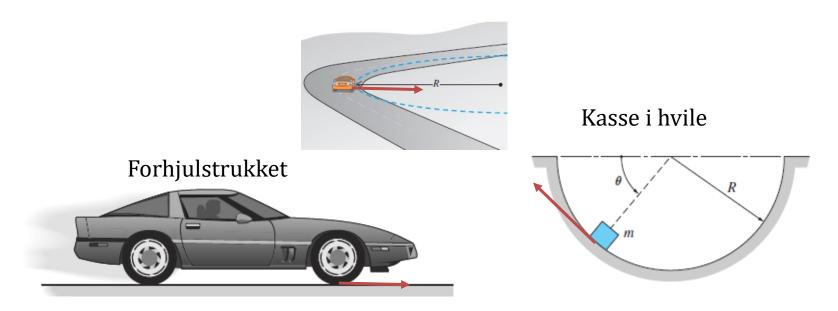
Friktionskræfter – statisk friktion

Statisk friktion virker når to legemer er i kontakt og overfladerne ikke bevæger sig i forhold til hinanden. Kraften virker langs overfladen.



Friktionskræfter – statisk friktion

Statisk friktion virker når to legemer er i kontakt og overfladerne ikke bevæger sig i forhold til hinanden. Kraften virker langs overfladen.



Friktionskræfter – statisk og kinematisk friktion

Den centrale forskel på om man bruger den ene eller den anden er om der er en relativ bevægelse i kontaktpunktet.

Retningen af den kinematiske friktion findes som den modsatte retning af den relative bevægelse i kontaktpunktet. Husk at friktionen peger den ene vej på det ene legeme og den modsatte vej på det andet legeme.

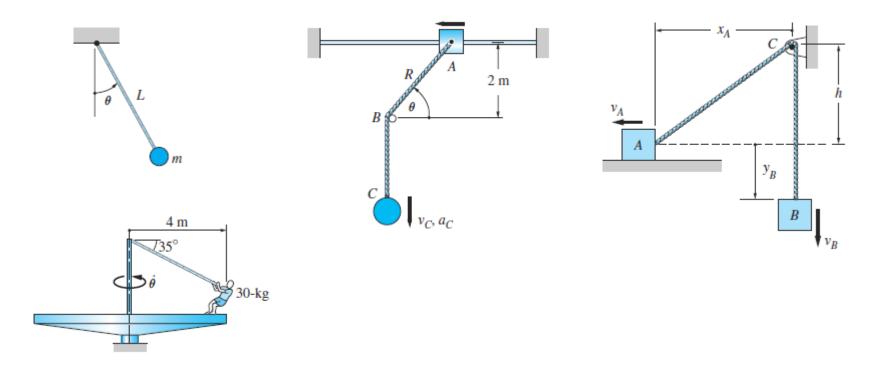
I forbindelse med fx ruling af et cykelhjul er der ingen relativ bevægelse i kontaktpunktet, så der er ingen kinematisk friktion i bevægelsesretningen. Hvis cykelhjulet bevæger sig i en cirkelbevægelse er der dog en statisk friktion vinkelret på bevægelsesretningen mod centrum i bevægelsen.

Friktionskræfter – statisk og kinematisk friktion

Retningen af statiske friktionskræfter kan være svær at afgøre. I så fald kan man foretage et gæt og hvis en efterfølgende beregning giver et negativt resultat for kraften betyder det blot at den statiske friktion virker i den modsatte retning af vores gæt.

Snorkræfter

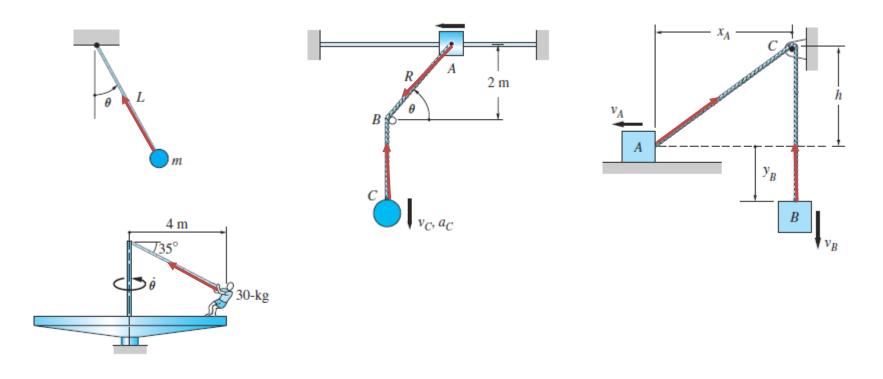
Virker altid i retning af snoren; kan kun trække, ikke skubbe.



18

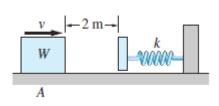
Snorkræfter

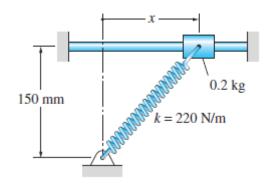
Virker altid i retning af snoren; kan kun trække, ikke skubbe.



Fjederkræfter

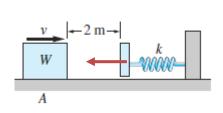
Virker altid i retning af fjederen, kan både trække og skubbe.

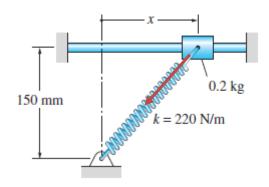




Fjederkræfter

Virker altid i retning af fjederen, kan både trække og skubbe. I figurerne er det antaget at fjederen til venstre er sammenpresset og fjederen til højre er strukket ud.





Kraftdiagram for legeme

I et kraftdiagram tegnes alle de kræfter der påvirker det udvalgte legeme. Det udvalgte legeme kan også påvirke andre legemer, men de kræfter hører hjemme på kraftdiagrammerne for de andre legemer.

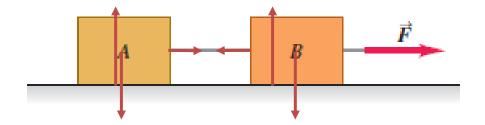
Kraftdiagram for kasser

Ingen friktion mellem kasser og underlag.



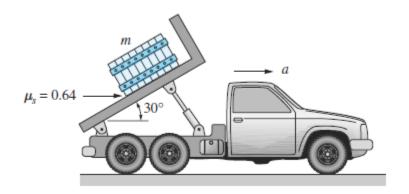
Kraftdiagram for kasser

Ingen friktion mellem kasser og underlag.



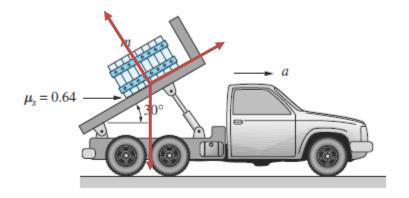
Kraftdiagram for kasse

Kassen glider ikke i forhold til ladet.



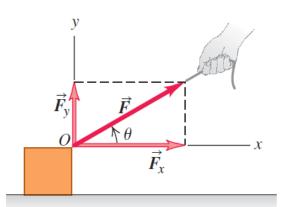
Kraftdiagram for kasse

Kassen glider ikke i forhold til ladet.



Superpositionsprincippet for kræfter

En kraft kan opløses i komposanter. Påvirkningen af kraften eller summen af dens komposanter er den samme. Man kan derfor erstatte kræfter med deres komposanter eller samle kræfter i summen af kræfterne.



Newtons love

Hvad giver anledning til bevægelse?

Eksperimentelt baseret.

Lovene er lette at opskrive, men svære at anvende.

Erstattes ved høj fart (af relativitetsteori) og på lille skala (af kvantemekanik).

Newtons love

Newton's første lov

Definerer et inertialsystem

Newtons love gælder kun i inertialsystemer

Et system der bevæger sig med konstant hastighed i forhold til et inertialsystem er også et inertialsystem

Et system der accelerere i forhold til et inertialsystem er ikke et inertialsystem

Ingen kræfter eller $\Sigma F=0 \rightarrow$ Konstant hastighed

Newtons anden lov

Newtons anden lov

Summen af kræfter der virker på et legeme bestemmer legemets acceleration.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Bemærk at der kun skal medtages kræfter som påvirker legemet. De kræfter som legemet påvirker andre legemer med er ikke relevante.

Newtons anden lov

Newtons anden lov

Pga. superpositionsprincippet for kræfter kan Newtons anden lov opskrives for komposanterne.

$$\sum F_{\chi} = ma_{\chi}$$

$$\sum F_{y} = ma_{y}$$

$$\sum F_z = ma_z$$

Det er ofte lettest at regne med komposanter.

Newtons anden lov

Bruges både når legemet accelererer og når accelerationen er nul.

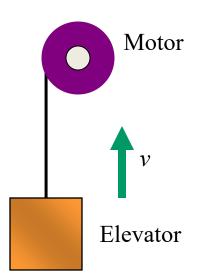
Når et legemes hastighed er konstant siger vi at legemet er i ligevægt.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

N2 kan både bruges til at bestemme accelerationen når kræfterne er kendt og til at bestemme ukendte kræfter når accelerationen er kendt.

En elevator løftes ved konstant fart af et kabel, der er forbundet til en elektrisk motor. Der er ingen luftmodstand og heller ingen friktion mellem elevatoren og væggene I elevatorskakten.

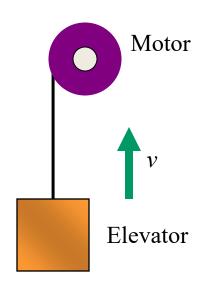
Den opadrettede kraft som kablet påvirker elevatoren med er



- A. større end den nedadrettede tyngdekraft.
- B. lige så stor som den nedadrettede tyngdekraft.
- C. mindre end den nedadrettede tyngdekraft.
- D. en af de ovenstående, afhængigt af farten af elevatoren.

En elevator løftes ved konstant fart af et kabel, der er forbundet til en elektrisk motor. Der er ingen luftmodstand og heller ingen friktion mellem elevatoren og væggene I elevatorskakten.

Den opadrettede kraft som kablet påvirker elevatoren med er





A. større end den nedadrettede tyngdekraft.

B. lige så stor som den nedadrettede tyngdekraft.

C. mindre end den nedadrettede tyngdekraft.

D. en af de ovenstående, afhængigt af farten af elevatoren.

Eksperimenter

Newtons tredje lov

Aktion-reaktions kræfter er lige store og modsat rettede.

Husk altid at aktion-reaktions kræfter virker på to forskellige legemer.

Bemærk notationen uden vektorstreger, her henvises der til størrelsen af kræfterne ikke deres retning.

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$$

$$F_{ab} = F_{ba}$$

Kraftdiagrammer – En detaljeret model

Tegn hvert legeme som en partikel

Tegn alle kræfter der virker på legemet

Kræfterne må være enten

Tyngdekraften

Kontaktkræfter

Normalkraft/Friktionskraft/Snorkraft/Fjederkraft

Besvar for hver kraft spørgsmålet:

Hvilket andet legeme leverer kraften?

Kan dette spørgsmål ikke besvares skal kraften nok ikke med.

Inkluder akser, men uden pile

En kasse glider ned ad et glat skråplan.

Hvilket kraftdiagram er korrekt?

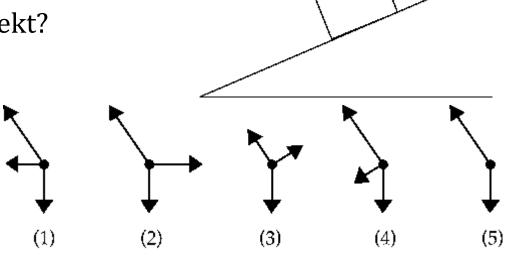


B. 2

C. 3

D. 4

E. 5



En kasse glider ned ad et glat skråplan.

Hvilket kraftdiagram er korrekt?

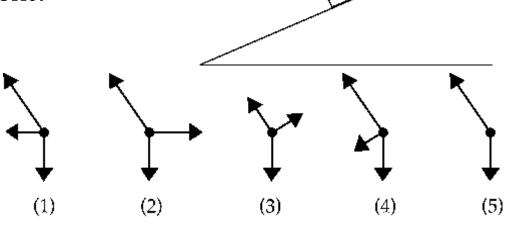


B. 2

C. 3

D. 4

E. 5



En bil kører ned ad et skråplan med konstant fart.

Hvilket kraftdiagram er korrekt?

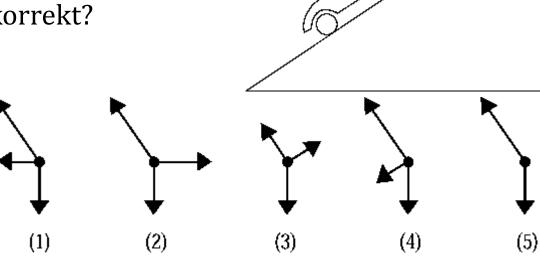
A.1

B. 2

C. 3

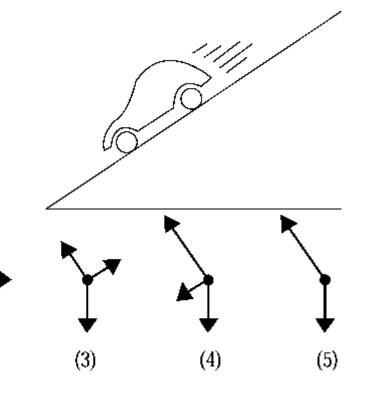
D. 4

E. 5



En bil kører ned ad et skråplan med konstant fart.

Hvilket kraftdiagram er korrekt?



A.1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

Da bilen har konstant fart må der være en friktionskraft eller luftmodstand modsat bevægelsen.

(1)

Snorspænding ved masseløse trisser

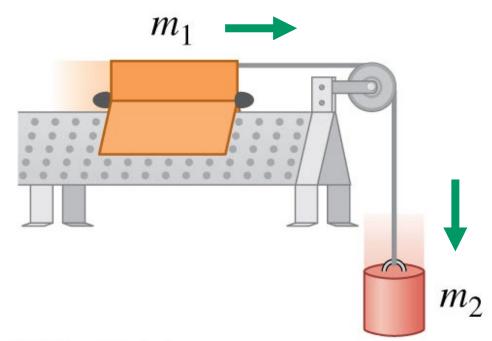
Hvis en snor løber over en masseløs friktionsfri trisse er snorspændingen den samme overalt i snoren.

Retningen af snorkraften kan derimod være forskellig.

Newtons anden lov i bevægelseretningerne er:

$$m_1 a = S$$

$$m_2 a = m_2 g - S$$



© 2012 Pearson Education, Inc.

Ligninger for friktion

For kinematisk friktion er friktionskraften proportional med normalkraften. Proportionalitetskonstanten kaldes for de kinematiske friktionskoefficient.

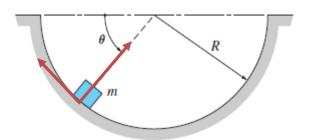
$$f_{\mathbf{k}} = \mu_{\mathbf{k}} n$$

For statisk friktion forholder det sig lidt mere kompliceret idet der her kun gælder en ulighed mellem friktionskraft og normalkraft.

$$f_{\rm S} \le \mu_{\rm S} n$$

Den statiske friktion kan altså være alt fra nul til den maksimale værdi. Det kan også være svært at forudsige den korrekte retning af kraften.

Kasse i hvile



Ligninger for fjederkræfter

Den simpleste model for en fjeder følger Hookes lov, der siger at den kraft som fjederen leverer er proportional med forskydningen xaf fjederen og proportionalistetskonstanten k, der kaldes for fjederkonstanten. Fjederkraften er

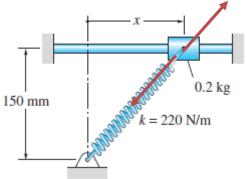
$$F = kx$$

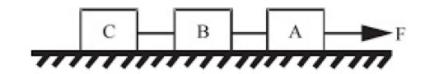
Normalt har en fjeder en længde x_0 hvor den er ustrukket. Fjederkraften er da

$$F = k(x - x_0)$$

Bemærk at i begge tilfælde kan fjederkraften pege i to retning afhængigt af om den er sammetrykket eller strukket ud.

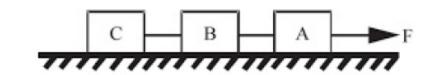
Man skal altid være varsom med fortegnet.





Opstil Newtons anden lov for det samlede system af kasserne samt for kasserne B og C hver for sig. Bordet er glat.

Bestem systemets acceleration og størrelsen af de to snorkræfter mellem kasserne.



$$(m_A + m_B + m_C)a = F$$

$$a = \frac{F}{m_{\Lambda} + m_{\rm R} + m_{\rm G}}$$

$$N2(C,\rightarrow)$$
:

$$m_{\rm C}a = S_{\rm BC}$$

$$N2(B,\rightarrow)$$
:

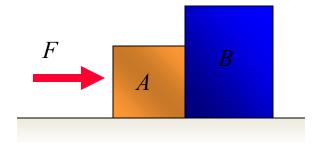
$$m_{\rm B}a = S_{\rm AB} - S_{\rm BC}$$

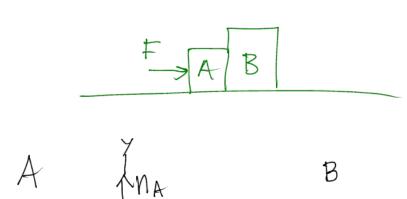
$$S_{\rm BC} = \frac{m_{\rm C}F}{m_{\rm A} + m_{\rm B} + m_{\rm C}}$$

$$S_{\mathrm{AB}} = \frac{(m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}})F}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}$$

En let kasse (*A*) og en tung kasse (*B*) står ved siden af hinanden på et glat bord.

Opstil ligninger til bestemmelse af kassernes accelerationer og alle de indgående, ukendte kræfter. Masserne af kasserne er kendt.

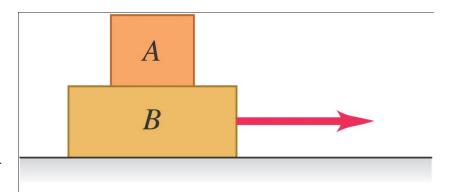




$$M_{B}$$
 M_{B}

En person trækker vandret i kasse B, så begge klodser bevæger sig som et legeme. Alle overflader er ru.

Hvis de to kasser bevæger sig mod højre med konstant hastighed,



A. er den vandrette kraft som *B* påvirker *A* med rettet mod venstre.

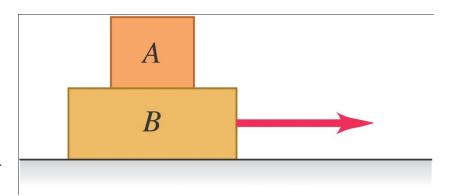
B. er den vandrette kraft som *B* påvirker *A* med rettet mod højre.

C. B påvirker ikke A med nogen vandret kraft.

D. der mangler information for at afgøre det.

En person trækker vandret i kasse B, så begge klodser bevæger sig som et legeme. Alle overflader er ru.

Hvis de to kasser bevæger sig mod højre med konstant hastighed,



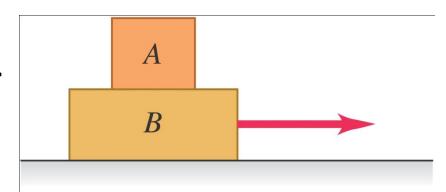
A. er den vandrette kraft som *B* påvirker *A* med rettet mod venstre.



B. er den vandrette kraft som *B* påvirker *A* med rettet mod højre.

- C. B påvirker ikke A med nogen vandret kraft.
- D. der mangler information for at afgøre det.

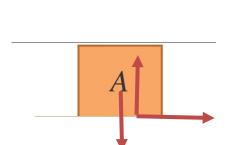
En person trækker vandret i kasse B, så begge klodser bevæger sig som et legeme. Der er friktion mellem kasse *B* og det vandrette bord.

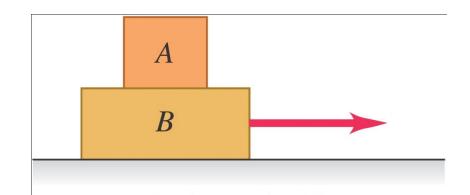


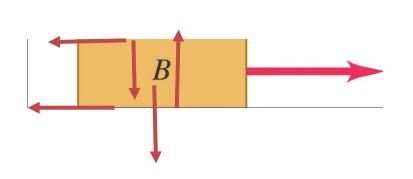
De to kasser accelererer mod højre.

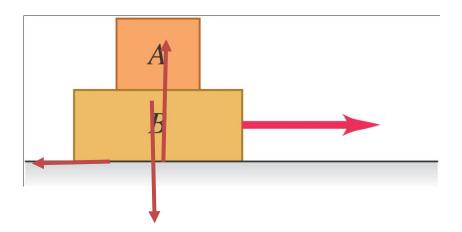
Tegn kraftdiagrammer for A, B og A+B.

Tegn kraftdiagrammer for A, B og A+B.

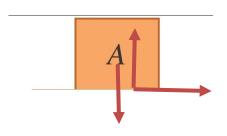


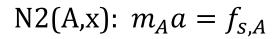




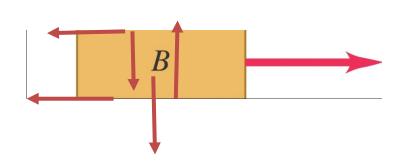


Ligninger for *A* og *B*.





$$N2(A,y): n_A - m_A g = 0$$

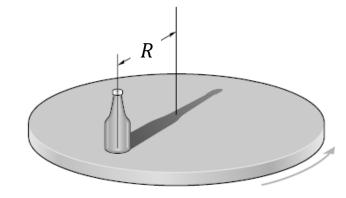


N2(B,x):
$$ma = F - f_{k,B} - f_{s,A}$$

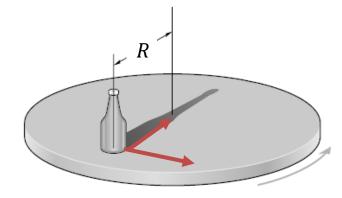
N2(B,y):
$$n_B - n_A - m_B g = 0$$

 $f_{k,B} = \mu_k n_B$

I cirkelbevægelse skrives Newtons love op i radial og tangential retning. Det er dog ikke altid nødvendigt at betragte begge retninger, fx hvis farten er konstant er der ingen tangential acceleration.



En flaske starter fra hvile og kører rundt i en cirkel med radius, R. Den statiske friktionskoefficient mellem flaske og underlag er μ_S . Skiven har en tangential acceleration, a_0 . Flasken bevæger sig ikke i forhold til skiven. Hvornår begynder flasken at glide?



En flaske starter fra hvile og kører rundt i en cirkel med radius, R. Den statiske friktionskoefficient mellem flaske og underlag er $\mu_{\rm S}$. Skiven har en tangential acceleration, a_0 . Flasken bevæger sig ikke i forhold til skiven. Hvornår begynder flasken at glide?

N2(radial):
$$m\frac{v^2}{R} = f_{s,rad}$$

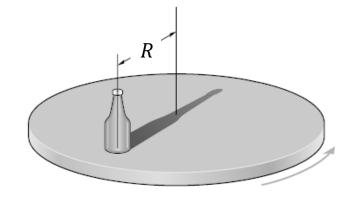
N2(tangential):
$$m \frac{dv}{dt} = f_{s,tan}$$

N2(lodret):
$$n - mg = 0$$

Kinematik:
$$v = a_0 t$$

Friktion:
$$f_S \leq \mu_S n$$

Den samlede friktionskraft beregnes med pythagoras.



$$m\frac{a_0^2t^2}{R} = f_{s,rad}$$

$$ma_0 = f_{s,tan}$$

$$n = mg$$

$$\sqrt{\left(m\frac{{a_0}^2t^2}{R}\right)^2 + (ma_0)^2} \le \mu_{\rm S} mg$$

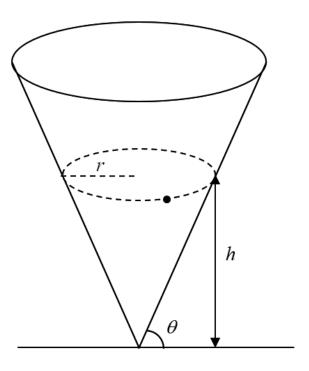
Glider ved lighed:

$$\sqrt{\frac{a_0^4 t^4}{R^2} + a_0^2} = \mu_S g$$

$$t = \sqrt[4]{R^2 \frac{\mu_S^2 g^2 - a_0^2}{a_0^4}}$$

En perle med massen m udfører en jævn cirkelbevægelse med radius r, på indersiden af en kegle.

Bestem den fart perlen har hvis indersiden af keglen er glat.



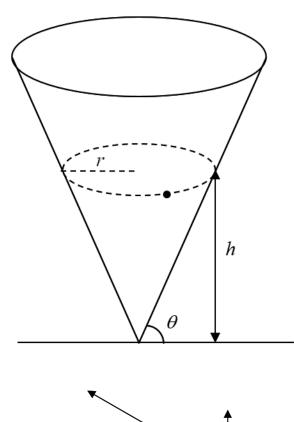
En perle med massen m udfører en jævn cirkelbevægelse med radius r, på indersiden af en kegle.

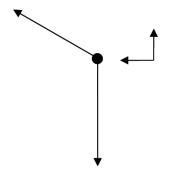
Bestem den fart perlen har hvis indersiden af keglen er glat.

$$N2(\longleftarrow) \qquad m\frac{v^2}{R} = n\sin\theta$$

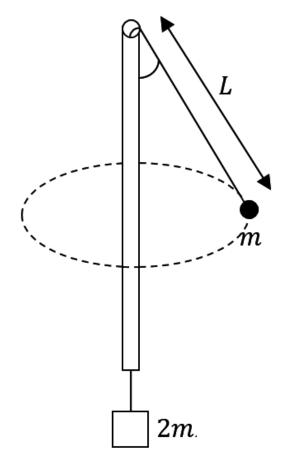
$$N2(\uparrow) n\cos\theta - mg = 0$$

$$v = \sqrt{gR \tan \theta}$$





Et lod med massen 2m er i hvilen for enden af en lodret snor. I den anden ende af snoren er en partikel med massen m. Partiklen udfører en vandret cirkelbevægelse. Snoren har fra toppunktet til partiklen mængden L og snoren danner vinklen θ med lodret.



Kassen er i hvile så vi opskriver Newtons anden lov i lodret retning.

$$T - 2mg = 0 \Rightarrow \boxed{T = 2mg}$$

Partiklen er i hvile i lodret retning og udfører en jævn cirkelbevægelse i vandret retning. --

$$T\cos\theta - mg = 0$$

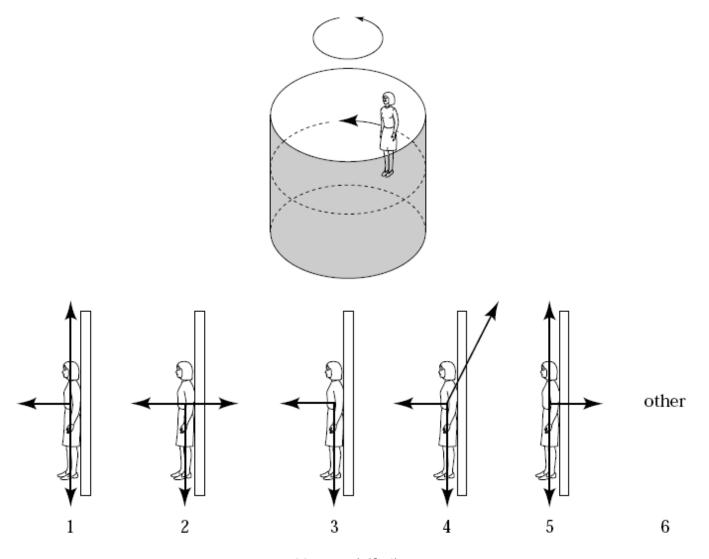
$$m\frac{v^2}{L\sin\theta} = T\sin\theta$$

Indsættelse af snorspændingen giver:

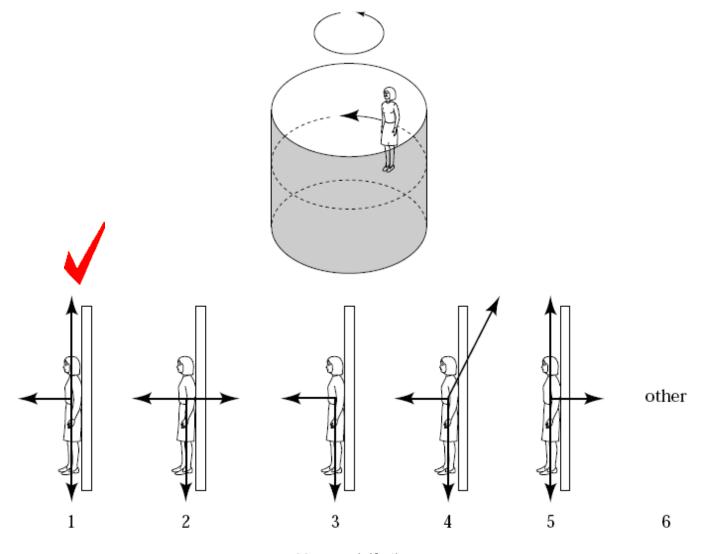
$$2mg\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^{\circ}$$

2m

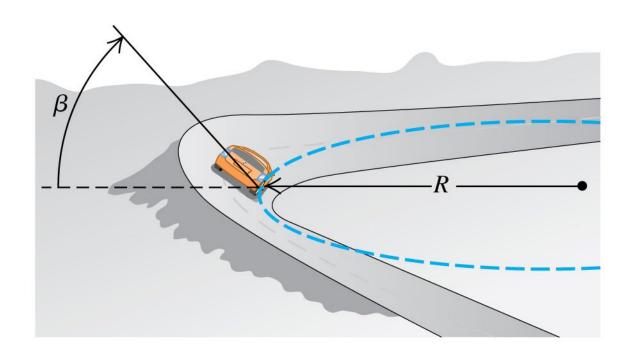
Hvilket kraftdiagram er korrekt?



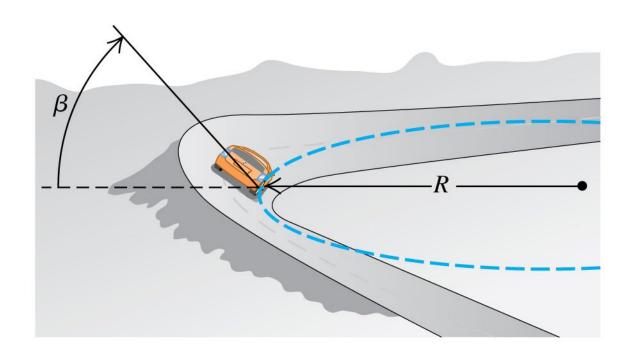
Hvilket kraftdiagram er korrekt?



Cirkelbevægelse – isglat vej

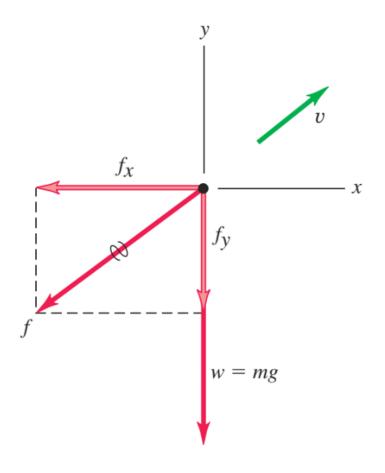


Cirkelbevægelse – ru vej



Skråt kast med luftmodstand

I en realistisk model af et skråt kast inkluderes luftmodstand. Luftmodstanden er modsat rettet bevægelsen (dvs. hastigheden) og proportional med kvadratet på hastigheden.



Skråt kast med luftmodstand

Størrelsen af luftmodstanden er proportional med kvadratet af hastigheden om modsat rettet denne. $f = Dv^2$

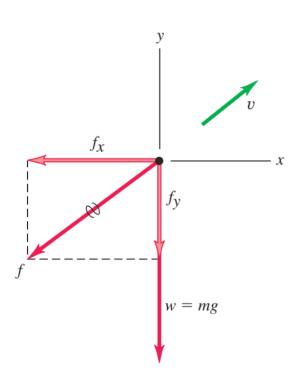
Newtons anden lov i vandret og lodret retning:

$$\sum F_{x} = -Dvv_{x} = ma_{x}$$

$$\sum F_{y} = -mg - Dvv_{y} = ma_{y}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho Ac$$

hvor ρ er densiteten af luften, A er tværsnitsarealet af legemet set forfra og c er en form factor der afhænger af den geometriske form af legemet.



Skråt kast med luftmodstand

Størrelsen af luftmodstanden er proportional med kvadratet af hastigheden om modsat rettet denne. $f = Dv^2$

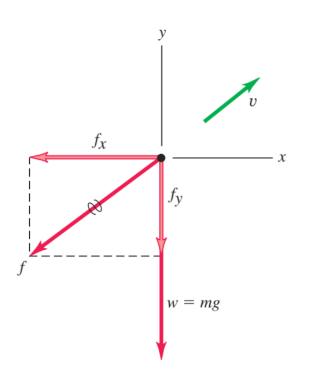
Newtons anden lov i vandret og lodret retning:

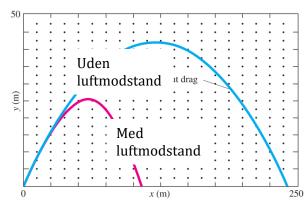
$$\sum F_{x} = -Dvv_{x} = ma_{x}$$

$$\sum F_{y} = -mg - Dvv_{y} = ma_{y}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho Ac$$

hvor ρ er densiteten af luften, A er tværsnitsarealet af legemet set forfra og c er en form factor der afhænger af den geometriske form af legemet.



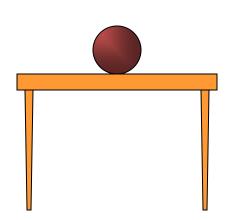


En kugle ligger stille på et vandret bord.

Tyndgekraften på kuglen er lige så stor, men modsat rettet, den opad rettede kraft som bordet påvirker kuglen med.

Hvorfor?

- A. Dette er en konsekvens af Newtons anden lov.
- B. Dette er en konsekvens af Newtons tredje lov.
- C. Dette er fordi bordet regnes for stift.
- D. To af de ovenstående er korrekte.
- E. Alle de tre første udsagn er korrekte.



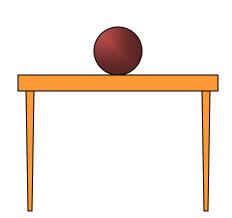
En kugle ligger stille på et vandret bord.

Tyndgekraften på kuglen er lige så stor, men modsat rettet, den opad rettede kraft som bordet påvirker kuglen med.

Hvorfor?

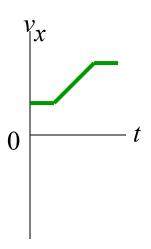


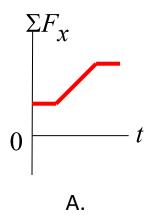
- A. Dette er en konsekvens af Newtons anden lov.
- B. Dette er en konsekvens af Newtons tredje lov.
- C. Dette er fordi bordet regnes for stift.
- D. To af de ovenstående er korrekte.
- E. Alle de tre første udsagn er korrekte.

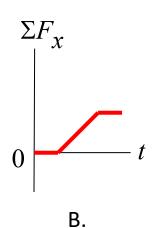


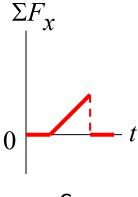
Grafen til højre viser hastigheden af et legeme som funktion af tiden.

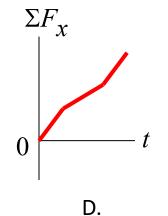
Hvilken af graferne nedenfor illustrerer bedst summen af kræfter på legemet som funktion af tiden?

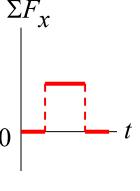












Grafen til højre viser hastigheden af et legeme som funktion af tiden.

Hvilken af graferne nedenfor illustrerer bedst summen af kræfter på legemet som funktion af tiden?

