Sommation simple

1 NOTATIONS

Soient n un entier naturel et $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ une suite de réels. La somme $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ est également notée : $\sum_{i=0}^{n} a_i$ ou $\sum_{0\leq i\leq n} a_i$ ou $\sum_{i\in[\![0,n]\!]} a_i$

2 CHANGEMENT D'INDICE

Quand on ne reconnaît pas une somme classique, on peut effectuer un changement d'indice pour se ramener à une expression connue. Attention un changement d'indice ne change par la somme, mais seulement son écriture.

Principe :

Soient I et J deux parties non vides de $\mathbb{N}$ et f une bijection de I sur J. Le changement d'indice j = f(i) nous permet d'écrire $\sum_{i\in I} a_{f(i)} = \sum_{j\in J} a_j$. Par exemple, le changement d'indice k' = k + $\propto$ ($\propto\in\mathbb{Z}$) nous permet d'écrire : $\sum_{k=0}^{n} a_{k+\alpha} = \sum_{k=\alpha}^{n+\alpha} a_k$.

Attention, un changement du type k' = 2k n'est pas licite sous certaines formes. Par exemple, il est faux d'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k'=2}^{2n} \frac{1}{k'} .$$

(dans la dernière notation, k' prend toutes les valeurs entre 2 et 2n, et l'écriture ne spécifie pas le fait que k' prend des valeurs paires).

Cas particulier : si p et q désignent deux entiers tels que p < q :

$$\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p .$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

3 COURS

Certains résultats doivent être connus :

✓ $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

✓ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

✓ $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

✓ $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

✓ $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ $(p \leq n,\ q \neq 1)$

✓ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

(binôme de Newton, a et b étant des réels en voie économique, des complexes en voie scientifique).

4 CALCUL DIRECT

Si : $\forall k \in [\![p, n]\!]$, $U_k = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

Comme : $\sum_{k=p}^{n} U_k$ comporte n-p+1 termes,

On a : $\sum_{k=p}^{n} U_k = (n-p+1)\,\alpha$.