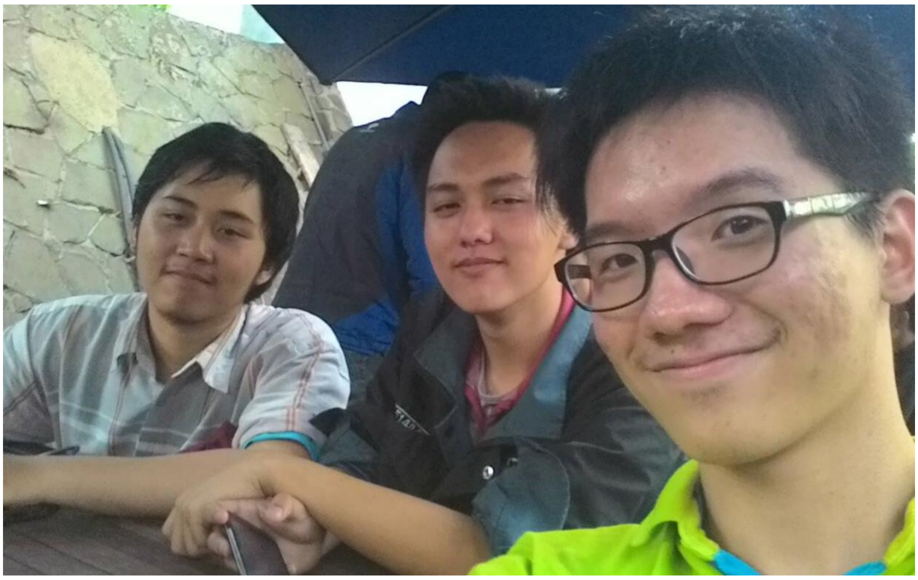
LAPORAN TUGAS BESAR

IF2123 ALJABAR GEOMETRI

APLIKASI ALJABAR LANJAR PADA METODE NUMERIK



oleh

BERVIANTO LEO PRATAMA	**13514047**
ROBERT SEBASTIAN HERLIM	**13514061**
MUHAMMAD AZ-ZAHID ADHITYA S.	**13514095**

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2015

Bab 1 Deskripsi Masalah

A. **Tulislah program java untuk menyelesaikan sistem persamaan lanjar (SPL) dengan *n* peubah (*variable*) dan *m* persamaan:**

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n = b_m$$

SPL diselesaikan secara numerik dengan metode eliminasi Gauss dan metode eliminasi Gauss-Jordan. Di dalam kedua metode tersebut diterapkan tatancang pemorosan untuk mengurangi galat pembulatan.

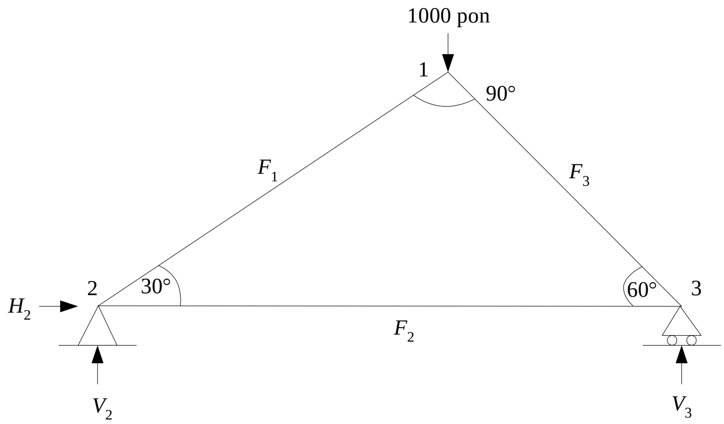
Program harus dapat menangani kasus-kasus sebagai berikut:

a) SPL memiliki solusi unik, tampilkan solusinya
b) SPL memiliki solusi tak terbatas, tampilkan solusinya dalam bentuk parameter
c) SPL tidak memiliki solusi, tuliskan tidak ada solusinya.

B. **Aplikasikan metode penyelesaian SPL pada persoalan sain dan rekayasa sebagai berikut:**

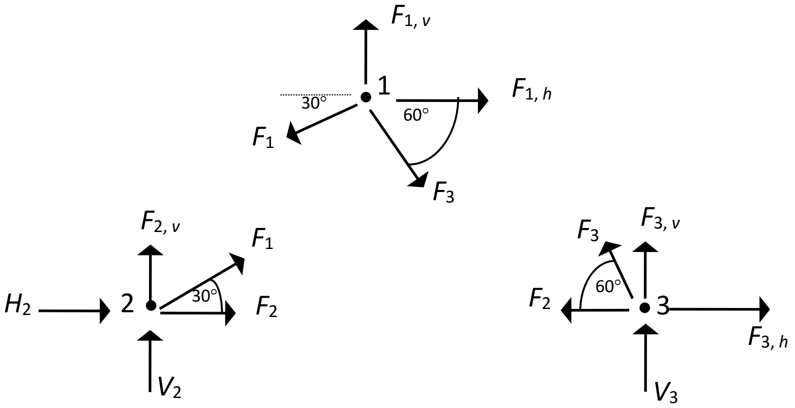
1. Misalkan seorang insinyur Teknik Sipil merancang sebuah rangka statis yang berbentuk segitiga (Gambar 1). Ujung segitiga yang bersudut 30° bertumpu pada sebuah penyangga statis, sedangkan ujung segitiga yang lain bertumpu pada penyangga beroda.

   Rangka mendapat gaya eksternal sebesar 1000 pon. Gaya ini disebar ke seluruh bagian rangka. Gaya *F* menyatakan tegangan atau kompresi pada anggota rangka. Reaksi eksternal (H_2, V_2, dan V_3) adalah gaya yang mencirikan bagaimana rangka berinteraksi dengan permukaan pendukung. Engsel pada simpul 2 dapat menjangkitkan gaya mendatar dan tegak pada permukaan, sedangkan gelinding pada simpul 3 hanya menjangkitkan gaya tegak.



Gambar 1 Gaya-gaya pada rangka statis tertentu

Struktur jenis ini dapat diuraikan sebagai sistem persamaan aljabar lanjar simultan. Diagram gaya-benda-bebas diperlihatkan untuk tiap simpul dalam Gambar 2.



Gambar 2 Diagram gaya-benda-bebas untuk simpul-simpul rangka statis

Menurut hukum Newton, resultan gaya dalam arah mendatar maupun tegak harus nol pada tiap simpul, karena sistem dalam keadaan diam (statis). Oleh karena itu, untuk simpul 1,

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_{1,h}$$

$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_{1,v}$$

untuk simpul 2,

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^\circ + F_{2,h} + H_2$$

$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^\circ - F_{2,v} + V_2$$

dan untuk simpul 3,

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h}$$

$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^\circ + F_{3,v} + V_3$$

Gaya 1000 pon ke bawah pada simpul 1 berpadanan dengan $F_{1,v} = -1000$, sedangkan semua $F_{i,v}$ dan $F_{i,h}$ lainnya adalah nol. Persoalan rangka statis ini dapat dituliskan sebagai sistem yang disusun oleh enam persamaan lanjar dengan 6 peubah yang tidak diketahui:

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^\circ + F_3 \cos 60^\circ + F_{1,h} = -0.866F_1 + 0.5\, F_3$$

$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^\circ - F_3 \sin 60^\circ + F_{1,v} = -0.5F_1 - 0.866\, F_3 + 1000$$

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^\circ + F_{2,\mathrm{h}} + H_2 = F_2 + 0.866F_1 + 0 + H_2$$

$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^\circ - F_{2,v} + V_2 = 0.5\, F_1 + V_2$$

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^\circ + F_{3,h} = -F_2 - 0.5\, F_3$$

$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^\circ + F_{3,v} + V_3 = 0.866\, F_3 + V_3$$

Keenam persamaan di atas ditulis ulang kembali dalam susunan yang teratur berdasarkan urutan peubah F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3:

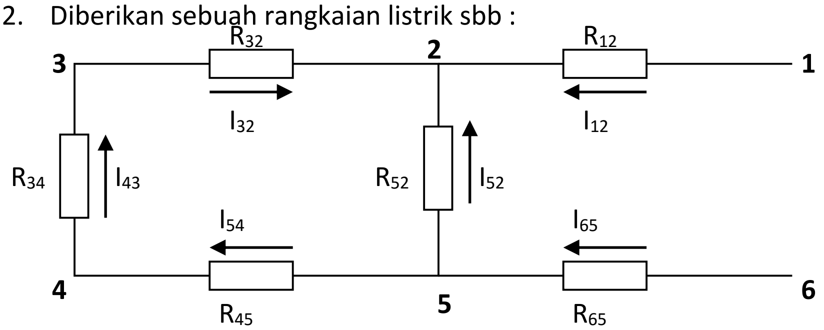
$$
\begin{array}{lllllll}
-0.866F_1 & & +\ 0.5\ F_3 & & & & = 0 \\
-0.5F_1 & & -\ 0.866\ F_3 & & & & = -1000 \\
-0.866F_1 & -\ F_2 & & -\ H_2 & & & = 0 \\
-0.5\ F_1 & & & & -\ V_2 & & = 0 \\
& -\ F_2 & -\ 0.5\ F_3 & & & & = 0 \\
& & -0.866\ F_3 & & & -\ V_3 & = 0
\end{array}
$$

atau dalam bentuk matriks:

$$
\begin{bmatrix}
0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\
0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\
-0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Tentukan solusi sistem di atas!

2. Diberikan sebuah rangkaian listrik sbb :



Diminta menghitung arus pada masing-masing rangkaian. Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$
\begin{aligned}
I_{12} + I_{52} + I_{32} &= 0 \\
I_{65} - I_{52} - I_{54} &= 0 \\
I_{43} - I_{32} &= 0 \\
I_{54} - I_{43} &= 0
\end{aligned}
$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$
\begin{aligned}
I_{32}R_{32} - V_3 + V_2 &= 0 \\
I_{43}R_{43} - V_4 + V_3 &= 0 \\
I_{65}R_{65} + V_5 &= 0 \\
I_{12}R_{12} + V_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$I_{54}R_{54} - V_5 + V_4 = 0$
$I_{52}R_{52} - V_5 + V_2 = 0$

Tentukan I_{12} , I_{52} , I_{32} , I_{65} , I_{54} , I_{13} , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 bila :

R_{12} = 5 ohm, R_{52} = 10 ohm, R_{32} = 10 ohm,
R_{65} = 20 ohm, R_{54} = 15 ohm, R_{14} = 5 ohm,
V_1 = 200 volt, V_6 = 0 volt

3. **(Interpolasi)** Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai *x* yang akan dicari nilai fungsi *f*(*x*).

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
f(*x*)	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

x = 0.2 f(x) = ?

x = 0.55 f(x) = ?

x = 0.85 f(x) = ?

x = 1.28 f(x) = ?

4. **(Interpolasi)** Konsentrasi larutan oksigen jenuh dalam air sebagai fungsi suhu dan konsentrasi klorida didefinisikan dalam tabel berikut:

Suhu (^{0}C)	Konsentrasi larutan Oksigen jenuh (mg/L) untuk berbagai konsentrasi Klorida	
	Klorida = 10 mg/L	Klorida = 20 mg/L
5	11.6	10.5
10	10.3	9.2
15	9.1	8.2
20	8.2	7.4
25	7.4	6.7
30	6.8	6.1

Estimasilah konsentrasi oksigen jenuh yang larut untuk T = 22.4^{0}C pada konsentrasi klorida 10 mg/L dan 20 mg/L.

5. **(Interpolasi)** Harga rumah baru dari tahun 1950 hingga 1969 mengalami perubahan yang tercatat sebagai berikut:

Tahun	Harga ($ juta)
1950	33,525
1955	46,519
1960	53,941
1965	72,319
1966	75,160
1967	76,160
1968	84,690
1969	90,866

Berdasarkan data tersebut prediksilah harga rumah baru pada tahun 1957, 1964, 1970, 1975 (atau nilai lain sesuai masukan user) dengan menggunakan polinom interpolasi derajat *n* (*n* masukan dari pengguna).

Bab 2 Teori Singkat

2.1. Metode Eliminasi Gauss

Matriks adalah susan skalar elemen-elemen dalam baris dan kolom (m x n). Sebuah matriks dikatakan sebagai **matriks eselon** apabila memiliki sifat-sifat matriks berikut :

1. Jika sebuah baris tidak seluruhnya 0, maka bilangan tak nol pertama adalah satu yang disebut **satu utama.**
2. Jika ada baris yang seluruhnya 0, maka ditampakkan pada bagian bawah.
3. Pada 2 baris beurutan, pada baris yang lebih bawah, satu utama nya lebih menjorok ke kanan daripada satu utama pada baris yang di atasnya.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan lanjar (SPL), dapat digunakan metode eliminasi gauss yaitu dengan mengubah persamaan-persamaan SPL menjadi sebuah **augmented matrix**. Metode eliminasi gauss mengubah dari sebuah augmented matrix menjadi matriks eselon dengan bantuan operasi baris elementer. Operasi-operasi baris elementer adalah sebagai berikut :

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol
2. Menukar 2 buah baris
3. Menjumlahkan sebuah baris dengan **k** kali baris yang lain

2.2. Metode Eliminasi Gauss – Jordan

Sebuah matriks dikatakan **matriks eselon tereduksi** apabila memenuhi sifat-sifat matriks eselon dan memenuhi 1 sifat tambahan, yaitu apabila terdapat satu utama pada sebuah kolom, maka bagian atas dan bawah kolom tersebut harus 0.

Untuk menghasilkan matriks eselon tereduksi, dapat digunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Metode ini terdiri dari 2 fasa, yaitu fasa maju (*forward phase*) yang mengubah augmented matriks menjadi matriks eselon, dan fasa mundur (*backward phase*) yang mengubah matriks eselon menjadi matriks eselon tereduksi.

2.3. Tatancang Pemorosan (*Pivoting Strategy*)

Cara penyelesaian persoalan di matematika ada 2 yaitu:

1. Secara analitik : hasil eksak dengan menggunakan rumus & teorema baku
2. Secara numerik : hasil merupakan aproksimasi.

Dalam penyelesaian masalah dengan metode numerik, dapat ditemukan **galat** yaitu perbedaan antara solusi hampiran dan solusi eksak. Salah satu penyebab galat adalah **galat pembulatan**, yaitu galat yang timbul akibat keterbatasan komputer dalam merepresentasikan bilangan real.

Upaya untuk meminimalisir galat pembulatan dalam pemecahan SPL dengan metode numerik yaitu dengan **tatancang pemorosan** (*pivoting strategy*). Tatancang pemorosan adalah pemilihan pivot dari semua elemen pada kolom p yang memiliki nilai mutlak terbesar, lalu menukar baris tersebut dengan baris p.

2.4. Interpolasi

Interpolasi adalah proses pencarian dan perhitungan nilai suatu fungsi yang grafiknya melewati sekumpulan titik yang diberikan. Titik-titik tersebut mungkin merupakan hasil eksperimen dalam sebuah percobaan atau diperoleh dari suatu fungsi yang diketahui.

Interpolasi memiliki beberapa macam seperti interpolasi lanjar, interpolasi kuadratik, interpolasi kubik, dan interpolasi derajat n.

2.4.1. Interpolasi lanjar

Interpolasi lanjar adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah $p_1(x) = a_0 + a_1 x$.

2.4.2. Interpolasi kuadratik

Misal diberikan tiga buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2). Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk : $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

2.4.3. Interpolasi Kubik

Misal diberikan empat buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3). Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk : $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

2.4.4. Interpolasi Derajat N

Diberikan N+1 buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n). Polinom yang akan menginterpolasi ke-(N+1) buah titik tersebut berbentuk polinom derajat-n yaitu : $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.

Bab 3 Implementasi

3.1. Struktur Data Program

Struktur data yang digunakan dalam program merupakan matriks dengan setiap elemennya memiliki type *double.* Dalam bahasa Java matriks menggunakan *array* of *array* atau disebut dengan *array* dua dimensi. Di dalam struktur data tersebut juga terdapat *NBrsEff* yang menyatakan secara eksplisit jumlah baris efektif yang terisi dan *NKolEff* yang menyatakan secara eksplisit jumlah kolom efektif yang terisi. Struktur data tersebut dipakai untuk memecahkan persoalan A, 1 dan 2. Sedangkan kasus 3 dengan tambahan menggunakan struktur data point. Point diperlukan dalam pembacaan data lalu akan dirubah untuk menjadi persamaan sehingga kembali menjadi matriks.

3.2. Kelas-Kelas Java yang Digunakan dalam Program

Kelas yang digunakan yaitu kelas matriks. Di dalam kelas matriks terdapat primitif-primitif yang membentuk matriks dan juga dengan penambahan metode *Gauss*, *Gauss-Jordan*, dan metode sulih mundur. Penambahan tersebut disesuaikan untuk pemecahan masalah yang ada. Selain itu terdapat kelas point yang berisi primitif-primitif pembentuk point. Kelas terakhir merupakan suatu *Interface* atau program utama. Di dalam *Interface* terdapat beberapa prosedur dan fungsi mengenai interpolasi. Serta terdapat antarmuka agar mempermudah pengguna menggunakan program.

Bab 4 Eksperimen

4.1. Hasil Eksekusi Program dan Analisis

4.1.1 Kasus 1

Pada kasus 1, adapun hasil eksekusinya sebagai berikut :
X1 = 500.02200096804256
X2 = -433.0190528383249
X3 = 866.0381056766498
X4 = 4.8074772256248556E-14
X5 = -250.01100048402128
X6 = -749.9889995159788

Program berhasil mendapatkan nilai X1, X2, X3, X4, X5, dan X6 dimana setiap variabel berturut-turut mewakili ***F_1, F_2, F_3, H_2, V_2,*** dan ***V_3***. Selain itu juga sudah sesuai dengan yang diinginkan. Berarti metode Gauss maupun Gauss Jordan yang digunakan sudah benar.

4.1.2 Kasus 2

Pada kasus 2, adapun hasil eksekusinya sebagai berikut :
X1 = -1.5384615384615365
X2 = -1.538461538461533
X3 = -6.153846153846153
X4 = 6.153846153846153
X5 = -1.5384615384615419
X6 = -4.615384615384617
X7 = 169.23076923076923
X8 = 153.84615384615387
X9 = 146.1538461538462
X10 = 123.07692307692307

Program berhasil mendapatkan nilai X1 sampai X10 yang berarti sudah berhasil. Dan juga sudah sesuai dengan yang diminta. Setiap variabel X1 hingga X10 mewakili variabel pada soal berturut-turut yaitu ***I_{32}, I_{43}, I_{65}, I_{12}, I_{54}, I_{52}, V_2, V_3, V_4, dan V_5***. Berarti program sudah berhasil.

4.1.3 Kasus 3

x = 0.2 -> f(x) = 0.032960937500000044
x = 0.55 -> f(x) = 0.17111865234375
x = 0.85 -> f(x) = 0.33723583984375
x = 1.28 -> f(x) = 0.6775418375000002

f(x) = -0.022976562500000262 + 0.2400000000000045x^1 + 0.19739583333330887x^2 + 6.113859418732659E-14x^3 + 0.026041666666590222x^4 + 4.648093298062506E-14x^5 + -1.0923195715644561E-14x^6
Program sudah berhasil mendapatkan persamaan atau sudah berhasil menginterpolasi data yang sudah ada. Lalu masukan sudah menghasilkan nilai yang sesuai.

4.1.4 Kasus 4

Solusi untuk klorida 10 mg/L :
x = 22.4 -> f(x) = 7.812504987647989
f(x) = 11.699999999999996 + 0.26966666666666805x^1 + -0.08183333333333348x^2 + 0.005566666666666685x^3 + -1.666666666666665E-4x^4 + 1.8666666666666624E-6x^5

Solusi untuk klorida 20 mg/L :
x = 22.4 -> f(x) = 7.055020017664002
f(x) = 12.099999999999996 + -0.34099999999999786x^1 + 0.0024999999999996414x^2 + 4.333333333333589E-4x^3 + -2.00000000000008E-5x^4 + 2.666666666666758E-7x^5

Dilihat dari solusi tersebut sudah sesuai dengan yang diinginkan. Masukan juga telah menghasilkan nilai yang sesuai.

4.1.5 Kasus 5

Solusi dari kasus 5 adalah sebagai berikut :
x = 57.0 -> f(x) = 254470.240234375
x = 64.0 -> f(x) = 59226.41455078125
x = 70.0 -> f(x) = 31395.2802734375
x = 75.0 -> f(x) = -1.5323038176757812E7
f(x) = 1.766380167697502E12 + -2.0250937652364868E11x^1 + 9.92786304943853E9x^2 + -2.698056808788495E8x^3 + 4390203.896418754x^4 + -42774.55898888365x^5 + 231.0776301225721x^6 + -0.5339794700626744x^7

Dapat dilihat terdapat data yang “tidak sesuai” dan menghasilkan negatif. Diduga karena keterbatasan memori untuk menyimpan angka besar dalam masukan.

Bab 5 Kesimpulan dan Saran

5.1. Kesimpulan

Metode *Gauss* maupun *Gauss-Jordan* merupakan metode yang dapat diterapkan dalam pemrograman selain itu juga diperlukan tatancang pemorosan sehingga penerapan metode tersebut lebih mudah dan menggunakan metode numerik sehingga mengurangi galat . Selain itu interpolasi juga dapat diterapkan dengan baik dalam pemrograman dan juga diterapkan dalam sistem persamaan lanjar lalu menjadi matriks. Sehingga dapat diterapkan kembali metode *Gauss* atau *Gauss-Jordan* sehingga mendapatkan solusi. Jadi, aljabar lanjar sangat bermanfaat dan banyak sekali pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari.

5.2. Saran

Aplikasi dari aljabar lanjar sangat banyak, dari menentukan gaya, tegangan listrik, arus listrik dari suatu rangkaian, dan lain-lain. Diharapkan agar semakin dipergunakan aljabar lanjar dalam hal lain. Harapannya program yang telah dibuat berikut ini digunakan dengan baik.

Daftar Referensi

Pengertian Interpolasi dan Macam-Macamnya -
http://www.academia.edu/8738105/Interpolasi_Definisi_dan_Macam-macamnya

Slide kuliah Teknik Informatika ITB IF2123 – Aljabar Geometri
http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2015-2016/algeo15-16.htm