

大笔记

我

2024-01-30

目录

1	基础知识	7
1.1	逻辑	7
1.2	初等集合论	8
1.2.1	von Neumann-Bernays-Gödel 公理	8
1.2.2	基本构造	15
1.2.3	Zermelo-Fraenkel 公理	16
1.2.4	序数	18
1.2.5	归纳	22
1.2.6	Zorn 引理	24
1.2.7	基数	25
1.2.8	Grothendieck 宇宙	27
1.2.9	Gödel 编码, 构造性	29
1.3	实数理论	36
1.3.1	有理数	36
1.3.2	实数	38
1.4	初等范畴论	42
1.4.1	范畴与函子	42
1.4.2	Hom 函子与泛性质	49
1.5	点集拓扑	50
1.5.1	基础定义	50
2	代数基础	53
3	分析基础	55
4	代数拓扑	57
4.1	基本群	57
5	代数数论	59

前言

此笔记意在记录学习中的一些命题证明以及想法.

第一章 基础知识

1.1 逻辑

断言 (statement) 是一类有明确真值 (T/F) 的语句, 我们定义如下运算:

定义 1.1.1 对于断言 A 定义其否定 (negation) 为 $\neg A$, 满足如下真值表.

A	$\neg A$
T	F
F	T

对于断言 A, B 定义其合取 (conjunction) 为 $A \wedge B$, 其析取 (disjunction) 为 $A \vee B$, 满足如下真值表.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

定义 1.1.2 如果 $E(x)$ 在 x 是某些对象时为断言, 则称 $E(x)$ 为一个性质 (property).

我们承认类 (class) 的概念如下, 若对象 x 属于类 A , 则记为 $x \in A$, 否则记为 $x \notin A$. 我们用 $\{x \in X; E(x)\}$ 表示 X 中所有满足性质 E 的对象组成的类.

定义 1.1.3 我们用 \exists 代表存在某个对象, 用 \forall 代表所有对象都满足某个性质.

我们也用 $\exists!$ 代表存在唯一一个对象.

我们用 $a := b$ 标记 a 由 b 定义, $a = b$ 代表 a, b 仅仅是相同对象的两个表示 (集合论下会重新定义等于).

我们有如下自明的公式.

定理 1.1.4

$$\neg\neg A := \neg(\neg A) = A \quad (1.1)$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \quad (1.2)$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \quad (1.3)$$

$$\neg(\forall x \in X : E(x)) = \exists x \in X : \neg E(x) \quad (1.4)$$

$$\neg(\exists x \in X : E(x)) = \forall x \in X : \neg E(x) \quad (1.5)$$

$$\neg(\forall x \in X : (\exists y \in Y : E(x, y))) = \exists x \in X : (\forall y \in Y : \neg E(x, y)) \quad (1.6)$$

$$\neg(\exists x \in X : (\forall y \in Y : E(x, y))) = \forall x \in X : (\exists y \in Y : \neg E(x, y)) \quad (1.7)$$

定义 1.1.5 对于断言 A, B , 我们记断言 A 能推出 B 为 $A \implies B$, 代表

$$A \implies B := (\neg A) \vee B \quad (1.8)$$

而断言 A, B 等价 ($A \iff B$) 意味着 $(A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

定理 1.1.6 我们可以验证下述断言:

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A) \quad (1.9)$$

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C) \quad (1.10)$$

1.2 初等集合论

朴素集合论认为

公理 1.2.1 对于任意性质 P 均有 $Y = \{x : P(x)\}$ 为集合.

然而随后提出的 Russell 悖论 (Russell's paradox) 给出了性质 $X : X \notin X$ 的集合 X 不存在, 人们开始探索公理化集合论的道路.

1.2.1 von Neumann-Bernays-Gödel 公理

von Neumann-Bernays-Gödel 公理系统的核心是类 (class) 与元素 (element), A 是 B 的元素用符号 $A \in B$ 标记, 其否定自然使用 \notin 标记, 一个类可以作为另一个类的元素.

定义 1.2.2 两个类 A 与 B 相等, 记作 $A = B$, 当且仅当 A 与 B 有相同的元素, 其否定记为 $A \neq B$.

$$(X = Y) := \forall Z (Z \in X \iff Z \in Y)$$

推论 1.2.3 显见以下公式:

1. $\forall X(X = X)$
2. $\forall X \forall Y(X = Y \implies Y = X)$
3. $\forall X \forall Y \forall Z((X = Y \wedge Y = Z) \implies X = Z)$

定义 1.2.4 一个类 A 是另一个类 B 的子类, 记作 $A \subseteq B$, 当且仅当 A 的所有元素都是 B 的元素, 其否定记为 $A \not\subseteq B$.

$$(X \subseteq Y) := \forall Z(Z \in X \implies Z \in Y)$$

我们用 $A \subset B$ 表示 $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

推论 1.2.5

$$(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X) \iff (X = Y)$$

公理 1.2.6 (Axiom of Equality)

$$\forall X \forall Y(X = Y \implies \forall Z(X \in Z \iff Y \in Z))$$

定义 1.2.7 (集合) 一个类 X 称集合 (*set*), 当且仅当 $\exists Y(X \in Y)$, 本节中我们用小写字母 x, y, z, \dots 表示集合, 用大写字母 X, Y, Z, \dots 表示类.

定义 1.2.8 (真类) 一个类 X 称真类 (*proper class*), 当且仅当 X 不是集合, 常用粗体字母 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$ 表示真类.

公理 1.2.9 (Axiom of Pair)

$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \iff (u = x \vee u = y))$$

上述公理展开可得 $\forall x \forall y((\exists X \exists Y(x \in X \wedge y \in Y)) \implies \exists z \exists Z(z \in Z \wedge \forall u(u \in Z \iff (u = x \vee u = y))))$, 记集合 $z = \{x, y\}$, 特别的, 当 $x = y$ 时, 我们记 $z = \{x\}$.

为了方便叙述, 我们常常忽略公式最前的 \forall

推论 1.2.10 显见以下公式:

1. $((x = u \wedge y = v) \implies \{x, y\} = \{u, v\})$
2. $\{x, y\} = \{y, x\}$.
3. $x = y \iff \{x\} = \{y\}$.
4. $x = y \iff \forall Z(x \in Z \iff y \in Z)$.

定义 1.2.11 (有序对) 有序对 (*ordered pair*) (x, y) 定义为 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

引理 1.2.12 有序对的有序体现在其性质 $(x, y) = (u, v) \iff (x = u \wedge y = v)$.

证明 (\therefore) 显然.

(\implies) 若 $x \neq u$, 则 $\{x\} \neq \{u\}$, 依赖 **Axiom of Pair** $\{x\} \in (x, y) = (u, v)$, 从而 $u \in \{u, v\} = \{x\}$, 矛盾.

若 $x = u \wedge y \neq v$, 只需证明 $a = b \iff \{c, a\} = \{c, b\}$, 由 **Axiom of Pair** 知 $a \in \{c, a\} = \{c, b\}$ 从而 $a = c$, 同理, $b = c$, 矛盾. \square

定义 1.2.13 (有序三元对) 有序三元对 (*ordered triple*) (x, y, z) 定义为有序对 $((x, y), z)$.

定义 1.2.14 (二元关系) 类 R 称二元关系 (*binary relation*), 当且仅当 R 是有序对的集合, 记作 $\text{isbinrel}(R)$.

$$\text{isbinrel}(R) \iff \forall z(z \in R \implies \exists x \exists y(z = (x, y)))$$

在不久的将来, 我们将用二元关系定义映射.

公理 1.2.15 (Axiom of Membership)

$$\exists \mathfrak{C} \forall z(z \in \mathfrak{C} \iff \exists x \exists y(z = (x, y) \wedge x \in y))$$

公理 1.2.16 (Axiom of Domain)

$$\forall X \exists D \forall x(x \in D \iff \exists y((x, y) \in X))$$

定义 1.2.17 上述定义中类 D 称为 X 的定义域 (*domain*), 记作 $\text{dom}(X)$.

定义 1.2.18 定义 $\mathfrak{U} := \text{dom}(\mathfrak{C})$, 称为宇宙 (*universe*), 注意到 $\forall x(x \in \{x\})$, 从而 $\forall x(x \in \mathfrak{U})$.

推论 1.2.19

$$\text{dom}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$$

公理 1.2.20 (Axiom of Difference)

$$\forall X \forall Y \exists D \forall x(x \in D \iff (x \in X \wedge x \notin Y))$$

定义 1.2.21 上述定义中类 D 称为 X 与 Y 的差集 (*difference*), 记作 $X \setminus Y$.

定义 1.2.22 定义 $X \cap Y := X \setminus (X \setminus Y)$, 称为 X 与 Y 的交集 (*intersection*).

定义 1.2.23 定义 $X \cup Y := \mathfrak{U} \setminus ((\mathfrak{U} \setminus X) \cap (\mathfrak{U} \setminus Y))$, 称为 X 与 Y 的并集 (*union*).

定义 1.2.24 定义 $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, 称为 X 与 Y 的对称差 (*symmetric difference*).

定义 1.2.25 定义 $\emptyset := \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{U}$, 称为空类 (empty class), 根据 *ZFC Axiom of Infinity* 空类是集合 (空集, empty set).

推论 1.2.26

$$\forall E(\emptyset = E \setminus E)$$

证明 运用 *Axiom of Equality* 即可. □

公理 1.2.27 (Axiom of Product)

$$\forall X \forall Y \exists P \forall z (z \in P \iff \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y))$$

定义 1.2.28 上述定义中类 P 称为 X 与 Y 的积 (product), 记作 $X \times Y$.

定义 1.2.29 定义宇宙的积 $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U} := \ddot{\mathfrak{U}}$, 此时 $\text{isbinrel}(R) \iff R \subseteq \ddot{\mathfrak{U}}$.

公理 1.2.30 (Axiom of Inversion)

$$\forall X \exists I \forall z (z \in I \iff \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge (y, x) \in X))$$

公理 1.2.31 (Axiom of Cycle)

$$\forall X \exists C \forall t (t \in C \iff \exists x \exists y \exists z (t = (z, x, y) \wedge (x, y, z) \in X))$$

定义 1.2.32 由上述公理定义的 I 记作 X^{-1} , 称为 X 的逆 (inverse), C 记作 X° , $X^\circ := (X^\circ)^\circ$.

定义 1.2.33 定义 $\text{ran}(X) := \text{dom}(X^{-1})$, 称为 X 的值域 (range).

定义 1.2.34 定义类 X 的并 (union) $\bigcup X := \{z : \exists y \in X (z \in y)\}$. 定义类 X 的交 (intersection) $\bigcap X := \{z : \forall y \in X (z \in y)\}$. 定义类 X 的幂 (power) $\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$.

这里用到对类的表示方法, $\{x : \phi(x)\}$ 表示满足条件 $\phi(x)$ 的所有元素的类.

证明 存在性依次由以下三者给出:

$$\bigcup X = \text{dom}(\mathfrak{E} \cap (\mathfrak{U} \times X))$$

$$\bigcap X = \mathfrak{U} \setminus \text{dom}((\ddot{\mathfrak{U}} \setminus \mathfrak{E}) \cap (\mathfrak{U} \times X))$$

$$\mathcal{P}(X) = \mathfrak{U} \setminus \text{dom}(\mathfrak{E}^{-1} \cap (\mathfrak{U} \times (\mathfrak{U} \setminus X)))$$

□

推论 1.2.35

$$\mathcal{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$$

定义 1.2.36 给出类 X 与二元关系 R , 定义 X 在 R 下的像 (*image*) $R[X] := \{y : \exists x \in X((x, y) \in R)\} = \mathbf{ran}[R \cap (X \times \mathfrak{U})]$.

同理定义其逆像 (*preimage*) $R^{-1}[X]$.

定义 1.2.37 给出二元关系 F, G , 定义 F 与 G 的复合 (*composition*) $F \circ G := \{(x, z) : \exists y((x, y) \in G \wedge (y, z) \in F)\}$.

证明

$$F \circ G = \mathbf{dom}((G^{-1} \times \mathfrak{U})^{\circ} \cup (F^{-1} \times \mathfrak{U})^{\circ})$$

□

定义 1.2.38 映射 (*function*) f 定义为满足 $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \implies y = y'$ 的二元关系, 记作 $\mathbf{isfunc}(f)$.

在存在 y 的情况下我们记 $f(x)$ 为唯一的 y 使得 $(x, y) \in f$, 称为 f 在 x 处的值 (*value*).

定义 1.2.39 单射 (*injective*) 指代 f, f^{-1} 都是映射的二元关系 f .

推论 1.2.40 给出映射 F, G , $F \circ G$ 也是映射.

接下来从类转向集合, 定义集合的操作与要求.

公理 1.2.41 (Axiom of Replacement)

$$\forall x \forall F(\mathbf{isfunc}(F) \implies \exists y(y = F[x]))$$

公理 1.2.42 (Axiom of Union)

$$\forall x \exists y(y = \bigcup x)$$

公理 1.2.43 (Axiom of Power Set)

$$\forall x \exists y(y = \mathcal{P}(x))$$

公理 1.2.44 (Axiom of Infinity) (存在归纳集)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \implies y \cup \{y\} \in x))$$

公理 1.2.45 (Axiom of Foundation)

$$\forall x(x \neq \emptyset \implies \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

公理 1.2.46 (Axiom of Global Choice)

$$\exists f(\text{isfunc}(f) \wedge \forall x(x \neq \emptyset \implies \exists y(y \in x \wedge (x, y) \in f)))$$

上述 [Axiom of Global Choice](#) 有个弱化版本如下:

公理 1.2.47 (Axiom of Choice)

$$\forall x \exists f(\text{isfunc}(f) \wedge \forall y((y \in x \wedge y \neq \emptyset) \implies \exists z((y, z) \in f \wedge z \in y)))$$

称满足上述定理要求的映射 f 为 x 上的选择函数 (choice function).

NBG 公理 [\[Ban06\]](#) 由以下 14 条公理组成:

1. [Axiom of Equality](#)

$$\forall X \forall Y (X = Y \implies \forall Z (X \in Z \iff Y \in Z))$$

2. [Axiom of Pair](#)

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \iff (u = x \vee u = y))$$

3. [Axiom of Membership](#)

$$\exists \mathfrak{E} \forall z (z \in \mathfrak{E} \iff \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in y))$$

4. [Axiom of Domain](#)

$$\forall X \exists D \forall x (x \in D \iff \exists y ((x, y) \in X))$$

5. [Axiom of Difference](#)

$$\forall X \forall Y \exists D \forall x (x \in D \iff (x \in X \wedge x \notin Y))$$

6. [Axiom of Product](#)

$$\forall X \forall Y \exists P \forall z (z \in P \iff \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y))$$

7. [Axiom of Inversion](#)

$$\forall X \exists I \forall z (z \in I \iff \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge (y, x) \in X))$$

8. [Axiom of Cycle](#)

$$\forall X \exists C \forall t (t \in C \iff \exists x \exists y \exists z (t = (z, x, y) \wedge (x, y, z) \in X))$$

9. Axiom of Replacement

$$\forall x \forall F (\text{isfunc}(F) \implies \exists y (y = F[x]))$$

10. Axiom of Union

$$\forall x \exists y (y = \bigcup x)$$

11. Axiom of Power Set

$$\forall x \exists y (y = \mathcal{P}(x))$$

12. Axiom of Infinity

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \implies y \cup \{y\} \in x))$$

13. Axiom of Foundation

$$\forall x (x \neq \emptyset \implies \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

14. Axiom of Global Choice

$$\exists f (\text{isfunc}(f) \wedge \forall x (x \neq \emptyset \implies \exists y (y \in x \wedge (x, y) \in f)))$$

我们借由 NBG 公理给出一些推论:

推论 1.2.48 不存在无限降链 (*infinite descending chain*) $x_0 \supset x_1 \supset x_2 \supset \dots$, 且不存在 $x \in x$.

证明 由 Axiom of Foundation. □

推论 1.2.49 集合的子集是集合, 从而集合 x 与类 C 的交 $x \cap C$ 也是集合.

这里的做法在于使用 Axiom of Power Set 并且意识到 $y \subseteq x \implies y \in \mathcal{P}(x)$.

推论 1.2.50 我们说明如何把任何一性质都写作类, 从而我们可以对一个集合进行分离操作, 也即我们给出类 $\{x : \phi(x, p_1, p_2 \dots p_n)\}$.

证明 我们总是将 $\forall x$ 认作 $\neg \exists x$, 我们给出一种归纳方法, 假定公式中有 n 个变元, 考察 $\mathfrak{U}n := \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \times \dots \times \mathfrak{U}$ 上的类, 并且已经将一部分的命题转为类 P , 命题的否定无非是 $\mathfrak{U}n \setminus P$, 命题的析取无非是 $P_1 \cup P_2$, 命题的合取无非是 $P_1 \cap P_2$, 两个类属于引导出将 $\mathfrak{C} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \dots \mathfrak{U}$ 上多次施以 Axiom of Cycle 与 Axiom of Inversion 的结果, 利用 Axiom of Domain 可以丢弃用完的变量. 从而我们可以将任何命题转为类, 于是可以有集合 $\{z \in x : P(z)\}$. □

另外的, 将 NBG 公理中的 Axiom of Membership, Axiom of Domain, Axiom of Difference, Axiom of Product, Axiom of Inversion, Axiom of Cycle 替换为以下公理, 我们得到了 BGC 公理, 其与 NBG 等价:

公理 1.2.51 (Axiom of Comprehension)

$$\forall X_1 \forall X_2 \dots \forall X_n \exists Y (Y = \{x : \phi(x, X_1, X_2, \dots, X_n)\})$$

更细致的讨论见本章末尾.

1.2.2 基本构造

推论 1.2.52 集合的子类是集合.

证明 对 $X \subseteq y$ 有 $X \in \mathcal{P}(y)$. □

定义 1.2.53 集合 x 与 y 的并定义为 $x \cup y := \bigcup \{x, y\}$.

定义 1.2.54 集合 x 与 y 的交 $x \cap y$ 也是集合.

证明 根据 1.2.49. □

定义 1.2.55 集合 x 与 y 的差集 $x \setminus y$ 是一个集合.

证明 对 $x, \mathfrak{U} \setminus y$ 应用 1.2.49. □

定义 1.2.56 集合 x 与 y 的积 $x \times y$ 是一个集合.

证明 $x \times y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}(x \cup y)$, 从而是一个集合. □

定义 1.2.57 集合 x 到 y 的全体映射 y^x 构成一个集合.

证明 $f \subseteq x \times y$, 从而是一个集合. □

定义 1.2.58 对于 x, y 与 $f : x \rightarrow y$, f 是满射 (*surjective*), 当且仅当 $f[x] = y$.

定义 1.2.59 存在类 $\mathfrak{Rel} := \{r : \text{isbinrel}(r)\}$ 为全体二元关系集构成的类.

证明

$$\mathfrak{Rel} = \mathfrak{U} \setminus \text{dom}((\mathfrak{C}^{-1} \setminus \mathfrak{U} \times (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U})))$$

□

以下证明写起来过于冗长, 读者可自行运用 [Gödel 类存在定理](#) 进行验证.

定义 1.2.60 存在类 $\mathfrak{Func} := \{f : \text{isfunc}(f)\}$ 为全体映射集构成的类.

定义 1.2.61 对于类 A, X 亦定义 X^A 为 A 到 X 的全体映射构成的类.

定义 1.2.62 对一个 $X \subseteq A \times \mathfrak{U}$, 可以视作一组以 A 为指标的集合 $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. 定义 $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \text{ran}(X)$, $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \text{dom}(X)$.

也可以视作多值函数 (*multifunction*) $X : A \multimap \mathfrak{U}$ 给 $\alpha \in A$ 值 $X[\{\alpha\}]$, 并且对 $B \subseteq A$ 给出 $X[B] = \text{ran}(X \cap (B \times \mathfrak{U}))$.

定义 1.2.63 (笛卡尔积) 对于类 $A, X \subseteq A \times \mathfrak{U}$, 定义 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{f \in \mathfrak{Func} : \forall (\alpha \in A)(f(\alpha) \in X_\alpha) \wedge (\text{dom}(f) = A)\}$, 称为 $X = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 的笛卡尔积 (*cartesian product*).

真类 A 诱导出的笛卡尔积是空类.

定义 1.2.64 (无交并) 对于类 $A, X \subseteq A \times \mathfrak{U}$, 定义 $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha := \{(x, y) \in \mathfrak{U} \times A : x \in X_y\}$, 称为 $X = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ 的无交并 (*disjoint union*).

1.2.3 Zermelo-Fraenkel 公理

与 NBG 公理思路不同的是 ZF 公理, ZF 公理体系没有 NBG 公理中类的概念, 或者说 ZF 公理体系中的类 C 代指一个有单个自由变量的命题 $x \in C := \phi(x, p_1, p_2 \dots)$, 其中 $p_1, p_2 \dots$ 是给定参数.

相应的, 类的运算被视作逻辑命题的计算.

定义 1.2.65 定义 $\mathcal{U} := \{x : x = x\}$, 称为宇宙 (*universe*). 定义 $X \subseteq Y := \forall x(x \in X \implies x \in Y)$, 称为 X 是 Y 的子类 (*subclass*). 定义 $\bigcap X := \{x : \forall y \in X(x \in y)\}$, 称为 X 的交集 (*intersection*). 定义 $\bigcup X := \{x : \exists y \in X(x \in y)\}$, 称为 X 的并集 (*union*). 定义 $\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$, 称为 X 的幂 (*power*). 定义 $X \setminus Y := \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$, 称为 X 与 Y 的差集 (*difference*).

此意义上, 集合自然是类 $\{x : x \in S\}$, ZF 公理包含 (本节大写字母亦表示集合):

公理 1.2.66 (Axiom of Extensionality)

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \iff z \in Y) \implies X = Y)$$

公理 1.2.67 (Axiom of Pair)

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall U (U \in Z \iff (U = X \vee U = Y))$$

公理 1.2.68 (Axiom of Union)

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \iff \exists u \in X (z \in u))$$

公理 1.2.69 (Axiom of Power Set)

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \iff z \subseteq X)$$

公理 1.2.70 (Axiom Schema of Separations)

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \iff (z \in X \wedge \phi(z)))$$

寻此几条公理, 我们仍然可以仿照 NBG 公理进行一些定义, 不过我们要给一个集合作为基础:

定义 1.2.71 空集 (*empty set*) 定义为 $\emptyset := \{x \in X : x \neq x\}$, 此中要求至少存在一个集合.

有序对 (*ordered pair*) (x, y) 定义为 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

有序三元对 (*ordered triple*) (x, y, z) 定义为 $((x, y), z)$.

集合 X 与 Y 的积 (*product*) 定义为 $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$, 可以由 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$ 上用分离公理给出.

X 上的二元关系 (*binary relation*) 定义为 $R \subseteq X \times X$.

映射 (*function*) 定义为一个有序对构成的类 f , 且满足 $\forall x \forall y \forall z ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \implies (y = z)$.

映射自然延拓至类, 定义为满足以上唯一性条件且每个元素都是有序对的类.

X 在 f 下的像 (*image*) 定义为 $f[X] := \{y : \exists x \in X ((x, y) \in f)\}$.

公理 1.2.72 (Axiom of Infinity)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \implies y \cup \{y\} \in x))$$

公理 1.2.73 (Axiom Schema of Replacement)

$$\forall f \forall x(\text{isfunc}(f) \implies \exists y(y = f[x]))$$

公理 1.2.74 (Axiom of Regularity)

$$\forall x(x \neq \emptyset \implies \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

ZF 公理 [Jec02] 代指以下 8 条公理:

1. ZFC Axiom of Extensionality

$$\forall X \forall Y (\forall z(z \in X \iff z \in Y) \implies X = Y)$$

2. ZFC Axiom of Pair

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall U (U \in Z \iff (U = X \vee U = Y))$$

3. ZFC Axiom of Union

$$\forall X \exists Y \forall z(z \in Y \iff \exists u \in X(z \in u))$$

4. ZFC Axiom of Power Set

$$\forall X \exists Y \forall z(z \in Y \iff z \subseteq X)$$

5. ZFC Axiom Schema of Separations

$$\forall X \exists Y \forall z(z \in Y \iff (z \in X \wedge \phi(z)))$$

6. ZFC Axiom of Infinity

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \implies y \cup \{y\} \in x))$$

7. ZFC Axiom Schema of Replacement

$$\forall f \forall x(\text{isfunc}(f) \implies \exists y(y = f[x]))$$

8. ZFC Axiom of Regularity

$$\forall x(x \neq \emptyset \implies \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

囊括以下选择公理的体系称为 ZFC 公理:

公理 1.2.75 (Axiom of Choice)

$$\forall x \exists f(\text{isfunc}(f) \wedge \forall y(y \in x \implies \exists z((y, z) \in f)))$$

可以发现, NBG 公理中对类操作的 [Axiom of Equality](#), [Axiom of Membership](#), [Axiom of Domain](#), [Axiom of Difference](#), [Axiom of Product](#), [Axiom of Inversion](#), [Axiom of Cycle](#), 在 ZFC 下体现为类背后的逻辑命题的计算, 而 [Axiom of Pair](#), [Axiom of Union](#), [Axiom of Power Set](#), [Axiom of Infinity](#), [Axiom of Foundation](#), [Axiom of Choice](#) 在 ZFC 下体现为集合的操作与要求.

可以证明在只考虑集合的情况下, ZFC 公理与 NBG 公理等价, 我们将选取 NBG 公理, 因为一定程度上 NBG 公理表述更加方便, 严格给出了”类”的概念, 而非 ZFC 公理中的一个”语法糖”.

1.2.4 序数

序数几乎是集合论上唯一的结构, 有必要对其进行研究.

1.2.4.1 偏序

定义 1.2.76 一个等价关系 \sim 是满足自反性 (*reflexivity*), 对称性 (*symmetry*), 传递性 (*transitivity*) 的二元关系.

1. 自反性 (*reflexivity*): $x \sim x$.
2. 对称性 (*symmetry*): $x \sim y \implies y \sim x$.
3. 传递性 (*transitivity*): $x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$.

等价关系给出了集合的一个划分, 也即对于定义于 X 上的等价关系 $R \subseteq X \times X$, $x \in X$ 的等价类 (*equivalence class*) 定义为

$$[x]_R := \{y \in X : xRy\} \quad (1.11)$$

对 X 给出了拆分 $A = \{S \in \mathcal{P}X : \exists x(S = [x]_R)\}$, 而 $X = \bigcup A$ 且 $\forall S, T \in A : S \cap T = \emptyset \iff S \neq T$.

同理, 对于一个划分 A , 我们可以定义相应的等价关系 R 为 $xRy \iff \exists S \in A(x \in S \wedge y \in S)$.

定义 1.2.77 一个二元关系 \leq 称偏序关系 (*partial ordering*) 若满足:

1. 自反性 (*reflexivity*): $x \leq x$.
2. 反对称性 (*antisymmetry*): $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$.

3. 传递性 (transitivity): $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$.

在只考虑集合 P 对情况下, 我们也称 \leq 为 P 上的偏序, 代指 $(\leq) \subseteq P \times P$. 称 P 上线序则要求 $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$.

若偏序由 \leq 给定, 我们也用 $\geq, <, >$, 其意义是自明的.

定义 1.2.78 对于偏序集 (partially ordered set) (P, \leq) , 对于 $X \subseteq P$ 定义:

1. 极大元 (maximal element): $x \in X$ 为极大元, 若 $\forall y \in X (x \leq y \implies x = y)$.
2. 极小元 (minimal element): $x \in X$ 为极小元, 若 $\forall y \in X (y \leq x \implies x = y)$.
3. 最大元 (greatest element): $x \in X$ 为最大元, 若 $\forall y \in X (y \leq x)$.
4. 最小元 (least element): $x \in X$ 为最小元, 若 $\forall y \in X (x \leq y)$.
5. 上界 (upper bound): $x \in X$ 为上界, 若 $\forall y \in X (y \leq x)$.
6. 下界 (lower bound): $x \in X$ 为下界, 若 $\forall y \in X (x \leq y)$.
7. 上确界 (supremum): $x \in P$ 为上确界, 若 x 为上界且对于任意上界 y 有 $x \leq y$.
8. 下确界 (infimum): $x \in P$ 为下确界, 若 x 为下界且对于任意下界 y 有 $y \leq x$.

定义 1.2.79 若偏序集 (P, \leq) 中任意两个元素均有上确界和下确界, 命之为格 (lattice), 格的理论将在后面几章叙述.

定义 1.2.80 偏序是集合上的结构, 我们研究保持偏序结构的映射, 也即对于偏序集 (P, \leq) 和 (Q, \leq) , 若单射 $f: P \rightarrow Q$ 满足 $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$, 则称 f 为保序映射 (order-preserving map) 线序间的保序映射也称增 (increasing).

定义 1.2.81 对于偏序集 (P, \leq_P) 和 (Q, \leq_Q) , 若存在保序双射 $f: P \rightarrow Q$, 且其逆映射亦保序, 则称同构 (isomorphism), 记作 $P \cong Q$.

1.2.4.2 良序

定义 1.2.82 一个线序称为良序 (well-ordering), 若其任意非空类均有最小元.

引理 1.2.83 对于良序集 (W, \leq) 以及增映射 $f: W \rightarrow W$, 则 $\forall x (x \leq f(x))$.

证明 构造 W 子集 $S = \{x \in W : x > f(x)\}$, S 有最小元 x , 而 $x > f(x)$ 意味着 $f(x) > f(f(x))$, 而 $f(x) < x$ 与 x 最小矛盾. \square

推论 1.2.84 良序集自同构 (*automorphism*) 必为恒等映射.

推论 1.2.85 两个良序集间的同构存在则唯一.

定义 1.2.86 良序集的前段 (*initial segment*) 定义为 $S \subseteq W$ 且 $x \geq y \implies (x \in S \implies y \in S)$.

引理 1.2.87 前段是良序集, 序继承自原良序集, 并可写成 $\{x \in W : x < u\}$ 的形式, 称为 u 的前段 $W(u)$.

证明 对于 S 子集, 取其在 W 中最小元 x 即可. 而 S 可以被写成 $W \setminus S$ 最小元的前段. \square

引理 1.2.88 真前段必不同构于原良序集.

证明 同构于前段违反 1.2.83. \square

定理 1.2.89 任意两个良序集 W, W' 一下三者成立其一:

1. $W \cong W'$.
2. W 同构于 W' 的真前段.
3. W' 同构于 W 的真前段.

证明 构造 $f = \{(x, y) \in W \times W' : W(x) \cong W'(y)\}$, 根据 1.2.88 有 $\{(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \implies y = z\}$ 与 $\{(y, x) \in f \wedge (z, x) \in f \implies y = z\}$, 故 f 为 $\text{dom}(f)$ 与 $\text{ran}(f)$ 间的双射.

注意到若 $\text{dom}(f) \neq W$, 且 $\text{ran}(f) \neq W'$, 则取最小元 $x \in W \setminus \text{dom}(f)$ 与 $y \in W' \setminus \text{ran}(f)$, f 是 $W(x)$ 与 $W'(y)$ 间同构故 $(x, y) \in f$, 与 $x \in \text{dom}(f)$ 矛盾.

故 $(\text{dom}(f) = W) \wedge (\text{ran}(f) = W')$, $(\text{dom}(f) = W) \wedge \neg(\text{ran}(f) = W')$, $\neg(\text{dom}(f) = W) \wedge (\text{ran}(f) = W')$ 三者成立其一, 也即上述命题成立. \square

定义 1.2.90 同构的良序集称为有同样的序形 (*order type*), 序数是表示序形的集合.

1.2.4.3 序数

定义 1.2.91 一个传递集 (*transitive set*) 定义为 $\bigcup x \subseteq x$ 的集合 x , 也即 x 的元素也都是 x 的子集, 传递类亦同理.

定义 1.2.92 一个序数 (*ordinal numbers*) 是一个传递的良序集, 偏序 $<$ 由 \in 给出.

我们用 On 表示全体序数构成的类.

引理 1.2.93 序数满足如下性质:

1. $\emptyset \in \mathbf{On}$
2. $\alpha \in \mathbf{On} \wedge \beta \in \alpha \implies \beta \in \mathbf{On}$
3. $\alpha \in \mathbf{On} \wedge \beta \in \mathbf{On} \implies (\alpha \subset \beta \implies \alpha \in \beta)$
4. $\alpha \in \mathbf{On} \wedge \beta \in \mathbf{On} \implies \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$

证明 第一条是自明的. 第二条源于 1.2.87 和 $\forall x \in \tau \in \beta \implies x \in \beta$. 第三条可以取 $\beta \setminus \alpha$ 的最小元 γ , 注意到 $\gamma \in x \in \alpha \implies \gamma \in \alpha$, 故 $\alpha = \beta(\gamma) = \gamma$ 而后面一个等号无非源自 $\gamma \subseteq \beta$ 与 γ 的极小性. 第四条只需注意到 $\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$ 即可. \square

由 1.2.93 立得以下推论:

推论 1.2.94 首先, 我们将良序推广到类 \mathbf{On} 上, 也即 $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$,

1. 对于任意序数 α , 有 $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.
2. 类 $C \subseteq \mathbf{On}$, 则有 $\inf C := \bigcap C$ 为序数.
3. 集合 $S \subseteq \mathbf{On}$, 则有 $\sup S := \bigcup S$ 为序数.

引理 1.2.95 任何良序集 W 都同构于某个序数.

证明 定义类 $F = \{u : \exists x \exists y (u = (x, y) \wedge x \in W \wedge W(x) \cong y \wedge y \in \mathbf{On})\}$, 考察 $F \upharpoonright W$ 即可, 由 Axiom of Replacement 知 $\text{ran}(f)$ 是序数. \square

定义 1.2.96 对于序数 α , 定义 $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$, 称为 α 的后继 (successor), 后继也是序数.

推论 1.2.97 若一个非空序数不是后继, 则其为极限序数 (limit ordinal), 即 $\alpha = \bigcup \alpha$.

证明 若否, 有 $\bigcup \alpha + 1 \in \alpha$ 故 $\bigcup \alpha \in \bigcup \alpha$. \square

有了后继序数, 我们可以着手定义自然数.

定义 1.2.98 自然数 (natural numbers) 如此的定义:

1. $0 := \emptyset$.
2. $n + 1 := n \cup \{n\}$.

1.2.5 归纳

归纳的思想可以追溯到 Peano 公理.

例 1.2.99 Peano 公理: 自然数满足以下性质:

1. 0 是自然数.
2. 对于任意自然数 n , 存在唯一自然数 $n+1$ 使得 $n+1$ 是 n 的后继.
3. 0 不是任何自然数的后继.
4. 不同自然数的后继不同.
5. **数学归纳法:** 若性质 P 满足 $P(0) \wedge \forall n(P(n) \implies P(n+1))$, 则 $P(n)$ 对于任意自然数 n 成立.

在所述集合论中, 我们想要找到自然数集作为 Peano 公理的对应, 此时我们需要引入 [Axiom of Infinity](#).

定义 1.2.100 ω 定义为归纳集中的最小元, 对于给定的归纳集 X , 可以给出 $\omega = \bigcap \{x : x \subseteq X \wedge \emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\}) \in x\}$.

证明 集合的交可以用 \bigcap 表示, 故成为一个集合.

易证 ω 归纳, 任取归纳集 Y , 注意到 $X \cap Y$ 也是归纳集, 故 $\omega \subseteq Y$. \square

推论 1.2.101 极限序数都是归纳集, 故 ω 是最小的极限序数.

定理 1.2.102 (数学归纳法) 称 ω 为自然数集, ω 中的元素称自然数, 若性质 P 对 0 成立, 且若对自然数 n 成立则对 $n+1$ 成立, 则对任意自然数 $n \in \omega$ 成立.

证明 取不是自然数的最小元, 其是后继序数 $n+1$, 而 n 是自然数.

同理, 取不满足 P 的最小元, 其是后继序数 $n+1$, 而 n 满足 P . \square

定理 1.2.103 (超限归纳法) 若性质 P 满足如下性质:

1. $P(0)$ 成立.
2. 若 α 是极限序数 $(\forall \beta < \alpha (P(\beta)) \implies P(\alpha))$.
3. 若 $\alpha = \beta + 1$ 是后继序数 $P(\beta) \implies P(\alpha)$.

则对于任意序数 α , $P(\alpha)$ 总成立.

证明 若对于序数 γ 不成立, 有最小序数 α 不成立, 而无论其是否是后继序数都矛盾了. \square

依赖于超限归纳法, 我们可以定义序数运算, 运算结果仍是序数.

定义 1.2.104 给定 α , 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha + 0 := \alpha$, $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$, $\alpha + \gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} (\alpha + \beta)$ 为序数的和.

定义 1.2.105 给定 α , 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha \cdot 0 := 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$, $\alpha \cdot \gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} (\alpha \cdot \beta)$ 为序数的积.

定义 1.2.106 给定 α , 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha^0 := 1$, $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$, $\alpha^\gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} (\alpha^\beta)$ 为序数的幂.

引理 1.2.107 对于序数 α, β, γ , 有

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

证明 对 γ 进行超限归纳即可. □

定义 1.2.108 对于线序集 A, B , 定义线序集的积 $A \times B$ 为 $A \times B$ 上的线序 $(a, b) < (c, d)$ 当且仅当 $b < d \vee (b = d \wedge a < c)$.

定义线序集的和 $A + B$ 为 $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ 上的线序, 其中 $(a, 0) < (b, 1)$ 对于任意 $a \in A, b \in B$ 成立.

定义 1.2.109 对于序数 α, β , 序数和同构于线序和 $\alpha + \beta$, 序数积同构于线序积 $\alpha \cdot \beta$.

证明 对 β 归纳. □

引理 1.2.110 加法乘法满足如下性质:

1. $\beta < \gamma \implies \alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
2. $\alpha < \beta \implies \exists! \gamma (\beta = \alpha + \gamma)$.
3. $\beta < \gamma \implies \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.
4. $\alpha > 0 \implies \forall \gamma \exists \beta \exists \rho (\gamma = \beta \cdot \alpha + \rho \wedge \rho < \alpha)$.
5. $\beta < \gamma \wedge \alpha > 1 \implies \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

证明 一三五对 γ 归纳, 二则是 $\{\chi : \alpha \leq \chi < \beta\}$ 上的良序, 唯一性由第一条确保. 四则取 β 为最大的 $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$ 的序数. □

定理 1.2.111 (Cantor) 任意序数 $\alpha > 0$ 可以被唯一的写作 $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \omega^{\beta_2} \cdot \gamma_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot \gamma_n$, 其中 $\alpha \geq \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ 为序数, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 为自然数.

证明 注意到 $1 = \omega^0$, 取极大 β_1 使得 $\omega^{\beta_1} \leq \alpha$, 有 $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \rho$, 对 ρ 施以归纳即可, n 有限基于 [Axiom of Foundation](#). □

例 1.2.112 (Hydra 数) 对于一个有根树, 每次选取一个叶节点 p 以及一个自然数 n . 删去 p 寻求 p 的父节点, 若其不是根节点, 则将其父节点复制 n 份, 连接到 p 的祖父节点处, 则不论如何操作, 最终都会到达只有根节点的树.

证明 对每颗树 T , 其根节点连结子树 T_1, T_2, \dots, T_n , 定义 $f(T) := \omega^{f(T_1)} + \omega^{f(T_2)} + \dots + \omega^{f(T_n)}$, 则每步操作使 f 减小, 故有限步内必然到达 0. \square

定义 1.2.113 良基关系是 P 上一二元关系 $E(<)$, 使得 $\forall X((X \subseteq P \wedge X \neq \emptyset) \implies \exists a(a \in X \wedge \forall x \in X(\neg(xEa))))$.

例 1.2.114 良序 $<$ 是良基关系.

定理 1.2.115 对于良基关系 E , 有唯一 $\rho : P \rightarrow \mathbf{On}$, 使得 $\forall x \in P(\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 : yEx\})$ (任意非空子集有极小元).

证明 归纳定义一族集合 P_θ

1. $P_0 := \emptyset$.
2. $P_{\theta+1} := \{x \in P : \forall y(yEx \implies y \in P_\theta)\}$.
3. $P_\theta := \bigcup_{\beta < \theta} P_\beta$.

若有 $P_\theta = P_{\theta+1}$, 此时必然有 $P_\theta = P$, 若否 $P \setminus P_\theta$ 有极小元 x , 有 $x \in P_{\theta+1} \setminus P_\theta$, 矛盾. 定义 $\rho(x) := \sup\{\alpha : x \notin P_\alpha\}$, 上述条件的验证是显然的.

唯一性只需考虑 $\{x \in P : \rho_1(x) \neq \rho_2(x)\}$ 的极小元即可. \square

定义 1.2.116 给出一个良基关系 E , 定义一个元素的秩 (*rank*) 为 $\rho(x)$, E 的高 (*height*) 为 $\mathbf{ran}\rho$.

1.2.6 Zorn 引理

这章我们来重温选择公理.

引理 1.2.117 \mathbf{On} 不是集合.

证明 若是集合, 则 $\mathbf{On} \in \mathbf{On}$, 矛盾. \square

定理 1.2.118 (Zermelo 良序定理) 任意集合都能被赋予良序, 此命题与 [Axiom of Choice](#) 等价.

证明 我们证明以下两条等价

1. $\mathbf{Wo}(x) : x$ 能被赋予良序.
2. $\mathbf{AC}(\mathcal{P}x) : \mathcal{P}x$ 有选择函数.

$\mathbf{Ac}(\mathcal{P}x) \implies \mathbf{Wo}(x)$: 对于 $\mathcal{P}(x)$ 上的选择函数 $c : \mathcal{P}x \setminus \emptyset \rightarrow c$, 根据超限归纳法开始定义 $F_\alpha : \alpha \rightarrow x$ 如下, 若构造止于某一步, 则必然 $\mathbf{ran} F_\alpha = x$, 若否, 构造必然可一直持续.

1. $F_0 := \emptyset$.
2. $F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{(c(\alpha, x \setminus \mathbf{ran} F_\alpha))\}$.
3. $F_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta$.

给出 $F : \mathbf{On} \rightarrow x$ 的存在性考虑 [Axiom of Replacement](#) 和 F^{-1} 并根据 1.2.117 即可知上述构造只能止于某个序数 α , 此即给出的良序.

$\mathbf{Wo}(x) \implies \mathbf{Ac}(\mathcal{P}x)$: 取选择函数为最小值即可, 同理对于任意集合 S 可以考察 $\bigcup S$ 上的良序, 从而构造出 S 上选择函数.

等价性只需考虑到 $x \subseteq \mathcal{P} \bigcup x$. □

定理 1.2.119 (Zorn 引理) 若 P 是一个非空偏序集, 且任意非空链序子集都有上界, 则 P 有极大元.

证明 给出 $\mathcal{P}x$ 上选择函数 c , 同样根据 [Axiom of Replacement](#) 和 1.2.117 知其成立. 详述之, 若 P 无极大元, 可以归纳的进行构造映射:

1. $F_0 := \{(\emptyset, c(x))\}$.
2. $F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{\alpha + 1, c(\{a \in x : a > F_\alpha(\alpha)\})\}$.
3. $F_\alpha := (\bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta) \cup \{(\alpha, \mathbf{Upperbound} \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbf{ran} F_\beta)\}$.

□

同样, *Zorn 引理* 与 [Axiom of Choice](#) 等价.

证明 对任意集合 x , 在全体 (S, c) , 其中 $S \subseteq x$, c 是 S 上的选择函数, 定义偏序 $(S_1, c_1) \leq (S_2, c_2) \iff S_1 \subseteq S_2 \wedge c_2 \upharpoonright S_1 = c_1$, 选取极大元便给出了选择函数. □

1.2.7 基数

定义 1.2.120 两个集合 X, Y 有等势定义为存在双射 $f : X \rightarrow Y$, 记作 $|X| = |Y|$.

等势自然是等价关系, 有限集意味着 $|X| = |n|$ 为自然数, 可数集意味着 $|X| = |\omega|$.

定义 1.2.121 基数 (*cardinal numbers*) 是一类序数, α 是基数意味着 $\forall \beta < \alpha (|\beta| \neq |\alpha|)$.

定义 1.2.122 偏序 $|X| \leq |Y|$ 定义为存在单射 $f: X \rightarrow Y$.

引理 1.2.123 $|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \implies |X| = |Y|$.

证明 单射 $f: X \rightarrow Y$ 与单射 $g: Y \rightarrow X$ 给出层垒结构.

$$1. S_0 := X \setminus \text{ran}(g \circ f).$$

$$2. S_{n+1} := g \circ f(S_n).$$

给出 X 到 $g(Y)$ 的双射 $h: X \rightarrow g(Y)$, 使得他在 S_n 上的限制为 $g \circ f$, 而在其他地方为单位映射即可, 从而给出双射 $h^{-1} \circ g: Y \rightarrow X$. \square

引理 1.2.124 满射 $f: X \rightarrow Y$ 给出 $|X| \geq |Y|$.

证明 应用选择公理对每个 $y \in Y$ 选取 $f^{-1}(\{y\})$ 的一个元素即可. \square

引理 1.2.125 对于集合 X, Y , 有 $|X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$.

证明 运用 1.2.118 即可. \square

推论 1.2.126 任意集合都等势于某个基数, 我们用 $|X|$ 表示 X 的基数.

定理 1.2.127 (Cantor) $|\mathcal{P}x| > |x|$.

证明 任意 $f: x \rightarrow \mathcal{P}x$ 非满, 因为 $\{e \in x: e \notin f(e)\}$ 不在其值域中. \square

定义基数的运算如下:

定义 1.2.128 1. $|X| + |Y| := |X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}|$.

$$2. |X| \cdot |Y| := |X \times Y|.$$

$$3. |X|^{|Y|} := |X^Y|.$$

定义 1.2.129 归纳的定义基数 \aleph :

$$1. \aleph_0 := \omega.$$

$$2. \aleph_{\alpha+1} \text{ 为大于 } \aleph_\alpha \text{ 的最小基数.}$$

$$3. \aleph_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta.$$

证明 只需证明极限情形, 若有更小等势序数 κ , 则必然有 $\kappa \in \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1} \leq \aleph_\alpha$, 矛盾. \square

假设 1.2.130 连续统假设 (*continuum hypothesis*) 指出 $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_{\alpha}}$, 它是独立于 *ZFC* 的.

现在我们证明有关基数运算的结论.

定理 1.2.131 $\forall \alpha (\aleph_{\alpha} \cdot \aleph_{\alpha} = \aleph_{\alpha})$.

证明 对 α 归纳, 假定 $\forall \beta < \alpha (\aleph_{\beta} \cdot \aleph_{\beta} = \aleph_{\beta})$, 我们给出 $\aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}$ 上的良序, $(a, b) < (c, d)$ 当且仅当以下三条成立其一:

1. $\max(a, b) < \max(c, d)$.
2. $\max(a, b) = \max(c, d) \wedge a < c$.
3. $\max(a, b) = \max(c, d) \wedge a = c \wedge b < d$.

此良序同构于一序数 $\kappa \geq \aleph_{\alpha+1}$, 故有真前段 $\gamma = \aleph_{\alpha}$, 其必然在 $\sigma \times \sigma$ 中, 而 $\sigma < \aleph_{\alpha}$ 故 $|\gamma| < |\sigma|^2 = |\sigma|$, 矛盾. \square

推论 1.2.132 若 α, β 为基数且至少其一无穷, 则 $\alpha + \beta = \max\{\alpha, \beta\}$.

若 α, β 为基数且 $2 \leq \alpha \leq \beta$, 则 $\alpha^{\beta} = 2^{\beta}$.

证明 只需注意到 $\alpha + \beta \leq 2 \cdot \max(\alpha, \beta) \leq \alpha, \beta^2 = \max(\alpha, \beta)$.

只需注意到 $\alpha^{\beta} \leq (2^{\beta})^{\beta} = 2^{\beta \cdot \beta} = 2^{\beta}$. \square

1.2.8 Grothendieck 宇宙

定义 1.2.133 *Grothendieck* 宇宙 (*Grothendieck universe*) 是一个集合 \mathcal{U} , 满足

1. $\forall u (u \in \mathcal{U} \implies u \subseteq \mathcal{U})$.
2. $\forall u \forall v (u, v \in \mathcal{U} \implies \{u, v\} \in \mathcal{U})$.
3. $\forall u (u \in \mathcal{U} \implies \mathcal{P}u \in \mathcal{U})$.
4. 给出映射 $F, \forall I (I \in \mathcal{U} \wedge \forall i \in I (F(i) \in \mathcal{U}) \implies \bigcup_{i \in I} F(i) \in \mathcal{U})$.
5. $\omega \in \mathcal{U}$.

给定一个 *Grothendieck* 宇宙, 考察它的元素, 相当于给定了一个足够自由的空间, 从而避免一些类的操作.

假设 1.2.134 (Grothendieck) 对于任意集合, 存在一个 *Grothendieck* 宇宙包含它.

接下来我们给出 *Grothendieck* 宇宙的构造, 先讨论集合的层垒谱系 (*Cumulative hierarchy*).

定义 1.2.135 归纳定义集合 V_α :

1. $V_0 := \emptyset$.
2. $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}V_\alpha$.
3. $V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$.

满足 V_α 传递且 $\alpha < \beta \implies V_\alpha \subset V_\beta$.

我们希望证明每个集合都在层垒谱系中, 为此需要用到以下引理.

引理 1.2.136 对于任何集合 S 有传递集 T 且 $S \subseteq T$.

证明 定义 $S_0 := S$, $S_{n+1} := \mathcal{P}S_n$, $T := \bigcup_{n \in \omega} S_n$.
该集合记作 $\mathbf{TC}(S)$, 称为 S 的传递闭包. □

引理 1.2.137 任意集合均在层垒谱系中.

证明 对于集合 S , $\mathbf{TC}(S)$ 对于 \in 构成良基集, 我们证明其高 h 满足 $S \in V_{h+1}$. 只需归纳的证明每个 $x \in \mathbf{TC}(S)$ 均有 $x \in V_{\rho(x)}$ 即可, 其中 ρ 为良基关系的秩函数. □

引理 1.2.138 任何类 C 都有 \in 极小元.

取任意 $S \in C$, $\mathbf{TC}(S)$ 传递集, 取集合 $\mathbf{TC}(S) \cap C$ 之极小者即可.

关于层垒谱系可以另做证明, 考察不在层垒谱系中的集合构成的类的 \in 极小元, 从而得到矛盾.

定理 1.2.139 (\in 归纳) 给定类 C , 若对于任意 $x \in C$, $\forall y \in x (y \in C)$, 则 $C = \mathfrak{U}$.

证明 取 $\mathfrak{U} \setminus C$ 的 \in 极小元 x , 有 $\forall y \in x (y \in C)$, 矛盾. □

定义 1.2.140 一个共尾集 (cofinal set) S 定义于一个所有有限子集都有上界的拟序集 (有向集) P 上, 拟序集 (quasi order) 是没有反对称性的偏序集. 共尾集是满足 $\forall x \in P (\exists y \in S (x \leq y))$ 的 P 子集.

定义 1.2.141 一个共尾集 S 的共尾类 (cofinal type) 定义为共尾集势的最小值, 记作 $\mathbf{cf}(S)$.

引理 1.2.142 对序数 α 有增 $\phi: \mathbf{cf}(\alpha) \rightarrow \alpha$, 使得 $\phi[\mathbf{cf}(\alpha)]$ 是共尾集.

证明 考察一个长为 $\mathbf{cf}(\alpha)$ 的共尾集 a_β , 考察其增子列 $a_\beta: \forall \gamma < \beta (a_\gamma < a_\beta)$, 也是一共尾集, 该子列前段必然对应 $\mathbf{cf}(\alpha)$ 前段, 故其序型必为 $\mathbf{cf}(\alpha)$. □

定义 1.2.143 一个无穷基数 κ 是正则的 (regular) 当且仅当 $\kappa = \mathbf{cf}(\kappa)$.

正则基数是一类通过短于该基数的极限到达不了的基数.

例 1.2.144 $\aleph_{\gamma+\omega}$ 非正则.

证明 依定义知 $\aleph_{\gamma+\omega} = \bigcup_{\beta < \omega} \aleph_{\gamma+\beta}$, 故 $\text{cf}(\aleph_{\gamma+\omega}) \leq \omega$. \square

例 1.2.145 $\aleph_{\gamma+1}$ 正则.

证明 假定有长度小于等于 \aleph_γ 的共尾集 S , 有 $\aleph_{\gamma+1} = \left| \bigcup_{\beta < \aleph_\gamma} a_\beta \right| \leq \aleph_\gamma \times \aleph_\gamma = \aleph_\gamma$, 矛盾. \square

推论 1.2.146 序数的共尾类均为 1 或正则基数.

定义 1.2.147 一个不可数基数 κ 是不可达的 (*inaccessible cardinal*) 当且仅当 κ 是正则的且 $\forall \alpha < \kappa (2^\alpha < \kappa)$.

在 NBG 公理中, 无法证明不可达基数的存在性, Grothendieck 的 1.2.134 依旧是一个奢侈的假设.

定理 1.2.148 Grothendieck 宇宙是层垒谱系中不可达基数 κ 对应的 V_κ .

证明 考察 Grothendieck 宇宙中 \mathbf{On} . \square

Grothendieck 宇宙 U 就像一个虚拟机, 在集合论框架下虚拟的运行了一个集合论, 对应的类便是 \mathcal{PU} 中的元素, 集合就是 U 中的元素, 运用 Grothendieck 宇宙可以有效避免一些集合论的困难, 但是其究竟是否有必要, 仍然是数学哲学与群体心理学的交界的议题.

定义 1.2.149 (von Neumann 宇宙) *von Neumann 宇宙* (*von Neumann universe*) 定义为 $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} V_\alpha$.

定理 1.2.150 *Axiom of Foundation* 和 $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ 等价.

证明 一个方向运用 1.2.137 即可.

若 $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$, 注意到 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{V}$ 良基. \square

1.2.9 Gödel 编码, 构造性

1.2.9.1 基类, 公式

定义 1.2.151 基类 (*basic class*) 是一类能通过 \mathfrak{C} 经有限长的公式构造出的类.

定义 1.2.152 我们构造如下基类:

1. 宇宙 $\mathfrak{U} := \text{dom}(\mathfrak{C})$ 是基类.

2. 子集判定 $\mathfrak{S} = \{(x, y) : x \subseteq y\}$ 是基类.

证明

$$\mathfrak{S} = (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}) \setminus (\mathbf{dom}((\mathfrak{E}^{-1} \times \mathfrak{U})^{\circ} \setminus (\mathfrak{E} \times \mathfrak{U})^{\circ}))$$

□

3. 单位映射 $\mathfrak{I} = \{(x, x) : x \in \mathfrak{U}\}$ 是基类.

证明

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{S}^{-1} \cap \mathfrak{S}$$

□

4. 求定义域 $\mathfrak{D} = \{(x, y) : \forall t(t \in y \iff \exists z((t, z) \in x))\}$ 是基类.

证明

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{I} \times \mathfrak{U})^{\circ}$$

□

5. 求值域 $\mathfrak{R} = \{(x, y) : \forall t(t \in y \iff \exists z((z, t) \in x))\}$ 是基类.

证明

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{I} \times \mathfrak{U})^{\circ}$$

□

引理 1.2.153 给出二元关系 R , 映射 F, G , 有类 $F_R G := \{x \in \mathbf{dom}[F] \cap \mathbf{dom}[G] : (F(x), G(x)) \in R\}$.

证明

$$F_R G = \mathbf{dom}((R \circ F) \cap G)$$

□

1.2.9.2 Gödel 类存在定理

定义 1.2.154 (Lévy 层级) 一个逻辑公式 ϕ 量词有界 (*bounded quantifier*) 当且仅当其量词均为 $\forall X \in Y$ 或 $\exists X \in Y$.

一个量词有界公式的 Lévy 层级 (*Lévy hierarchy*) 定义为 $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$, 归纳定义高层级的 Lévy 层级.

1. Σ_{n+1} 公式是形如 $\exists X_1 \exists X_2 \dots \exists X_m \phi$, 其中 ϕ 是 Π_n 公式.

2. Π_{n+1} 公式是形如 $\forall X_1 \forall X_2 \dots \forall X_m \phi$, 其中 ϕ 是 Σ_n 公式.

3. Δ_n 是一类即是 Σ_n 又是 Π_n 的公式.

例 1.2.155 任何 Δ_0 公式都等价于一个 \mathfrak{U} 有界公式, 且任何 \mathfrak{U} 有界公式都等价于一个 Σ_2 公式.

证明 $\forall X \in Y(\phi)$ 等价于 $\forall X \in \mathfrak{U}((X \in Y) \wedge \phi)$. \square

定义 1.2.156 一个公式称 \mathfrak{U} 有界当且仅当量词均为 $\exists x \in \mathfrak{U}$ 或 $\forall x \in \mathfrak{U}$.

定义 1.2.157 归纳定义 n 元组 $(x_1, x_2, \dots, x_n) := ((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)$

归纳定义 X^n 为 n 元组的集合, $X^0 := \{\emptyset\}$, $X^{n+1} := X^n \times X$, 当 X 是集合时 X^n 也是集合.

引理 1.2.158 对于任意自然数 $i, j \leq n$, 有基类 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in x_j\}$.

证明 递归的定义记号 $\mathbf{dom}^0 := \mathfrak{I}$, $\mathbf{dom}^{n+1} := \mathbf{dom} \circ \mathbf{dom}^n$, 根据 4, 5 和 3 知每个 \mathbf{dom}^n 为基类.

于是映射 $\mathbf{Pr}_i^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_i$ 为基类 $\mathbf{ran}(\mathbf{dom}^{n-i})$.

于是考察 1.2.153 中的 $(\mathbf{Pr}_i^n)_{\mathfrak{C}}(\mathbf{Pr}_j^n)$ 为基类 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in x_j\}$. \square

引理 1.2.159 对于任意自然数 $i \leq n$, (基) 类 Y , 有 (基) 类 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in Y\}$ 和基类 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : Y \in x_i\}$.

证明 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in Y\} = \mathbf{dom}((\mathfrak{U}^n \times Y) \cap \mathbf{Pr}_i^n)$.

而所有包含 Y 的集合可以表做类 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : Y \in x_i\} = \mathbf{ran}(\mathfrak{C} \cap (Y \times \mathfrak{U}))$. \square

引理 1.2.160 对于任意自然数 n , (基) 类 Y, Z , 有 (基) 类 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : Y \in Z\}$.

证明 无非是 \emptyset 或者 \mathfrak{U}^n . \square

以下命题是本节最重要的 Gödel 类存在定理.

定理 1.2.161 (Gödel, 1940) 对任意逻辑公式 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 为自由变元, 而 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 为给定的变元, 存在 \mathfrak{U}^n 子类 $\mathbf{Free}(\phi) := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m)\}$,

如果 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 是基类 $\mathbf{Free}(\phi)$ 也是基类.

证明 每个极小的公式都由两个变元, 一个关系与两个括号表达, 对公式长度施以归纳, 对于公式 ϕ .

1. $\phi = \psi \vee \chi$ 有

$$\mathbf{Free}(\phi) = \mathbf{Free}(\psi) \cup \mathbf{Free}(\chi)$$

2. $\phi = \exists X(\psi)$ 依归纳假设有

$$\mathbf{Free}(\psi) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x) : \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, x, Y_1, Y_2, \dots, Y_m)\}$$

从而 $\mathbf{Free}(\phi) = \mathbf{dom}(\mathbf{Free}(\psi))$.

3. $\phi = \neg\psi$ 有

$$\mathbf{Free}(\phi) = \mathfrak{U}^n \setminus \mathbf{Free}(\psi)$$

□

引理 1.2.162 以下定义的公式 $\phi(X, E)$ 使得满足 $\phi(X, \mathfrak{E})$ 的类 X 均非基类.

证明 仿照 Russell 悖论.

令 $2^{<\omega} := \bigcup_{n \in \omega} 2^n$ (n 到 2 的映射), 对 $k \in 2$ 给出映射 $\vec{k} : 2^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$, 使得 $\vec{k}(s) = (0, k) \cup \{(n \cup \{n\}, y) : (n, y) \in s\}$.

对自然数 n , 同理令 $2^{<n} := \bigcup_{k < n} 2^k$, 令 $T := \bigcup_{n \in \omega} 6^{2^{<n}}$.

对类 X 定义像 $X_a := \{x \in \mathfrak{U} : (a, x) \in X\}$, 给出性质 $X_0 = \mathfrak{E}$ 与 $\forall n \in \omega \forall \lambda \in 6^{2^{<n}}$:

1. 若 $\lambda(\emptyset) = 0$ 则 $X_\lambda = X_{\lambda \circ \vec{0}}$.
2. 若 $\lambda(\emptyset) = 1$ 则 $X_\lambda = (X_{\lambda \circ \vec{0}}) \setminus (X_{\lambda \circ \vec{1}})$.
3. 若 $\lambda(\emptyset) = 2$ 则 $X_\lambda = (X_{\lambda \circ \vec{0}}) \times (X_{\lambda \circ \vec{1}})$.
4. 若 $\lambda(\emptyset) = 3$ 则 $X_\lambda = (X_{\lambda \circ \vec{0}})^{-1}$.
5. 若 $\lambda(\emptyset) = 4$ 则 $X_\lambda = (X_{\lambda \circ \vec{0}})^\cup$.
6. 若 $\lambda(\emptyset) = 5$ 则 $X_\lambda = \mathbf{dom}(X_{\lambda \circ \vec{0}})$.

假定有这样的类 X , 令 $\Lambda := \{\lambda \in T : \lambda \notin X_\lambda\}$ 而任意基类有 $D = X_\lambda$. □

另外的, 我们有以下结论 [Stacks, Tag 000G]:

定理 1.2.163 (Reflection principle) 对所有变元都是集合的公式 ϕ 定义 ϕ^M 为将所有 $\exists x$ 替换为 $\exists x \in M$, 将所有 $\forall x$ 替换为 $\forall x \in M$ 所得的新公式.

给出集合 M_0 和有限个公式 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 有包含 M_0 的集合 M 满足对于任意 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M^n$ 有 $\phi^M(x_1, x_2, \dots, x_n) \iff \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 成立.

更一般的 M 可取为归纳集, 乃至层垒谱系中的一员, 允许选择公理时, 有基数不等式 $|M| \leq |M_0| \cdot \aleph_0$.

证明以及更深入的理论将在模型论里细讲.

1.2.9.3 Gödel 编码

定义 1.2.164 *Gödel 操作 (Gödel operations)* 定义为以下九个映射:

1. $\ddot{G}_0 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto x.$
2. $\ddot{G}_1 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto x \setminus y.$
3. $\ddot{G}_2 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto x \times y.$
4. $\ddot{G}_3 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto x^{-1}.$
5. $\ddot{G}_4 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto x^{\odot}.$
6. $\ddot{G}_5 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto x \cap \mathfrak{E}.$
7. $\ddot{G}_6 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto \mathbf{dom}(x).$
8. $\ddot{G}_7 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto \bigcup x.$
9. $\ddot{G}_8 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, (x, y) \mapsto \{x, y\}.$

引理 1.2.165 以上九个映射均为基类.

证明 运用 [Gödel 类存在定理](#) 即可. □

定义 1.2.166 定义 $\dot{G}_i : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}, \dot{G}_i(x) := \ddot{G}_i(x, x).$

定义 1.2.167 (Gödel 扩张) 一个 *Gödel 扩张 (Gödel extension)* 是映射 $G : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}$, 使得

$$G(x) = \bigcup_{i=0}^8 \ddot{G}_i[x \times x] = \{u, u \setminus v, u \times v, u^{-1}, u^{\odot}, u \cap \mathfrak{E}, \mathbf{dom}(u), \bigcup u, \{u, v\} : u, v \in x\}$$

引理 1.2.168 *Gödel 扩张* 是基类.

引理 1.2.169 对 $x \subseteq y$, 有 $G(x) \subseteq G(y).$

引理 1.2.170 有 $x \subseteq G(x)$, 给出链 $x \subseteq G(x) \subseteq G(G(x)) \subseteq \dots$

归纳的定义 $G^{o0}(x) = x, G^{on}(x) := G(G^{o(n-1)}(x))$, 定义 *Gödel 包 (Gödel's hull)* 为 $G^{o\omega}(x) := \bigcup_{n \in \omega} G^{on}(x).$

引理 1.2.171 传递集的 *Gödel 包* 依旧传递.

证明 对传递集 $x, G(x)$ 亦传递. □

定义 1.2.172 (Gödel 可构造宇宙) 归纳的定义 $(L_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{On}}$:

$$L_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} (\mathcal{P}(L_\beta)) \cap G^{\omega\omega}(L_\beta \cup \{L_\beta\})$$

定义 Gödel 可构造宇宙 (Gödel's constructible universe) 为

$$\mathfrak{L} := \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} L_\alpha$$

引理 1.2.173 L_α 满足以下性质:

1. L_α 是传递的.
2. $L_{\alpha+1} = \mathcal{P}(L_\alpha) \cap G^{\omega\omega}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$.
3. $L_\alpha \subseteq V_\alpha$.
4. $\alpha \in L_{\alpha+1}$.

证明 第一条只需对 α 归纳.

第二条注意到 $L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup (\mathcal{P}L_\alpha \cap G^{\omega\omega}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})) = \mathcal{P}(L_\alpha) \cap G^{\omega\omega}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$.

第三条对 α 归纳, 注意到 \mathcal{P} 的限制刚好对应层全谱系.

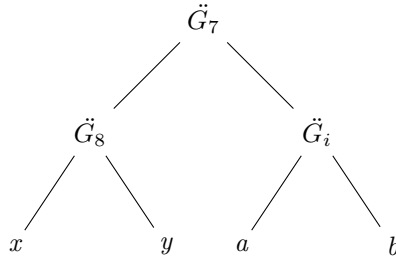
第四条对 α 归纳, 如若 $\alpha = \beta + 1$, 有 $\beta \in L_\alpha$, 自然推出以及 L_α 传递得到 $\alpha \in \mathcal{P}L_\alpha$, 另一方面 $\alpha \in G^{\omega\omega}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$ 源自 $\alpha + 1 = \bigcup\{\alpha, \{\alpha, \alpha\}\}$. 如若 $\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta$, 所有序数 $\beta < \alpha$ 有 $\beta \in L_{\beta+1} \in L_\alpha$, 从而 $\alpha \in \mathcal{P}L_\alpha$, 另一方面 $\alpha \in G^{\omega\omega}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$ 是注意到 $L_\alpha \cap \mathbf{On}$ 可被构造. \square

引理 1.2.174 令 $x, y \in L_\alpha$, 有 $x \setminus y, x \cap \mathfrak{C}, \bigcup x, \mathbf{dom}(x), x \times y, x^{-1}, x^\circ, \{x, y\}$ 均在 $L_{\alpha+2}$ 中.

定义 1.2.175 一个类 X 称 Gödel 闭的 (Gödel closed) 当且仅当对于任意 i , $x, y \in X$ 则 $\ddot{G}_i(x, y) \in X$.

定理 1.2.176 可构造宇宙 \mathfrak{L} 是 Gödel 闭, 传递的真类, 有 $\mathbf{On} \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{V}$.

注记 1.2.177 \mathfrak{L} 元素可以被解释为一颗取值 9 高 n 的满二叉树, 如 $x \cup y = \ddot{G}_7(\ddot{G}_8(x, y), \ddot{G}_i(a, b))$ 可以被解释为高 2 的二叉树:



也即通过 $\bigcup_{n \in \omega} 9^{2^{<n}}$ 枚举如下.

定义 $\vec{k} := 2^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$ 为 $\vec{k}(s) = (0, k) \cup \{(n \cup \{n\}, y) : (n, y) \in s\}$,

对 $\lambda \in 2^{<(n+1)} \rightarrow 9$ 给出了两个 $2^{<n} \rightarrow 9$ 的子树 $\lambda \circ \vec{0}$, $\lambda \circ \vec{1}$ 于是归纳定义公式:

定义 1.2.178 对于 $\lambda : 2^{<n} \rightarrow 9$, 归纳定义 $G_\lambda : \mathfrak{U}^{2^n} \rightarrow \mathfrak{U}$.

1. $n = 0$ 则 $G_\lambda((0, x)) = G_\emptyset((0, x)) = x$.
2. $n > 0$ 则 $G_\lambda(x) = G_{\lambda(0)}(G_{\lambda \circ \vec{0}}(x \circ \vec{0}), G_{\lambda \circ \vec{1}}(x \circ \vec{1}))$.

推论 1.2.179 有 $G^{\circ n}(x) = \bigcup \{G_\lambda(x^{2^n}) : (\lambda : 2^{<n} \rightarrow 9)\}$.

于是 $G^{\circ \omega}(x) = \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{\lambda \in 9^{2^n}} G_\lambda[x]$.

定义 1.2.180 (Gödel) 在 \mathfrak{L} 上定义典范良序 \mathfrak{W} , 注意到

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{\lambda \in 9^{2^{<n}} \mathcal{P}(L_\beta)} G_\lambda[(L_\beta \cup \{L_\beta\})^{2^n}]$$

先定义在 $2^{<\omega}$ 与 $9^* = \bigcup_{n \in \omega} 9^{2^{<n}}$ 上的典范序 $<_2$ 与 $<_9$:

1. $|f| < |g|$
2. $\exists i \in \mathbf{dom}(f) = \mathbf{dom}(g) ((f \upharpoonright i = g \upharpoonright i) \wedge (f(i) <_9 g(i)))$
1. $|f| < |g|$
2. $\exists s \in \mathbf{dom}(f) = \mathbf{dom}(g) ((f \upharpoonright 2^{<\omega}(s) = g \upharpoonright 2^{<\omega}(s)) \wedge (f(s) <_2 g(s)))$

于是定义 L_α 上的良序

1. α 是极限序数 $W_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} L_\beta \times (L_\alpha \setminus L_\beta) \cup (W_\beta \upharpoonright (L_{\beta+1} \setminus L_\beta))$
2. $\alpha = \beta + 1$ 时先定义 $T_\beta := \bigcup_{n \in \omega} 9^{2^{<n}} \times (L_\beta \cup \{L_\beta\})^{2^n}$ 上的良序 $(\lambda, f) < (\mu, g)$ 当且仅当
 - (a) $\lambda <_9 \mu$
 - (b) $\lambda = \mu$ 且 $\exists s \in \mathbf{dom}(\lambda) (f \upharpoonright 2^{<\omega}(s) = g \upharpoonright 2^{<\omega}(s) \wedge f(s) <_\beta g(s))$

其中 $<_\beta := W_\beta \cup (L_\beta \times \{L_\beta\})$. 令 $W_\alpha := W_\beta \cup (L_\beta \times (L_\alpha \setminus L_\beta)) \cup \{(a, b) \in (L_\alpha \setminus L_\beta) \times (L_\alpha \setminus L_\beta) : \exists (\lambda, f) \in T_\beta (a = G_\lambda(f) \wedge \forall (\mu, g) \in T_\beta (b = G_\mu(g) \implies (\lambda, f) < (\mu, g)))\}$.

取并集延拓至 \mathfrak{L} 即为所求.

公理 1.2.181 (Axiom of Constructibility) $\mathfrak{L} = \mathfrak{U}$.

引理 1.2.182 *Axiom of Constructibility* 可以推出 *Axiom of Foundation* 和 *Axiom of Global Choice*.

证明 有 $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}$ 只能全取等号.

选择函数利用 \mathfrak{L} 上的典范良序构造即可. \square

仿此思路, 亦可定义对类的操作, 此种自举的想法, 在逻辑研究中非常重要, 剩余的讨论依旧遗留在高等集合论中讨论.

1.3 实数理论

本节在集合论的基础上进行一些基础的构造, 主要在于实数的存在性与唯一性.

1.3.1 有理数

定义 1.3.1 记 $\mathbb{N} := \omega$, 称自然数集, $x \in \mathbb{N}$ 为自然数 (*natural number*).

在自然数上定义加法与乘法, 继承自序数的运算 (基数的运算). 同样, 也继承自序数 (基数) 的序关系.

定义 1.3.2 在 \mathbb{N}^2 上定义等价关系 $R := \{((a, b), (c, d)) : a + d = b + c\}$, 其划分的等价类称整数 (*integer*). 记 \mathbb{Z} 为整数集.

定义 1.3.3 一个 S 上二元运算 R 是 $S^{S \times S}$ 的一个元素, 可写作 $sRt := R(s, t)$.

定义 1.3.4 定义加法减法与乘法运算 $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) - (c, d) := (a + d, b + c)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac + bd, ad + bc)$, 其中 $(a, b), (c, d)$ 与等号右侧均为等价类的一个代表元.

证明 归纳易于证明等价类的代表元不影响运算结果. \square

定义 1.3.5 定义整数上的序结构 $<$ 为 $(a, b) < (c, d) \iff a + d < b + c$, 大于零的整数称正整数 $\mathbb{Z}_{>0}$, 大于等于零的整数称亦是自然数, 小于零的整数称负数.

证明 归纳易于证明等价类的代表元不影响结果. \square

引理 1.3.6 有保持加法乘法运算与序结构的单射 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, 由于我们只关心结构, 亦认作 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

证明 $n \mapsto (n, 0)$ 即可. \square

定义 1.3.7 定义 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}$ 上的等价关系 $R := \{((a, b), (c, d)) : ad = bc\}$, 其划分的等价类称有理数 (*rational number*). 记有理数集为 \mathbb{Q} , 第一项为分子, 第二项为分母.

定义 1.3.8 定义有理数上的加法减法与乘法运算 $(a, b) + (c, d) := (ad + bc, bd)$, $(a, b) - (c, d) := (ad - bc, bd)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$, 其中 $(a, b), (c, d)$ 与等号右侧均为等价类的一个代表元.

证明 归纳易于证明等价类的代表元不影响运算结果. \square

定义 1.3.9 定义有理数上的除法运算如下 $c > 0 \implies (a, b)/(c, d) := (ad, bc)$, $c < 0 \implies (a, b)/(c, d) := (-ad, -bc)$, 其中 $(a, b), (c, d)$ 与等号右侧均为等价类的一个代表元.

定义 1.3.10 定义有理数上的序结构 $<$ 为 $(a, b) < (c, d) \iff ad < bc$, 亦称正负.

证明 归纳易于证明等价类的代表元不影响结果. \square

引理 1.3.11 有保持加法减法乘法运算与序结构的单射 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, 由于我们只关心结构, 亦认作 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

证明 $n \mapsto (n, 1)$ 即可. \square

定义 1.3.12 定义 $-a := 0 - a = -1 \cdot a$.

引理 1.3.13 代数运算有如下性质:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. $(-a) + a = 0$
5. $a \cdot b = b \cdot a$
6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7. $a \cdot 1 = a$
8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
9. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
10. $a \cdot 0 = 0$

$$11. a - b = a + (-b)$$

$$12. a/b = a \cdot (1/b)$$

$$13. a + b - b = a$$

$$14. (a \cdot b)/b = a$$

故称减法为加法的逆运算, 除法为乘法的逆运算.

证明 对分子分母归纳. □

引理 1.3.14 加减乘除与序关系在有理数上满足如下性质:

$$1. a < b \implies a + c < b + c$$

$$2. a < b \wedge c > 0 \implies ac < bc$$

$$3. a < b \wedge c < 0 \implies ac > bc$$

$$4. a < b \wedge c > 0 \implies a/c > b/c$$

$$5. a < b \wedge c < 0 \implies a/c < b/c$$

证明 对分子分母归纳. □

1.3.2 实数

1.3.2.1 实数公理

实数谓一组资料 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, 其中 \mathbb{R} 为集合, $+, \cdot$ 为二元运算, \leq 为二元关系, 满足如下公理:

公理 1.3.15 (域公理) \mathbb{R} 是一个域, 即满足如下条件:

$$1. \text{ 加法交换律: } \forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} (a + b = b + a)$$

$$2. \text{ 加法结合律: } \forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} ((a + b) + c = a + (b + c))$$

$$3. \text{ 加法单位元: } \exists 0 \forall a \in \mathbb{R} (a + 0 = a)$$

$$4. \text{ 加法逆元: } \forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} (a + (-a) = 0)$$

$$5. \text{ 乘法交换律: } \forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} (a \cdot b = b \cdot a)$$

$$6. \text{ 乘法结合律: } \forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$$

$$7. \text{ 乘法单位元: } \exists 1 \forall a \in \mathbb{R} (a \cdot 1 = a)$$

8. 乘法逆元: $\forall a \in \mathbb{R} \forall a \neq 0 \exists (1/a) \in \mathbb{R} (a \cdot (1/a) = 1)$

9. 分配律: $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} (a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$

上述有理数的加法乘法运算满足域公理, 此后常省略无必要的括号, 运算规则为先乘除后加减.

公理 1.3.16 (序公理) \leq 构成序, 满足以下条件:

1. \leq 具有传递性 (*transitivity*): $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} (a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c)$

2. \leq 具有反对称性 (*antisymmetry*): $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} (a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b)$

3. \leq 是线序 (*linear*): $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} (a \leq b \vee b \leq a)$

4. \leq 与加法相容: $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} \forall c \in \mathbb{R} (a \leq b \implies a + c \leq b + c)$

5. \leq 与乘法相容: $\forall a \geq 0 \forall b \geq 0 (ab \geq 0)$

上述有理数亦满足序公理, 有关序与加减乘除相容的讨论略去.

公理 1.3.17 (Archimedes 公理) \mathbb{R} 满足 *Archimedes* 公理, 即 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x > 0 \implies \exists n \in \mathbb{N} (nx > y))$. 其中 $nx := \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ 项}}$.

引理 1.3.18 存在单射 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, 由于我们只关心结构, 亦认作 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

证明 有自然数的嵌入 $n \mapsto \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ 项}}$, 构造整数的嵌入 $(a, b) \mapsto a + (-b)$,

构造有理数的嵌入 $(a, b) \mapsto a(1/b)$. □

定义 1.3.19 称 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为无理数集.

公理 1.3.20 (区间套公理) 给定闭区间 $I_n = [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 满足 $I_{n+1} \subseteq I_n$, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

称满足 **域公理** **序公理** **Archimedes 公理** **区间套公理** 的资料 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ 为实数 (real number).

定义 1.3.21 称 $a > 0$ 的 a 为正数, $a < 0$ 的 a 为负数, 定义绝对值 $|a| := \max(a, -a)$.

定义 1.3.22 定义正整数次幂 $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 项}}$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. 0 次幂 $a^0 := 1$, 负整数次幂 $a^{-n} := 1/a^n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

引理 1.3.23 对于任意正数 M , 存在正数 N 使得 $N > M$. 对于任意正数 a , 存在正数 ε 使得 $a > \varepsilon$.

证明 取 $N := M + 1$, 取 $\varepsilon := a/2$. □

定义 1.3.24 定义取整函数 $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, 使得 $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

证明 对正数 x 只需运用 [Achimedes 公理](#) 寻求极小 n 使得 $n > x$, 对负数 x 只需运用 [Achimedes 公理](#) 寻求极小 n 使得 $n \geq -x$ 即可.

唯一性源于在 \mathbb{Z} 上是线序, 并且 $\forall n \in \mathbb{Z} (\{x \in \mathbb{Z} : n < x < n + 1\} = \emptyset)$. □

引理 1.3.25 归纳易于证明 $\forall n \in \mathbb{N} (2^n \geq n)$.

定理 1.3.26 (确界原理) 任取非空 $X \subseteq \mathbb{R}$, 若 X 有上界, 则存在最小上界 $s := \sup X$ 称上确界.

证明 先取 $x \in X$ 与 X 一上界 a , 只需讨论 $x \neq \sup X$ 的情况.

依 [Achimedes 公理](#) 对任意 n 存在 k 有 $x + k2^{-n} > a$, 令 k_n 为使得 $x + k2^{-n}$ 为 X 上界之极小 k , 有区间 $I_n = [x + (k_n - 1)2^{-n}, x + k_n 2^{-n}]$, 经验证, 这些区间是一个区间套, 取 $J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, 有 $J \neq \emptyset$, 我们来说明 J 只含一个元素.

假定 $a, b \in J$, 不妨 $a < b$, 则有 $b - a \leq 2^{-n} = 2^{\lfloor \frac{1}{b-a} \rfloor}$ 矛盾, 同理验证知 J 中唯一元素为 X 上确界. □

推论 1.3.27 循上述定理证明的思路, 如果区间套 $I_n = [a_n, b_n]$ 满足 $\forall \epsilon > 0 \exists n (b_n - a_n < \epsilon)$, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ 只含一个元素.

引理 1.3.28 确界原理与区间套公理等价.

证明 取 a_n 上确界在区间套里. □

定义 1.3.29 定义区间:

1. $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2. $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3. $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
4. $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
5. $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
6. $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
7. $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
8. $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

1.3.2.2 Dedekind 分割

定义 1.3.30 (Dedekind 分割) 对有理数的子集 $X \subseteq \mathbb{Q}$, 若满足如下条件:

1. $X \neq \emptyset$
2. $X \neq \mathbb{Q}$
3. X 无最大元
4. $\forall x \in X \forall y \in (\mathbb{Q} \setminus X)(x < y)$

则称 X 为一个 *Dedekind 分割* (*Dedekind cut*).

定义 1.3.31 定义 *Dedekind 分割* 上的加法为 $X + Y := \{x + y : x \in X \wedge y \in Y\}$.

引理 1.3.32 存在显见的 \mathbb{Q} 嵌入 $q \mapsto \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$.

引理 1.3.33 $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 总有 $x \in X, x' \in \mathbb{Q} \setminus X$ 使得 $0 < x' - x < 1/n$.

证明 择定 $x_0 \in X, x'_0 \in \mathbb{Q} \setminus X$, 归纳的定义 $x_k \in X, x'_k \in \mathbb{Q} \setminus X$, 使得 $x_{k+1}, x'_{k+1} \in \{x_k, x'_k, \frac{1}{2}(x_k + x'_k)\}$.

注意到每个正有理数 (p, q) 均有 $(p, q) > (1, q) > 2^{-q}$, 故链 x_k, x'_k 必然有满足条件之 x, x' . \square

引理 1.3.34 对于任意 *Dedekind 分割* X, Y , 有 *Dedekind 分割* Z 使得 $X + Z = Y$.

证明 定义 $Z := \{y - x' : x \in \mathbb{Q} \setminus X \wedge y \in Y\}$ 即可. \square

定义 1.3.35 定义 *Dedekind 分割* 上的序为 $X < Y \iff X \subseteq Y$, 此序为线序, 亦给出正负之分别.

定义 1.3.36 分类定义 *Dedekind 分割* 上的乘法:

1. $X = 0 \vee Y = 0 \implies X \cdot Y = 0$
2. $X > 0 \wedge Y > 0 \implies X \cdot Y := \{x \cdot y : x \in X \wedge y \in Y\}$
3. $X < 0 \wedge Y < 0 \implies X \cdot Y := (-X) \cdot (-Y)$
4. $X < 0 \wedge Y > 0 \implies X \cdot Y := -(X \cdot (-Y))$
5. $X > 0 \wedge Y < 0 \implies X \cdot Y := -((-X) \cdot Y)$

推论 1.3.37 易证 *Dedekind 分割* 满足 [域公理](#) [序公理](#) [Archimedes 公理](#) [区间套公理](#), 故存在实数集 \mathbb{R} .

1.3.2.3 实数的唯一性

我们采用自然的嵌入 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ 以视 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, 对每个实数 r 分配 Dedekind 分割 $\{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$, 称之为 r 的截断 (cut).

此映射单源自于若有 $r_1 < r_2$ 使得其分配到同一个 Dedekind 分割, 利用 [Archimedes 公理](#) 给出 $n(r_2 - r_1) > 1$, 寻求 1.3.33 中的 x, x' 使得 $0 < x' - x < 1/n$ 即得矛盾.

此映射满源自于任取 Dedekind 分割 x , 1.3.33 给出 x_k 与 x'_k 使得 $0 < x' - x < 1/n$, 运用 [区间套公理](#) 即可.

此章语言简短, 读者应自行补充证明细节.

1.4 初等范畴论

1.4.1 范畴与函子

定义 1.4.1 (范畴) 一个范畴 \mathcal{C} 包含以下资料:

1. 一个类 $\text{Ob}(\mathcal{C})$, 称为对象类.
2. 对于任意 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 中的对象 X, Y , 分配态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
3. 对任意对象 X 有单位映射 $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.
4. 对任意对象 $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ 有复合映射 $\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ 满足:
 - (a) 结合律: $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 有 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
 - (b) 单位元: $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 有 $f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f$.

定义 1.4.2 (交换图表) 一个图表意味着由点代对象而由一个点至另一个点的箭头代表两对象间态射的, 比如:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow g & & \downarrow h \\
 C & \xrightarrow{k} & D
 \end{array}$$

图表交换意味着两点间任意态射合成均相等, 比如 $h \circ f = k \circ g$.

例 1.4.3 定义 **Set** 为集合范畴, 其中对象为集合, 对象间态射为映射.

例 1.4.4 定义 $\mathbf{0}$ 为空范畴, 也即 $\text{Ob}(\mathbf{0}) = \emptyset$.

例 1.4.5 对偏序集 P , 定义其对应的范畴 $\text{Cat}(P)$ 如下:

1. 对象是 P 中的元素.
2. $x \leq y$ 时有唯一态射 $x \rightarrow y$.
3. $x \not\leq y$ 时没有态射.

定义 1.4.6 对集合 S 定义离散范畴 $\text{Disc}(S)$ 如下:

1. 对象是 S 中的元素.
2. 仅有单位态射.

定义 1.4.7 若有一组映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ 使得 $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$, 则称 f 为 g 的逆, f 是同构, 记作 $f^{-1} = g$.

X 与 Y 同构记作 $X \cong Y$, 命全体 X 与 Y 间的同构为 $\text{Isom}_C(X, Y)$.

定义 1.4.8 定义自同态集 $\text{End}_C(X) := \text{Hom}_C(X, X)$ 与自同构集 $\text{Aut}_C(X) := \text{Isom}_C(X, X)$, 其上有自然的复合运算.

定义 1.4.9 态射 $f: X \rightarrow Y$ 称为单态射, 如果对于任意 $g, h: Z \rightarrow X$, 有 $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.

态射 $f: X \rightarrow Y$ 称为满态射, 如果对于任意 $g, h: Y \rightarrow Z$, 有 $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

定义 1.4.10 (反范畴) 定义范畴 C^{op} 如下:

1. $\text{Ob}(C^{\text{op}}) = \text{Ob}(C)$.
2. $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Hom}_C(Y, X)$.
3. 对于态射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 定义 $g \circ_{\text{op}} f := f \circ g$.

定义 1.4.11 (函子) 一个函子 $F: C \rightarrow D$ 包含以下资料:

1. 对象映射 $F: \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$.
2. 对于任意对象 $X, Y \in C$, 有映射 $F: \text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_D(F(X), F(Y))$.
3. 对于任意对象 $X \in C$, 映单位态射为单位态射 $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.
4. 对于任意对象 $X, Y, Z \in C$ 保持态射的复合 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

定义 1.4.12 一个函子称为忠实 (*faithful*), 如果对于任意对象 $X, Y \in \mathcal{C}$, 映射 $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ 是单射.

一个函子称为全 (*full*), 如果对于任意对象 $X, Y \in \mathcal{C}$, 映射 $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ 是满射.

一个函子称本质满 (*essentially surjective*), 如果对于任意对象 $Y \in \mathcal{D}$, 存在对象 $X \in \mathcal{C}$ 使得 $F(X) \cong Y$.

定义 1.4.13 对于函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, 定义函子间的复合 $(G \circ F)(X) := G(F(X))$, $(G \circ F)(f) := G(F(f))$.

证明 只需注意到 $G(F(f)) \circ G(F(g)) = G(F(f) \circ F(g)) = G(F(f \circ g))$. \square

定义 1.4.14 显见函子复合满足结合律, 定义范畴 **Cat** 如下:

1. 对象是 Ob 是集合的范畴.
2. $\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 是所有函子 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

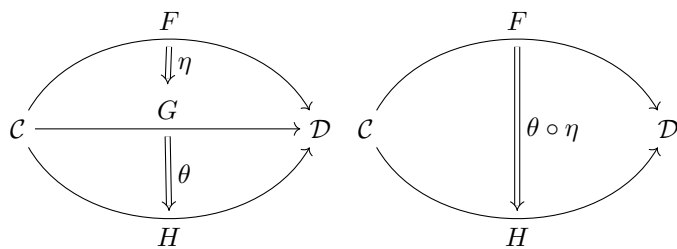
定义 1.4.15 (自然变换) 两个函子 $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 之间的自然变换 (*natural transformation*) $\eta: F \rightarrow G$ 为对所有 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 择定的态射 $\eta_X: F(X) \rightarrow G(X)$, 满足对于任意对象 $X, Y \in \mathcal{C}$ 与 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 有交换图表:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

记作 $\eta: F \rightarrow G$, 可以画作图表:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \curvearrowright & \parallel & \curvearrowleft \\ \mathcal{C} & \eta & \mathcal{D} \\ \curvearrowleft & \parallel & \curvearrowright \\ & G & \end{array}$$

定义 1.4.16 (纵合成) 给出 $\eta: F \rightarrow G$, $\theta: G \rightarrow H$, 定义纵合成 $\theta \circ \eta: F \rightarrow H$ 为 $(\theta \circ \eta)_X := \theta_X \circ \eta_X$, 解作图表:

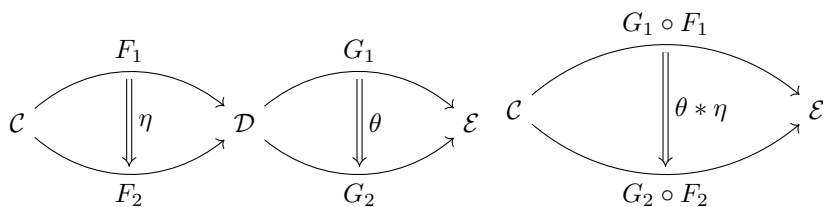


证明 只需注意到以下交换图表 (两小方块交换故外框交换):

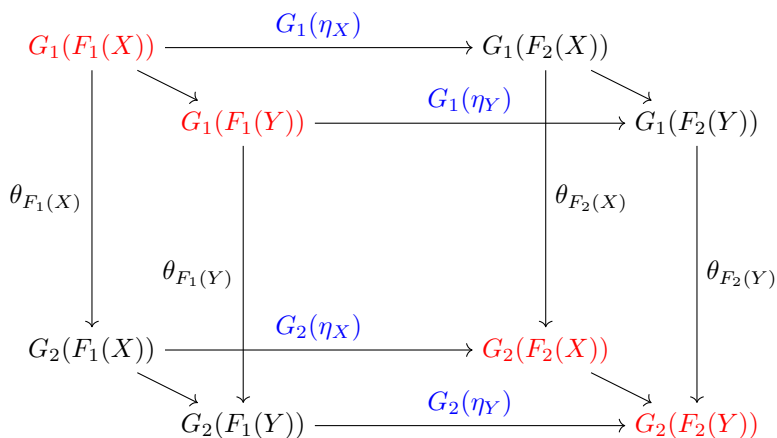
$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) & \xrightarrow{\theta_X} & H(X) \\
 F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & & H(f) \downarrow \\
 F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & H(Y)
 \end{array}$$

□

定义 1.4.17 (横合成) 给出三个范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 以及四个函子 $F_1, F_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G_1, G_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, 给出自然变换 $\eta : F_1 \rightarrow F_2$, $\theta : G_1 \rightarrow G_2$, 定义横合成 $\theta * \eta : G_1 \circ F_1 \rightarrow G_2 \circ F_2$ 为 $(\theta * \eta)_X := \theta_{F_2(X)} \circ G_1(\eta_X)$, 解作图表:



证明 需注意到以下交换图表:



前后左右四面交换源自 θ 为自然变换, 上下两面交换源自 η 为自然变换, 于是红色标记出的子图亦交换. \square

特别的, 在标记自然变换时, 我们可以讲单独的函子 F 拉开成为 $\text{id}_F : F \rightarrow F$, 在每个 X 上为 $\text{id}_{F(X)}$.

定义 1.4.18 对于范畴 \mathcal{C}, \mathcal{D} , 定义函子范畴 $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 如下:

1. 对象是函子 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.
2. 对于函子 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, 定义态射集 $\text{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(F, G)$ 为所有 $F \rightarrow G$ 的自然变换.
3. 态射的合成是自然变换的纵合成.

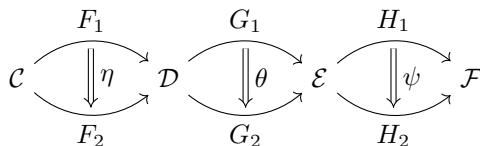
证明 只需证明纵合成之结合律, 只需注意到态射结合律:

$$(\theta_X \circ \eta_X) \circ \phi_X = \theta_X \circ (\eta_X \circ \phi_X)$$

\square

引理 1.4.19 函子的纵合成满足结合律.

证明 给出自然变换 θ, ψ, ϕ 如下:



有交换图表 (交换性源自于施 ψ 自然性于 $G_2\eta_X$):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_1G_2F_2(X) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 H_1G_1F_1(X) & \longrightarrow & H_1G_2F_1(X) & & H_2G_2F_2(X) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & H_2G_2F_1(X) & &
 \end{array}$$

□

引理 1.4.20 函子的横纵合成交换, 即亦给出自然变换如下:

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_1 & & G_1 & \\
 & \Downarrow \eta & & \Downarrow \theta & \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E} \\
 & \Downarrow \eta' & & \Downarrow \theta' & \\
 & F_3 & & G_3 &
 \end{array}$$

则有等式 $(\theta' * \eta') \circ (\theta * \eta) = (\theta' \circ \theta) * (\eta' \circ \eta)$.

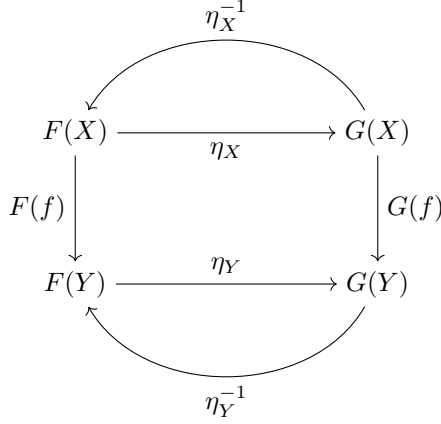
证明 只需注意到以下交换图表:

$$\begin{array}{ccccc}
 G_1F_1(X) & \xrightarrow{G_1\eta_X} & G_1F_2(X) & \xrightarrow{G_1\eta'_X} & G_1F_3(X) \\
 \downarrow \theta_{F_1(X)} & & \downarrow \theta_{F_2(X)} & & \downarrow \theta_{F_3(X)} \\
 G_2F_1(X) & \xrightarrow{G_2\eta_X} & G_2F_2(X) & \xrightarrow{G_2\eta'_X} & G_2F_3(X) \\
 \downarrow \theta'_{F_1(X)} & & \downarrow \theta'_{F_2(X)} & & \downarrow \theta'_{F_3(X)} \\
 G_3F_1(X) & \xrightarrow{G_3\eta_X} & G_3F_2(X) & \xrightarrow{G_3\eta'_X} & G_3F_3(X)
 \end{array}$$

每个小正方形交换源于 θ, θ' 为自然变换, 故外框交换. □

引理 1.4.21 自然变换 $\eta: F \rightarrow G$ 是同构当且仅当对于任意 $X \in \mathcal{C}$, η_X 是同构, 其逆为 $\eta^{-1}: G \rightarrow F$, $\eta_X^{-1} := \eta_X^{-1}$.

证明 给出其逆业已给出每个 η_X 之逆, 而 η^{-1} 是自然性对应了 η 自然性的交换图表, 换言之, 以下图表每一小块交换故外框交换.



□

定义 1.4.22 (范畴等价) 若存在函子 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ 使得 $G \circ F \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$, $F \circ G \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$, 则称 \mathcal{C} 与 \mathcal{D} 等价.

假定上述定义中 \cong 为 $=$, 则称 \mathcal{C} 与 \mathcal{D} 同构.

定义 1.4.23 (子范畴) 给定范畴 $\mathcal{C}', \mathcal{C}$, 若 $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 且保持复合运算, 则称 \mathcal{C}' 是 \mathcal{C} 的子范畴 (*subcategory*), 子范畴对应一个自然的嵌入 $\iota: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, 总是忠实, 子范畴亦有全和本质满的性质.

定义 1.4.24 (骨架) 如果范畴 \mathcal{C}' 是 \mathcal{C} 的全子范畴, 且对于任意 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, 都存在唯一 $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ 使得 $X \cong X'$, 则称 \mathcal{C}' 是 \mathcal{C} 的骨架 (*skeleton*).

自身是骨架的范畴称为骨架范畴 (*skeletal category*).

定义 1.4.25 (小范畴) 为了避免一些集合论的困难, 我们定义小范畴 (*small category*) 为对象类是集合的范畴.

给出一个 *Grothendieck* 宇宙 \mathcal{U} , 定义 \mathcal{U} -小范畴为对象类是 \mathcal{U} 中的集合的范畴.

引理 1.4.26 任何小范畴 \mathcal{C} 有骨架, 且骨架范畴与 \mathcal{C} 等价.

证明 注意到 \cong 显见的是 $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 上的等价关系, 在每个等价类上使用 [Axiom of Choice](#) 选取代表元 X' , 与等价类中任意一 X 与 X' 间同构 $f_X: X \rightarrow X'$, 选取子范畴 \mathcal{C}' 如下:

1. 对象集为全体代表元 X' .
2. 对于任意 $X', Y' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$.

定义 ι^{-1} 映 X 为其代表元 X' , 映 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为 $f_Y \circ f \circ f_X^{-1}$.

ι^{-1} 函子性, $\iota \circ \iota^{-1} = \text{id}_{\mathcal{C}}$ 是显然的, 而构造 $\iota^{-1} \circ \iota \cong \text{id}_{\mathcal{C}'}$ 的自然变换为 f 即可. \square

引理 1.4.27 范畴等价具有传递性.

证明 给出范畴 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$, 函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, 以及其逆, 给出可逆的自然变换 $\eta : F \circ F^{-1} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, $\theta : F^{-1} \circ F \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$, $\eta' : G \circ G^{-1} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{E}}$, $\theta' : G^{-1} \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$, 构造自然变换 $\eta' \circ (\text{id}_G * \eta * \text{id}_{G^{-1}}) : G \circ F \circ F^{-1} \circ G^{-1} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{E}}$ 有逆 $(\text{id}_G * \eta^{-1} * \text{id}_{G^{-1}}) \circ \eta'^{-1}$, θ 侧可同理构造. \square

引理 1.4.28 骨架范畴间的全忠实本质满函子都是同构.

证明 本质满则在对象集上是双射, 全忠实亦给出每个态射集上的双射. \square

引理 1.4.29 小范畴间函子 F 是等价当且仅当 F 全忠实本质满.

证明 易得骨架范畴间的同构, 考虑等价的传递性即可. \square

1.4.2 Hom 函子与泛性质

定义 1.4.30 对于集合 I 与小范畴 $(C_i)_{i \in I}$, 定义积范畴 $\prod_{i \in I} C_i$ 如下:

1. 对象是积 $\prod_{i \in I} \text{Ob}(C_i)$ 的元素.
2. 对于对象 $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$, 定义态射集 $\text{Hom}_{\prod_{i \in I} C_i}((X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I})$ 为态射集之积 $\prod_{i \in I} \text{Hom}_{C_i}(X_i, Y_i)$.
3. 态射的合成是逐点的, 也即 $(f_i)_{i \in I} \circ (g_i)_{i \in I} = (f_i \circ g_i)_{i \in I}$.

定义余积范畴 $\coprod_{i \in I} C_i$ 如下:

1. 对象是无交并 $\coprod_{i \in I} \text{Ob}(C_i)$ 的元素.
2. 对象 X, Y 间有态射当且仅当其对对应同一个 C_i , 态射集继承自 C_i .

定义自明的投影函子 $\text{Pr}_j : \prod_{i \in I} C_i \rightarrow C_j$ 与包含函子 $\text{In}_j : C_j \rightarrow \prod_{i \in I} C_i$.

定义 1.4.31 多元函子即为从积范畴出发的函子.

定义 1.4.32 (Hom 函子) 对于任意范畴 \mathcal{C} , 有函子 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, 映 (X, Y) 为态射集 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 映 $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ 中态射 (f, g) 为映射 $\phi \mapsto g \circ \phi \circ f$. 称 ϕ 对 f 做拉回 (pullback), 对 g 做推出 (pushforward).

1.5 点集拓扑

1.5.1 基础定义

拓扑是用来度量连续性的.

定义 1.5.1 (拓扑空间) 拓扑空间 (*topological space*) 指资料 (X, \mathcal{T}) 使得 X 是集合且 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, 并满足:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. 有限交 (*finite intersection*) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T} (\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T})$
3. 任意并 (*arbitrary union*) $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T} (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T})$

称 \mathcal{T} 中的元素为开集.

定义 1.5.2 对于任何集合 X , 分别取 $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ 与 $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ 可得到两个拓扑分别称离散拓扑 (*discrete topology*) 与凝聚拓扑 (*indiscrete topology*).

定义 1.5.3 假定 X 上有两个拓扑 \mathcal{T} 与 \mathcal{T}' , 如果 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, 则称 \mathcal{T}' 比 \mathcal{T} 细 (*finer*), 反之如果 $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, 则称 \mathcal{T}' 比 \mathcal{T} 粗 (*coarser*).

引理 1.5.4 对 X 上拓扑 $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ 的交 $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ 是拓扑.

定义 1.5.5 (拓扑基) 给定 X 与 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, 如果 \mathcal{B} 满足:

1. $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B} (x \in B)$
2. 对任意 x, A, B 假使 $x \in A \cap B$ 且 $A, B \in \mathcal{B}$, 则存在 $C \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in C \subseteq A \cap B$

则称 \mathcal{B} 为 X 上的拓扑基 (*topological base*).

定义 1.5.6 如果 \mathcal{T} 是包含 \mathcal{B} 的最粗拓扑, 则称 \mathcal{B} 为 \mathcal{T} 的拓扑基.

引理 1.5.7 一个集合 $U \subseteq X$ 在 \mathcal{B} 生成的拓扑中开当且仅当 $\forall x \in U : \exists B_x \in \mathcal{B} (x \in B_x \subseteq U)$.

证明 这些集合 U 总是开, 因为 $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.
这些集合构成拓扑, 只需逐条验证:

1. $\neg(\exists x \in \emptyset)$ 且 $\forall x \exists B \in \mathcal{B} (x \in B)$, 故 \emptyset, X 开.
2. 任意给出集合 U, V 开, 则只需注意到 $x \in B_x \subseteq B_x^U \cap B_x^V \subseteq U \cap V$, 故 $U \cap V$ 仍开, 有限交无非是二元情况下的延伸.

3. 任意给出 $(U_i)_{i \in I}$, 只需取 B_x 为某个 U_i 中 x 对应的 B_x 即可.

□

定义 1.5.8 对 $x \in X$, 称 $x \in B_x \in \mathcal{B}$ 为基本邻域, 称 $x \in U \in \mathcal{T}$ 为邻域, 全体 x 邻域记作 \mathcal{T}_x .

定义 1.5.9 对于拓扑空间 (X, \mathcal{T}) , 定义其对应的范畴 $\text{Cat}(\mathcal{T})$ 如下:

1. 对象是 \mathcal{T} 中的元素.
2. $X \subseteq Y$ 时有唯一态射 $X \rightarrow Y$.
3. $X \not\subseteq Y$ 时没有态射.

定义 1.5.10 对于拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_x), (Y, \mathcal{T}_y)$ 与映射 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall U \in \mathcal{T}_Y (f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X)$, 则称 f 连续 (*continuous*).

引理 1.5.11 连续映射的复合仍然连续.

证明 对于连续映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, 有 $\forall U \in \mathcal{T}_Z (g^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y)$ 且 $\forall V \in \mathcal{T}_Y (f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X)$, □

推论 1.5.12 连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 诱导出函子 $\text{Cat}(\mathcal{T}_y) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{T}_x)$.

定义 1.5.13 定义拓扑空间范畴 **Top** 如下:

1. 对象是拓扑空间.
2. $\text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ 是所有连续映射 $f: X \rightarrow Y$.

推论 1.5.14 上述定义的 Cat 给出 $\text{Top} \rightarrow \text{Cat}$ 的一个反变函子.

定义 1.5.15 一个度量空间是包含资料 (X, d) 使得 X 是集合且 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 满足:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

例 1.5.16 取 \mathbb{R} 上 $d(x, y) = |x - y|$ 可得到度量空间.

例 1.5.17 取 \mathbb{R}^n 上 $d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\}$ 可得到度量空间.

第二章 代数基础

第三章 分析基础

第四章 代数拓扑

4.1 基本群

第五章 代数数论

Bibliography

- [Ban06] Taras Banakh. “Classical set theory: Theory of sets and classes”. 刊登于: *arXiv preprint* (2023). arXiv: [2006.01613](https://arxiv.org/abs/2006.01613) [math.LO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2006.01613> (引用于 p. [13](#)).
- [Jec02] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2003, pp. xiv + 769. ISBN: 3-540-44085-2 (引用于 p. [17](#)).
- [Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>. 2018 (引用于 p. [32](#)).