大笔记

我

2024-01-27

目录

前言

此笔记意在记录学习中的一些命题证明以及想法.

第一章　基础知识

1.1　逻辑

断言 (Statement) 是一类有明确真值 (T/F) 的语句, 我们定义如下运算:

定义 1.1.1 *对于断言 A 定义其否定 (negation) 为 $\neg A$, 满足如下真值表.*

A	$\neg A$
T	F
F	T

对于断言 A, B 定义其合取 (conjuction) 为 $A \wedge B$, 其析取 (disjuction) 为 $A \vee B$, 满足如下真值表.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

定义 1.1.2 *如果 $E(x)$ 在 x 是某些对象时为断言, 则称 $E(x)$ 为一个性质 (property).*

我们承认类 (class) 的概念如下, 若对象 x 属于类 A, 则记为 $x \in A$, 否则记为 $x \notin A$. 我们用 $\{x \in X; E(x)\}$ 表示 X 中所有满足性质 E 的对象组成的类.

定义 1.1.3 *我们用 $\exists$ 代表存在某个对象, 用 $\forall$ 代表所有对象都满足某个性质.*

我们也用 $\exists!$ 代表存在唯一一个对象.

我们用 $a := b$ 标记 a 由 b 定义, $a = b$ 代表 a, b 仅仅是相同对象的两个表示 (集合论下会重新定义等于).

我们有如下自明的公式.

定理 1.1.4

$$\neg\neg A := \neg(\neg A) = A \tag{1.1}$$
$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \tag{1.2}$$
$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \tag{1.3}$$
$$\neg(\forall x \in X : E(x)) = \exists x \in X : \neg E(x) \tag{1.4}$$
$$\neg(\exists x \in X : E(x)) = \forall x \in X : \neg E(x) \tag{1.5}$$
$$\neg(\forall x \in X : (\exists y \in Y : E(x,y))) = \exists x \in X : (\forall y \in Y : \neg E(x,y)) \tag{1.6}$$
$$\neg(\exists x \in X : (\forall y \in Y : E(x,y))) = \forall x \in X : (\exists y \in Y : \neg E(x,y)) \tag{1.7}$$

定义 1.1.5 *对于断言 A, B, 我们记断言 A 能推出 B 为 $A \Rightarrow B$, 代表*

$$A \Rightarrow B := (\neg A) \vee B \tag{1.8}$$

而断言 A, B 等价 ($A \Leftrightarrow B$) 意味着 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

定理 1.1.6 *我们可以验证下述断言:*

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1.9}$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{1.10}$$

1.2 集合论

朴素集合论认为

公理 1.2.1 *对于任意性质 P 均有 $Y = \{x : P(x)\}$ 为集合.*

然而随后提出的 Russell 悖论 (Russell's paradox) 给出了性质 $X : X \notin X$ 的集合 X 不存在, 人们开始探索公理化集合论的道路.

1.2.1 von Neumann-Bernays-Gödel 公理

von Neumann-Bernays-Gödel 公理系统的核心是类 (class) 与元素 (element), A 是 B 的元素用符号 $A \in B$ 标记, 其否定自然使用 $\notin$ 标记, 一个类可以作为另一个类的元素.

定义 1.2.2 *两个类 A 与 B 相等, 记作 $A = B$, 当且仅当 A 与 B 有相同的元素, 其否定记为 $A \neq B$.*

$$(X = Y) := \forall Z(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$$

推论 1.2.3 *显见以下公式:*

1. $\forall X(X = X)$
2. $\forall X \forall Y(X = Y \Rightarrow Y = X)$
3. $\forall X \forall Y \forall Z((X = Y \wedge Y = Z) \Rightarrow X = Z)$

定义 1.2.4 一个类 A 是另一个类 B 的子类, 记作 $A \subseteq B$, 当且仅当 A 的所有元素都是 B 的元素, 其否定记为 $A \nsubseteq B$.

$$(X \subseteq Y) := \forall Z(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$$

我们用 $A \subset B$ 表示 $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

推论 1.2.5

$$(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X) \Leftrightarrow (X = Y)$$

公理 1.2.6 (Axiom of Equality)

$$\forall X \forall Y(X = Y \Rightarrow \forall Z(X \in Z \Leftrightarrow Y \in Z))$$

定义 1.2.7 (集合) 一个类 X 称集合 *(set)*, 当且仅当 $\exists Y(X \in Y)$, 本节中我们用小写字母 $x, y, z, \ldots$ 表示集合, 用大写字母 $X, Y, Z, \ldots$ 表示类.

定义 1.2.8 (真类) 一个类 X 称真类 *(proper class)*, 当且仅当 X 不是集合, 常用粗体字母 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \ldots$ 表示真类.

公理 1.2.9 (Axiom of Pair)

$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

上述公理展开可得 $\forall x \forall y((\exists X \exists Y(x \in X \wedge y \in Y)) \Rightarrow \exists z \exists Z(z \in Z \wedge \forall u(u \in Z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))))$, 记集合 $z = \{x, y\}$, 特别的, 当 $x = y$ 时, 我们记 $z = \{x\}$.

为了方便叙述, 我们常常忽略公式最前的 $\forall$

推论 1.2.10 显见以下公式:

1. $((x = u \wedge y = v) \Rightarrow \{x, y\} = \{u, v\})$
2. $\{x, y\} = \{y, x\}$.
3. $x = y \Leftrightarrow \{x\} = \{y\}$.
4. $x = y \Leftrightarrow \forall Z(x \in Z \Leftrightarrow y \in Z)$.

定义 1.2.11 (有序对) 有序对 *(ordered pair)* (x, y) 定义为 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

引理 1.2.12 有序对的有序体现在其性质 $(x,y)=(u,v)\Leftrightarrow(x=u\wedge y=v)$.

证明 ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 若 $x\neq u$, 则 $\{x\}\neq\{u\}$, 依赖 Axiom of Pair $\{x\}\in(x,y)=(u,v)$, 从而 $u\in\{u,v\}=\{x\}$, 矛盾.

若 $x=u\wedge y\neq v$, 只需证明 $a=b\Leftrightarrow\{c,a\}=\{c,b\}$, 由 Axiom of Pair 知 $a\in\{c,a\}=\{c,b\}$ 从而 $a=c$, 同理, $b=c$, 矛盾. □

定义 1.2.13 (有序三元对) 有序三元对 *(ordered triple)* (x,y,z) 定义为 $((x,y),z)$.

定义 1.2.14 (二元关系) 类 R 称二元关系 *(binary relation)*, 当且仅当 R 是有序对的集合, 记作 $\mathbf{isbinrel}(R)$.

$$\mathbf{isbinrel}(R)\Leftrightarrow\forall z(z\in R\Rightarrow\exists x\exists y(z=(x,y)))$$

在不久的将来, 我们将用二元关系定义映射.

公理 1.2.15 (Axiom of Membership)

$$\exists\mathfrak{E}\forall z(z\in\mathfrak{E}\Leftrightarrow\exists x\exists y(z=(x,y)\wedge x\in y))$$

公理 1.2.16 (Axiom of Domain)

$$\forall X\exists D\forall x(x\in D\Leftrightarrow\exists y((x,y)\in X))$$

定义 1.2.17 上述定义中类 D 称为 X 的定义域 *(domain)*, 记作 $\mathbf{dom}(X)$.

定义 1.2.18 定义 $\mathfrak{U}:=\mathbf{dom}(\mathfrak{E})$, 称为宇宙 *(universe)*, 注意到 $\forall x(x\in\{x\})$, 从而 $\forall x(x\in\mathfrak{U})$.

推论 1.2.19

$$\mathbf{dom}(\mathfrak{U})=\mathfrak{U}$$

公理 1.2.20 (Axiom of Difference)

$$\forall X\forall Y\exists D\forall x(x\in D\Leftrightarrow(x\in X\wedge x\notin Y))$$

定义 1.2.21 上述定义中类 D 称为 X 与 Y 的差集 *(difference)*, 记作 $X\setminus Y$.

定义 1.2.22 定义 $X\cap Y:=X\setminus(X\setminus Y)$, 称为 X 与 Y 的交集 *(intersection)*.

定义 1.2.23 定义 $X\cup Y:=\mathfrak{U}\setminus((\mathfrak{U}\setminus X)\cap(\mathfrak{U}\setminus Y))$, 称为 X 与 Y 的并集 *(union)*.

定义 1.2.24 定义 $X\triangle Y:=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$, 称为 X 与 Y 的对称差 *(symmetric difference)*.

定义 1.2.25 定义 $\varnothing := \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{U}$, 称为空类 *(empty class)*, 根据 *ZFC Axiom of Infinity* 空类是集合 *(empty set)*.

推论 1.2.26

$$\forall E(\varnothing = E \setminus E)$$

证明 运用 Axiom of Equality 即可. □

公理 1.2.27 (Axiom of Product)

$$\forall X \forall Y \exists P \forall z (z \in P \Leftrightarrow \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y))$$

定义 1.2.28 上述定义中类 P 称为 X 与 Y 的积 *(product)*, 记作 $X \times Y$.

定义 1.2.29 定义宇宙的积 $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U} := \ddot{\mathfrak{U}}$, 此时 $\mathbf{isbinrel}(R) \Leftrightarrow R \subseteq \ddot{\mathfrak{U}}$.

公理 1.2.30 (Axiom of Inversion)

$$\forall X \exists I \forall z (z \in I \Leftrightarrow \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge (y, x) \in X))$$

公理 1.2.31 (Axiom of Cycle)

$$\forall X \exists C \forall t (t \in C \Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z (t = (z, x, y) \wedge (x, y, z) \in X))$$

定义 1.2.32 由上述公理定义的 I 记作 X^{-1}, 称为 X 的逆 *(inverse)*, C 记作 $X^{\circlearrowleft}$, $X^{\circlearrowleft\circlearrowleft} := (X^{\circlearrowleft})^{\circlearrowleft}$.

定义 1.2.33 定义 $\mathbf{ran}(X) := \mathbf{dom}(X^{-1})$, 称为 X 的值域 *(range)*.

定义 1.2.34 定义类 X 的并 *(union)* $\bigcup X := \{z : \exists y \in X(z \in y)\}$. 定义类 X 的交 *(intersection)* $\bigcap X := \{z : \forall y \in X(z \in y)\}$. 定义类 X 的幂 *(power)* $\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$.

这里用到对类的表示方法, $\{x : \phi(x)\}$ 表示满足条件 $\phi(x)$ 的所有元素的类.

证明 存在性依次由以下三者给出:

$$\bigcup X = \mathbf{dom}(\mathfrak{E} \cap (\mathfrak{U} \times X))$$

$$\bigcap X = \mathfrak{U} \setminus \mathbf{dom}((\ddot{\mathfrak{U}} \setminus \mathfrak{E}) \cap (\mathfrak{U} \times X))$$

$$\mathcal{P}(X) = \mathfrak{U} \setminus \mathbf{dom}(\mathfrak{E}^{-1} \cap (\mathfrak{U} \times (\mathfrak{U} \setminus X)))$$

□

推论 1.2.35

$$\mathcal{P}(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$$

定义 1.2.36 给出类 X 与二元关系 R, 定义 X 在 R 下的像 *(image)* $R[X] := \{y : \exists x \in X((x, y) \in R)\} = \mathbf{ran}[R \cap (X \times \mathfrak{U})]$.

同理定义其逆像 *(preimage)* $R^{-1}[X]$.

定义 1.2.37 给出二元关系 F, G, 定义 F 与 G 的复合 *(composition)* $F \circ G := \{(x, z) : \exists y((x, y) \in G \wedge (y, z) \in F)\}$.

证明

$$F \circ G = \mathbf{dom}((G^{-1} \times \mathfrak{U})^{\circlearrowleft} \cup (F^{-1} \times \mathfrak{U})^{\circlearrowleft})$$

□

定义 1.2.38 映射 *(function)* f 定义为满足 $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$ 的二元关系, 记作 $\mathbf{isfunc}(f)$.

在存在 y 的情况下我们记 $f(x)$ 为唯一的 y 使得 $(x, y) \in f$, 称为 f 在 x 处的值 *(value)*.

定义 1.2.39 单射 *(injective function)* 指代 f, f^{-1} 都是映射的二元关系 f.

推论 1.2.40 给出映射 F, G, $F \circ G$ 也是映射.

接下来从类转向集合, 定义集合的操作与要求.

公理 1.2.41 (Axiom of Replacement)

$$\forall x \forall F(\mathbf{isfunc}(F) \Rightarrow \exists y(y = F[x]))$$

公理 1.2.42 (Axiom of Union)

$$\forall x \exists y(y = \bigcup x)$$

公理 1.2.43 (Axiom of Power Set)

$$\forall x \exists y(y = \mathcal{P}(x))$$

公理 1.2.44 (Axiom of Infinity) *(存在归纳集)*

$$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

公理 1.2.45 (Axiom of Foundation)

$$\forall x(x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

公理 1.2.46 (Axiom of Global Choice)

$$\exists f(\textbf{isfunc}(f) \wedge \forall x(x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge (x,y) \in f)))$$

上述 Axiom of Global Choice 有个弱化版本如下:

公理 1.2.47 (Axiom of Choice)

$$\forall x \exists f(\textbf{isfunc}(f) \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow \exists z((y,z) \in f)))$$

NBG 公理由以下 14 条公理组成:

1. Axiom of Equality

$$\forall X \forall Y(X = Y \Rightarrow \forall Z(X \in Z \Leftrightarrow Y \in Z))$$

2. Axiom of Pair

$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

3. Axiom of Membership

$$\exists \mathfrak{E} \forall z(z \in \mathfrak{E} \Leftrightarrow \exists x \exists y(z = (x,y) \wedge x \in y))$$

4. Axiom of Domain

$$\forall X \exists D \forall x(x \in D \Leftrightarrow \exists y((x,y) \in X))$$

5. Axiom of Difference

$$\forall X \forall Y \exists D \forall x(x \in D \Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y))$$

6. Axiom of Product

$$\forall X \forall Y \exists P \forall z(z \in P \Leftrightarrow \exists x \exists y(z = (x,y) \wedge x \in X \wedge y \in Y))$$

7. Axiom of Inversion

$$\forall X \exists I \forall z(z \in I \Leftrightarrow \exists x \exists y(z = (x,y) \wedge (y,x) \in X))$$

8. Axiom of Cycle

$$\forall X \exists C \forall t(t \in C \Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z(t = (z,x,y) \wedge (x,y,z) \in X))$$

9. Axiom of Replacement

$$\forall x \forall F(\textbf{isfunc}(F) \Rightarrow \exists y(y = F[x]))$$

10. Axiom of Union

$$\forall x \exists y (y = \bigcup x)$$

11. Axiom of Power Set

$$\forall x \exists y (y = \mathcal{P}(x))$$

12. Axiom of Infinity

$$\exists x (\varnothing \in x \land \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

13. Axiom of Foundation

$$\forall x (x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y (y \in x \land y \cap x = \varnothing))$$

14. Axiom of Global Choice

$$\exists f (\textbf{isfunc}(f) \land \forall x (x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y (y \in x \land (x, y) \in f)))$$

我们借由 NBG 公理给出一些推论:

推论 1.2.48 不存在无限降链 *(infinite descending chain)* $x_0 \supset x_1 \supset x_2 \supset \ldots$, 且不存在 $x \in x$.

证明 由 Axiom of Foundation. □

推论 1.2.49 集合的子集是集合, 从而集合 x 与类 C 的交 $x \cap C$ 也是集合.

这里的做法在于使用 *Axiom of Power Set* 并且意识到 $y \subseteq x \Rightarrow y \in \mathcal{P}(x)$.

推论 1.2.50 我们说明如何把任何一个性质都写作类, 从而我们可以对一个集合进行分离操作, 也即我们给出类 $\{x : \phi(x, p_1, p_2 \cdots p_n)\}$.

证明 我们总是将 $\exists x$ 认作 $\neg\forall x$, 我们给出一种归纳方法, 假定公式中有 n 个变元, 考察 $\mathfrak{U}^n := \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \times \cdots \times \mathfrak{U}$ 上的类, 并且已经将一部分的命题转为类 P, 命题的否定无非是 $\mathfrak{U}^n \setminus P$, 命题的析取无非是 $P_1 \cap P_2$, 命题的合取无非是 $P_1 \cup P_2$, 两个类属于引导出将 $\mathfrak{E} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \ldots \mathfrak{U}$ 上多次施以 Axiom of Cycle 与 Axiom of Inversion 的结果, 利用 Axiom of Domain 可以丢弃用完的变量. 从而我们可以将任何命题转为类, 于是可以有集合 $\{z \in x : P(z)\}$. □

另外的, 将 NBG 公理中的 Axiom of Membership, Axiom of Domain, Axiom of Difference, Axiom of Product, Axiom of Inversion, Axiom of Cycle 替换为以下公理, 我们得到了 BGC 公理, 其与 NBG 等价:

公理 1.2.51 (Axiom of Comprehension)

$$\forall X_1 \forall X_2 \ldots \forall X_n \exists Y (Y = \{x : \phi(x, X_1, X_2, \ldots, X_n)\})$$

推论 1.2.52 集合的子类是集合.

证明 对 $X \subseteq y$ 有 $X \in \mathcal{P}(y)$. □

定义 1.2.53 集合 X 与 Y 的并定义为 $X \cup Y := \bigcup\{X, Y\}$.

定义 1.2.54 集合 X 与 Y 的交 $X \cap Y$ 也是集合.

证明 根据 1.2.49. □

定义 1.2.55 集合 X 与 Y 的差集 $X \setminus Y$ 是一个集合.

证明 对 $X, \mathfrak{U} \setminus Y$ 应用 1.2.49. □

定义 1.2.56 集合 X 与 Y 的积 $X \times Y$ 是一个集合.

证明 $X \times Y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}(X \cup Y)$, 从而是一个集合. □

更深刻的讨论将会放在本章末尾.

1.2.2 Zermelo-Fraenkel 公理

与 NBG 公理思路不同的是 ZF 公理, ZF 公理体系没有 NBG 公理中类的概念, 或者说 ZF 公理体系中的类 C 代指一个有单个自由变量的命题 $x \in C := \phi(x, p_1, p_2 \dots)$, 其中 $p_1, p_2 \dots$ 是给定参数.

相应的, 类的运算被视作逻辑命题的计算.

定义 1.2.57 定义 $\mathfrak{U} := \{x : x = x\}$, 称为宇宙 *(universe)*. 定义 $X \subseteq Y := \forall x(x \in X \Rightarrow x \in Y)$, 称为 X 是 Y 的子类 *(subclass)*. 定义 $\bigcap X := \{x : \forall y \in X(x \in y)\}$, 称为 X 的交集 *(intersection)*. 定义 $\bigcup X := \{x : \exists y \in X(x \in y)\}$, 称为 X 的并集 *(union)*. 定义 $\mathcal{P}(X) := \{Y : Y \subseteq X\}$, 称为 X 的幂 *(power)*. 定义 $X \setminus Y := \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$, 称为 X 与 Y 的差集 *(difference)*.

此意义上, 集合自然是类 $\{x : x \in S\}$, ZF 公理包含 (本节大写字母亦表示集合):

公理 1.2.58 (Axiom of Extensionality)

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)$$

公理 1.2.59 (Axiom of Pair)

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall U (U \in Z \Leftrightarrow (U = X \vee U = Y))$$

公理 1.2.60 (Axiom of Union)

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists u \in X (z \in u))$$

公理 1.2.61 (Axiom of Power Set)

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X)$$

公理 1.2.62 (Axiom Schema of Separations)

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow (z \in X \wedge \phi(z)))$$

寻此几条公理, 我们仍然可以仿照 NBG 公理进行一些定义, 不过我们要给一个集合作为基础:

定义 1.2.63 空集 *(empty set)* 定义为 $\varnothing := \{x \in X : x \neq x\}$, 此中要求至少存在一个集合.

有序对 *(ordered pair)* (x, y) 定义为 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

有序三元对 *(ordered triple)* (x, y, z) 定义为 $((x, y), z)$.

集合 X 与 Y 的积 *(product)* 定义为 $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$, 可以由 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$ 上用分离公理给出.

X 上的二元关系 *(binary relation)* 定义为 $R \subseteq X \times X$.

映射 *(function)* 定义为一个有序对构成的类 f, 且满足 $\forall x \forall y \forall z (((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow (y = z))$.

映射自然延拓至类, 定义为满足以上唯一性条件且每个元素都是有序对的类.

X 在 f 下的像 *(image)* 定义为 $f[X] := \{y : \exists x \in X((x, y) \in f)\}$.

公理 1.2.64 (Axiom of Infinity)

$$\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

公理 1.2.65 (Axiom Schema of Replacement)

$$\forall f \forall x (\mathbf{isfunc}(f) \Rightarrow \exists y (y = f[x]))$$

公理 1.2.66 (Axiom of Regularity)

$$\forall x (x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

ZF 公理代指以下 8 条公理:

1. ZFC Axiom of Extensionality

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)$$

2. ZFC Axiom of Pair

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall U (U \in Z \Leftrightarrow (U = X \vee U = Y))$$

3. ZFC Axiom of Union

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \exists u \in X (z \in u))$$

4. ZFC Axiom of Power Set

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X)$$

5. ZFC Axiom Schema of Separations

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow (z \in X \wedge \phi(z)))$$

6. ZFC Axiom of Infinity

$$\exists x (\varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

7. ZFC Axiom Schema of Replacement

$$\forall f \forall x (\mathbf{isfunc}(f) \Rightarrow \exists y (y = f[x]))$$

8. ZFC Axiom of Regularity

$$\forall x (x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \varnothing))$$

囊括以下选择公理的体系称为 ZFC 公理:

公理 1.2.67 (Axiom of Choice)

$$\forall x \exists f (\mathbf{isfunc}(f) \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow \exists z ((y, z) \in f)))$$

可以发现, NBG 公理中对类操作的 Axiom of Equality, Axiom of Membership, Axiom of Domain, Axiom of Difference, Axiom of Product, Axiom of Inversion, Axiom of Cycle, 在 ZFC 下体现为类背后的逻辑命题的计算, 而 Axiom of Pair, Axiom of Union, Axiom of Power Set, Axiom of Infinity, Axiom of Foundation, Axiom of Choice 在 ZFC 下体现为集合的操作与要求.

可以证明在只考虑集合的情况下, ZFC 公理与 NBG 公理等价, 我们将选取 NBG 公理, 因为一定程度上 NBG 公理表述更加方便, 严格给出了" 类" 的概念, 而非 ZFC 公理中的一个" 语法糖".

1.2.3 序数

序数几乎是集合论上唯一的结构, 有必要对其进行研究.

1.2.3.1 偏序

定义 1.2.68 一个等价关系 $\sim$ 是满足自反性 *(reflexivity)*, 对称性 *(symmetry)*, 传递性 *(transitivity)* 的二元关系.

1. 自反性 *(reflexivity)*: $x \sim x$.
2. 对称性 *(symmetry)*: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
3. 传递性 *(transitivity)*: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

等价关系给出了集合的一个划分, 也即对于定义于 X 上的等价关系 $R \subseteq X \times X$, $x \in X$ 的等价类 (equivalence class) 定义为

$$[x]_R := \{y \in X : xRy\} \tag{1.11}$$

对 X 给出了折分 $A = \{S \in \mathcal{P}X : \exists x(S = [x]_R)\}$, 而 $X = \bigcup A$ 且 $\forall S, T \in A : S \cap T = \varnothing \Leftrightarrow S \neq T$.

同理, 对于一个划分 A, 我们可以定义相应的等价关系 R 为 $xRy \Leftrightarrow \exists S \in A(x \in S \wedge y \in S)$.

定义 1.2.69 一个二元关系 $\leq$ 称偏序关系 *(partial ordering)* 若满足:

1. 自反性 *(reflexivity)*: $x \leq x$.
2. 反对称性 *(antisymmetry)*: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.
3. 传递性 *(transitivity)*: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

在只考虑集合 P 对情况下, 我们也称 $\leq$ 为 P 上的偏序, 代指 $(\leq) \subseteq P \times P$.
称 P 上线序则要求 $\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$.
若偏序由 $\leq$ 给定, 我们也用 $\geq, <, >$, 其意义是自明的.

定义 1.2.70 对于偏序集 *(partially ordered set)* $(P, \leq)$, 对于 $X \subseteq P$ 定义:

1. 极大元 *(maximal element)*: $x \in X$ 为极大元, 若 $\forall y \in X(x \leq y \Rightarrow x = y)$.
2. 极小元 *(minimal element)*: $x \in X$ 为极小元, 若 $\forall y \in X(y \leq x \Rightarrow x = y)$.
3. 最大元 *(greatest element)*: $x \in X$ 为最大元, 若 $\forall y \in X(y \leq x)$.
4. 最小元 *(least element)*: $x \in X$ 为最小元, 若 $\forall y \in X(x \leq y)$.
5. 上界 *(upper bound)*: $x \in X$ 为上界, 若 $\forall y \in X(y \leq x)$.
6. 下界 *(lower bound)*: $x \in X$ 为下界, 若 $\forall y \in X(x \leq y)$.

7. 上确界 *(supremum)*: $x \in P$ 为上确界, 若 x 为上界且对于任意上界 y 有 $x \le y$.

8. 下确界 *(infimum)*: $x \in P$ 为下确界, 若 x 为下界且对于任意下界 y 有 $y \le x$.

定义 1.2.71 若偏序集 $(P, \le)$ 中任意两个元素均有上确界和下确界, 命之为格 *(lattice)*, 格的理论将在后面几章叙述.

定义 1.2.72 偏序是集合上的结构, 我们研究保持偏序结构的映射, 也即对于偏序集 $(P, \le)$ 和 $(Q, \le)$, 若单射 $f : P \to Q$ 满足 $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$, 则称 f 为保序映射 *(order-preserving map)* 线序间的保序映射也称增 *(increasing)*.

定义 1.2.73 对于偏序集 $(P, \le_P)$ 和 $(Q, \le_Q)$, 若存在保序双射 $f : P \to Q$, 且其逆映射亦保序, 则称同构 *(isomorphism)*, 记作 $P \cong Q$.

1.2.3.2 良序

定义 1.2.74 一个线序称为良序 *(well-ordering)*, 若其任意非空子集均有最小元.

引理 1.2.75 对于良序 $(W, \le)$ 以及增映射 $f : W \to W$, 则 $\forall x(x \le f(x))$.

证明 构造 W 子集 $S = \{x \in W : x > f(x)\}$, S 有最小元 x, 而 $x > f(x)$ 意味着 $f(x) > f(f(x))$, 而 $f(x) < x$ 与 x 最小矛盾. □

推论 1.2.76 良序集自同构 *(automorphism)* 必为恒等映射.

推论 1.2.77 两个良序集间的同构存在则唯一.

定义 1.2.78 良序集的前段 *(initial segment)* 定义为 $S \subseteq W$ 且 $x \ge y \Rightarrow (x \in S \Rightarrow y \in S)$.

引理 1.2.79 前段是良序集, 序继承自原良序集, 并可写成 $\{x \in W : x < u\}$ 的形式, 称为 u 的前段 $W(u)$.

证明 对于 S 子集, 取其在 W 中最小元 x 即可. 而 S 可以被写成 $W \setminus S$ 最小元的前段. □

引理 1.2.80 真前段必不同构于原良序集.

证明 同构于前段违反 1.2.75. □

定理 1.2.81 任意两个良序集 W, W' 一下三者成立其一:

1. $W \cong W'$.

2. W 同构于 W' 的真前段.

3. W' 同构于 W 的真前段.

证明 构造 $f = \{(x,y) \in W \times W' : W(x) \cong W'(y)\}$, 根据 1.2.80 有 $\{(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z\}$ 与 $\{(y,x) \in f \wedge (z,x) \in f \Rightarrow y = z\}$, 故 f 为 $\mathbf{dom}(f)$ 与 $\mathbf{ran}(f)$ 间的双射.

注意到若 $\mathbf{dom}(f) \neq W$, 且 $\mathbf{ran}(f) \neq W'$, 则取最小元 $x \in W \setminus \mathbf{dom}(f)$ 与 $y \in W' \setminus \mathbf{ran}(f)$, f 是 $W(x)$ 与 $W'(y)$ 间同构故 $(x,y) \in f$, 与 $x \in \mathbf{dom}(f)$ 矛盾.

故 $(\mathbf{dom}(f) = W) \wedge (\mathbf{ran}(f) = W')$, $(\mathbf{dom}(f) = W) \wedge \neg(\mathbf{ran}(f) = W')$, $\neg(\mathbf{dom}(f) = W) \wedge (\mathbf{ran}(f) = W')$ 三者成立其一, 也即上述命题成立. □

定义 1.2.82 *同构的良序集称为有同样的序形 (order type), 序数是表示序形的集合.*

1.2.3.3 序数

定义 1.2.83 *一个传递集 (transitive set) 定义为 $\bigcup x \subseteq x$ 的集合 x, 也即 x 的元素也都是 x 的子集.*

定义 1.2.84 *一个序数 (ordinal numbers) 是一个传递的良序集, 偏序 $<$ 由 $\in$ 给出.*

我们用 $\mathbf{On}$ 表示全体序数构成的类.

引理 1.2.85 *序数满足如下性质:*

1. $\varnothing \in \mathbf{On}$

2. $\alpha \in \mathbf{On} \wedge \beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \mathbf{On}$

3. $\alpha \in \mathbf{On} \wedge \beta \in \mathbf{On} \Rightarrow (\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta)$

4. $\alpha \in \mathbf{On} \wedge \beta \in \mathbf{On} \Rightarrow \alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$

证明 第一条是自明的. 第二条源于 1.2.79 和 $\forall x \in \tau \in \beta \Rightarrow x \in \beta$. 第三条可以取 $\beta \setminus \alpha$ 的最小元 γ, 注意到 $\gamma \in x \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$, 故 $\alpha = \beta(\gamma) = \gamma$ 而后面一个等号无非源自 $\gamma \subseteq \beta$ 与 γ 的极小性. 第四条只需注意到 $\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$ 即可. □

由 1.2.85 立得以下推论:

推论 1.2.86 *首先, 我们将偏序推广到类 $\mathbf{On}$ 上, 也即 $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$,*

1. *对于任意序数 α, 有 $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.*

2. 类 $C \subseteq \mathbf{On}$, 则有 $\inf C := \bigcap C$ 为序数.

3. 集合 $S \subseteq \mathbf{On}$, 则有 $\sup S := \bigcup S$ 为序数.

引理 1.2.87 任何良序集 W 都同构于某个序数.

证明 定义类 $F = \{u : \exists x \exists y (u = (x, y) \wedge x \in W \wedge W(x) \cong y \wedge y \in \mathbf{On})\}$, 考察 $F \upharpoonright W$ 即可, 由 Axiom of Replacement 知 $\mathbf{ran}(f)$ 是序数. □

定义 1.2.88 对于序数 α, 定义 $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$, 称为 α 的后继 *(successor)*, 后继也是序数.

推论 1.2.89 若一个非空序数不是后继, 则其为极限序数 *(limit ordinal)*, 即 $\alpha = \bigcup \alpha$.

证明 若否, 有 $\bigcup \alpha + 1 \in \alpha$ 故 $\bigcup \alpha \in \bigcup \alpha$. □

有了后继序数, 我们可以着手定义自然数.

定义 1.2.90 自然数 *(natural numbers)* 如此的定义:

1. $0 := \varnothing$.

2. $n + 1 := n \cup \{n\}$.

1.2.4 归纳

归纳的思想可以追溯到 Peano 公理.

例 1.2.91 ***Peano* 公理:** 自然数满足以下性质:

1. 0 是自然数.

2. 对于任意自然数 n, 存在唯一自然数 $n + 1$ 使得 $n + 1$ 是 n 的后继.

3. 0 不是任何自然数的后继.

4. 不同自然数的后继不同.

5. **数学归纳法:** 若性质 P 满足 $P(0) \wedge \forall n (P(n) \Rightarrow P(n+1))$, 则 $P(n)$ 对于任意自然数 n 成立.

在所述集合论中, 我们想要找到自然数集作为 Peano 公理的对应, 此时我们需要引入 Axiom of Infinity.

定义 1.2.92 ω 定义为归纳集中的最小元, 对于给定的归纳集 X, 可以给出 $\omega = \bigcap\{x : x \subseteq X \wedge \varnothing \in y \wedge \forall y \in x(y \cup \{y\}) \in x\}$.

证明 集合的交可以用 $\setminus, \bigcup$ 表示, 故成为一个集合.
易证 ω 归纳, 任取归纳集 Y, 注意到 $X \cap Y$ 也是归纳集, 故 $\omega \subseteq Y$. □

推论 1.2.93 极限序数都是归纳集, 故 ω 是最小的极限序数.

定理 1.2.94 (数学归纳法) 称 ω 为自然数集, ω 中的元素称自然数, 若性质 P 对 0 成立, 且若对自然数 n 成立则对 $n+1$ 成立, 则对任意自然数 $n \in \omega$ 成立.

证明 取不是自然数的最小元, 其是后继序数 $n+1$, 而 n 是自然数.
同理, 取不满足 P 的最小元, 其是后继序数 $n+1$, 而 n 满足 P. □

定理 1.2.95 (超限归纳法) 若性质 P 满足如下性质:

1. $P(0)$ 成立.
2. 若 α 是极限序数 $(\forall \beta < \alpha(P(\beta)) \Rightarrow P(\alpha))$.
3. 若 $\alpha = \beta + 1$ 是后继序数 $P(\beta) \Rightarrow P(\alpha)$.

则对于任意序数 α, $P(\alpha)$ 总成立.

证明 若对于序数 γ 不成立, 有最小序数 α 不成立, 而无论其是否是后继序数都矛盾了. □

依赖于超限归纳法, 我们可以定义序数运算, 运算结果仍是序数.

定义 1.2.96 给定 α, 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha + 0 := \alpha$, $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$, $\alpha + \gamma := \bigcup_{\beta < \gamma}(\alpha + \beta)$ 为序数的和.

定义 1.2.97 给定 α, 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha \cdot 0 := 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$, $\alpha \cdot \gamma := \bigcup_{\beta < \gamma}(\alpha \cdot \beta)$ 为序数的积.

定义 1.2.98 给定 α, 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha^0 := 1$, $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$, $\alpha^\gamma := \bigcup_{\beta < \gamma}(\alpha^\beta)$ 为序数的幂.

引理 1.2.99 对于序数 α, β, γ, 有

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

证明 对 γ 进行超限归纳即可. □

定义 1.2.100 对于线序集 A, B, 定义线序集的积 $A \times B$ 为 $A \times B$ 上的线序 $(a,b) < (c,d)$ 当且仅当 $b < d \vee (b = d \wedge a < c)$.

定义线序集的和 $A + B$ 为 $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ 上的线序, 其中 $(a,0) < (b,1)$ 对于任意 $a \in A, b \in B$ 成立.

定义 1.2.101 对于序数 α, β, 序数和同构于线序和 $\alpha + \beta$, 序数积同构于线序积 $\alpha \cdot \beta$.

证明 对 β 归纳. □

引理 1.2.102 加法乘法满足如下性质:

1. $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
2. $\alpha < \beta \Rightarrow \exists! \gamma (\beta = \alpha + \gamma)$.
3. $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.
4. $\alpha > 0 \Rightarrow \forall \gamma \exists \beta \exists \rho (\gamma = \beta \cdot \alpha + \rho \wedge \rho < \alpha)$.
5. $\beta < \gamma \wedge \alpha > 1 \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

证明 一三五对 γ 归纳, 二则是 $\{\chi : \alpha \leq \chi < \beta\}$ 上的良序, 唯一性由第一条确保. 四则取 β 为最大的 $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$ 的序数. □

定理 1.2.103 (Cantor) 任意序数 $\alpha > 0$ 可以被唯一的写作 $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \omega^{\beta_2} \cdot \gamma_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot \gamma_n$, 其中 $\alpha \geq \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ 为序数, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 为自然数.

证明 注意到 $1 = \omega^0$, 取极大 β_1 使得 $\omega^{\beta_1} \leq \alpha$, 有 $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \rho$, 对 ρ 施以归纳即可, n 有限基于 Axiom of Foundation. □

例 1.2.104 (Hydra 数) 对于一个有根树, 每次选取一个叶节点 p 以及一个自然数 n. 删去 p 寻求 p 的父节点, 若其不是根节点, 则将其父节点复制 n 份, 连接到 p 的祖父节点处, 则不论如何操作, 最终都会到达只有根节点的树.

证明 对每颗树 T, 其根节点连结子树 $T_1, T_2, \ldots, T_n$, 定义 $f(T) := \omega^{f(T_1)} + \omega^{f(T_2)} + \cdots + \omega^{f(T_n)}$, 则每步操作使 f 减小, 故有限步内必然到达 0. □

定义 1.2.105 良基关系是 P 上一二元关系 $E(<)$, 使得 $\forall X((X \subseteq P \wedge X \neq \varnothing) \Rightarrow \exists a(a \in X \wedge \forall x \in X(\neg(xEa))))$.

例 1.2.106 良序 $<$ 是良基关系.

定理 1.2.107 对于良基关系 E, 有唯一 $\rho : P \to \mathbf{On}$, 使得 $\forall x \in P(\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 : yEx\})$ *(任意非空子集有极小元)*.

证明 归纳定义一族集合 P_θ

1. $P_0 := \varnothing$.

2. $P_{\theta+1} := \{x \in P : \forall y(yEx \Rightarrow y \in P_\theta)\}$.

3. $P_\theta := \bigcup_{\beta<\theta} P_\beta$.

若有 $P_\theta = P_{\theta+1}$, 此时必然有 $P_\theta = P$, 若否 $P \backslash P_\theta$ 有极小元 x, 有 $x \in P_{\theta+1} \backslash P_\theta$, 矛盾. 定义 $\rho(x) := \sup\{\alpha : x \notin P_\alpha\}$, 上述条件的验证是显然的.

唯一性只需考虑 $\{x \in P : \rho_1(x) \neq \rho_2(x)\}$ 的极小元即可. □

定义 1.2.108 *给出一个良基关系 E, 定义一个元素的秩 (rank) 为 $\rho(x)$, E 的高 (height) 为* $\mathbf{ran}\rho$.

1.2.5 Zorn 引理

这章我们来重温选择公理.

引理 1.2.109 **On** *不是集合.*

证明 若是集合, 则 $\mathbf{On} \in \mathbf{On}$, 矛盾. □

定理 1.2.110 (Zermelo 良序定理 (Zermelo's well-ordering theorem)) *任意集合都能被赋予良序, 此命题与 Axiom of Choice 等价.*

证明 我们证明以下两条等价

1. $\mathbf{Wo}(x)$: x 能被赋予良序.

2. $\mathbf{AC}(\mathcal{P}x)$: $\mathcal{P}x$ 有选择函数.

$\mathbf{Ac}(\mathcal{P}x) \Rightarrow \mathbf{Wo}(x)$: 对于 $\mathcal{P}(x)$ 上的选择函数 $c : \mathcal{P}x \setminus \varnothing \to c$, 根据超限归纳法开始定义 $F_\alpha : \alpha \to x$ 如下, 若构造止于某一步, 则必然 $\mathbf{ran}F_\alpha = x$, 若否, 构造必然可一直持续.

1. $F_0 := \varnothing$.

2. $F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{(c(\alpha, x \setminus \mathbf{ran}F_\alpha))\}$.

3. $F_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$.

给出 $F : \mathbf{On} \to x$ 的存在性考虑 Axiom of Replacement 和 F^{-1} 并根据 1.2.109 即可知上述构造只能止于某个序数 α, 此即给出的良序.

$\mathbf{Wo}(x) \Rightarrow \mathbf{Ac}(\mathcal{P}x)$: 取选择函数为最小值即可, 同理对于任意集合 S 可以考察 $\bigcup S$ 上的良序, 从而构造出 S 上选择函数.

等价性只需考虑到 $x \subseteq \mathcal{P}\bigcup x$. □

定理 1.2.111 (Zorn 引理 (Zorn's lemma)) *若 P 是一个非空偏序集，且任意非空线序子集都有上界，则 P 有极大元.*

证明 给出 $\mathcal{P}x$ 上选择函数 c，同样根据 Axiom of Replacement 和 1.2.109 知其成立. 详述之，若 P 无极大元，可以归纳的进行构造映射:

1. $F_0 := \{(\varnothing, c(x))\}$.
2. $F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{\alpha+1, c(\{a \in x : a > F_\alpha(\alpha)\})\}$.
3. $F_\alpha := (\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta) \cup \{(\alpha, \mathbf{Upperbound} \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{ran} F_\beta)\}$.

□

同样，Zorn 引理与 Axiom of Choice 等价.

证明 对任意集合 x，在全体 (S, c)，其中 $S \subseteq x$，c 是 S 上的选择函数，定义偏序 $(S_1, c_1) \leq (S_2, c_2) \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2 \wedge c_2 \upharpoonright S_1 = c_1$，选取极大元便给出了选择函数. □

1.2.6 基数

定义 1.2.112 *两个集合 X, Y 有等势定义为存在双射 $f : X \to Y$，记作 $|X| = |Y|$.*

等势自然是等价关系，有限集意味着 $|X| = |n|$ 为自然数，可数集意味着 $|X| = |\omega|$.

定义 1.2.113 *基数 (cardinal numbers) 是一类序数，α 是基数意味着 $\forall \beta < \alpha(|\beta| \neq |\alpha|)$.*

定义 1.2.114 *偏序 $|X| \leq |Y|$ 定义为存在单射 $f : X \to Y$.*

引理 1.2.115 *$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$.*

证明 单射 $f : X \to Y$ 与单射 $g : Y \to X$ 给出层垒结构.

1. $S_0 := X \setminus \mathbf{ran}(g \circ f)$.
2. $S_{n+1} := g \circ f(S_n)$.

给出 X 到 $g(Y)$ 的双射 $h : X \to g(Y)$，使得他在 S_n 上的限制为 $g \circ f$，而在其他地方为单位映射即可，从而给出双射 $h^{-1} \circ g : Y \to X$. □

引理 1.2.116 *满射 $f : X \to Y$ 给出 $|X| \geq |Y|$.*

证明 应用选择公理对每个 $y \in Y$ 选取 $f^{-1}(\{y\})$ 的一个元素即可. □

引理 1.2.117 对于集合 X, Y, 有 $|X| \le |Y| \vee |Y| \le |X|$.

证明 运用 1.2.110 即可. □

推论 1.2.118 任意集合都等势于某个基数, 我们用 $|X|$ 表示 X 的基数.

定理 1.2.119 (Cantor) $|\mathcal{P}x| > |x|$.

证明 任意 $f : x \to \mathcal{P}x$ 非满, 因为 $\{e \in x : e \notin f(e)\}$ 不在其值域中. □

定义基数的运算如下:

定义 1.2.120

1. $|X| + |Y| := |X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}|$.
2. $|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$.
3. $|X|^{|Y|} := \left|X^Y\right|$.

定义 1.2.121 归纳的定义基数 $\aleph$:

1. $\aleph_0 := \omega$.
2. $\aleph_{\alpha+1}$ 为大于 $\aleph_\alpha$ 的最小基数.
3. $\aleph_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$.

证明 只需证明极限情形, 若有更小等势序数 κ, 则必然有 $\kappa \in \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1} \le \aleph_\alpha$, 矛盾. □

假设 1.2.122 连续统假设 *(continuum hypothesis)* 指出 $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, 它是独立于 *ZFC* 的.

现在我们证明有关基数运算的结论.

定理 1.2.123 $\forall\alpha(\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha)$.

证明 对 α 归纳, 假定 $\forall\beta < \alpha(\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta)$, 我们给出 $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ 上的良序, $(a, b) < (c, d)$ 当且仅当以下三条成立其一:

1. $\mathbf{max}(a, b) < \mathbf{max}(c, d)$.
2. $\mathbf{max}(a, b) = \mathbf{max}(c, d) \wedge a < c$.
3. $\mathbf{max}(a, b) = \mathbf{max}(c, d) \wedge a = c \wedge b < d$.

此良序同构于一序数 $\kappa \ge \aleph_{\alpha+1}$, 故有真前段 $\gamma = \aleph_\alpha$, 其必然在 $\sigma \times \sigma$ 中, 而 $\sigma < \aleph_\alpha$ 故 $|\gamma| < |\sigma|^2 = |\sigma|$, 矛盾. □

推论 1.2.124 若 α,β 为基数且至少其一无穷, 则 $\alpha+\beta=\max\{\alpha,\beta\}$.
若 α,β 为基数且 $2\le\alpha\le\beta$, 则 $\alpha^\beta=2^\beta$.

证明 只需注意到 $\alpha+\beta\le 2\cdot\mathbf{max}(\alpha,\beta)\le\alpha,\beta^2=\mathbf{max}(\alpha,\beta)$.
只需注意到 $\alpha^\beta\le(2^\beta)^\beta=2^{\beta\cdot\beta}=2^\beta$. □

1.2.7 Grothendieck 宇宙

定义 1.2.125 *Grothendieck* 宇宙 *(Grothendieck universe)* 是一个集合 $\mathfrak{U}$, 满足

1. $\forall u(u\in\mathfrak{U}\Rightarrow u\subseteq\mathfrak{U})$.
2. $\forall u\forall v(u,v\in\mathfrak{U}\Rightarrow\{u,v\}\in\mathfrak{U})$.
3. $\forall u(u\in\mathfrak{U}\Rightarrow\mathcal{P}u\in\mathfrak{U})$.
4. 给出函数 F, $\forall I(I\in\mathfrak{U}\wedge\forall i\in I(F(i)\in\mathfrak{U})\Rightarrow\bigcup_{i\in I}F(i)\in\mathfrak{U})$.
5. $\omega\in\mathfrak{U}$.

给定一个 Grothendieck 宇宙, 考察它的元素, 相当于给定了一个足够自由的空间, 从而避免一些类的操作.

假设 1.2.126 (Grothendieck) 对于任意集合, 存在一个 *Grothendieck* 宇宙包含它.

接下来我们给出 Grothendieck 宇宙的构造, 先讨论集合的层垒谱系 (Cumulative hierarchy).

定义 1.2.127 归纳定义集合 V_α:

1. $V_0:=\varnothing$.
2. $V_{\alpha+1}:=\mathcal{P}V_\alpha$.
3. $V_\alpha:=\bigcup_{\beta<\alpha}V_\beta$.

满足 V_α 传递且 $\alpha<\beta\Rightarrow V_\alpha\subset V_\beta$.

我们希望证明每个集合都在层垒谱系中, 为此需要用到以下引理.

引理 1.2.128 对于任何集合 S 有传递集 T 且 $S\subseteq T$.

证明 定义 $S_0:=S$, $S_{n+1}:=\mathcal{P}S_n$, $T:=\bigcup_{n\in\omega}S_n$.
该集合记作 $\mathbf{TC}(S)$, 称为 S 的传递闭包. □

引理 1.2.129 任意集合均在层垒谱系中.

证明 对于集合 S, $\mathbf{TC}(S)$ 对于 $\in$ 构成良基集, 我们证明其高 h 满足 $S \in V_{h+1}$. 只需归纳的证明每个 $x \in \mathbf{TC}(S)$ 均有 $x \in V_{\rho(x)}$ 即可, 其中 ρ 为良基关系的秩函数. □

引理 1.2.130 任何类 C 都有 $\in$ 极小元.

取任意 $S \in C$, $\mathbf{TC}(S)$ 传递集, 取集合 $\mathbf{TC}(S) \cap C$ 之极小者即可.

关于层垒谱系可以另做证明, 考察不在层垒谱系中的集合构成的类的 $\in$ 极小元, 从而得到矛盾.

定理 1.2.131 ($\in$ 归纳) 给定类 C, 若对于任意 $x \in C$, $\forall y \in x(y \in C)$, 则 $C = \mathfrak{U}$.

证明 取 $\mathfrak{U} \setminus C$ 的 $\in$ 极小元 x, 有 $\forall y \in x(y \in C)$, 矛盾. □

定义 1.2.132 一个共尾集 *(cofinal set)* S 定义于一个所有有限子集都有上界的拟序集 *(有向集)* P 上, 拟序集 *(quasi order)* 是没有反对称性的偏序集. 共尾集是满足 $\forall x \in P(\exists y \in S(x \leq y))$ 的 P 子集.

定义 1.2.133 一个共尾集 S 的共尾类 *(cofinal type)* 定义为共尾集势的最小值, 记作 $\mathbf{cf}(S)$.

引理 1.2.134 对序数 α 有增 $\phi : \mathbf{cf}(\alpha) \to \alpha$, 使得 $\phi[\mathbf{cf}(\alpha)]$ 是共尾集.

证明 考察一个长为 $\mathbf{cf}(\alpha)$ 的共尾集 a_β, 考察其增子列 $a_\beta : \forall \gamma < \beta(a_\gamma < a_\beta)$, 也是一共尾集, 该子列前段必然对应 $\mathbf{cf}(\alpha)$ 前段, 故其序型必为 $\mathbf{cf}(\alpha)$. □

定义 1.2.135 一个无穷基数 κ 是正则的 *(regular cardinal)* 当且仅当 $\kappa = \mathbf{cf}(\kappa)$.

正则基数是一类通过短于该基数的极限到达不了的基数.

例 1.2.136 $\aleph_{\gamma+\omega}$ 非正则.

证明 依定义知 $\aleph_{\gamma+\omega} = \bigcup_{\beta<\omega} \aleph_{\gamma+\beta}$, 故 $\mathbf{cf}(\aleph_{\gamma+\omega}) \leq \omega$. □

例 1.2.137 $\aleph_{\gamma+1}$ 正则.

证明 假定有长度小于等于 $\aleph_\gamma$ 的共尾集 S, 有 $\aleph_{\gamma+1} = \left|\bigcup_{\beta<\aleph_\gamma} a_\beta\right| \leq \aleph_\gamma \times \aleph\gamma = \aleph_\gamma$, 矛盾. □

推论 1.2.138 序数的共尾类均为 1 或正则基数.

定义 1.2.139 一个不可数基数 κ 是不可达的 *(inaccessible cardinal)* 当且仅当 κ 是正则的且 $\forall \alpha < \kappa(2^\alpha < \kappa)$.

在 NBG 公理中, 无法证明不可达基数的存在性, Grothendieck 的 1.2.126 依旧是一个奢侈的假设.

定理 1.2.140 *Grothendieck 宇宙是层垒谱系中不可达基数 κ 对应的 V_κ.*

Grothendieck 宇宙 U 就像一个虚拟机, 在集合论框架下虚拟的运行了一个集合论, 对应的类便是 $\mathcal{P}U$ 中的元素, 集合就是 U 中的元素, 运用 Grothendieck 宇宙可以有效避免一些集合论的困难, 但是其究竟是否有必要, 仍然是数学哲学与群体心理学的交界的议题.

1.2.8 Gödel 编码, 力迫法, 构造性

1.2.8.1 基类, 公式

定义 1.2.141 *基类 (basic class) 是一类能通过 $\mathfrak{E}$ 经有限长的公式构造出的类.*

定义 1.2.142 *我们构造如下基类:*

1. *宇宙 $\mathfrak{U} := \mathbf{dom}(\mathfrak{E})$ 是基类.*
2. *子集判定 $\mathfrak{S} = \{(x, y) : x \subseteq y\}$ 是基类.*

   证明
   $$\mathfrak{S} = (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}) \setminus (\mathbf{dom}((\mathfrak{E}^{-1} \times \mathfrak{U})^{\circlearrowright} \setminus (\mathfrak{E} \times \mathfrak{U})^{\circlearrowleft}))$$
   □

3. *单位映射 $\mathfrak{I} = \{(x, x) : x \in \mathfrak{U}\}$ 是基类.*

   证明
   $$\mathfrak{I} = \mathfrak{S}^{-1} \cap \mathfrak{S}$$
   □

4. *求定义域 $\mathfrak{D} = \{(x, y) : \forall t(t \in y \Leftrightarrow \exists z((t, z) \in x))\}$ 是基类.*

   证明
   $$\mathfrak{D} = (\mathfrak{I} \times \mathfrak{U})^{\circlearrowleft}$$
   □

引理 1.2.143 *给出二元关系 R, 映射 F, G, 有类 $F_R G := \{x \in \mathbf{dom}[F] \cap \mathbf{dom}[G] : (F(x), G(x)) \in R\}$.*

证明

□

1.2.8.2 Gödel 类存在定理

定义 1.2.144 (Lévy 层级) *一个逻辑公式 ϕ 量词有界 (bounded quantifier) 当且仅当其量词均为 $\forall X \in Y$ 或 $\exists X \in Y$.*

一个量词有界公式的 Lévy 层级 (Lévy hierarchy) 定义为 $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$, 归纳定义高层级的 Lévy 层级.

1. *Σ_{n+1} 公式是形如 $\exists X_1 \exists X_2 \ldots \exists X_m \phi$, 其中 ϕ 是 Π_n 公式.*
2. *Π_{n+1} 公式是形如 $\forall X_1 \forall X_2 \ldots \forall X_m \phi$, 其中 ϕ 是 Σ_n 公式.*
3. *Δ_n 是一类即是 Σ_n 又是 Π_n 的公式.*

定义 1.2.145 *一个公式称 $\mathfrak{U}$ 有界当且仅当量词均为 $\exists x \in \mathfrak{U}$ 或 $\forall x \in \mathfrak{U}$.*

定义 1.2.146 *归纳定义 n 元组 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) := ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$*

引理 1.2.147 *对于任意自然数 $i, j \leq n$, 有基类 $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in x_j\}$.*

证明 递归的定义记号 $\mathbf{dom}^0 := \mathfrak{I}$, $\mathbf{dom}^{n+1} := \mathbf{dom} \circ \mathbf{dom}^n$, 根据 4 和 3 知每个 $\mathbf{dom}^n$ 为基类.

于是映射 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ 为基类 $\mathbf{ran}(\mathbf{dom}^{n-i})$. □

1.2.8.3 Gödel 编码

定义 1.2.148 *Gödel 操作 (Gödel operations) 定义为以下九个映射:*

1. $\ddot{G}_0 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto x$.
2. $\ddot{G}_1 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto x \setminus y$.
3. $\ddot{G}_2 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto x \times y$.
4. $\ddot{G}_3 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto x^{-1}$.
5. $\ddot{G}_4 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto x^{\circlearrowleft}$.
6. $\ddot{G}_5 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto x \cap \mathfrak{E}$.
7. $\ddot{G}_6 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto \mathbf{dom}(x)$.
8. $\ddot{G}_7 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto \bigcup x$.
9. $\ddot{G}_8 : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $(x, y) \mapsto \{x, y\}$.