大笔记

我

2024 年 1 月 21 日

目录

前言

此笔记意在记录学习中的一些命题证明以及想法.

第 1 章 基础知识

1.1 逻辑

断言 (Statement) 是一类有明确真值 (T/F) 的语句, 我们定义如下运算:

定义 1.1.1 对于断言 A 定义其否定 (negation) 为 $\neg A$, 满足如下真值表.

A	$\neg A$
T	F
F	T

对于断言 A, B 定义其合取 (conjuction) 为 $A \wedge B$, 其析取 (disjuction) 为 $A \vee B$, 满足如下真值表.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

定义 1.1.2 如果 $E(x)$ 在 x 是某些对象时为断言, 则称 $E(x)$ 为一个性质 (property).

我们承认类 (class) 的概念如下, 若对象 x 属于类 A, 则记为 $x \in A$, 否则记为 $x \notin A$. 我们用 $\{x \in X; E(x)\}$ 表示 X 中所有满足性质 E 的对象组成的类.

定义 1.1.3 我们用 $\exists$ 代表存在某个对象, 用 $\forall$ 代表所有对象都满足某个性质.

我们也用 $\exists!$ 代表存在唯一一个对象.

我们用 $a := b$ 标记 a 由 b 定义, $a = b$ 代表 a, b 仅仅是相同对象的两个表示.

我们有如下自明的公式.

定理 1.1.4

$$\neg\neg A := \neg(\neg A) = A \tag{1.1.1}$$
$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B \tag{1.1.2}$$
$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \tag{1.1.3}$$
$$\neg(\forall x \in X : E(x)) = \exists x \in X : \neg E(x) \tag{1.1.4}$$
$$\neg(\exists x \in X : E(x)) = \forall x \in X : \neg E(x) \tag{1.1.5}$$
$$\neg(\forall x \in X : (\exists y \in Y : E(x, y))) = \exists x \in X : (\forall y \in Y : \neg E(x, y)) \tag{1.1.6}$$
$$\neg(\exists x \in X : (\forall y \in Y : E(x, y))) = \forall x \in X : (\exists y \in Y : \neg E(x, y)) \tag{1.1.7}$$

定义 1.1.5 对于断言 A, B, 我们记断言 A 能推出 B 为 $A \Rightarrow B$, 代表

$$A \Rightarrow B := (\neg A) \vee B \tag{1.1.8}$$

而断言 A, B 等价 $(A \Leftrightarrow B)$ 意味着 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

定理 1.1.6 我们可以验证下述断言:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1.1.9}$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{1.1.10}$$

1.2 集合论

集合是数学的基础, 我们在此浅浅的介绍集合论.

1.2.1 Zermelo-Fraenkel 公理

我们先列举这些公理, 之后再解释它们的意义.

1. **外延公理 (Axiom of Extensionality):** 如果 A, B 的所有元素都相同, 则 $A = B$.

2. **配对公理 (Axiom of Pairing):** 对于任意 a, b, 存在集合 $\{a, b\}$ 仅仅包含 a, b.

3. **分离公理 (Axiom Schema of Separations):** 对于任意集合 A 和性质 P, 存在集合 $\{x \in A; P(x)\}$ 仅仅包含 A 中满足性质 P 的元素.

4. **并集公理 (Axiom of Union):** 对于任意集合 A, 存在集合 $\bigcup A$ 为 A 中元素之并.

5. **幂集公理 (Axiom of Power Set):** 对于任意集合 A, 存在集合 $\mathcal{P}(A)$ 为 A 的所有子集之集合.

6. **无穷公理 (Axiom of Infinity):** 存在归纳集, 也就是说 $\exists x : [(\varnothing \in x) \wedge \forall y \in x : (y \cup \{y\} \in x)]$.

7. **替换公理 (Axiom Schema of Replacement):** 对于映射 F, 集合 X, 存在集合 $F(X) := \{F(x) : x \in X\}$.

8. **正则公理 (Axiom of Regularity):** 对于任何集合 A 均存在关于从属关系 $\in$ 极小元.

9. **选择公理 (Axiom of Choice):** 任何一族非空集都有选择映射.

其中, 除最后一条以外称 Zermelo-Fraenkel 公理 (ZF), 最后一条称选择公理 (C), 我们将使用 (ZFC) 构建的公理体系.

当然, 在集合论建立的时候, 其公理 (错误) 为:

朴素公理: 对于任意性质 P 均有 $Y = \{x : P(x)\}$ 为集合.

随后提出的 Russell 悖论给出了性质 $X : X \notin X$, 并指出 $\{X : X \notin X\} \notin \{X : X \notin X\}$ 是一个矛盾的命题, 数学家不得不探索更严格的建立集合论的道路.

1.2.1.1 类

此处我们引入类的概念作为朴素集合观点的延伸, 并且在此基础上解释公理.

上一章业已给出了一些逻辑运算, 我们称用 (可以含变元) $=, \in, \wedge, \vee, \exists$ 等等逻辑运算符连接的称之为公式 (formula), 记作 $\phi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, 其中 u_i 为变元, 无自由变元的公式称为命题.

定义 1.2.1 对于公式 $\phi(u, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, 我们给出类 C 如 $C := \{x : \phi(x, p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$.

$$x \in C \Leftrightarrow \phi(x, p_2, \ldots, p_n)$$

并称类 C 由 $p_2, \ldots, p_n$ 给定 (definable), 若无这样的 p 则称 C 是给定的 (definbale).

定义 1.2.2 我们给出类 $V=\{x:x=x\}$, 称之为宇宙类 (universal class).

我们都可以定义关于类的运算如下.

定义 1.2.3 对于类 A,B, 我们定义

$$A\cap B:=\{x:x\in A\wedge x\in B\} \tag{1.2.1}$$

$$A\cup B:=\{x:x\in A\vee x\in B\} \tag{1.2.2}$$

$$A\setminus B:=\{x:x\in A\wedge x\notin B\} \tag{1.2.3}$$

对于类 A, 我们定义

$$\bigcup A:=\{x:\exists y\in A:x\in y\} \tag{1.2.4}$$

定义 1.2.4 我们定义 $A\subseteq B$ 为 $x\in A\Rightarrow x\in B$, 称 A 是 B 的子类 (subclass).

每个集合 S 均可自然的被解释为一个类 $\{x:x\in S\}$, 并交等从属关系自然可以延伸到集合上.

1.2.1.2 外延公理 (Extensionality)

如果 A,B 的所有元素都相同, 则 $A=B$, 用逻辑语言表为

$$\forall x:(x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Rightarrow A=B$$

而 $A=B\Rightarrow\forall x:(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$ 是自明的, 也即

$$\forall x:(x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Leftrightarrow A=B$$

1.2.1.3 配对公理 (Pairing)

对于任意 a,b, 存在集合 $\{a,b\}$ 仅仅包含 a,b, 用逻辑语言表为

$$\forall a\forall b\exists c\forall x(x\in c\Leftrightarrow x=a\vee x=b)$$

由外延公理 c 唯一, 故记作 $\{a,b\}$, 特别的 $\{a,a\}=\{a\}$.

例 1.2.5 我们可以借配对公理定义元素对 $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$, 满足

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

元组 $(a,b,c)=((a,b),c),(a,b,c,d)=((a,b,c),d)\ldots$
也满足 $(a,b,c)=(d,e,f)\Leftrightarrow a=d\wedge b=e\wedge c=f\ldots.$

1.2.1.4 分离公理

对于任意集合 A 和性质 P, 存在集合 $\{x \in A; P(x)\}$ 仅仅包含 A 中满足性质 P 的元素, 用逻辑语言表为:

$$\forall A \forall P \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow u \in X \wedge P(u))$$

依外延公理可确保 Y 唯一.

定义 1.2.6 我们定义 $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$.
定义 $A \cap B := \{x \in A : x \in B\}$.

定义 1.2.7 空集 (empty set) 定义为 $\varnothing := \{x \in X : x \neq x\}$, 此中要求至少存在一个集合 (可由无穷公理给定).

1.2.1.5 并集公理

对于任意集合 A, 存在集合 $\bigcup A$ 为 A 中元素之并, 用逻辑语言表为:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge u \in z))$$

引入缩写 $(\exists z \in X)\phi(z) := \exists z(z \in X \wedge \phi(z))$ 与 $(\forall z \in X)\phi(z) := \forall z(z \in X \Rightarrow \phi(z))$, 则上述公理可表为

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow (\exists z \in X) u \in z)$$

外延公理确保 Y 之唯一性, 我们定义 $X \cup Y := \bigcup\{X, Y\}, X \cup Y \cup Z := (X \cup Y) \cup Z = \bigcup\{X, Y, Z\}$ 等等. 也定义 $\{x, y, z\} := \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ 等等.

定义 1.2.8 对称差 (symmetric difference) 定义为 $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

1.2.1.6 幂集公理

对于任意集合 A, 存在集合 $\mathcal{P}(A)$ 为 A 的所有子集之集合, 用集合论语言表示为.

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \Leftrightarrow u \subseteq X)$$

而子集的定义继承自类, 也即

$$X \subseteq Y := \forall z (z \in U \Rightarrow z \in X)$$

定义 1.2.9 我们称 $X \subset Y$ 为真子集 (proper subset), 若 $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.

幂集公理给了我们集合论的很大自由, 比如我们可以定义积.

定义 1.2.10 对于集合 X, Y 定义其积为 $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$. 而 $X \times Y$ 为一集合, 源于幂集公理与分离公理, 也即

$$X \times Y = \{u \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) : \exists x \in X \exists y \in Y(u = (x, y))\}$$

同理以定义多个集合的积, 我们用 X^n 指代 n 个 X 的积.

定义 1.2.11 X 上 n 元关系意在指 $R \subseteq X^n$, 我们用记号 $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 指代 $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$, 特别的, 对于二元关系, 我们用记号 xRy 指代 $(x, y) \in R$.

可以定义定义域和值域 (构成集合) 如下:

$$\operatorname{dom}(R) := \{x : \exists y(xRy)\} \tag{1.2.5}$$

$$\operatorname{ran}(R) := \{y : \exists x(xRy)\} \tag{1.2.6}$$

$$\operatorname{field}(R) := \operatorname{dom}(R) \cup \operatorname{ran}(R) \tag{1.2.7}$$

定义 1.2.12 映射 (function) f 是一个二元关系, 且满足 $xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z$. 我们记 $f(x) := y \Leftrightarrow xfy$, 称 f 在 x 处的值为 y.

f 是 X 向 Y 之映射, 记作 $f : X \to Y$, 若 $\operatorname{dom}(f) = X$, $\operatorname{ran}(f) \subseteq Y$.

而全体 X 向 Y 之映射记作 $Y^X \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$, 构成一个集合.

对于 $f \in Y^X$, 我们称其满若 $\operatorname{ran}(f) = Y$, 单若 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

$f \in Y^X$ 也记作 $f : X \to Y$, 并且用 $\mapsto$ 表达值的对应, 比如 $f : x \mapsto \{x\}$, 意味着 f 是类 $\{u : \exists x(u = (x, \{x\}))\}$ 的一个子集.

定义 1.2.13 我们定义映射的一些操作如下:

1. **复合 (composition):** 对于 $f : X \to Y, g : Y \to Z$, 定义 $g \circ f : X \to Z$ 为 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

2. **限制 (restriction):** 对于 $f : X \to Y, A \subseteq X$, 定义 $f \restriction A : A \to Y$ 为 $f \restriction A(x) := f(x)$.

3. **逆 (inverse):** 对于 $f : X \to Y$, 若 f 既单又满, 则有 $f^{-1} : Y \to X$, 定义为 $f^{-1}(y) := x$ 当且仅当 $f(x) = y$.

可以验证上述操作都是集合论允许的.

定义 1.2.14 一个映射自然诱导出幂集上的映射, 也即对于 $f: X \to Y$, 仍然用 f 表示 $\mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$ 的映射

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \operatorname{ran}(f \restriction A) \tag{1.2.8}$$

和映射 $f^{-1}: \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$.

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \tag{1.2.9}$$

定义 1.2.15 若一个二元关系满足以下性质, 则称之为等价关系 (equivalence relation):

1. 自反性 (reflexivity): xRx.
2. 对称性 (symmetry): $xRy \Rightarrow yRx$.
3. 传递性 (transitivity): $xRy \land yRz \Rightarrow xRz$.

等价关系给出了集合的一个划分, 也即对于定义于 X 上的等价关系 R, $x \in X$ 的等价类 (equivalence class) 定义为

$$[x]_R := \{y \in X : xRy\} \tag{1.2.10}$$

对 X 给出了拆分 $A = \{S \in \mathcal{P}X : \exists x(S = [x]_R)\}$, 而 $X = \bigcup A$ 且 $\forall S, T \in A : S \cap T = \varnothing \Leftrightarrow S \neq T$.

同理, 对于一个划分 A, 我们可以定义相应的等价关系 R 为 $xRy \Leftrightarrow \exists S \in A(x \in S \land y \in S)$.

1.2.1.7 无穷公理

存在归纳集, 也就是说 $\exists x : [(\varnothing \in x) \land \forall y \in x : (y \cup \{y\} \in x)]$. 现在还并不具备处理其的手段, 故按下不表.

1.2.1.8 替换公理

对于映射 F (此处我们将映射的定义延拓至类), 集合 X, 存在集合 $F(X) := \{F(x) : x \in X\}$, 用逻辑语言表为

$$\forall x \forall y \forall z(\phi(x, y, p) \land \phi(x, z, p) \Rightarrow y = z) \Rightarrow \exists Y \forall y(y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X \phi(x, y, p))$$

利用分离公理, 我们可以导出 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 为参数的替换公理, 或者说对于映射 F, 若 $\operatorname{dom}(f)$ 是集合, 则 $F(\operatorname{dom}(f))$ 也是集合 $(\forall X \exists f(F \restriction X = f))$.

1.2.1.9 正则公理

对于任何集合 A 均存在关于从属关系 $\in$ 极小元, 用逻辑语言表为

$$\forall x \exists y (y \in x \wedge \forall z (\neg (z \in y)))$$

一个基于正则公理的推论是, 不存在 $x \in x$, 否则 $\{x\}$ 无极小元, 同样也不存在以 $\in$ 为关系的无穷降链.

1.2.1.10 选择公理

基于同样的理由, 选择公理也按下不表.

1.2.2 序数

序数几乎是集合论上唯一的结构, 有必要对其进行研究.

1.2.2.1 偏序

定义 1.2.16 一个 P 上二元关系 $\leq$ 称偏序关系 (partial ordering) 若满足:

1. 自反性 (reflexivity): $x \leq x$.
2. 反对称性 (antisymmetry): $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.
3. 传递性 (transitivity): $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow xlez$.

称线序则要求 $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$.
若偏序由 $\leq$ 给定, 我们也用 $\geq, <, >$, 其意义是自明的.

定义 1.2.17 对于偏序集 (partially ordered set) $(P, \leq)$, 对于 $X \subseteq P$ 定义:

1. 极大元 (maximal element): $x \in X$ 为极大元, 若 $\forall y \in X (x \leq y \Rightarrow x = y)$.
2. 极小元 (minimal element): $x \in X$ 为极小元, 若 $\forall y \in X (y \leq x \Rightarrow x = y)$.
3. 最大元 (greatest element): $x \in X$ 为最大元, 若 $\forall y \in X (y \leq x)$.
4. 最小元 (least element): $x \in X$ 为最小元, 若 $\forall y \in X (x \leq y)$.
5. 上界 (upper bound): $x \in X$ 为上界, 若 $\forall y \in X (y \leq x)$.
6. 下界 (lower bound): $x \in X$ 为下界, 若 $\forall y \in X (x \leq y)$.

7. 上确界 (supremum): $x \in P$ 为上确界, 若 x 为上界且对于任意上界 y 有 $x \le y$.
8. 下确界 (infimum): $x \in P$ 为下确界, 若 x 为下界且对于任意下界 y 有 $y \le x$.

定义 1.2.18 若偏序集 $(P, \le)$ 中任意两个元素均有上确界和下确界, 命之为格 (lattice), 格的理论将在后面几章叙述.

定义 1.2.19 偏序是集合上的结构, 我们研究保持偏序结构的映射, 也即对于偏序集 $(P, \le)$ 和 $(Q, \le)$, 若单射 $f : P \to Q$ 满足 $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$, 则称 f 为保序映射 (order-preserving map) 线序间的保序映射也称增 (increasing).

定义 1.2.20 对于偏序集 $(P, \le_P)$ 和 $(Q, \le_Q)$, 若存在保序双射 $f : P \to Q$, 且其逆映射亦保序, 则称同构 (isomorphism), 记作 $P \cong Q$.

1.2.2.2 良序

定义 1.2.21 一个线序称为良序 (well-ordering), 若其任意非空子集均有最小元.

引理 1.2.22 对于良序 $(W, \le)$ 以及增映射 $f : W \to W$, 则 $\forall x (x \le f(x))$.

证明 构造 W 子集 $S = \{x \in W : x > f(x)\}$, S 有最小元 x, 而 $x > f(x)$ 意味着 $f(x) > f(f(x))$, 而 $f(x) < x$ 与 x 最小矛盾. □

推论 1.2.23 良序集自同构 (automorphism) 必为恒等映射.

推论 1.2.24 两个良序集间的同构存在则唯一.

定义 1.2.25 良序集的前段 (initial segment) 定义为 $S \subseteq W$ 且 $x \ge y \Rightarrow (x \in S \Rightarrow y \in S)$.

引理 1.2.26 前段是良序集, 序继承自原良序集, 并可写成 $\{x \in W : x < u\}$ 的形式, 称为 u 的前段 $W(u)$.

证明 对于 S 子集, 取其在 W 中最小元 x 即可. 而 S 可以被写成 $W \setminus S$ 最小元的前段. □

引理 1.2.27 真前段必不同构于原良序集.

证明 同构于前段违反 引理 1.2.22. □

定理 1.2.28 任意两个良序集 W, W' 一下三者成立其一:

1. $W \cong W'$.
2. W 同构于 W' 的真前段.
3. W' 同构于 W 的真前段.

证明 构造 $f = \{(x,y) \in W \times W' : W(x) \cong W'(y)\}$, 根据 引理 1.2.27 有 $\{(x,y) \in f \land (x,z) \in f \Rightarrow y = z\}$ 与 $\{(y,x) \in f \land (z,x) \in f \Rightarrow y = z\}$, 故 f 为 $\mathrm{dom}(f)$ 与 $\mathrm{ran}(f)$ 间的双射.

注意到若 $\mathrm{dom}(f) \neq W$, 且 $\mathrm{ran}(f) \neq W'$, 则取最小元 $x \in W \setminus \mathrm{dom}(f)$ 与 $y \in W' \setminus \mathrm{ran}(f)$, f 是 $W(x)$ 与 $W'(y)$ 间同构故 $(x,y) \in f$, 与 $x \in \mathrm{dom}(f)$ 矛盾.

故 $(\mathrm{dom}(f) = W) \land (\mathrm{ran}(f) = W')$, $(\mathrm{dom}(f) = W) \land \neg(\mathrm{ran}(f) = W')$, $\neg(\mathrm{dom}(f) = W) \land (\mathrm{ran}(f) = W')$ 三者成立其一, 也即上述命题成立. □

定义 1.2.29 同构的良序集称为有同样的序形 (order type), 序数是表示序形的集合.

1.2.2.3 序数

定义 1.2.30 一个传递集 (transitive set) 定义为 $\bigcup x \subseteq x$ 的集合 x, 也即 x 的元素也都是 x 的子集.

定义 1.2.31 一个序数 (ordinal numbers) 是一个传递的良序集, 偏序 $<$ 由 $\in$ 给出.

我们用 $\mathbf{On}$ 表示全体序数构成的类.

引理 1.2.32 序数满足如下性质:

1. $\varnothing \in \mathbf{On}$
2. $\alpha \in \mathbf{On} \land \beta \in \alpha \Rightarrow \beta \in \mathbf{On}$
3. $\alpha \in \mathbf{On} \land \beta \in \mathbf{On} \Rightarrow (\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta)$
4. $\alpha \in \mathbf{On} \land \beta \in \mathbf{On} \Rightarrow \alpha \subseteq \beta \lor \beta \subseteq \alpha$

证明 第一条是自明的. 第二条源于 引理 1.2.26 和 $\forall x \in \tau \in \beta \Rightarrow x \in \beta$. 第三条可以取 $\beta \setminus \alpha$ 的最小元 γ, 注意到 $\gamma \in x \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha$, 故 $\alpha = \beta(\gamma) = \gamma$ 而

后面一个等号无非源自 $\gamma \subseteq \beta$ 与 γ 的极小性. 第四条只需注意到 $\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$ 即可. □

由 引理 1.2.32 立得以下推论:

推论 1.2.33 首先, 我们将偏序推广到类 **On** 上, 也即 $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$,

1. 对于任意序数 α, 有 $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.
2. 类 $C \subseteq \mathbf{On}$, 则有 $\inf C := \bigcap C$ 为序数.
3. 集合 $S \subseteq \mathbf{On}$, 则有 $\sup S := \bigcup S$ 为序数.

引理 1.2.34 任何良序集 W 都同构于某个序数.

证明 定义类 $F = \{u : \exists x \exists y(u = (x, y) \wedge x \in W \wedge W(x) \cong y \wedge y \in \mathbf{On})\}$, 考察 $F \upharpoonright W$ 即可, 由替换公理知 $\mathrm{ran}(f)$ 是序数. □

定义 1.2.35 对于序数 α, 定义 $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$, 称为 α 的后继 (successor), 后继也是序数.

推论 1.2.36 若一个非空序数不是后继, 则其为极限序数 (limit ordinal), 即 $\alpha = \bigcup \alpha$.

证明 若否, 有 $\bigcup \alpha + 1 \in \alpha$ 故 $\bigcup \alpha \in \bigcup \alpha$. □

有了后继序数, 我们可以着手定义自然数.

定义 1.2.37 自然数 (natural numbers) 如此的定义:

1. $0 := \varnothing$.
2. $n + 1 := n \cup \{n\}$.

1.2.3 归纳

归纳的思想可以追溯到 Peano 公理.

例 1.2.38 Peano 公理: 自然数满足以下性质:

1. 0 是自然数.
2. 对于任意自然数 n, 存在唯一自然数 $n + 1$ 使得 $n + 1$ 是 n 的后继.

3. 0 不是任何自然数的后继.

4. 不同自然数的后继不同.

5. **数学归纳法:** 若性质 P 满足 $P(0)\wedge\forall n(P(n)\Rightarrow P(n+1))$, 则 $P(n)$ 对于任意自然数 n 成立.

在所述集合论中, 我们想要找到自然数集作为 Peano 公理的对应, 此时我们需要引入无穷公理.

定义 1.2.39 ω 定义为归纳集中的最小元, 对于给定的归纳集 X, 可以给出 $\omega=\bigcap\{x:x\subseteq X\wedge\varnothing\in y\wedge\forall y\in x(y\cup\{y\})\in x\}$.

证明 集合的交可以用 $\setminus,\bigcup$ 表示, 故成为一个集合.
易证 ω 归纳, 任取归纳集 Y, 注意到 $X\cap Y$ 也是归纳集, 故 $\omega\subseteq Y$. □

推论 1.2.40 极限序数都是归纳集, 故 ω 是最小的极限序数.

定理 1.2.41 **数学归纳法:** 称 ω 为自然数集, ω 中的元素称自然数, 若性质 P 对 0 成立, 且若对自然数 n 成立则对 $n+1$ 成立, 则对任意自然数 $n\in\omega$ 成立.

证明 取不是自然数的最小元, 其是后继序数 $n+1$, 而 n 是自然数.
同理, 取不满足 P 的最小元, 其是后继序数 $n+1$, 而 n 满足 P. □

定理 1.2.42 **超限归纳法:** 若性质 P 满足如下性质:

1. $P(0)$ 成立.

2. 若 α 是极限序数 $(\forall\beta<\alpha(P(\beta))\Rightarrow P(\alpha))$.

3. 若 $\alpha=\beta+1$ 是后继序数 $P(\beta)\Rightarrow P(\alpha)$.

则对于任意序数 α, $P(\alpha)$ 总成立.

证明 若对于序数 γ 不成立, 有最小序数 α 不成立, 而无论其是否是后继序数都矛盾了. □

依赖于超限归纳法, 我们可以定义序数运算, 运算结果仍是序数.

定义 1.2.43 给定 α, 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha+0:=\alpha$, $\alpha+(\beta+1):=(\alpha+\beta)+1$, $\alpha+\gamma:=\bigcup_{\beta<\gamma}(\alpha+\beta)$ 为序数的和.

定义 1.2.44 给定 α, 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha\cdot 0:=0$, $\alpha\cdot(\beta+1):=(\alpha\cdot\beta)+\alpha$, $\alpha\cdot\gamma:=\bigcup_{\beta<\gamma}(\alpha\cdot\beta)$ 为序数的积.

定义 1.2.45 给定 α, 分别对于空集, 后继序数, 极限序数定义 $\alpha^0 := 1$, $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$, $\alpha^\gamma := \bigcup_{\beta<\gamma}(\alpha^\beta)$ 为序数的幂.

引理 1.2.46 对于序数 α, β, γ, 有

1. $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.
2. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

证明 对 γ 进行超限归纳即可. □

定义 1.2.47 对于线序集 A, B, 定义线序集的积 $A\times B$ 为 $A\times B$ 上的线序 $(a,b)<(c,d)$ 当且仅当 $b<d\vee(b=d\wedge a<c)$.

定义线序集的和 $A+B$ 为 $A\times\{0\}\cup B\times\{1\}$ 上的线序, 其中 $(a,0)<(b,1)$ 对于任意 $a\in A, b\in B$ 成立.

定义 1.2.48 对于序数 α, β, 序数和同构于线序和 $\alpha+\beta$, 序数积同构于线序积 $\alpha\cdot\beta$.

证明 对 β 归纳. □

引理 1.2.49 加法乘法满足如下性质:

1. $\beta<\gamma \Rightarrow \alpha+\beta<\alpha+\gamma$.
2. $\alpha<\beta \Rightarrow \exists!\gamma(\beta=\alpha+\gamma)$.
3. $\beta<\gamma \Rightarrow \alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$.
4. $\alpha>0 \Rightarrow \forall\gamma\exists\beta\exists\rho(\gamma=\beta\cdot\alpha+\rho\wedge\rho<\alpha)$.
5. $\beta<\gamma\wedge\alpha>1 \Rightarrow \alpha^\beta<\alpha^\gamma$.

证明 一三五对 γ 归纳, 二则是 $\{\chi:\alpha\le\chi<\beta\}$ 上的良序, 唯一性由第一条确保. 四则取 β 为最大的 $\alpha\cdot\beta\le\gamma$ 的序数. □

定理 1.2.50 (Cantor's Normal Form Theorem) 任意序数 $\alpha>0$ 可以被唯一的写作 $\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot\gamma_1+\omega^{\beta_2}\cdot\gamma_2+\cdots+\omega^{\beta_n}\cdot\gamma_n$, 其中 $\alpha\ge\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_n$ 为序数, $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ 为自然数.

证明 注意到 $1=\omega^0$, 取极大 β_1 使得 $\omega^{\beta_1}\le\alpha$, 有 $\alpha=\omega^{\beta_1}\cdot\gamma_1+\rho$, 对 ρ 施以归纳即可, n 有限基于正则公理. □

例 1.2.51 (Hydra 数) 对于一个有根树, 每次选取一个叶节点 p 以及一个自然数 n. 删去 p 寻求 p 的父节点, 若其不是根节点, 则将其父节点复制 n 份, 连接到 p 的祖父节点处, 则不论如何操作, 最终都会到达只有根节点的树.

证明 对每颗树 T, 其根节点连结子树 $T_1, T_2, \ldots, T_n$, 定义 $f(T) := \omega^{f(T_1)} + \omega^{f(T_2)} + \cdots + \omega^{f(T_n)}$, 则每步操作使 f 减小, 故有限步内必然到达 0. □

定义 1.2.52 良基关系是 P 上一二元关系 E, 使得 $\forall X((X \subseteq P \wedge X \neq \varnothing) \Rightarrow \exists a(a \in X \wedge \forall x \in X \neg(xEa)))$.

例 1.2.53 良序 $<$ 是良基关系.

定理 1.2.54 对于良基关系 E, 有唯一 $\rho : P \to \mathbf{On}$, 使得 $\forall x \in P(\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 : yEx\})$ (任意非空子集有极小元).

证明 归纳定义一族集合 P_θ

1. $P_0 := \varnothing$.
2. $P_{\theta+1} := \{x \in P : \forall y(yEx \Rightarrow y \in P_\theta)\}$.
3. $P_\theta := \bigcup_{\beta<\theta} P_\beta$.

若有 $P_\theta = P_{\theta+1}$, 此时必然有 $P_\theta = P$, 若否 $P \setminus P_\theta$ 有极小元 x, 有 $x \in P_{\theta+1} \setminus P_\theta$, 矛盾. 定义 $\rho(x) := \sup\{\alpha : x \notin P_\alpha\}$, 上述条件的验证是显然的.

唯一性只需考虑 $\{x \in P : \rho_1(x) \neq \rho_2(x)\}$ 的极小元即可. □

定义 1.2.55 给出一个良基关系 E, 定义一个元素的秩 (rank) 为 $\rho(x)$, E 的高 (height) 为 $\mathrm{ran}\rho$.

1.2.4 Zorn 引理

这章我们来重温选择公理.

选择公理: S 是一族集合且 $\varnothing \notin S$, 则存在函数 $f : S \to \bigcup S$, 使得 $f(x) \in x$ 对于任意 $x \in S$ 成立.

引理 1.2.56 $\mathbf{On}$ 不是集合.

证明 若是集合, 则 $\mathbf{On} \in \mathbf{On}$, 矛盾. □

定理 1.2.57 (Zermelo 良序定理 (Zermelo's well-ordering theorem)) 任意集合都能被赋予良序.

证明

□

1.2.5 von Neumann-Bernays-Gödel 公理