

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika – 2. stopnja

Simon Besednjak

DVOJNE PH KRIVULJE

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2021

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .

Kazalo

Program dela	vii
1 Uvod	1
2 Prostorske krivulje	1
2.1 Osnovne lastnosti	1
2.2 Ločna dolžina in tangenta na krivuljo	1
2.3 Ukrivljenost in Frenetovo ogrodje	2
3 Bernsteinovi polinomi in Bézierjeve krivulje	3
4 Krivulje s pitagorejskim hodografom	3
4.1 Definicije	3
4.2 Lastnosti	5
4.3 Izražanje prostorskih PH krivulj v kvaternionski obliki	8
4.4 Izražanje prostorskih PH krivulj s Hopfovo preslikavo	8
5 Dvojne PH krivulje	8
6 Integrali po ω-kompleksih	8
6.1 Definicija	8
7 Tehnični napotki za pisanje	8
7.1 Sklicevanje in citiranje	8
7.2 Okrajšave	8
7.3 Vstavljanje slik	9
7.4 Kako narediti stvarno kazalo	9
7.5 Navajanje literature	9
Literatura	11
Stvarno kazalo	13

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [11], [9], [14], [3].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

- [6] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I. Quaternion and Hopf map representations*, Journal of Symbolic Computation **44**(2) (2009) 161–179
- [7] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs II. Enumeration of low-degree curves*, Journal of Symbolic Computation **44**(4) (2009) 307–332
- [5] R. T. Farouki, *Pythagorean—hodograph Curves*, Springer, 2008

Podpis mentorja:

Dvojne PH krivulje

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html>

Ključne besede: PH krivulje, dvojne PH krivulje

Keywords: PH curves, double PH curves

1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2 Prostorske krivulje

2.1 Osnovne lastnosti

[13] Krivulje v prostoru si lahko predstavljamo kot tirnice, po katerih potuje točka v gibanju. Najlažje jih podamo v parametrični obliki $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))$, $\xi \in I$, kjer so x , y in z običajne skalarne funkcije parametra ξ . Več različnih parametrizacij lahko opisuje isto krivuljo. V nadaljevanju bomo predpostavili, da so x , y in z vsaj dvakrat zvezno odvedljive funkcije. Odvod krivulje \mathbf{r} dobimo tako, da krivuljo odvajamo po komponentah:

$$\mathbf{r}' : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi)) \text{ za } \xi \in I.$$

Vektorsko polje, ki ga pri tem dobimo, imenujemo tudi *hodograf* krivulje \mathbf{r} .

2.2 Ločna dolžina in tangenta na krivuljo

[5] Pravimo, da je krivulja \mathbf{r} regularna, če je njen odvod $\mathbf{r}'(\xi) \neq 0$ za vse vrednosti ξ z intervala I . Od sedaj bomo privzeli, da je krivulja regularna. Odvod regularne krivulje pa lahko zapišemo tudi v malce drugačni obliki

$$\mathbf{r}'(\xi) = \sigma(\xi)\mathbf{t}(\xi), \tag{2.1}$$

kjer je $\sigma(\xi)$ funkcija, ki slika z začetne domene I v \mathbb{R}

$$\sigma(\xi) = \|\mathbf{r}'(\xi)\| = \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi)} \tag{2.2}$$

in predstavlja spremembo ločne dolžine krivulje v odvisnosti od parametra ξ . V enačbi (2.1) je s $\mathbf{t}(\xi)$ označeno enotsko tangentsko vektorsko polje na krivuljo \mathbf{r} , izračunano pri parametru ξ

$$\mathbf{t}(\xi) = \frac{\mathbf{r}'(\xi)}{\|\mathbf{r}'(\xi)\|} = \frac{\mathbf{r}'(\xi)}{\sigma(\xi)}. \tag{2.3}$$

S pomočjo funkcije $\sigma(\xi)$ lahko izrazimo tudi dolžino loka krivulje. Če je $I = [a, b]$, je potem ločna dolžina enaka

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi)} d\xi = \int_a^b \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^b \sigma(\xi) d\xi. \tag{2.4}$$

2.3 Ukrivljenost in Frenetovo ogrodje

Sedaj bomo uvedli dve novi enotski vektorski polji, ki bodo skupaj z enotsko tangento tvorili ortonormalno bazo za prostor \mathbb{R}^3 . V nadaljevanju bomo ponekod v enačbah in izpeljavah zaradi preglednosti izpustili parameter ξ .

Ker je \mathbf{t} enotsko tangento polje, vedno velja $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \|\mathbf{t}\|^2 = 1$. Če to enačbo odvajamo, dobimo, da je $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$, kar pomeni, da je \mathbf{t}' pravokoten na \mathbf{t} pri vsakemu parametru ξ . Torej lahko (implicitno) definiramo enotsko vektorsko polje \mathbf{p} na naslednji način: odvod enotske tangente je enak

$$\mathbf{t}'(\xi) = \sigma(\xi)\kappa(\xi)\mathbf{p}(\xi), \quad (2.5)$$

kjer je $\kappa(\xi)$ nenegativna funkcija parametra ξ . Tako ima vektorsko polje \mathbf{p} isto smer kot \mathbf{t}' . Prav tako je \mathbf{p} pravokoten na enotsko tangento \mathbf{t} . Da bi lahko $\kappa(\xi)$ in \mathbf{p} eksplisitno izrazili, si s pomočjo enačbe (2.1) oglejmo drugi odvod krivulje \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}'' = \sigma'\mathbf{t} + \sigma\mathbf{t}'. \quad (2.6)$$

Iz (2.1) in zgornje enačbe sledi naslednja enakost

$$\mathbf{r}'(\xi) \times \mathbf{r}''(\xi) = \sigma^3(\xi)\kappa(\xi)\mathbf{t}(\xi) \times \mathbf{p}(\xi). \quad (2.7)$$

Ker je \mathbf{p} definirano kot enotsko vektorsko polje, ki je ortogonalno na \mathbf{t} , je potem

$$\kappa(\xi) = \frac{\|\mathbf{r}'(\xi) \times \mathbf{r}''(\xi)\|}{\|\mathbf{r}'(\xi)\|^3} = \frac{\|\mathbf{r}'(\xi) \times \mathbf{r}''(\xi)\|}{\sigma^3(\xi)}. \quad (2.8)$$

To lahko naredimo, saj smo predpostavili, da je $\kappa(\xi)$ nenegativna funkcija. Sedaj si oglejmo, čemu je enaka naslednja količina:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \mathbf{t} &= \frac{1}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \left(\sigma^3 \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} \mathbf{t} \times \mathbf{p} \right) \times \mathbf{t} \\ &= (\mathbf{t} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{t} \\ &= -(\mathbf{t} \cdot \mathbf{p})\mathbf{t} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})\mathbf{p} \\ &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Količini \mathbf{p} pravimo *normala* ali *glavna normala* na krivuljo \mathbf{r} , količini κ pa *fleksijska ukrivljenost* krivulje \mathbf{r} . Da se preveriti, da je fleksijska ukrivljenost neodvisna od izbire parametrizacije krivulje. Definirali smo že enotsko tangento in enotsko normalo. Najti moramo še eno enotsko vektorsko polje, ki je ortogonalno na obe prejšnji. To lahko naredimo direktno z vektorskim produktom

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}. \quad (2.10)$$

Tej vrednosti pravimo *binormala* krivulje \mathbf{r} . Vektorska polja \mathbf{t} , \mathbf{p} , \mathbf{b} na vsaki točki krivulje \mathbf{r} tvorijo ortonormirano bazo prostora \mathbb{R}^3 . To trojico imenujemo tudi *Frenetovo ogrodje*. Če je binormala nek konstanten vektor za vsak parameter ξ (z dolžino 1), sledi, da vektorski polji \mathbf{t} in \mathbf{p} ležita v isti ravnini, kar pomeni, da celotna krivulja \mathbf{r} leži v tej isti ravnini.

Recimo, da velja $\mathbf{b}' \neq 0$. To pomeni, da imamo res opravlja s prostorsko krivuljo. Če odvajamo enačbo (2.10) in uporabimo (2.5), dobimo, da je odvod binormale enak $\mathbf{b}' = \mathbf{t} \times \mathbf{p}'$. Ker ima za vsak parameter ξ vektor \mathbf{p} dolžino 1, sta potem vektorski polji \mathbf{p} in \mathbf{p}' ortogonalni (to lahko takoj preverimo z odvajanjem skalarne produkta vektorskega polja \mathbf{p} s samim seboj). Torej se da izraziti \mathbf{p}' z \mathbf{b} in \mathbf{t} , kar pa pomeni, da se da \mathbf{b}' izraziti z $\mathbf{t} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}'(\xi) = \sigma(\xi)\tau(\xi)\mathbf{t}(\xi) \times \mathbf{b}(\xi) = -\sigma(\xi)\tau(\xi)\mathbf{p}(\xi). \quad (2.11)$$

Funkciji $\tau(\xi)$ pravimo *torzijska ukrivljenost* krivulje \mathbf{r} . Da se dokopljemo do njenega eksplcitnega zapisa, najprej preuredimo in odvajamo enačbo (2.7):

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')' &= (\sigma^3 \kappa \mathbf{b})' \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''' &= 3\sigma^2 \sigma' \kappa \mathbf{b} + \sigma^3 \kappa' \mathbf{b} + \sigma^3 \kappa \mathbf{b}' \\ &= -\sigma^4 \kappa \tau \mathbf{p} + \sigma^2 (3\sigma' \kappa + \sigma \kappa') \mathbf{p}. \end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo upoštevali vrednost količine \mathbf{b}' . Če vrednost $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''$ skalarno pomnožimo z \mathbf{r}'' , dobimo

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''') \cdot \mathbf{r}'' = -\sigma^6 \kappa^2 \tau. \quad (2.12)$$

Pri tem smo upoštevali (2.6), (2.5) in ortonormiranost Frenetovega ogrodja. Če obrnemo mešani produkt v zgornji enačbi in upoštevamo (2.8), vidimo, da je torzijska ukrivljenost enaka

$$\tau(\xi) = \frac{[\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{r}''(\xi), \mathbf{r}'''(\xi)]}{\|\mathbf{r}'(\xi) \times \mathbf{r}''(\xi)\|^2} \quad (2.13)$$

Vidimo torej, da torzijska ukrivljenost krivulje neničelna natanko takrat, ko so \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' in \mathbf{r}''' linearno neodvisni, kar je ravno takrat, ko je krivulja res prostorska.

3 Bernsteinovi polinomi in Bézierjeve krivulje

4 Krivulje s pitagorejskim hodografom

Polinomske in racionalne krivulje se v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju na široko uporabljajo, saj nam omogočajo učinkoviteje računanje. Pomemben podrazred takih krivulj so krivulje s piagorejskim hodografom, saj je pri le-teh izračun dolžine loka krivulj zelo preprost. Poleg tega ponujajo še marsikatero druge privlačne lastnosti, zato jih je že zaradi tega zanimivo analizirati. Uporablja pa se jih tudi v realnem svetu, npr. pri CNC strojih. V tem poglavju si bomo ogledali definicijo in nekaj osnovnih lastnosti.

4.1 Definicije

Definicija 4.1. Prostorska polinomska krivulja $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))$, kjer je I zaprt interval v \mathbb{R} , ima *pitagorejski hodograf*, če obstaja tak realen polinom σ , da velja

$$x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi) = \sigma^2(\xi). \quad (4.1)$$

Temu pogoju pravimo tudi *pitagorejski pogoj*, krivulji pa lahko krajše rečemo PH krivulja. Naslednji izrek nam bo pokazal, kako izpolniti ta pogoj.

Izrek 4.2. *Naj za paroma tuje realne polinome $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$ in $d(\xi)$ velja pitagorejski pogoj*

$$a^2(\xi) + b^2(\xi) + c^2(\xi) = d^2(\xi). \quad (4.2)$$

Potem obstajajo taki realni polinomi $u(\xi), v(\xi), p(\xi)$ in $q(\xi)$, da se $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$ in $d(\xi)$ izražajo na naslednji način:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= u^2(\xi) + v^2(\xi) - p^2(\xi) - q^2(\xi), \\ b(\xi) &= 2[u(\xi)q(\xi) + v(\xi)p(\xi)], \\ c(\xi) &= 2[v(\xi)q(\xi) - u(\xi)p(\xi)], \\ d(\xi) &= u^2(\xi) + v^2(\xi) + p^2(\xi) + q^2(\xi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dokaz. Enačbo (4.2) obrnemo in nato razstavimo

$$\begin{aligned} b^2(\xi) + c^2(\xi) &= d^2(\xi) - a^2(\xi), \\ [b(\xi) + ic(\xi)][b(\xi) - ic(\xi)] &= [d(\xi) - a(\xi)][d(\xi) + a(\xi)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ker sta si realna polinoma $b(\xi)$ in $c(\xi)$ tuja, potem kompleksna polinoma $b(\xi) + ic(\xi)$ in $b(\xi) - ic(\xi)$ nimata skupnih ničel. To sledi iz lastnosti računanja največjega skupnega delitelja polinomov. Velja tudi, da nimata realnih ničel in zapisa je očitno, da je ničla enega polinoma enaka konjugirani vrednosti drugega polinoma. Ker sta $d(\xi) - a(\xi)$ in $d(\xi) + a(\xi)$ realna polinoma, se ju lahko razcepi na pare konjugiranih si linearnih kompleksnih polinomov na tak način, da en polinom iz vsakega para deli polinom $b(\xi) + ic(\xi)$, drug polinom iz para pa deli polinom $b(\xi) - ic(\xi)$. Povedano drugače, polinoma $b(\xi) \pm ic(\xi)$ imata obliko

$$b(\xi) + ic(\xi) = f(\xi)\bar{g}(\xi), \quad b(\xi) - ic(\xi) = \bar{f}(\xi)g(\xi), \quad (4.5)$$

kjer sta $f(\xi)$ in $g(\xi)$ taka dva kompleksna polinoma, da velja

$$d(\xi) - a(\xi) = f(\xi)\bar{f}(\xi), \quad d(\xi) + a(\xi) = g(\xi)\bar{g}(\xi). \quad (4.6)$$

Kompleksna polinoma $f(\xi)$ in $g(\xi)$ lahko zapišemo tudi kot $f(\xi) = \sqrt{2}[p(\xi) + iq(\xi)]$ in $g(\xi) = \sqrt{2}[v(\xi) + iu(\xi)]$, kjer so $p(\xi), q(\xi), v(\xi)$ in $u(\xi)$ realni polinomi. Če vnesemo te izraze v enačbe (4.5) in (4.6), lahko iz njih dobimo izraze za polinome $a(\xi), b(\xi), c(\xi)$ in $d(\xi)$, kot so zapisani v (4.3).

[Se mi zdi, da tu ni potrebno nič več dodati?] □

Z nekaj računanja lahko preverimo, da ima za dane realne polinome $p(\xi), q(\xi), v(\xi)$ in $u(\xi)$ prostorska krivulja $\mathbf{r}(\xi)$ pitagorejski hodograf, če za njene komponente velja

$$\begin{aligned} x'(\xi) &= u^2(\xi) + v^2(\xi) - p^2(\xi) - q^2(\xi), \\ y'(\xi) &= 2[u(\xi)q(\xi) + v(\xi)p(\xi)], \\ z'(\xi) &= 2[v(\xi)q(\xi) - u(\xi)p(\xi)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pri tako podani krivulji sicer nimamo zagotovila, da je ta krivulja res regularna, saj imajo lahko komponente hodografa skupne polinomske faktorje.

Definicija 4.3. Za krivuljo s pitagorejskim hodografo $\mathbf{r}'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi))$ pravimo, da ima *primitiven* pitagorejski hodograf, če je največji skupni delitelj komponent hodografa konstanten: $\gcd(x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi)) = \text{konstanta}$.

V praksi se raje uporablja primitivne hodografe, saj je skupna ničla komponent hodografa v splošnem lahko tudi točka obrata krivulja (torej točka, kjer tangenčni vektor spremeni smer [to poved se mora še rahlo preoblikovati]). Izbira paroma si tujih polinomov p, q, v in u še ne zagotavlja, da je potem hodograf res primitiven.

Izrek 4.4. Naj bodo realni polinomi p, q, v in u paroma si tuji in komponente hodografa take kot v (4.7). Potem velja

$$\gcd(x', y', z') = |\gcd(u + iv, p - iq)|^2. \quad (4.8)$$

Dokaz. Dokaz najdemo v [8]. \square

Vidimo torej, da je v primeru paroma si tujih polinomov p, q, v in u največji skupni delitelj komponent hodografa realen polinom sode stopnje, ki nima realnih ničel. To pa pomeni, da realna krivulja, ki je porojena s temi polinomi, res nima točk obrata in je torej regularna.

4.2 Lastnosti

Oglejmo si nekaj glavnih lastnosti krivulj s pitagorejskim hodografo. Začnimo kar z dolžino poti.

Trditev 4.5. Naj bo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ regularna krivulja s pitagorejskim hodografo. Potem lahko za poljubni točki a, b z definicijskega območja krivulje velja, da lahko dolžino loka krivulje med $\mathbf{r}(a)$ in $\mathbf{r}(b)$ natančno izračunamo.

Dokaz. Ločna dolžina krivulje med točkama $\mathbf{r}(a)$ in $\mathbf{r}(b)$ je enaka

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{\sigma^2(t)} dt = \int_a^b |\sigma(t)| dt \quad (4.9)$$

Ker je krivulja \mathbf{r} regularna, je potem $\|\mathbf{r}'(t)\| \neq 0$ za vsak t z definicijskega območja krivulje. Torej $\|\mathbf{r}'(t)\|$ ne spreminja predznaka. Ker je $|\sigma(t)| = \|\mathbf{r}'(t)\|$, se torej predznak $\sigma(t)$ ohranja za vsak t . Ker se predznak $\sigma(t)$ ohranja in ker je $\sigma(t)$ polinom, sledi, da se da zgornji izraz (ločno dolžino) natančno izračunati. \square

Integral polinoma, ki ga tako dobimo, ni zaželen le, ker dobimo z njim natančen rezultat, ampak tudi zaradi tega, ker je hitro izračunljiv. Dalje si oglejmo, kako izgleda Frenetovo ogrodje PH krivulje. Kot lahko razberemo iz (2.7), in v skladu s karakterizacijo PH krivulje s polinomi p, q, v in u (4.7), se lahko enotska tangenta krivulje izrazi na naslednji način

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathbf{r}'}{\sigma} = \frac{(x', y', z')}{\sigma} \\ &= \frac{(u^2 + v^2 - p^2 - q^2, 2(uq + vp), 2(vq - up))}{p^2 + q^2 + v^2 + u^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vidimo, da je enotska tangenta PH krivulje racionalna funkcija parametra t . Ali velja enako tudi za normalo in binormalo? Če se spomnimo (2.9) in (2.10), vidimo, da sta tako normala kot binormala odvisni od količine $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$. Oglejmo si njen kvadrat

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2. \quad (4.11)$$

Če vstavimo v zgornjo enačbo vrednosti iz (4.7) in upoštevamo vrednost σ , z nekaj računanja ugotovimo [4], da je

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \sigma^2 \rho, \quad (4.12)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \rho = 4[(up' - u'p)^2 + (uq' - u'q)^2 + (vp' - v'p)^2 \\ + (vq' - v'q)^2 + 2(uv' - u'v)(pq' - p'q)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Zgornjo količino se da izraziti [1] tudi drugače:

$$\rho = 4[(up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q + vp' - v'p)^2]. \quad (4.14)$$

Iz vsega povedanega lahko sklepamo, da vsebujeta tako normala kot binormala člen $\sqrt{\rho(t)}$, kar pomeni, da v splošnem tako normala kot binormala nista racionalni funkciji parametra t .

Izrazimo sedaj še ukrivljenosti PH krivulj. Fleksijska ukrivljenost (2.8) se izraža kot

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma^2}. \quad (4.15)$$

Sledi, da v splošnem tudi fleksijska ukrivljenost ni racionalna funkcija parametra t . Iz izraza za torzijsko ukrivljenost (2.13) pa je razvidno, da je le-ta racionalna funkcija parametra t , saj se v števcu nahaja skalarni produkt vektorjev $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ in \mathbf{r}''' , ki pa se ga da zapisati kot polinom, v imenovalcu pa imamo izraz (4.12), ki je tudi polinom.

Krivulje s pitagorejskim hodografom imajo zanimivo povezavo z "vijačnimi" polinomskimi krivulji. Oglejmo si najprej definicijo vijačnice.[10]

Definicija 4.6. Krivulja \mathbf{r} je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta \mathbf{t} konstanten kot ψ (kjer je $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$) z nekim fiksnim enotskim vektorjem \mathbf{a} . Vektor \mathbf{a} predstavlja os vrtenja vijačnice.

Ker sta vektorja \mathbf{a} in \mathbf{t} enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi. \quad (4.16)$$

[Mogoče manjka kakšna slika tukaj?]

Zanimivo dejstvo o vijačnicah, ki nam bo prišlo prav kasneje, je Lancretov izrek.[10]

Izrek 4.7 (Lancret). *Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natanko takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.*

Dokaz. Naj bo krivulja $\mathbf{r}(s)$ vijačnica izražena v naravni parametrizaciji. Torej drži enačba (4.16) za nek vektor \mathbf{a} in kot ψ . Če to enačbo odvajamo po s in upoštevamo (2.5), dobimo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}. \quad (4.17)$$

Zaradi predpostavke in nenegativnosti κ sledi, da je $\kappa > 0$. Potem je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (4.18)$$

To pomeni, da je v vsaki točki na krivulji enotska normala pravokotna na os vrtenja \mathbf{a} . Vektor \mathbf{a} se torej ves čas nahaja na ravnini, ki jo razpenjati enotska tangenta \mathbf{t} ter enotska binormala \mathbf{b} . Če velja formula (4.16), mora potem veljati tudi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sin \psi. \quad (4.19)$$

Sedaj odvajajmo enačbo (4.18) in upoštevamo Frenetovo formulo za odvod enotske normale v naravni parametrizaciji [10]. Dobimo naslednji izraz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{a} \cdot (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) = -\kappa \cos \psi + \tau \sin \psi = 0 \quad (4.20)$$

Torej je $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \cot \psi$, kar je res konstantna vrednost.

Dokaz v drugo smer je dostopen v [10]. \square

Naslednja trditev nam bo osvetila povezavo med vijačnimi polinomskimi krivuljami (vijačnicami, ki so hkrati tudi polinomske krivulje) in PH krivuljami.[8]

Trditev 4.8. *Če je polinomska krivulja vijačnica, ima potem tudi pitagorejski hodograf.*

Dokaz. Za prostorko krivuljo $\mathbf{r}(\xi)$ lahko njeno enotsko tangento zapišemo kot $\frac{\mathbf{r}'(\xi)}{\|\mathbf{r}'(\xi)\|}$. Potem lahko enačbo (4.16) preoblikujemo kot

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'(\xi) = \cos \psi \|\mathbf{r}'(\xi)\|. \quad (4.21)$$

Leva stran enačba predstavlja polinom v spremenljivki ξ . Na desni strani enačbe se lahko nahaja polinom, če je $\mathbf{r}(\xi)$ PH krivulja, kajti samo PH krivulje lahko imajo hitrost $\|\mathbf{r}'(\xi)\|$ polinomske. \square

Če je krivulja polinomska vijačnica, je potem tudi PH krivulja. Ali velja tudi obratno? Odgovor na to vprašanje je negativen, kot lahko vidimo iz spodnjega primera.[1]

Primer 4.9. Dana je naslednja PH krivulja

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^7}{21} + \frac{t^5}{5} + t^3 - 3t, -\frac{t^4}{2} + 3t^2, -2t^3 \right).$$

Če izračunamo njeno hitrost in količino $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$, dobimo

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \frac{1}{3}(t^6 + 3t^4 + 9t^2 + 9) \quad \text{in} \quad \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = 2(t^2 + 1)(t^6 + 3t^4 + 9t^2 + 9).$$

Če upoštevamo formuli (2.8) ter (2.13) in izračunamo razmerje

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{2t^6 + 9t^4 - 9}{9(t^2 + 1)^2},$$

vidimo, da po Lancretovemu izreku (4.7) krivulja $\mathbf{r}(t)$ ne more biti vijačnica, saj razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo ni konstantno.

4.3 Izražanje prostorskih PH krivulj v kvaternionski obliki

nekaj nekja

4.4 Izražanje prostorskih PH krivulj s Hopfovo preslikavo

nekjaj nkaj

5 Dvojne PH krivulje

6 Integrali po ω -kompleksih

6.1 Definicija

Definicija 6.1. Neskončno zaporedje kompleksnih števil, označeno z $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, se imenuje ω -kompleks.¹

Črni blok zgoraj je tam namenoma. Označuje, da L^AT_EX ni znal vrstice prelomiti pravilno in vas na to opozarja. Preoblikujte stavek ali mu pomagajte deliti problematično besedo z ukazom `\hyphenation{an-ti-ko-mu-ta-ti-ven}` v preambuli.

Trditev 6.2 (Znano ime ali avtor). *Obstaja vsaj en ω -kompleks.*

Dokaz. Naštejmo nekaj primerov:

$$\begin{aligned}\omega &= (0, 0, 0, \dots), \\ \omega &= (1, i, -1, -i, 1, \dots), \\ \omega &= (0, 1, 2, 3, \dots).\end{aligned}\tag{6.1}$$

□

7 Tehnični napotki za pisanje

7.1 Sklicevanje in citiranje

Za sklice uporabljamo `\ref`, za sklice na enačbe `\eqref`, za citate `\cite`. Pri sklicevanju in citiranju sklicano številko povežemo s prejšnjo besedo z nedeljivim presledkom `~`, kot npr. iz `trditve~\ref{trd:obstoj-omega}` vidimo.

Primer 7.1. Zaporedje (6.1) iz dokaza trditve 6.2 na strani 8 lahko najdemo tudi v Spletni enciklopediji zaporedij [12]. Citiramo lahko tudi bolj natančno [11, trditev 2.1, str. 23].

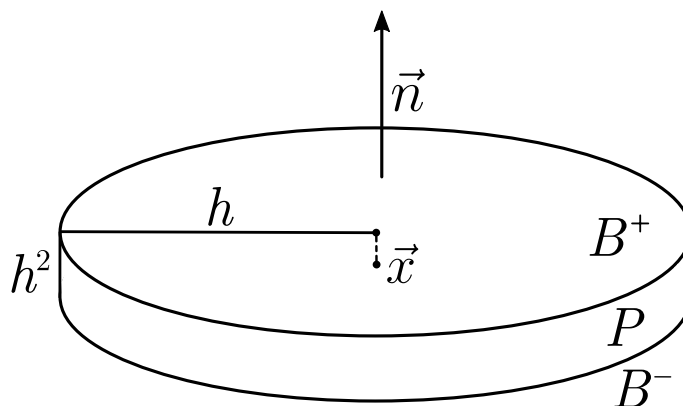
7.2 Okrajšave

Pri uporabi okrajšav L^AT_EX za piko vstavi predolg presledek, kot npr. tukaj. Zato se za vsako piko, ki ni konec stavka doda presledek običajne širine z ukazom `_`, kot npr. tukaj. Primerjaj z okrajšavo zgoraj za razliko.

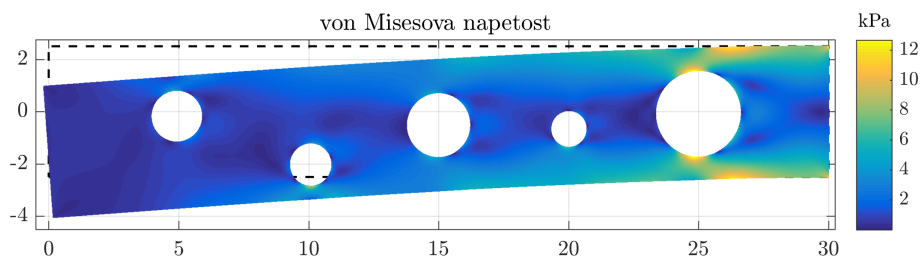
¹To ime je izmišljeno.

7.3 Vstavljanje slik

Sliko vstavimo v plavajočem okolju `figure`. Plavajoča okolja *plavajo* po tekstu, in jih lahko postavimo na vrh strani z opcijskim parametrom ‘`t`’, na lokacijo, kjer je v kodi s ‘`h`’, in če to ne deluje, potem pa lahko rečete `LATEXu`, da ga *res* želite tukaj, kjer ste napisali, s ‘`h!`’. Lepo je da so vstavljene slike vektorske (recimo `.pdf` ali `.eps` ali `.svg`) ali pa `.png` visoke resolucije (več kot 300 dpi). Pod vsako sliko je napis in na vsako sliko se skličemo v besedilu. Primer vektorske slike je na sliki 1. Vektorsko sliko prepoznate tako, da močno zoomate v sliko, in še vedno ostane gladka. Več informacij je na voljo na https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Floats,_Figures_and_Captions. Če so slike bitne, kot na primer slika 2, poskrbite, da so v dovolj visoki resoluciji.



Slika 1: Primer vektorske slike z oznakami v enaki pisavi, kot jo uporablja `LATEX`. Narejena je s programom Inkscape, `LATEX` oznake so importane v Inkscape iz pomožnega PDF.



Slika 2: Primer bitne slike, izvožene iz Matlaba. Poskrbite, da so slike v dovolj visoki resoluciji in da ne vsebujejo prosojnih elementov (to zahteva PDF/A-1b format).

7.4 Kako narediti stvarno kazalo

Dodate ukaze `\index{polje}` na besede, kjer je pojavijo, kot tukaj. Več o stvarnih kazalih je na voljo na <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Indexing>.

7.5 Navajanje literature

Tu na novo citiram [6], [7], [1], [2], [13], [10], [8], [5].

Literatura

- [1] J. Beltran in J. Monterde, *A characterization of quintic helices*, Journal of computational and applied mathematics **206**(1) (2007) 116–121.
- [2] H. I. Choi, D. S. Lee in H. P. Moon, *Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces*, Advances in Computational Mathematics **17**(1) (2002) 5–48.
- [3] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na <http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx>.
- [4] R. T. Farouki, *Exact rotation-minimizing frames for spatial pythagorean-hodograph curves*, Graphical Models **64**(6) (2002) 382–395.
- [5] R. T. Farouki, *Pythagorean—hodograph Curves*, Springer, 2008.
- [6] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I. Quaternion and Hopf map representations*, Journal of Symbolic Computation **44**(2) (2009) 161–179.
- [7] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs II. Enumeration of low-degree curves*, Journal of Symbolic Computation **44**(4) (2009) 307–332.
- [8] R. T. Farouki in dr., *Characterization and construction of helical polynomial space curves*, Journal of Computational and Applied Mathematics **162**(2) (2004) 365–392.
- [9] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.
- [10] E. Kreyszig, *Differential geometry*, University of Toronto Press, 2019.
- [11] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.
- [12] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, Sequence A005043, [ogled 9. 7. 2016], dostopno na <http://oeis.org/A005043>.
- [13] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, Courier Corporation, 1961.
- [14] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

Stvarno kazalo

tukaj, 9