DPH krivulje

Simon Besednjak

Fakulteta za matematiko in fiziko

32.13.2022

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}': I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}': I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}': I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{\left(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\right) \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Krivulje s pitagorejskim hodografom

Definicija

Prostorska polinomska krivulja $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *kjer je* I *zaprt interval v* $\mathbb{R}^3$, *ima pitagorejski hodograf, če obstaja tak realen polinom* σ, *da velja*

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t), \quad t \in I.$$

Takim krivuljam pravimo tudi *PH krivulje*.

Krivulje s pitagorejskim hodografom

Izrek

Prostorska krivulja $\mathbf{r}$ *je PH krivulja natanko takrat, ko je njen hodograf oblike*

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))w(t), \\ y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))w(t), \\ z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))w(t), \end{aligned}$$

za realne polinome u, v, p, q *in* w. *Parametrična hitrost se poenostavi v*

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| &= x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \\ &= (u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t))w(t). \end{aligned}$$

Pri tem polinom w *predstavlja skupni faktor komponent hodografa.*

Krivulje s pitagorejskim hodografom

Izrek

Prostorska krivulja $\mathbf{r}$ *je PH krivulja natanko takrat, ko je njen hodograf oblike*

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))w(t), \\ y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))w(t), \\ z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))w(t), \end{aligned}$$

za realne polinome u, v, p, q *in* w. *Parametrična hitrost se poenostavi v*

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| &= x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \\ &= (u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t))w(t). \end{aligned}$$

Pri tem polinom w *predstavlja skupni faktor komponent hodografa.*

Krivulje s pitagorejskim hodografom - lastnosti

- Ločna dolžina regularne PH krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

- Enotska tangenta $\mathbf{t}$ je racionalns funkcijs parametra t.
-

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \sigma^2 \rho,$$

kjer je

$$\rho = 4((up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q + vp' - v'p)^2).$$

- Torzijska ukrivljenost τ je racionalna funkcija parametra t. V splošnem izrazi za $\kappa, \mathbf{p}$ in $\mathbf{b}$ niso racionalne funkcije parametra t.

Krivulje s pitagorejskim hodografom - lastnosti

- Ločna dolžina regularne PH krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

- Enotska tangenta $\mathbf{t}$ je racionalns funkcijs parametra t.
-

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \sigma^2 \rho,$$

kjer je

$$\rho = 4((up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q + vp' - v'p)^2).$$

- Torzijska ukrivljenost τ je racionalna funkcija parametra t. V splošnem izrazi za $\kappa, \mathbf{p}$ in $\mathbf{b}$ niso racionalne funkcije parametra t.

Krivulje s pitagorejskim hodografom - lastnosti

- Ločna dolžina regularne PH krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

- Enotska tangenta $\mathbf{t}$ je racionalns funkcijs parametra t.
-

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \sigma^2 \rho,$$

kjer je

$$\rho = 4\big((up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q + vp' - v'p)^2\big).$$

- Torzijska ukrivljenost τ je racionalna funkcija parametra t. V splošnem izrazi za $\kappa, \mathbf{p}$ in $\mathbf{b}$ niso racionalne funkcije parametra t.

Krivulje s pitagorejskim hodografom - lastnosti

- Ločna dolžina regularne PH krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

- Enotska tangenta $\mathbf{t}$ je racionalns funkcijs parametra t.
-

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \sigma^2 \rho,$$

kjer je

$$\rho = 4\big((up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q + vp' - v'p)^2\big).$$

- Torzijska ukrivljenost τ je racionalna funkcija parametra t. V splošnem izrazi za $\kappa, \mathbf{p}$ in $\mathbf{b}$ niso racionalne funkcije parametra t.

Kvaternionska oblika PH krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = {} & (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))\mathbf{i} \\ & + 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))\mathbf{j} \\ & + 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t) \\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t).\end{aligned}$$

Kvaternionska oblika PH krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = &(u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))\mathbf{i}\\ &+ 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))\mathbf{j}\\ &+ 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t)\\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t).\end{aligned}$$

Kvaternionska oblika PH krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = {} & (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))\mathbf{i} \\ & + 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))\mathbf{j} \\ & + 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t) \\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t).\end{aligned}$$

Kvaternionska oblika PH krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = \big(u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\big)\mathbf{i} \\ + 2\big(u(t)q(t) + v(t)p(t)\big)\mathbf{j} \\ + 2\big(v(t)q(t) - u(t)p(t)\big)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t) \\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t).\end{aligned}$$

Kvaternionska oblika PH krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) &= \big(u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\big)\mathbf{i}\\ &+ 2\big(u(t)q(t) + v(t)p(t)\big)\mathbf{j}\\ &+ 2\big(v(t)q(t) - u(t)p(t)\big)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t)\\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t).\end{aligned}$$

Kvaternionska oblika PH krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = \big(&u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\big)\mathbf{i} \\ &+ 2\big(u(t)q(t) + v(t)p(t)\big)\mathbf{j} \\ &+ 2\big(v(t)q(t) - u(t)p(t)\big)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t) \\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \end{aligned}$$

Hopfova oblika PH krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

Hopfova oblika PH krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H *je preslikava, ki slika iz* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ *in je za* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ *določena z naslednjim predpisom:*

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

Hopfova oblika PH krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

Hopfova oblika PH krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

Hopfova oblika PH krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

DPH krivulje

Definicija

Za prostorsko polinomsko krivuljo $\mathbf{r}$ pravimo, da je DPH krivulja, če sta tako $\|\mathbf{r}'\|$ kot $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ polinomski funkciji parametra t, torej če sta izpolnjena pogoja

$$\|\mathbf{r}'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma^2,$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 = (\sigma\omega)^2$$

za neka polinoma σ in ω.

Frenetovo ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ in fleksijska ukrivljenost κ ter torzijska ukrivljenost τ so racionalno parametrizirane v parametru t.

DPH krivulje

Definicija

Za prostorsko polinomsko krivuljo $\mathbf{r}$ *pravimo, da je DPH krivulja, če sta tako* $\|\mathbf{r}'\|$ *kot* $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ *polinomski funkciji parametra* t, *torej če sta izpolnjena pogoja*

$$\|\mathbf{r}'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma^2,$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 = (\sigma\omega)^2$$

za neka polinoma σ *in* ω.

Frenetovo ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ in fleksijska ukrivljenost κ ter torzijska ukrivljenost τ so racionalno parametrizirane v parametru t.

DPH krivulje

Definicija

Za prostorsko polinomsko krivuljo $\mathbf{r}$ *pravimo, da je DPH krivulja, če sta tako* $\|\mathbf{r}'\|$ *kot* $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ *polinomski funkciji parametra* t*, torej če sta izpolnjena pogoja*

$$\|\mathbf{r}'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma^2,$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 = (\sigma\omega)^2$$

za neka polinoma σ *in* ω*.*

Frenetovo ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ in fleksijska ukrivljenost κ ter torzijska ukrivljenost τ so racionalno parametrizirane v parametru t.

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta $\mathbf{t}$ konstanten kot ψ (kjer je $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$) z nekim fiksnim enotskim vektorjem $\mathbf{a}$. Vektor $\mathbf{a}$ predstavlja os vrtenja vijačnice.

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{t}$ enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi.$$

Izrek (Lancret)

Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natanko takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta $\mathbf{t}$ konstanten kot ψ (kjer je $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$) z nekim fiksnim enotskim vektorjem $\mathbf{a}$. Vektor $\mathbf{a}$ predstavlja os vrtenja vijačnice.

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{t}$ enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi.$$

Izrek (Lancret)

Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natanko takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ *je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta* $\mathbf{t}$ *konstanten kot* ψ *(kjer je* $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$*) z nekim fiksnim enotskim vektorjem* $\mathbf{a}$*. Vektor* $\mathbf{a}$ *predstavlja os vrtenja vijačnice.*

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{t}$ enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi.$$

Izrek (Lancret)

Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natanko takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ *je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta* $\mathbf{t}$ *konstanten kot* ψ *(kjer je* $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$*) z nekim fiksnim enotskim vektorjem* $\mathbf{a}$*. Vektor* $\mathbf{a}$ *predstavlja os vrtenja vijačnice.*

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{t}$ enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi.$$

Izrek (Lancret)

Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natanko takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.

DPH krivulje in vijačnice

Trditev

Če je polinomska krivulja vijačnica, potem je tudi DPH krivulja.

Izrek

Polinomska krivulja stopnje tri ali pet je vijačnica natanko tedaj, ko je DPH krivulja.

Za DPH krivulje razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enako

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\omega^3}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}$$

DPH krivulje in vijačnice

Trditev

Če je polinomska krivulja vijačnica, potem je tudi DPH krivulja.

Izrek

Polinomska krivulja stopnje tri ali pet je vijačnica natanko tedaj, ko je DPH krivulja.

Za DPH krivulje razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enako

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\omega^3}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}$$

DPH krivulje in vijačnice

Trditev

Če je polinomska krivulja vijačnica, potem je tudi DPH krivulja.

Izrek

Polinomska krivulja stopnje tri ali pet je vijačnica natanko tedaj, ko je DPH krivulja.

Za DPH krivulje razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enako

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\omega^3}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}$$

DPH krivulje in vijačnice

Trditev

Če je polinomska krivulja vijačnica, potem je tudi DPH krivulja.

Izrek

Polinomska krivulja stopnje tri ali pet je vijačnica natanko tedaj, ko je DPH krivulja.

Za DPH krivulje razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enako

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\omega^3}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}$$

DPH krivulje in vijačnice

- Vsaka PH krivulja stopnje 3 je hkrati vijačnica in hkrati DPH krivulja.
- DPH krivulje stopnje 5 (ki so hkrati tudi vijačnice) predstavljajo pravo podmnožico množice PH krivulj stopnje 5.
- Za stopnje 7 ali več predstavlja množica DPH krivulj pravo podmnožico množice PH krivulj. Obstajajo tako vijačne kot nevijačne DPH krivulje.

DPH krivulje in vijačnice

- Vsaka PH krivulja stopnje 3 je hkrati vijačnica in hkrati DPH krivulja.
- DPH krivulje stopnje 5 (ki so hkrati tudi vijačnice) predstavljajo pravo podmnožico množice PH krivulj stopnje 5.
- Za stopnje 7 ali več predstavlja množica DPH krivulj pravo podmnožico množice PH krivulj. Obstajajo tako vijačne kot nevijačne DPH krivulje.

DPH krivulje in vijačnice

- Vsaka PH krivulja stopnje 3 je hkrati vijačnica in hkrati DPH krivulja.
- DPH krivulje stopnje 5 (ki so hkrati tudi vijačnice) predstavljajo pravo podmnožico množice PH krivulj stopnje 5.
- Za stopnje 7 ali več predstavlja množica DPH krivulj pravo podmnožico množice PH krivulj. Obstajajo tako vijačne kot nevijačne DPH krivulje.

DPH krivulje in vijačnice

- Vsaka PH krivulja stopnje 3 je hkrati vijačnica in hkrati DPH krivulja.
- DPH krivulje stopnje 5 (ki so hkrati tudi vijačnice) predstavljajo pravo podmnožico množice PH krivulj stopnje 5.
- Za stopnje 7 ali več predstavlja množica DPH krivulj pravo podmnožico množice PH krivulj. Obstajajo tako vijačne kot nevijačne DPH krivulje.

Polinom proporcionalnosti

Definicija

Polinomu $\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)$, ki ga sestavimo iz polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ ter $\boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t)$ za neke realne polinome $u(t), v(t), q(t)$ ter $p(t)$, pravimo tudi polinom proporcionalnosti polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$.

$$\rho = 4|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}|^2.$$

DPH pogoj:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2,$$

kjer je h realen polinom, $\mathbf{w}$ pa kompleksen polinom.

Polinom proporcionalnosti

Definicija

Polinomu $\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)$, ki ga sestavimo iz polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ ter $\boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t)$ za neke realne polinome $u(t), v(t), q(t)$ ter $p(t)$, pravimo tudi polinom proporcionalnosti polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$.

$$\rho = 4|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}|^2.$$

DPH pogoj:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2,$$

kjer je h realen polinom, $\mathbf{w}$ pa kompleksen polinom.

Polinom proporcionalnosti

Definicija

Polinomu $\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)$, ki ga sestavimo iz polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ ter $\boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t)$ za neke realne polinome $u(t), v(t), q(t)$ ter $p(t)$, pravimo tudi polinom proporcionalnosti polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$.

$$\rho = 4|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}|^2.$$

DPH pogoj:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2,$$

kjer je h realen polinom, $\mathbf{w}$ pa kompleksen polinom.

Polinom proporcionalnosti

Definicija

Polinomu $\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)$*, ki ga sestavimo iz polinomov* $\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ *ter* $\boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t)$ *za neke realne polinome* $u(t), v(t), q(t)$ *ter* $p(t)$*, pravimo tudi polinom proporcionalnosti polinomov* $\boldsymbol{\alpha}(t)$ *in* $\boldsymbol{\beta}(t)$*.*

$$\rho = 4|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}|^2.$$

DPH pogoj:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2,$$

kjer je h realen polinom, $\mathbf{w}$ pa kompleksen polinom.

Normalizirana Hopfova preslikava

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2} = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Definicija

Normalizirana Hopfova preslikava je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in ima naslednji predpis za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$:

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Velja:

$$(|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 + (2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2 + (2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2.$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}, 1) = \hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{za} \quad \boldsymbol{\beta} \neq 0.$$

Normalizirana Hopfova preslikava

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2} = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Definicija

Normalizirana Hopfova preslikava je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ *in ima naslednji predpis za* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*:*

$$\hat{\mathrm{H}}(\alpha, \beta) = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2\,\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}), 2\,\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta}))}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}.$$

Velja:

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + (2\,\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}))^2 + (2\,\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta}))^2.$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\alpha/\beta, 1) = \hat{\mathrm{H}}(\alpha, \beta) \quad \text{za} \quad \beta \neq 0.$$

Normalizirana Hopfova preslikava

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2} = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Definicija

Normalizirana Hopfova preslikava je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in ima naslednji predpis za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$:

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Velja:

$$(|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 + (2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2 + (2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2.$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}, 1) = \hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{za} \quad \boldsymbol{\beta} \neq 0.$$

Normalizirana Hopfova preslikava

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2} = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Definicija

Normalizirana Hopfova preslikava je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ *in ima naslednji predpis za* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$*:*

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Velja:

$$(|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 + (2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2 + (2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2.$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}, 1) = \hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{za} \quad \boldsymbol{\beta} \neq 0.$$

Normalizirana Hopfova preslikava

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2} = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Definicija

Normalizirana Hopfova preslikava je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in ima naslednji predpis za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$:

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Velja:

$$(|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 + (2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2 + (2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2.$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\alpha/\beta, 1) = \hat{\mathrm{H}}(\alpha, \beta) \quad \text{za} \quad \beta \neq 0.$$

Normalizirana Hopfova preslikava

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2} = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Definicija

Normalizirana Hopfova preslikava je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ *in ima naslednji predpis za* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$*:*

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{(|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))}{|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2}.$$

Velja:

$$(|\boldsymbol{\alpha}|^2 + |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^2 + (2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2 + (2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}))^2.$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}, 1) = \hat{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{za} \quad \boldsymbol{\beta} \neq 0.$$

Vijačnice in Hopfova preslikava

Preslikava $\mathbf{z} \to \hat{\mathrm{H}}(\mathbf{z}, 1)$ je inverz stereografske projekcije.

Trditev

Slika enotske tangente vijačnice na (enotski) sferi tvori krožnico.

- Izberemo taka kompleksna polinoma $\alpha(t)$ in $\beta(t)$, katerih razmerje $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$ nam poda racionalno parametrizacijo premice oziroma krožnice v $\mathbb{C}$.
- Slika premice oziroma krožnice z normalizirano Hopfovo preslikavo je torej krožnica na S^2, torej je po trditvi pripadajoča krivulja res vijačna.

Vijačnice in Hopfova preslikava

Preslikava $\mathbf{z} \to \hat{\mathrm{H}}(\mathbf{z}, 1)$ je inverz stereografske projekcije.

Trditev

Slika enotske tangente vijačnice na (enotski) sferi tvori krožnico.

- Izberemo taka kompleksna polinoma $\alpha(t)$ in $\beta(t)$, katerih razmerje $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$ nam poda racionalno parametrizacijo premice oziroma krožnice v $\mathbb{C}$.
- Slika premice oziroma krožnice z normalizirano Hopfovo preslikavo je torej krožnica na S^2, torej je po trditvi pripadajoča krivulja res vijačna.

Vijačnice in Hopfova preslikava

Preslikava $\mathbf{z} \to \hat{\mathrm{H}}(\mathbf{z}, 1)$ je inverz stereografske projekcije.

Trditev

Slika enotske tangente vijačnice na (enotski) sferi tvori krožnico.

- Izberemo taka kompleksna polinoma $\alpha(t)$ in $\beta(t)$, katerih razmerje $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$ nam poda racionalno parametrizacijo premice oziroma krožnice v $\mathbb{C}$.
- Slika premice oziroma krožnice z normalizirano Hopfovo preslikavo je torej krožnica na S^2, torej je po trditvi pripadajoča krivulja res vijačna.

Vijačnice in Hopfova preslikava

Preslikava $\mathbf{z} \to \hat{\mathrm{H}}(\mathbf{z}, 1)$ je inverz stereografske projekcije.

Trditev

Slika enotske tangente vijačnice na (enotski) sferi tvori krožnico.

- Izberemo taka kompleksna polinoma $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$, katerih razmerje $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$ nam poda racionalno parametrizacijo premice oziroma krožnice v $\mathbb{C}$.
- Slika premice oziroma krožnice z normalizirano Hopfovo preslikavo je torej krožnica na S^2, torej je po trditvi pripadajoča krivulja res vijačna.

Vijačnice in Hopfova preslikava

Preslikava $\mathbf{z} \to \hat{\mathrm{H}}(\mathbf{z}, 1)$ je inverz stereografske projekcije.

Trditev

Slika enotske tangente vijačnice na (enotski) sferi tvori krožnico.

- Izberemo taka kompleksna polinoma $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$, katerih razmerje $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$ nam poda racionalno parametrizacijo premice oziroma krožnice v $\mathbb{C}$.
- Slika premice oziroma krožnice z normalizirano Hopfovo preslikavo je torej krožnica na S^2, torej je po trditvi pripadajoča krivulja res vijačna.

Konstrukcija vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.

Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.
- V zgornjem izrazu uporabimo racionalno reparametrizacijo $t \to \frac{f(t)}{g(t)}$, kjer sta $f(t)$ in $g(t)$ realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$, in preslikamo $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Konstrukcija vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.

Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.
- V zgornjem izrazu uporabimo racionalno reparametrizacijo $t \to \frac{f(t)}{g(t)}$, kjer sta $f(t)$ in $g(t)$ realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$, in preslikamo $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Konstrukcija vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.
Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.
- V zgornjem izrazu uporabimo racionalno reparametrizacijo $t \to \frac{f(t)}{g(t)}$, kjer sta $f(t)$ in $g(t)$ realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$, in preslikamo $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Konstrukcija vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.
Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.
- V zgornjem izrazu uporabimo racionalno reparametrizacijo $t \to \frac{f(t)}{g(t)}$, kjer sta $f(t)$ in $g(t)$ realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$, in preslikamo $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Konstrukcija vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.
Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.
- V zgornjem izrazu uporabimo racionalno reparametrizacijo $t \to \frac{f(t)}{g(t)}$, kjer sta $f(t)$ in $g(t)$ realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$, in preslikamo $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Nevijačne DPH krivulje stopnje 7

Trditev

Naj polinoma $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ *generirata tako DPH krivuljo, da je v DPH pogoju* $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2$ *polinom* h *konstanten in polinom* $\mathbf{w}$ *kvadratičen. Krivulja je nevijačna, če ničli* $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ *polinoma* $\mathbf{w}$ *nista realni, nista par kompleksno si konjugiranih števil in če se da polinoma* $\boldsymbol{\alpha}$ *in* $\boldsymbol{\beta}$ *izraziti kot*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{a}_1(t-\boldsymbol{\tau}_1)^3+\mathbf{a}_2(t-\boldsymbol{\tau}_2)^3 \quad \textit{in} \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{b}_1(t-\boldsymbol{\tau}_1)^3+\mathbf{b}_2(t-\boldsymbol{\tau}_2)^3,$$

kjer velja $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 \neq 0.$

Trditev

Naj bosta polinoma $\boldsymbol{\alpha}$ *in* $\boldsymbol{\beta}$ *taka, da je njun največji skupni delitelj* γ *konstanen polinom ter naj generirata tako DPH krivuljo, da je polinom* h *druge stopnje in da je polinom* $\mathbf{w}$ *linearen. Potem je taka DPH krivulja nevijačna.*

Nevijačne DPH krivulje stopnje 7

Trditev

Naj polinoma $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ *generirata tako DPH krivuljo, da je v DPH pogoju* $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2$ *polinom* h *konstanten in polinom* $\mathbf{w}$ *kvadratičen. Krivulja je nevijačna, če ničli* $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ *polinoma* $\mathbf{w}$ *nista realni, nista par kompleksno si konjugiranih števil in če se da polinoma* $\boldsymbol{\alpha}$ *in* $\boldsymbol{\beta}$ *izraziti kot*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{a}_1(t-\boldsymbol{\tau}_1)^3 + \mathbf{a}_2(t-\boldsymbol{\tau}_2)^3 \quad \textit{in} \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{b}_1(t-\boldsymbol{\tau}_1)^3 + \mathbf{b}_2(t-\boldsymbol{\tau}_2)^3,$$

kjer velja $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 \neq 0$.

Trditev

Naj bosta polinoma α *in* β *taka, da je njun največji skupni delitelj* γ *konstanen polinom ter naj generirata tako DPH krivuljo, da je polinom* h *druge stopnje in da je polinom* $\mathbf{w}$ *linearen. Potem je taka DPH krivulja nevijačna.*

Nevijačne DPH krivulje stopnje 7

Trditev

Naj polinoma $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ *generirata tako DPH krivuljo, da je v DPH pogoju* $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2$ *polinom* h *konstanten in polinom* $\mathbf{w}$ *kvadratičen. Krivulja je nevijačna, če ničli* $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ *polinoma* $\mathbf{w}$ *nista realni, nista par kompleksno si konjugiranih števil in če se da polinoma* $\boldsymbol{\alpha}$ *in* $\boldsymbol{\beta}$ *izraziti kot*

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{a}_1(t-\boldsymbol{\tau}_1)^3 + \mathbf{a}_2(t-\boldsymbol{\tau}_2)^3 \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{b}_1(t-\boldsymbol{\tau}_1)^3 + \mathbf{b}_2(t-\boldsymbol{\tau}_2)^3,$$

kjer velja $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 \neq 0.$

Trditev

Naj bosta polinoma $\boldsymbol{\alpha}$ *in* $\boldsymbol{\beta}$ *taka, da je njun največji skupni delitelj* γ *konstanen polinom ter naj generirata tako DPH krivuljo, da je polinom* h *druge stopnje in da je polinom* $\mathbf{w}$ *linearen. Potem je taka DPH krivulja nevijačna.*

Nevijačne DPH krivulje stopnje 7

Trditev

Dvojna PH krivulja stopnje 7, pri kateri je DPH pogoj izpolnjen pri $\mathrm{st}(h) = 4$ *in* $\mathrm{st}(\mathbf{w}) = 0$ *je nevijačna, če je izraz*

$$\Delta = 9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_3,$$

ki je podan z Bernsteinovimi koeficienti polinoma h*, negativen. Če je* Δ *nenegativen, je DPH krivulja vijačna.*

Nevijačne DPH krivulje stopnje 7

Trditev

Dvojna PH krivulja stopnje 7, pri kateri je DPH pogoj izpolnjen pri $\mathrm{st}(h) = 4$ *in* $\mathrm{st}(\mathbf{w}) = 0$ *je nevijačna, če je izraz*

$$\Delta = 9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_3,$$

ki je podan z Bernsteinovimi koeficienti polinoma h*, negativen. Če je* Δ *nenegativen, je DPH krivulja vijačna.*

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Za dani točki $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f \in \mathbb{R}^3$ ter dani tangenti $\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_f \in \mathbb{R}^3$ bi radi izračunali DPH krivuljo $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ stopnje 5, ki zadošča pogojem:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{d}_i \quad \text{in} \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_f, \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{d}_f.$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Za dani točki $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f \in \mathbb{R}^3$ ter dani tangenti $\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_f \in \mathbb{R}^3$ bi radi izračunali DPH krivuljo $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ stopnje 5, ki zadošča pogojem:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{d}_i \quad \text{in} \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_f, \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{d}_f.$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Recimo, da imamo kvadratični kvaternionski polinom, podan v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2.$$

DPH krivuljo stopnje 5 lahko podamo kot Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{p}_k \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k$$

s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_i = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$, kjer je $0 \leq k \leq 5$. Hodograf te krivulje je enak

$$\mathbf{r}'(t) = 5 \sum_{k=0}^{4} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \binom{4}{k} (1-t)^{4-k} t^k = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t).$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Recimo, da imamo kvadratični kvaternionski polinom, podan v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2.$$

DPH krivuljo stopnje 5 lahko podamo kot Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{p}_k \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k$$

s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_i = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$, kjer je $0 \leq k \leq 5$. Hodograf te krivulje je enak

$$\mathbf{r}'(t) = 5\sum_{k=0}^{4} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \binom{4}{k} (1-t)^{4-k} t^k = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t).$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Recimo, da imamo kvadratični kvaternionski polinom, podan v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2.$$

DPH krivuljo stopnje 5 lahko podamo kot Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{p}_k \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k$$

s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_i = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$, kjer je $0 \leq k \leq 5$. Hodograf te krivulje je enak

$$\mathbf{r}'(t) = 5\sum_{k=0}^{4} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \binom{4}{k} (1-t)^{4-k} t^k = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t).$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Recimo, da imamo kvadratični kvaternionski polinom, podan v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2.$$

DPH krivuljo stopnje 5 lahko podamo kot Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{5} \mathbf{p}_k \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k$$

s kontrolnimi točkami $\mathbf{p}_i = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$, kjer je $0 \leq k \leq 5$. Hodograf te krivulje je enak

$$\mathbf{r}'(t) = 5\sum_{k=0}^{4} (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \binom{4}{k} (1-t)^{4-k} t^k = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t).$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

S primerjavo koeficientov vidimo, da so kontrolne točke enake

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*,\\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*),\\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{30}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + 4\mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*),\\
\mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_1^*),\\
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_2^*.
\end{aligned}$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

S primerjavo koeficientov vidimo, da so kontrolne točke enake

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*,\\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*),\\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{30}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + 4\mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*),\\
\mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_1^*),\\
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_2^*.
\end{aligned}$$

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \mathbf{d}_i, \quad \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* = \mathbf{d}_f.$$

$$\begin{aligned}&(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)\mathbf{i}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)^* \\ &\quad = 120(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - 15(\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_f) + 5(\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*).\end{aligned}$$

Za kvaternionske neznanke $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ nam zgornje enačbe predstavljajo sistem nelinearnih enačb. Ko rešimo ta sistem, lahko izračunamo kontrolne točke $\mathbf{p}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$, kjer upoštevamo $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_i$ in $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_f$.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \mathbf{d}_i, \quad \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* = \mathbf{d}_f.$$

$$\begin{aligned}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)\mathbf{i}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)^* \\ = 120(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - 15(\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_f) + 5(\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*).\end{aligned}$$

Za kvaternionske neznanke $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ nam zgornje enačbe predstavljajo sistem nelinearnih enačb. Ko rešimo ta sistem, lahko izračunamo kontrolne točke $\mathbf{p}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$, kjer upoštevamo $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_i$ in $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_f$.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

$$\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_0^* = \mathbf{d}_i, \quad \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* = \mathbf{d}_f.$$

$$\begin{aligned}&(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)\mathbf{i}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)^* \\ &\quad = 120(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - 15(\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_f) + 5(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*).\end{aligned}$$

Za kvaternionske neznanke $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ nam zgornje enačbe predstavljajo sistem nelinearnih enačb. Ko rešimo ta sistem, lahko izračunamo kontrolne točke $\mathbf{p}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$, kjer upoštevamo $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_i$ in $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_f$.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \mathbf{d}_i, \quad \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* = \mathbf{d}_f.$$

$$\begin{aligned}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)&\mathbf{i}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)^* \\ &= 120(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) - 15(\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_f) + 5(\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*).\end{aligned}$$

Za kvaternionske neznanke $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ nam zgornje enačbe predstavljajo sistem nelinearnih enačb. Ko rešimo ta sistem, lahko izračunamo kontrolne točke $\mathbf{p}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$, kjer upoštevamo $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_i$ in $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_f$.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Ker imamo na voljo več rešitev za naš interpolacijski problem, se je smiselno vprašati, katera rešitev je "najboljša". Najboljša bi bila tista rešitev, pri kateri je krivulja v prostoru najmanj ukrivljena. Za mero ukrivljenosti lahko recimo vzamemo integral

$$E = \int_0^1 \kappa^2(t)\|\mathbf{r}'(t)\|dt.$$

Zgornji integral ponazarja prožnostno energijo, ki je potrebna, da ravno elastično palico spravimo v obliko, ki jo ponazarja prostorska krivulja $\mathbf{r}$. Izmed vseh interpolacijskih krivulj je "najboljša" tista krivulja, pri kateri ima zgornji integral najmanjšo vrednost.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Ker imamo na voljo več rešitev za naš interpolacijski problem, se je smiselno vprašati, katera rešitev je "najboljša". Najboljša bi bila tista rešitev, pri kateri je krivulja v prostoru najmanj ukrivljena. Za mero ukrivljenosti lahko recimo vzamemo integral

$$E = \int_0^1 \kappa^2(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Zgornji integral ponazarja prožnostno energijo, ki je potrebna, da ravno elastično palico spravimo v obliko, ki jo ponazarja prostorska krivulja $\mathbf{r}$. Izmed vseh interpolacijskih krivulj je "najboljša" tista krivulja, pri kateri ima zgornji integral najmanjšo vrednost.

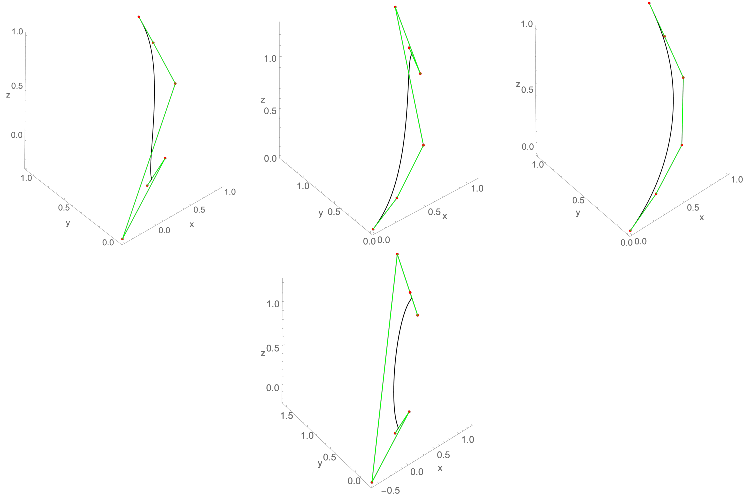
Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

Ker imamo na voljo več rešitev za naš interpolacijski problem, se je smiselno vprašati, katera rešitev je "najboljša". Najboljša bi bila tista rešitev, pri kateri je krivulja v prostoru najmanj ukrivljena. Za mero ukrivljenosti lahko recimo vzamemo integral

$$E = \int_0^1 \kappa^2(t)\|\mathbf{r}'(t)\|dt.$$

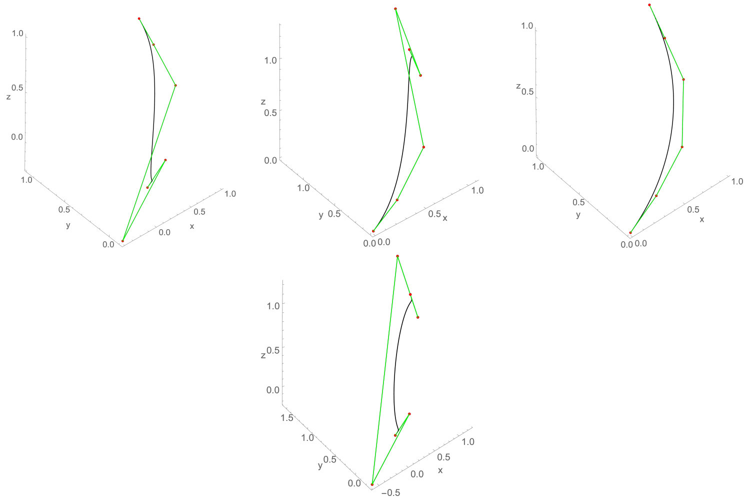
Zgornji integral ponazarja prožnostno energijo, ki je potrebna, da ravno elastično palico spravimo v obliko, ki jo ponazarja prostorska krivulja $\mathbf{r}$. Izmed vseh interpolacijskih krivulj je "najboljša" tista krivulja, pri kateri ima zgornji integral najmanjšo vrednost.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5



Slika: Štiri interpolacijske DPH krivulje s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za podatke $\mathbf{p}_i = (0,0,0)$, $\mathbf{p}_f = (1,1,1)$, $\mathbf{d}_i = (1,0,1)$ in $\mathbf{d}_f = (0,1,1)$.

Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5



Slika: Štiri interpolacijske DPH krivulje s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za podatke $\mathbf{p}_i = (0,0,0)$, $\mathbf{p}_f = (1,1,1)$, $\mathbf{d}_i = (1,0,1)$ in $\mathbf{d}_f = (0,1,1)$.