UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika – 2. stopnja

Simon Besednjak

DVOJNE PH KRIVULJE

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2021

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela vii

1 Uvod 1

2 Prostorske krivulje 1
2.1 Osnovne lastnosti 1
2.2 Ločna dolžina in tangenta na krivuljo 1
2.3 Ukrivljenost in Frenetovo ogrodje 1

3 Bernsteinovi polinomi in Bézierjeve krivulje 3

4 Krivulje s pitagorejskim hodografom 3

5 Izražanje prostorskih PH krivulj v kvaternionski obliki 3

6 Izražanje prostorskih PH krivulj s Hopfovo preslikavo 3

7 Integrali po ω-kompleksih 3
7.1 Definicija 3

8 Tehnični napotki za pisanje 4
8.1 Sklicevanje in citiranje 4
8.2 Okrajšave 4
8.3 Vstavljanje slik 4
8.4 Kako narediti stvarno kazalo 4
8.5 Navajanje literature 5

Literatura 7

Stvarno kazalo 9

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [10], [8], [13], [3].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[10] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009

[8] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982

[13] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000

[3] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`

Podpis mentorja:

Dvojne PH krivulje

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html`

Ključne besede: PH krivulje, dvojne PH krivulje

Keywords: PH curves, double PH curves

1 Uvod

Napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v katerem razdelku.

2 Prostorske krivulje

2.1 Osnovne lastnosti

[12] Krivulje v prostoru si lahko predstavljamo kot tirnice, po katerih potuje točka v gibanju. Najlažje jih podamo v parametrični obliki $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}$,
$\mathbf{r}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi))$, $\xi \in I$, kjer so x, y in z običajne skalarne funkcije parametra ξ. Več različnih parametrizacij lahko opisuje isto krivuljo. V nadaljevanju bomo predpostavili, da so x, y in z vsaj dvakrat zvezno odvedljive funkcije. Odvod krivulje $\mathbf{r}$ dobimo tako, da krivuljo odvajamo po komponentah:

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(\xi) = (x'(\xi), y'(\xi), z'(\xi)) \text{ za } \xi \in I.$$

2.2 Ločna dolžina in tangenta na krivuljo

[4] Pravimo, da je krivulja $\mathbf{r}$ regularna, če je njen odvod $\mathbf{r}'(\xi) \neq 0$ za vse vrednosti ξ z intervala I. Od sedaj bomo privzeli, da je krivulja regularna. Odvod regularne krivulje pa lahko zapišemo tudi v malce drugačni obliki

$$\mathbf{r}'(\xi) = \sigma(\xi)\mathbf{t}(\xi), \tag{2.1}$$

kjer je $\sigma(\xi)$ funkcija, ki slika z začetne domene I v $\mathbb{R}$

$$\sigma(\xi) = \|\mathbf{r}'(\xi)\| = \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi)} \tag{2.2}$$

in predstavlja spremembo ločne dolžine krivulje v odvisnosti od parametra ξ. V enačbi (2.1) je s $\mathbf{t}(\xi)$ označeno enotsko tangentsko vektorsko polje na krivuljo $\mathbf{r}$, izračunano pri parametru ξ

$$\mathbf{t}(\xi) = \frac{\mathbf{r}'(\xi)}{\|\mathbf{r}'(\xi)\|} = \frac{\mathbf{r}'(\xi)}{\sigma(\xi)}. \tag{2.3}$$

S pomočjo funkcije $\sigma(\xi)$ lahko izrazimo tudi dolžino loka krivulje. Če je $I = [a, b]$, je potem ločna dolžina enaka

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi)}d\xi = \int_a^b \|\mathbf{r}'(\xi)\|d\xi = \int_a^b \sigma(\xi)d\xi. \tag{2.4}$$

2.3 Ukrivljenost in Frenetovo ogrodje

Sedaj bomo uvedli dve novi enotski vektorski polji, ki bodo skupaj z enotsko tangento tvorili ortonormalno bazo za prostor $\mathbb{R}^3$. V nadaljevanju bomo ponekod v enačbah in izpeljavah zaradi preglednosti izpustili parameter ξ.

Ker je $\mathbf{t}$ enotsko tangento polje, vedno velja $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t} = \|\mathbf{t}\|^2 = 1$. Če to enačbo odvajamo, dobimo, da je $\mathbf{t}'\cdot\mathbf{t} = 0$, kar pomeni, da je $\mathbf{t}'$ pravokoten na $\mathbf{t}$ pri vsakemu parametru ξ. Torej lahko (implicitno) definiramo enotsko vektorsko polje $\mathbf{p}$ na naslednji način: odvod enotske tangente je enak

$$\mathbf{t}'(\xi) = \sigma(\xi)\kappa(\xi)\mathbf{p}(\xi), \tag{2.5}$$

kjer je $\kappa(\xi)$ nenegativna funkcija parametra ξ. Tako ima vektorsko polje $\mathbf{p}$ isto smer kot $\mathbf{t}'$. Prav tako je $\mathbf{p}$ pravokoten na enotsko tangento $\mathbf{t}$. Da bi lahko $\kappa(\xi)$ in $\mathbf{p}$ eksplicitno izrazili, si s pomočjo enačbe (2.1) oglejmo drugi odvod krivulje $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}'' = \sigma'\mathbf{t} + \sigma\mathbf{t}'. \tag{2.6}$$

Iz (2.1) in zgornje enačbe sledi naslednja enakost

$$\mathbf{r}'(\xi)\times\mathbf{r}''(\xi) = \sigma^3(\xi)\kappa(\xi)\mathbf{t}(\xi)\times\mathbf{p}(\xi). \tag{2.7}$$

Ker je $\mathbf{p}$ definirano kot enotsko vektorsko polje, ki je ortogonalno na $\mathbf{t}$, je potem

$$\kappa(\xi) = \frac{\|\mathbf{r}'(\xi)\times\mathbf{r}''(\xi)\|}{\|\mathbf{r}'(\xi)\|^3} = \frac{\|\mathbf{r}'(\xi)\times\mathbf{r}''(\xi)\|}{\sigma^3(\xi)}. \tag{2.8}$$

To lahko naredimo, saj smo predpostavili, da je $\kappa(\xi)$ nenegativna funkcija. Sedaj si oglejmo, čemu je enaka naslednja količina:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}\times\mathbf{t} &= \frac{1}{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}\left(\sigma^3\frac{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}{\sigma^3}\mathbf{t}\times\mathbf{p}\right)\times\mathbf{t}\\ &= (\mathbf{t}\times\mathbf{p})\times\mathbf{t}\\ &= -(\mathbf{t}\cdot\mathbf{p})\mathbf{t} + (\mathbf{t}\cdot\mathbf{t})\mathbf{p}\\ &= \mathbf{p}.\end{aligned}$$

Količini $\mathbf{p}$ pravimo *normala* ali *glavna normala* na krivuljo $\mathbf{r}$, količini κ pa *fleksijska ukrivljenost* krivulje $\mathbf{r}$. Da se preveriti, da je fleksijska ukrivljenost neodvisna od izbire parametrizacije krivulje. Definirali smo že enotsko tangento in enotsko normalo. Najti moramo še eno enotsko vektorsko polje, ki je ortogonalno na obe prejšnji. To lahko naredimo direktno z vektorskim produktom

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}. \tag{2.9}$$

Tej vrednosti pravimo *binormala* krivulje $\mathbf{r}$. Vektorska polja $\mathbf{t},\mathbf{p},\mathbf{b}$ na vsaki točki krivulje $\mathbf{r}$ tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$. To trojico imenujemo tudi *Frenetovo ogrodje*. Če je binormala nek konstanten vektor za vsak parameter ξ (z dolžino 1), sledi, da vektorski polji $\mathbf{t}$ in $\mathbf{p}$ ležita v isti ravnini, kar pomeni, da celotna krivulja $\mathbf{r}$ leži v tej isti ravnini.

Recimo, da velja $\mathbf{b}' \neq 0$. To pomeni, da imamo res opravka s prostorsko krivuljo. Če odvajamo enačbo (2.9) in uporabimo (2.5), dobimo, da je odvod binormale enak $\mathbf{b}' = \mathbf{t}\times\mathbf{p}'$. Ker ima za vsak parameter ξ vektor $\mathbf{p}$ dolžino 1, sta potem vektorski polji $\mathbf{p}$ in $\mathbf{p}'$ ortogonalni (to lahko takoj preverimo z odvajanjem skalarnega produkta vektorskega polja $\mathbf{p}$ s samim seboj). Torej se da izraziti $\mathbf{p}'$ z $\mathbf{b}$ in $\mathbf{t}$, kar pa pomeni, da se da $\mathbf{b}'$ izraziti z $\mathbf{t} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}'(\xi) = \sigma(\xi)\tau(\xi)\mathbf{t}(\xi) \times \mathbf{b}(\xi) = -\sigma(\xi)\tau(\xi)\mathbf{p}(\xi). \tag{2.10}$$

Funkciji $\tau(\xi)$ pravimo *torzijska ukrivljenost* krivulje $\mathbf{r}$. Da se dokopljemo do njenega eksplicitnega zapisa, najprej preuredimo in odvajamo enačbo (2.7):

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')' &= (\sigma^3\kappa\mathbf{b})' \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''' &= 3\sigma^2\sigma'\kappa\mathbf{b} + \sigma^3\kappa'\mathbf{b} + \sigma^3\kappa\mathbf{b}' \\ &= -\sigma^4\kappa\tau\mathbf{p} + \sigma^2(3\sigma'\kappa + \sigma\kappa')\mathbf{p}.\end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo upoštevali vrednost količine $\mathbf{b}'$. Če vrednost $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''$ skalarno pomnožimo z $\mathbf{r}''$, dobimo

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''') \cdot \mathbf{r}'' = -\sigma^6\kappa^2\tau. \tag{2.11}$$

Pri tem smo upoštevali (2.6), (2.5) in ortonormiranost Frenetovega ogrodja. Če obrnemo mešani produkt v zgornji enačbi in upoštevamo (2.8), vidimo, da je torzijska ukrivljenost enaka

$$\tau(\xi) = \frac{[\mathbf{r}'(\xi), \mathbf{r}''(\xi), \mathbf{r}'''(\xi)]}{\|\mathbf{r}'(\xi) \times \mathbf{r}''(\xi)\|^2} \tag{2.12}$$

Vidimo torej, da torzijska ukrivljenost krivulje neničelna natanko takrat, ko so $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ in $\mathbf{r}'''$ linearno neodvisni, kar je ravno takrat, ko je krivulja res prostorska.

3 Bernsteinovi polinomi in Bézierjeve krivulje

4 Krivulje s pitagorejskim hodografom

5 Izražanje prostorskih PH krivulj v kvaternionski obliki

nekaj nekja

6 Izražanje prostorskih PH krivulj s Hopfovo preslikavo

nekjaj nkaj

7 Integrali po ω-kompleksih

7.1 Definicija

Definicija 7.1. Neskončno zaporedje kompleksnih števil, označeno z $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, [redacted] se imenuje *ω-kompleks.*[1]

[1] To ime je izmišljeno.

Črni blok zgoraj je tam namenoma. Označuje, da LaTeX ni znal vrstice prelomiti pravilno in vas na to opozarja. Preoblikujte stavek ali mu pomagajte deliti problematično besedo z ukazom `\hyphenation{an-ti-ko-mu-ta-ti-ven}` v preambuli.

Trditev 7.2 (Znano ime ali avtor)**.** *Obstaja vsaj en ω-kompleks.*

Dokaz. Naštejmo nekaj primerov:

$$\begin{aligned} \omega &= (0,0,0,\dots), \qquad (7.1) \\ \omega &= (1,i,-1,-i,1,\dots), \\ \omega &= (0,1,2,3,\dots). \end{aligned}$$ □

8 Tehnični napotki za pisanje

8.1 Sklicevanje in citiranje

Za sklice uporabljamo `\ref`, za sklice na enačbe `\eqref`, za citate `\cite`. Pri sklicevanju in citiranju sklicano številko povežemo s prejšnjo besedo z nedeljivim presledkom ~, kot npr. `iz trditve~\ref{trd:obstoj-omega} vidimo`.

Primer 8.1. Zaporedje (7.1) iz dokaza trditve 7.2 na strani 4 lahko najdemo tudi v Spletni enciklopediji zaporedij [11]. Citiramo lahko tudi bolj natančno [10, trditev 2.1, str. 23].

8.2 Okrajšave

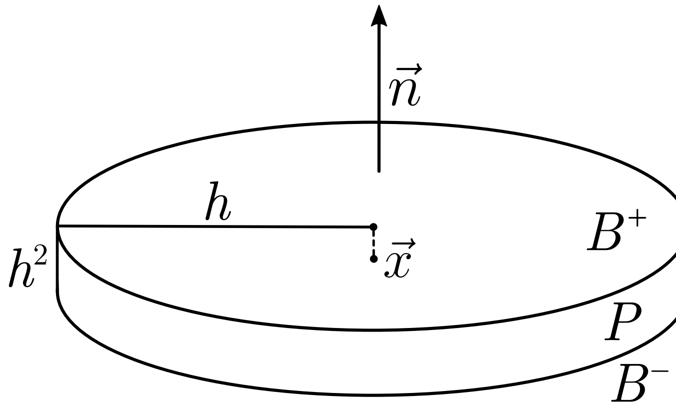
Pri uporabi okrajšav LaTeX za piko vstavi predolg presledek, kot npr. tukaj. Zato se za vsako piko, ki ni konec stavka doda presledek običajne širine z ukazom `\␣`, kot npr. tukaj. Primerjaj z okrajšavo zgoraj za razliko.

8.3 Vstavljanje slik

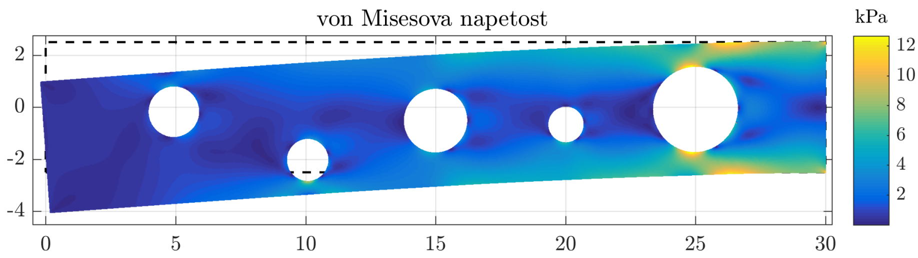
Sliko vstavimo v plavajočem okolju `figure`. Plavajoča okolja *plavajo* po tekstu, in jih lahko postavimo na vrh strani z opcijskim parametrom '`t`', na lokacijo, kjer je v kodi s '`h`', in če to ne deluje, potem pa lahko rečete LaTeXu, da ga *res* želite tukaj, kjer ste napisali, s '`h!`'. Lepo je da so vstavljene slike vektorske (recimo `.pdf` ali `.eps` ali `.svg`) ali pa `.png` visoke resolucije (več kot 300 dpi). Pod vsako sliko je napis in na vsako sliko se skličemo v besedilu. Primer vektorske slike je na sliki 1. Vektorsko sliko prepoznate tako, da močno zoomate v sliko, in še vedno ostane gladka. Več informacij je na voljo na `https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Floats,_Figures_and_Captions`. Če so slike bitne, kot na primer slika 2, poskrbite, da so v dovolj visoki resoluciji.

8.4 Kako narediti stvarno kazalo

Dodate ukaze `\index{polje}` na besede, kjer je pojavijo, kot tukaj. Več o stvarnih kazalih je na voljo na `https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Indexing`.



Slika 1: Primer vektorske slike z oznakami v enaki pisavi, kot jo uporablja LaTeX. Narejena je s programom Inkscape, LaTeX oznake so importane v Inkscape iz pomožnega PDF.



Slika 2: Primer bitne slike, izvožene iz Matlaba. Poskrbite, da so slike v dovolj visoki resoluciji in da ne vsebujejo prosojnih elementov (to zahteva PDF/A-1b format).

8.5 Navajanje literature

Tu na novo citiram [5], [6], [1], [2], [12], [9], [7], [4].

Literatura

[1] J. Beltran in J. Monterde, *A characterization of quintic helices*, Journal of computational and applied mathematics **206**(1) (2007) 116–121.

[2] H. I. Choi, D. S. Lee in H. P. Moon, *Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces*, Advances in Computational Mathematics **17**(1) (2002) 5–48.

[3] *DRAFT 2016 EU-wide ST templates*, [ogled 3. 8. 2016], dostopno na `http://www.eba.europa.eu/documents/10180/1259315/DRAFT+2016+EU-wide+ST+templates.xlsx`.

[4] R. T. Farouki, *Pythagorean—hodograph Curves*, Springer, 2008.

[5] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I. Quaternion and Hopf map representations*, Journal of Symbolic Computation **44**(2) (2009) 161–179.

[6] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs II. Enumeration of low-degree curves*, Journal of Symbolic Computation **44**(4) (2009) 307–332.

[7] R. T. Farouki in dr., *Characterization and construction of helical polynomial space curves*, Journal of Computational and Applied Mathematics **162**(2) (2004) 365–392.

[8] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering **158**, Academic Press, New York, 1982.

[9] E. Kreyszig, *Differential geometry*, University of Toronto Press, 2019.

[10] L. P. Lebedev in M. J. Cloud, *Introduction to Mathematical Elasticity*, World Scientific, Singapur, 2009.

[11] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Sequence A005043*, [ogled 9. 7. 2016], dostopno na `http://oeis.org/A005043`.

[12] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, Courier Corporation, 1961.

[13] O. C. Zienkiewicz in R. L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid mechanics*, The Finite Element Method **2**, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

Stvarno kazalo

tukaj, 4