DPH-krivulje in polinomske vijačnice

Simon Besednjak

Fakulteta za matematiko in fiziko

3.3.2022

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}' : I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

Parametrično podane prostorske krivulje

$$\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3, I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

$$\mathbf{r}': I \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I,$$

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}, \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}.$$

Krivulje s pitagorejskim hodografom

Definicija

Prostorska polinomska krivulja $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *kjer je* I *zaprt interval v* $\mathbb{R}^3$, *ima pitagorejski hodograf, če obstaja tak realen polinom* σ, *da velja*

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t), \quad t \in I.$$

Takim krivuljam pravimo tudi *PH-krivulje*.

Krivulje s pitagorejskim hodografom

Izrek

Prostorska krivulja $\mathbf{r}$ *je PH-krivulja natanko takrat, ko je njen hodograf oblike*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))w(t),\\
y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))w(t),\\
z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))w(t),
\end{aligned}
$$

za realne polinome u, v, p, q *in* w.

Krivulje s pitagorejskim hodografom

Izrek

Prostorska krivulja $\mathbf{r}$ *je PH-krivulja natanko takrat, ko je njen hodograf oblike*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))w(t), \\
y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))w(t), \\
z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))w(t),
\end{aligned}
$$

za realne polinome u, v, p, q *in* w. *Parametrična hitrost se poenostavi v*

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = (u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t))w(t).$$

Pri tem polinom w *predstavlja skupni faktor komponent hodografa.*

Krivulje s pitagorejskim hodografom – lastnosti

Ločna dolžina regularne PH-krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

Krivulje s pitagorejskim hodografom – lastnosti

Ločna dolžina regularne PH-krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

Vektorsko polje enotskih tangent $\mathbf{t}$ je racionalno v parametru t.

Krivulje s pitagorejskim hodografom – lastnosti

Ločna dolžina regularne PH-krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

Vektorsko polje enotskih tangent $\mathbf{t}$ je racionalno v parametru t.
Torzijska ukrivljenost τ je racionalna funkcija parametra t.

Krivulje s pitagorejskim hodografom – lastnosti

Ločna dolžina regularne PH-krivulje je v polinomski odvisnosti od parametra t:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi.$$

Vektorsko polje enotskih tangent $\mathbf{t}$ je racionalno v parametru t.
Torzijska ukrivljenost τ je racionalna funkcija parametra t.
V splošnem izrazi za $\kappa, \mathbf{p}$ in $\mathbf{b}$ niso racionalno parametrizirani.

Kvaternionska oblika PH-krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

Kvaternionska oblika PH-krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

Kvaternionska oblika PH-krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = &\left(u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\right)\mathbf{i}\\ &+ 2\left(u(t)q(t) + v(t)p(t)\right)\mathbf{j}\\ &+ 2\left(v(t)q(t) - u(t)p(t)\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Kvaternionska oblika PH-krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = & \big(u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\big)\mathbf{i} \\ & + 2\big(u(t)q(t) + v(t)p(t)\big)\mathbf{j} \\ & + 2\big(v(t)q(t) - u(t)p(t)\big)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

Kvaternionska oblika PH-krivulj

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}.$$

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) = &\big(u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)\big)\mathbf{i}\\ &+ 2\big(u(t)q(t) + v(t)p(t)\big)\mathbf{j}\\ &+ 2\big(v(t)q(t) - u(t)p(t)\big)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Velja: $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 &= \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t)\\ &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t).\end{aligned}$$

Hopfova oblika PH-krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H *je preslikava, ki slika iz* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ *in je za* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ *določena z naslednjim predpisom:*

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

Hopfova oblika PH-krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Hopfova oblika PH-krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H *je preslikava, ki slika iz* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ *in je za* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ *določena z naslednjim predpisom:*

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\begin{gathered} \mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)), \\ \|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2. \end{gathered}$$

Preko pretvorbe $\mathcal{A} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{k}\boldsymbol{\beta}$ lahko iz Hopfove oblike PH-krivulje dobimo kvaternionsko.

Hopfova oblika PH-krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

Hopfova oblika PH-krivulj

Definicija

Hopfova preslikava H je preslikava, ki slika iz $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$ in je za $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}$ določena z naslednjim predpisom:

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (|\boldsymbol{\alpha}|^2 - |\boldsymbol{\beta}|^2, 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}}), 2\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{\beta}})).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t).$$

Velja:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{H}(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\beta}(t)),$$
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\boldsymbol{\alpha}(t)|^2 + |\boldsymbol{\beta}(t)|^2.$$

Preko pretvorbe $\mathcal{A} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{k}\beta$ lahko iz Hopfove oblike PH-krivulje dobimo kvaternionsko.

DPH-krivulje

Definicija

Za prostorsko polinomsko krivuljo $\mathbf{r}$ *pravimo, da je DPH-krivulja, če sta tako* $\|\mathbf{r}'\|$ *kot* $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ *polinomski funkciji parametra* t*, torej če sta izpolnjena pogoja*

$$\|\mathbf{r}'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma^2,$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 = (\sigma\omega)^2$$

za neka polinoma σ *in* ω*.*

DPH-krivulje

Definicija

Za prostorsko polinomsko krivuljo $\mathbf{r}$ *pravimo, da je DPH-krivulja, če sta tako* $\|\mathbf{r}'\|$ *kot* $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ *polinomski funkciji parametra* t*, torej če sta izpolnjena pogoja*

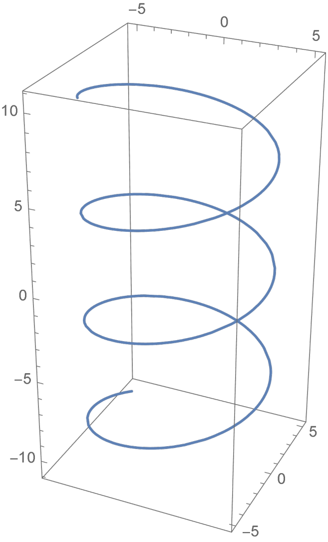
$$\|\mathbf{r}'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma^2,$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2 = (\sigma\omega)^2$$

za neka polinoma σ *in* ω*.*

Frenetovo ogrodje $(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$ in fleksijska ukrivljenost κ ter torzijska ukrivljenost τ so racionalno parametrizirane v parametru t.

Vijačnice



Slika: Graf vijačnice $\mathbf{r}(t) = (5\cos t, \sin t, t)$.

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ *je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta* $\mathbf{t}$ *konstanten kot* ψ *(kjer je* $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$*) z nekim fiksnim enotskim vektorjem* $\mathbf{a}$*. Vektor* $\mathbf{a}$ *predstavlja os vrtenja vijačnice.*

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ *je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta* $\mathbf{t}$ *konstanten kot* ψ *(kjer je* $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$*) z nekim fiksnim enotskim vektorjem* $\mathbf{a}$*. Vektor* $\mathbf{a}$ *predstavlja os vrtenja vijačnice.*

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{t}$ enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos\psi.$$

Vijačnice

Definicija

Krivulja $\mathbf{r}$ *je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta* $\mathbf{t}$ *konstanten kot* ψ *(kjer je* $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$*) z nekim fiksnim enotskim vektorjem* $\mathbf{a}$*. Vektor* $\mathbf{a}$ *predstavlja os vrtenja vijačnice.*

Ker sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{t}$ enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi.$$

Izrek (Lancret)

Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natanko takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.

DPH-krivulje in polinomske vijačnice

Trditev

Če je krivulja polinomska vijačnica, potem je tudi DPH-krivulja.

DPH-krivulje in polinomske vijačnice

Trditev

Če je krivulja polinomska vijačnica, potem je tudi DPH-krivulja.

Izrek

Krivulja stopnje tri ali pet je polinomska vijačnica natanko tedaj, ko je DPH-krivulja.

DPH-krivulje in polinomske vijačnice

- Vsaka PH-krivulja stopnje 3 je (polinomska) vijačnica in hkrati DPH-krivulja.

DPH-krivulje in polinomske vijačnice

- Vsaka PH-krivulja stopnje 3 je (polinomska) vijačnica in hkrati DPH-krivulja.
- DPH-krivulje stopnje 5 (ki so hkrati tudi polinomske vijačnice) predstavljajo pravo podmnožico množice PH-krivulj stopnje 5.

DPH-krivulje in polinomske vijačnice

- Vsaka PH-krivulja stopnje 3 je (polinomska) vijačnica in hkrati DPH-krivulja.
- DPH-krivulje stopnje 5 (ki so hkrati tudi polinomske vijačnice) predstavljajo pravo podmnožico množice PH-krivulj stopnje 5.
- Za stopnje 7 ali več predstavlja množica DPH-krivulj pravo podmnožico množice PH-krivulj. Obstajajo tako vijačne kot nevijačne DPH-krivulje.

Polinom proporcionalnosti

Definicija

Polinomu $\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)$*, ki ga sestavimo iz polinomov* $\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ *ter* $\boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t)$ *za neke realne polinome* $u(t), v(t), q(t)$ *ter* $p(t)$*, pravimo tudi polinom proporcionalnosti polinomov* $\boldsymbol{\alpha}(t)$ *in* $\boldsymbol{\beta}(t)$*.*

Polinom proporcionalnosti

Definicija

Polinomu $\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t)$, ki ga sestavimo iz polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ ter $\boldsymbol{\beta}(t) = q(t) + \mathrm{i}p(t)$ za neke realne polinome $u(t), v(t), q(t)$ ter $p(t)$, pravimo tudi polinom proporcionalnosti polinomov $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$.

DPH-pogoj $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (\sigma\omega)^2$ je ekvivalenten pogoju:

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta} = h\mathbf{w}^2,$$

kjer je h realen polinom, $\mathbf{w}$ pa kompleksen polinom, za katera velja tudi

$$\mathrm{st}(h) + 2\,\mathrm{st}(\mathbf{w}) = \mathrm{st}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}) = \mathrm{st}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{st}(\boldsymbol{\beta}) - 2.$$

Konstrukcija polinomskih vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.

Konstrukcija polinomskih vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.
Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

Konstrukcija polinomskih vijačnic

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.
Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Konstrukcija polinomskih vijačnic

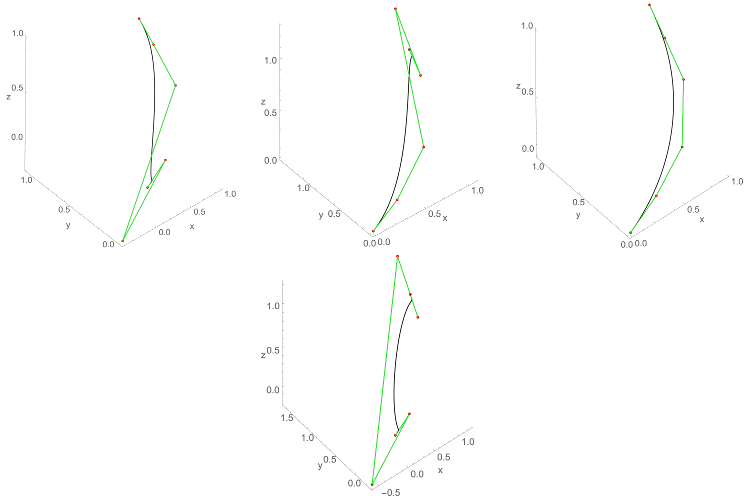
$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t},$$

kjer so $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_0$ in $\mathbf{b}_1$ kompleksna števila, za katera velja $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0 \neq 0$.

Dva različna načina za konstrukcijo vijačnic:

- Pomnožimo števec in imenovalec zgornjega izraza s kompleksnim polinomom, da dobimo $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$. Tako pridobljena $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.
- V zgornjem izrazu uporabimo racionalno reparametrizacijo $t \to \frac{f(t)}{g(t)}$, kjer sta $f(t)$ in $g(t)$ realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$, in preslikamo $\boldsymbol{\alpha}(t)$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf $\mathbf{r}'(t)$.

Hermitova interpolacija z DPH-krivuljami stopnje 5



Slika: Štiri interpolacijske DPH-krivulje s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za podatke $\mathbf{p}_i = (0,0,0)$, $\mathbf{p}_f = (1,1,1)$, $\mathbf{d}_i = (1,0,1)$ in $\mathbf{d}_f = (0,1,1)$.