

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Pedagoška matematika – 2. stopnja



Simon Besednjak

# DPH KRIVULJE IN POLINOMSKE VIJAČNICE

Magistrsko delo

Mentorica: prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2022



## Zahvala

Zahvaljujem se mentorici, prof. dr. Marjetki Knez za strokovno vodenje, svetovanje, podporo in čas pri izdelavi zaključnega magistrskega dela.

Zahvala gre tudi moji družini, ki me je tekom študija finančno in moralno podpirala ter prijateljem, ki so mi stali ob strani.



# Kazalo

<b>Program dela</b>	<b>ix</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Osnovni pojmi in uvodne definicije</b>	<b>3</b>
2.1 Prostorske krivulje . . . . .	3
2.1.1 Osnovne lastnosti . . . . .	3
2.1.2 Ločna dolžina in tangenta na krivuljo . . . . .	3
2.1.3 Ukrivljenost in Frenetovo ogrodje . . . . .	4
2.2 Bézierjeve krivulje in Bernsteinovi polinomi . . . . .	6
2.3 Kvaternioni . . . . .	8
<b>3 Krivulje s pitagorejskim hodografom</b>	<b>11</b>
3.1 Definicije . . . . .	11
3.2 Lastnosti PH krivulj . . . . .	13
3.3 Izražanje prostorskih PH krivulj v kvaternionski obliki . . . . .	18
3.4 Izražanje prostorskih PH krivulj s Hopfovo preslikavo . . . . .	19
3.4.1 Pretvorba med predstavitevama . . . . .	20
<b>4 DPH krivulje</b>	<b>21</b>
4.1 DPH krivulje in vijačnice . . . . .	22
4.2 Kvaternionska predstavitev DPH krivulj . . . . .	24
4.3 Predstavitev DPH krivulj s Hopfovo preslikavo . . . . .	26
<b>5 Klasifikacija DPH krivulj nizkih stopenj</b>	<b>29</b>
5.1 DPH krivulje stopnje 3 in 5 . . . . .	29
5.1.1 Primer $\text{st}(h) = 0$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . . . . .	30
5.1.2 Primer $\text{st}(h) = 2$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . . . . .	30
5.2 DPH krivulje stopnje 7 . . . . .	30
5.2.1 Primer $\text{st}(h) = 0$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ . . . . .	31
5.2.2 Primer $\text{st}(h) = 2$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . . . . .	32
5.2.3 Primer $\text{st}(h) = 4$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . . . . .	33
<b>6 Polinomske vijačnice in Hopfova preslikava</b>	<b>34</b>
6.1 Kompleksne premice in krožnice . . . . .	36
6.2 Polinomske vijačne krivulje stopnje 3 in 5 . . . . .	38
6.2.1 Polinomske vijačne krivulje stopnje 3 . . . . .	38
6.2.2 Polinomske vijačne krivulje stopnje 5 - kvadratična reparametrizacija . . . . .	38
6.2.3 Polinomske vijačne krivulje stopnje 5 - množenje z linearnim polinomom . . . . .	39
6.3 Polinomske vijačne krivulje stopnje 7 . . . . .	41
6.3.1 Kubična reparametrizacija . . . . .	41
6.3.2 Množenje s kvadratičnim polinomom . . . . .	42

6.3.3	Reparametrizacija in multiplikacija . . . . .	43
6.4	Polinomske vijačne krivulje višjih stopenj . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Nevijačne DPH krivulje</b>	<b>46</b>
7.1	Primer $\text{st}(h) = 0$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ . . . . .	49
7.2	Primer $\text{st}(h) = 2$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . . . . .	50
7.3	Primer $\text{st}(h) = 4$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . . . . .	52
<b>8</b>	<b>Izračunani primeri</b>	<b>54</b>
<b>9</b>	<b>Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5</b>	<b>69</b>
<b>10</b>	<b>Zaključek</b>	<b>75</b>
	<b>Literatura</b>	<b>77</b>

## Kazalo slik

1	Primer preproste vijačnice . . . . .	16
2	Os vijačnice v primerjavi z enotsko tangento, normalo in binormalo .	17
3	Primer vijačne krivulje, pridobljene s kubično reparametrizacijo . . .	56
4	Primer vijačne krivulje, pridobljene s postopkom množenja z linear- nim polinomom . . . . .	57
5	Primer vijačne krivulje, pridobljene s postopkom reparametrizacije in multiplikacije . . . . .	59
6	Primer vijačne krivulje ( $\text{st}(h) = 0, \text{st}(\mathbf{w}) = 2$ ) . . . . .	60
7	Primer nevijačne krivulje ( $\text{st}(h) = 0, \text{st}(\mathbf{w}) = 2$ ) . . . . .	62
8	Primer vijačne krivulje ( $\text{st}(h) = 2, \text{st}(\mathbf{w}) = 1$ ) . . . . .	63
9	Primer nevijačne krivulje ( $\text{st}(h) = 2, \text{st}(\mathbf{w}) = 1$ ) . . . . .	65
10	Primer vijačne krivulje ( $\text{st}(h) = 4, \text{st}(\mathbf{w}) = 0$ ) . . . . .	66
11	Primer nevijačne krivulje ( $\text{st}(h) = 4, \text{st}(\mathbf{w}) = 0$ ) . . . . .	68
12	Interpolacijske DPH krivulje . . . . .	74





## Program dela

Pomemben razred parametrično podanih krivulj v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju predstavljajo krivulje s pitagorejskim hodografo (PH krivulje). Karakterizirane so z lastnostjo, da je njihovo vektorsko polje enotskih tangent racionalno. Prostorske PH krivulje, pri katerih je celotno Frenetovo ogrodje podano racionalno, pa imenujemo DPH krivulje. V magistrskem delu opišite možne konstrukcije DPH krivulj, raziščite njihovo povezavo s polinomskimi vijačnicami ter obravnavajte Hermiteov interpolacijski problem z uporabo DPH krivulj stopnje pet. Izpeljane teoretične rezultate ponazorite z numeričnimi primeri.

## Osnovna literatura

- [7] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I. Quaternion and Hopf map representations*, Journal of Symbolic Computation **44**(2) (2009) 161–179
- [8] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs II. Enumeration of low-degree curves*, Journal of Symbolic Computation **44**(4) (2009) 307–332
- [5] R. T. Farouki, *Pythagorean—hodograph Curves*, Springer, 2008

Podpis mentorice:



## DPH krivulje in polinomske vijačnice

### POVZETEK

V magistrskem delu se ukvarjamo s krivuljami s pitagorejskim hodografom, polinomskimi vijačnicami ter DPH krivuljami. Na začetku se bomo seznanili z osnovnimi lastnostmi parametrično podanih prostorskih krivulj, Bézierjevimi krivuljami, Bernsteinovimi polinomi ter vektorskim prostorom kvaternionov. Nadaljevali bomo z obravnavo krivulj s pitagorejskim hodografom, spoznali nekaj lastnosti teh krivulj in jih izrazili s pomočjo kvaternionov ter Hopfove preslikave. Vpeljali bomo pojem polinomskih DPH krivulj in klasificirali različne tipe teh krivulj pri nizkih stopnjah. Raziskali bomo povezavo teh krivulj z vijačnimi krivuljami, ki imajo polinomske parametrizacije in si ogledali različne postopke, s katerimi lahko konstruiramo različne tipe DPH krivulj. Ogledali si bomo še pogoje za obstoj nevijačnih DPH krivulj ter podali nekaj primerov. Za konec bo sledilo še poglavje o Hermiteovi interpolaciji z vijačnimi DPH krivuljami stopnje 5.

## DPH curves and helical polynomial curves

### ABSTRACT

The topic of the master thesis is a subclass of Pythagorean-hodograph curves, named DPH curves and its relationship with helical polynomial curves. At the beginning we will get acquainted with the basic properties of parametric spatial curves, Bézier curves, Bernstein polynomials and vector space of quaternions. We will continue with the discussion on Pythagorean-hodograph curves, learn some of the properties of these curves and how to represent them using quaternion and Hopf map form. The concept of polynomial DPH curves will be introduced and classification of different types of these curves at low degrees will be given. We will investigate the similarities between DPH curves and helical curves that have polynomial parametrization and describe various procedures by which we can construct different types of DPH curves. The conditions for the existence of non-helical DPH curves and some examples will be given. Finally, there will be a chapter on the Hermite interpolation by helical DPH curves of degree 5.

**Math. Subj. Class. (2020):** 65D17

**Ključne besede:** parametrična krivulja, Frenetovo ogrodje, ukrivljenost, Bézierjeva krivulja, kvaternioni, Hopfova preslikava, PH krivulja, DPH krivulja, Hermiteova interpolacija

**Keywords:** parametric curve, Frenet frame, curvature, Bézier curve, quaternions, Hopf map, PH curve, DPH curve, Hermite interpolation



# 1 Uvod

Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (angl. Computer aided geometric design ali krajše CAGD) je matematično področje, ki preučuje različne računalniške in matematične metode za opis geometrijskih oblik. Osnovno orodje predstavljajo parametrično podane krivulje in ploskve, ki se jih uporablja v računalniški grafiki in animaciji, vizualizaciji podatkov, numerični aproksimaciji in podobno. To področje se je začelo razvijati v 50. letih 20. stoletja, ko se je z razvojem računalnikov pojavila potreba po čim bolj enostavnem in natančnem računanju omenjenih geometrijskih oblik za uporabo v načrtovanju in proizvodnji. Poseben razred krivulj, ki imajo pomembno vlogo v CAGD, so krivulje s pitagorejskim hodografom. Ta razred krivulj sta leta 1990 definirala matematika Farouki in Sakkalis [9]. Zaradi svojih lastnosti imajo široko uporabo pri numeričnem krmiljenju v CNC strojih, pri načrtovanju poti, pri izdelavi animacij in na podobnih področjih.

Prostorske krivulje s pitagorejskim hodografom imajo racionalno parametrizirano enotsko tangento in **ter** torzijsko ukrivljenost, vendar v splošnem nimajo racionalno parametriziranih izrazov za fleksijsko ukrivljenost, za enotsko normalo in enotsko binormalo. Zato se je uvedel pojem DPH krivulj. Te krivulje imajo racionalno parametrizirano Frenetovo ogrodje ter obe ukrivljenosti, tako torzijsko kot tudi fleksijsko. Izkaže se, da so te krivulje globoko povezane z vijačnimi polinomskimi krivuljami.

V magistrskem delu bomo obravnavali naslednja poglavja:

- V drugem poglavju bomo spoznali osnovne pojme, ki jih bomo potrebovali v naslednjih razdelkih. To so parametrično podane prostorske krivulje, ukrivljenost in Frenetovo ogrodje. Seznanili se bomo s Bézierjevimi krivuljami, Bernsteinovimi polinomi ter z vektorskim prostorom kvaternionov.
- V tretjem poglavju bo sledila obravna krivulj s pitagorejskim hodografom. Ogledali si bomo definicijo in nekaj lastnosti, spoznali pa bomo tudi, kako jih izražamo s pomočjo kvaternionov in s Hopfovo preslikavo.
- V četrtem poglavju bomo uvedli pojem DPH krivulj. Ogledali si bomo, kako so povezane s polinomskimi vijačnimi **krivuljami** ter spoznali, kako jih lažje obravnavati s pomočjo kvaternionov ali Hopfove preslikave.
- V petem poglavju bo sledila klasifikacija DPH krivulj nizkih stopenj. Ugotovili bomo, **kakšni** so algebraični pogoji za obstoj teh krivulj do vključno stopnje 7.
- V šestem poglavju bomo podrobneje spoznali, kako konstruirati polinomske vijačne krivulje s pomočjo Hopfove preslikave. Ogledali si bomo različne postopke konstrukcij, ki nam bodo dali različne tipe polinomskih vijačnih krivulj.
- V sedmem poglavju bo sledila obravna pogojev za obstoj in konstrukcijo nevijačnih DPH krivulj stopnje 7.
- V osmem poglavju bomo uporabili predstavljene teoretične izsledke na izračunanih primerih ter videli kvalitativne razlike v postopkih konstrukcij različnih tipov DPH krivulj in polinomskih vijačnih krivulj.

- Za konec bomo v devetem poglavju obravnavali še problem interpolacije dveh točk in pripadajočih tangent z DPH krivuljami stopnje 5.

## 2 Osnovni pojmi in uvodne definicije

### 2.1 Prostorske krivulje

#### 2.1.1 Osnovne lastnosti

Krivulje v prostoru si lahko predstavljamo kot tirnice, po katerih potuje točka v gibanju. Najlažje jih podamo v parametrični obliki

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad I \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I,$$

kjer so  $x, y$  in  $z$  običajne skalarne funkcije parametra  $t$ . Več različnih parametrizacij lahko opisuje isto krivuljo. V nadaljevanju bomo predpostavili, da so  $x, y$  in  $z$  vsaj dvakrat zvezno odvedljive funkcije. Odvod krivulje  $\mathbf{r}$  dobimo tako, da krivuljo odvajamo po komponentah:

$$\mathbf{r}' : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \quad t \in I.$$

Vektorsko polje, ki ga pri tem dobimo, imenujemo tudi *hodograf* krivulje  $\mathbf{r}$ . Več o parametrično podanih krivuljah si lahko bralec prebere v [14].

#### 2.1.2 Ločna dolžina in tangenta na krivuljo

Pravimo, da je krivulja  $\mathbf{r}$  regularna, če je zvezno odvedljiva in je njen odvod  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  za vse vrednosti  $t \in I$ . Od **sedaj** bomo privzeli, da je krivulja regularna. Odvod regularne krivulje pa lahko zapišemo tudi v malce drugačni obliki

$$\mathbf{r}'(t) = \sigma(t)\mathbf{t}(t), \tag{2.1}$$

**kjer** je  $\sigma$  funkcija, ki slika z začetne domene  $I$  v  $\mathbb{R}$ ,

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}, \tag{2.2}$$

in predstavlja ločno dolžino krivulje v odvisnosti od parametra  $t$ , s  $\mathbf{t}$  pa je označeno enotsko tangentsko vektorsko polje na krivuljo  $\mathbf{r}$ , izračunano pri parametru  $t$ ,

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\sigma(t)}. \tag{2.3}$$

S pomočjo funkcije  $\sigma$  lahko izrazimo tudi dolžino loka krivulje. Če je  $I = [a, b]$ , potem je ločna dolžina enaka

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sigma(t) dt. \tag{2.4}$$

Na intervalu  $I = [a, b]$  lahko dolžino loka od točke  $a$  do  $t$  izrazimo tudi kot funkcijo parametra  $t$ :

$$s = s(t) = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi. \tag{2.5}$$

Če je krivulja  $\mathbf{r}$  regularna, je po osnovnem izreku analize funkcija (2.5) zvezno odvedljiva in povsod različna od nič:

$$\frac{ds}{dt} = \sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

Torej lahko vzamemo  $s = s(t)$  kot nov parameter na  $I$ . Taki parametrizaciji pravimo *naravna parametrizacija* krivulje  $\mathbf{r}$ . Označimo  $\boldsymbol{\rho}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ . **Izračunajmo** odvod krivulje po parametru  $s$ :

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} = \mathbf{r}'(t(s)) \frac{dt(s)}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t(s))}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\mathbf{r}'(t(s))}{\|\mathbf{r}'(t(s))\|}.$$

Dobili smo enotski tangenti vektor (2.3), kar pomeni, da je dolžina  $\|\boldsymbol{\rho}'(s)\|$  vedno enaka 1. Drugače povedano: parametrična hitrost pri naravni parametrizaciji je identično enaka 1. Več o naravni parametrizaciji si lahko bralec prebere v [12, str. 51].

### 2.1.3 Ukrivljenost in Frenetovo ogrodje

Sedaj bomo uvedli dve novi enotski vektorski polji, ki bosta skupaj z enotsko tangento v vsaki točki na krivulji tvorili ortonormirano bazo za prostor  $\mathbb{R}^3$ . V nadaljevanju bomo ponekod v enačbah in izpeljavah zaradi preglednosti izpustili parameter  $t$ .

Ker je  $\mathbf{t}$  enotsko tangento polje, vedno velja  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \|\mathbf{t}\|^2 = 1$ . Če to enačbo odvajamo, dobimo, da je  $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$ , kar pomeni, da je  $\mathbf{t}'$  pravokoten na  $\mathbf{t}$  pri vsakem parametru  $t$ . Torej lahko (implicitno) definiramo enotsko vektorsko polje  $\mathbf{p}$  na naslednji način: odvod enotske tangente je enak

$$\mathbf{t}'(t) = \sigma(t)\kappa(t)\mathbf{p}(t), \quad (2.6)$$

kjer je  $t \mapsto \kappa(t)$  nenegativna funkcija parametra  $t$ . Tako ima vektorsko polje  $\mathbf{p}$  isto smer kot  $\mathbf{t}'$ . Prav tako je  $\mathbf{p}$  pravokoten na enotsko tangento  $\mathbf{t}$ . Da bi lahko  $\mathbf{p}$  eksplisitno izrazili, si s pomočjo enačbe (2.1) oglejmo drugi odvod krivulje  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{r}''(t) = \sigma'(t)\mathbf{t}(t) + \sigma(t)\mathbf{t}'(t). \quad (2.7)$$

Iz (2.1) in zgornje enačbe sledi naslednja **enakost**

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \sigma^3(t)\kappa(t)\mathbf{t}(t) \times \mathbf{p}(t). \quad (2.8)$$

Ker je  $\mathbf{p}$  **definirano** kot enotsko vektorsko polje, ki je **ortogonalno** na  $\mathbf{t}$ , je potem

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\sigma^3(t)} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}. \quad (2.9)$$

To lahko naredimo, saj smo predpostavili, da je  $\kappa(t)$  nenegativna funkcija. Sedaj si oglejmo, čemu je enaka naslednja količina:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \mathbf{t} &= \frac{1}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \left( \sigma^3 \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} \mathbf{t} \times \mathbf{p} \right) \times \mathbf{t} \\ &= (\mathbf{t} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{t} \\ &= -(\mathbf{t} \cdot \mathbf{p})\mathbf{t} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})\mathbf{p} \\ &= \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.10)$$



Količini  $\mathbf{p}$  pravimo *normala* ali *glavna normala* na krivuljo  $\mathbf{r}$ , količini  $\kappa$  pa *fleksijska ukrivljenost* krivulje  $\mathbf{r}$ . Enostavno se da preveriti, da je fleksijska ukrivljenost neodvisna od izbire parametrizacije krivulje. Definirali smo že enotsko tangento in enotsko normalo. Najti moramo še eno enotsko vektorsko polje, ki je ortogonalno na obe prejšnji. To lahko naredimo direktno z vektorskim produktom

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}. \quad (2.11)$$

Tej količini pravimo *binormala* krivulje  $\mathbf{r}$ . Vektorska polja  $\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{b}$  na vsaki točki krivulje  $\mathbf{r}$  tvorijo ortonormirano bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ . To trojico imenujemo tudi *Frenetovo ogrodje*. Če je binormala nek konstanten vektor za vsak parameter  $t$  (z dolžino 1), sledi, da vektorski polji  $\mathbf{t}$  in  $\mathbf{p}$  ležita v isti ravnini, kar pomeni, da celotna krivulja  $\mathbf{r}$  leži v tej isti ravnini.

Recimo, da velja  $\mathbf{b}' \neq \mathbf{0}$ . To pomeni, da imamo opravka s pravo prostorsko krivuljo. Če odvajamo enačbo (2.11) in uporabimo (2.6), dobimo, da je odvod binormale enak  $\mathbf{b}' = \mathbf{t} \times \mathbf{p}'$ . Ker ima za vsak parameter  $t$  vektor  $\mathbf{p}$  dolžino 1, sta potem vektorski polji  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{p}'$  ortogonalni (to lahko takoj preverimo z odvajanjem skalarnega produkta vektorskega polja  $\mathbf{p}$  s samim seboj). Torej se da izraziti  $\mathbf{p}'$  z  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{t}$ , kar pa pomeni, da se da  $\mathbf{b}'$  izraziti z  $\mathbf{t} \times \mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b}'(t) = \sigma(t)\tau(t)\mathbf{t}(t) \times \mathbf{b}(t) = -\sigma(t)\tau(t)\mathbf{p}(t). \quad (2.12)$$

Funkciji  $t \mapsto \tau(t)$  pravimo *torzijska ukrivljenost* krivulje  $\mathbf{r}$ . Da se dokopljemo do njenega eksplcitnega zapisa, najprej preuredimo in odvajamo enačbo (2.8):

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')' &= (\sigma^3 \kappa \mathbf{b})' \\ \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''' &= 3\sigma^2 \sigma' \kappa \mathbf{b} + \sigma^3 \kappa' \mathbf{b} + \sigma^3 \kappa \mathbf{b}' \\ &= -\sigma^4 \kappa \tau \mathbf{p} + \sigma^2 (3\sigma' \kappa + \sigma \kappa') \mathbf{b}. \end{aligned}$$

V zadnjem koraku smo upoštevali vrednost količine  $\mathbf{b}'$ . Če vrednost  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''$  skalarno pomnožimo z  $\mathbf{r}''$ , dobimo

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''') \cdot \mathbf{r}'' = -\sigma^6 \kappa^2 \tau. \quad (2.13)$$

Pri tem smo upoštevali (2.7), (2.6) in ortonormiranost Frenetovega ogrodja. Če zamenjamo vrstni red v mešanem produktu v zgornji enačbi in upoštevamo (2.9), vidimo, da je torzijska ukrivljenost enaka

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}. \quad (2.14)$$

Vidimo torej, da je torzijska ukrivljenost krivulje neničelna natanko takrat, ko so  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$  in  $\mathbf{r}'''$  linearno neodvisni, kar je ravno takrat, ko je krivulja res prostorska.

Poskusimo sedaj izraziti še odvod glavne normale. Najprej iz formul (2.10) in (2.11) opazimo, da velja  $\mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ . Sedaj odvajamo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= (\mathbf{b} \times \mathbf{t})' \\ &= \mathbf{b}' \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \mathbf{t}' \\ &= (-\sigma\tau\mathbf{p}) \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times (\sigma\kappa\mathbf{p}) \\ &= -\sigma\kappa\mathbf{t} + \sigma\tau\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pri računanju smo uporabili formuli (2.6) in (2.12) za odvod enotske tangente in odvod binormale. Vse te tri formule lahko kompaktneje zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{p}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Če je krivulja  $\mathbf{r}$  podana v naravni parametrizaciji, vemo, da je njena parametrična hitrost identično enaka 1:  $\sigma \equiv 1$ . Zato se v naravni parametrizaciji te formule izražajo takole:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{p}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Tem formulam pravimo tudi *Frenetove formule*.

## 2.2 Bézierjeve krivulje in Bernsteinovi polinomi

Krivulje podane s polinomsko ali racionalno parametrizacijo se v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju na široko uporabljajo, saj nam omogočajo učinkovitejše računanje. Take krivulje bomo krajše imenovali polinomske ali racionalne krivulje. Eden izmed najpomembnejših tipov teh krivulj so Bézierjeve krivulje. Spomnili se bomo, kako pridemo do njih preko Bernsteinovih polinomov ter si ogledali nekaj lastnosti [3, str. 75].

*Splošna Bézierjeva krivulja stopnje  $n$  v  $\mathbb{R}^d$  je podana s parametrizacijo*

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad (2.17)$$

kjer so

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \quad (2.18)$$

*Bernsteinovi bazni polinomi stopnje  $n$  z binomskimi koeficienti*

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \quad \text{za } 0 \leq i \leq n \quad \text{in} \quad \binom{n}{i} = 0 \quad \text{za } i > n, \quad i < 0.$$

Točke  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$  imenujemo *kontrolne točke*. Če jih povežemo z daljicami, dobimo *kontrolni poligon* Bézierjeve krivulje. V tem magistrskem delu se bomo ukvarjali s krivuljami v  $\mathbb{R}^3$ .

Naštejmo sedaj nekaj najpomembnejših lastnosti Bézierjevih krivulj:

- Vsaka Bézierjeva krivulja interpolira začetno in končno kontrolno točko:  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{b}_n$ .
- *Simetričnost*: Kontrolni poligon  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  in kontrolni poligon  $\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0$ , kjer si točke sledijo v obratnem vrstnem redu, opisujeta isto krivuljo.
- *Afina invarianca*: Če z afino preslikavo  $\Phi$  preslikamo kontrolni poligon in tako pridobimo novo krivuljo (definirano na preslikanem kontrolnem poligonu), je to natanko ista krivulja, kot če bi začetno krivuljo preslikali s preslikavo  $\Phi$ :

$$\sum_{i=0}^n \Phi(\mathbf{b}_i) B_i^n(t) = \Phi \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) \right).$$

- *Konveksna ovojnica*: Za vsak  $t \in [0, 1]$  leži točka  $\mathbf{r}(t)$  v konveksni ovojnici kontrolnega poligona.
- *Reparametrizacija*: Še posebej pri interpolaciji krivulj pride prav, če imamo podan t. i. *globalni parameter*  $u \in [a, b]$ . Potem lahko izrazimo *lokalni parameter*  $t \in [0, 1]$  s transformacijo  $t = (u - a)/(b - a)$  in tako krivuljo (2.17) reparametriziramo na interval  $[a, b]$ .

Točke na Bézierjevih krivuljah ponavadi računamo z *de Casteljaujevim algoritmom*, o katerem si lahko zainteresirani bralec več prebere v [3, str. 80]. Zanimal nas bo tudi odvod ali hodograf Bézierjeve krivulje. Določimo ga na naslednji način:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t), \quad (2.19)$$

kjer je  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$  za  $i = 0, \dots, n-1$ . Tej količini rečemo *prema diferenca*. Tako je hodograf  $\mathbf{r}'$  pravzaprav Bézierjeva krivulja stopnje  $n-1$ . V krajiščnih točkah krivulje velja  $\mathbf{r}'(0) = n\Delta \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{r}'(1) = n\Delta \mathbf{b}_{n-1}$ , kar pomeni, da sta tangentna vektorja v krajiščnih točkah na krivulji  $\mathbf{r}$  vzporedna s prvo oziroma zadnjo stranico kontrolnega poligona.

Oglejmo si še nekaj lastnosti Bernsteinovih baznih polinomov:

- *Particija enote*: Za vsak  $t$  je vsota Bernsteinovih baznih polinomov enaka ena:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = (1 + (1 - t))^n = 1.$$

- Vsak Bernsteinov bazni polinom je nenegativen na intervalu  $[0, 1]$ . Z uporabo te in prejšnje lastnosti vidimo, da pri Bézierjevih krivuljah res velja lastnost konveksne ovojnice.
- *Simetričnost*: Iz (2.18) je razvidno, da velja  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1 - t)$ . Posledično so tudi Bézierjeve krivulje simetrične.

- *Rekurzija*: Polinome stopnje  $n$  lahko izrazimo s pomočjo polinomov stopnje  $n - 1$  na naslednji način:

$$B_i^n(t) = (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

S pomočjo te lastnosti se izpelje tudi de Casteljaujev algoritem.

- Preprosto lahko preverimo, da velja:

$$B_i^n(0) = \delta_{i,0} \quad \text{in} \quad B_i^n(1) = \delta_{i,n} \quad \text{kjer je} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{če } i = j \\ 0, & \text{če } i \neq j. \end{cases}$$

Zato Bézierjeva krivulja interpolira začetno in končno kontrolno točko.

- *Lokalni maksimum*: Polinom  $B_i^n(t)$  ima v točki  $t = i/n$  lokalni maksimum.

## 2.3 Kvaternioni

*Kvaternioni* so števila oblike  $\mathcal{A} = a + a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ , kjer so  $a, a_x, a_y, a_z$  realna števila. Množica  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  je baza vektorskega prostora kvaternionov, ki ga označimo s  $\mathbb{H}$ . Za simbole  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  veljajo zveze

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \quad (2.20)$$

Tukaj je z 1 mišljena običajna realna enota za množenje. Iz (2.20) sledijo naslednje zveze

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \quad (2.21)$$

Vsota dveh kvaternionov  $\mathcal{A} = a + a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$  in  $\mathcal{B} = b + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$  je enaka

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a + b) + (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}. \quad (2.22)$$

Produkt dveh kvaternionov je zaradi enačb (2.20) in (2.21) enak

$$\begin{aligned} \mathcal{AB} = & (ab - a_xb_x - a_yb_y - a_zb_z) \\ & + (ab_x + ba_x + a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} \\ & + (ab_y + ba_y + a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} \\ & + (ab_z + ba_z + a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ker so produkti baznih elementov med seboj nekomutativni, v splošnem velja  $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$  za  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{H}$ . Množenje kvaternionov je asociativno, zato velja  $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$  za  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{H}$ .

Če si bazne elemente  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  predstavljamo kot standardno bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ , lahko rečemo, da ima kvaternion  $\mathcal{A}$  *skalarni del*  $a$  in *vektorski del*  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ . Krajše lahko zato kvaternion  $\mathcal{A}$  zapišemo kot  $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$ . Vsako realno število  $a$  lahko razumemo kot “skalarni kvaternion”  $(a, \mathbf{0})$ , vsak trirazsežni vektor  $\mathbf{a}$  pa kot “vektorski kvaternion”  $(0, \mathbf{a})$ . Take kvaternione lahko preprosteje označimo kar z  $a$  oziroma  $\mathbf{a}$ .

Če pišemo  $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$  in  $\mathcal{B} = (b, \mathbf{b})$ , lahko vsoto (2.22) krajše zapišemo kot

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a + b, \mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad (2.24)$$

kjer uporabimo običajno pravilo za seštevanje vektorjev. Podobno iz (2.23) vidimo, da je produkt enak

$$\mathcal{AB} = (ab - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, a\mathbf{b} + b\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (2.25)$$

kjer uporabimo običajna pravila za seštevanje vektorjev in za skalarni ter vektorski produkt.

Vsakemu kvaternionu  $\mathcal{A} = (a, \mathbf{a})$  lahko določimo *konjugirano vrednost*  $\mathcal{A}^* = (a, -\mathbf{a})$  ter normo  $\|\mathcal{A}\|$ , ki jo podamo z

$$\|\mathcal{A}\| = \sqrt{\mathcal{A}^* \mathcal{A}} = \sqrt{\mathcal{A} \mathcal{A}^*} = \sqrt{a^2 + \|\mathbf{a}\|^2}. \quad (2.26)$$

Iz pravila za produkt (2.25) ni težko videti, da velja  $(\mathcal{AB})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$ . Če sta  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vektorska kvaterniona (torej lahko nanju gledamo kot na vektorja v  $\mathbb{R}^3$ ), lahko izpeljemo formulo za izračun vektorskega produkta s pomočjo kvaternionov:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{ab} - \frac{1}{2}\mathbf{b}^* \mathbf{a}^* &= \frac{1}{2}(-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \frac{1}{2}(-(-\mathbf{b}) \cdot (-\mathbf{a}), (-\mathbf{b}) \times (-\mathbf{a})) \\ &= \frac{1}{2}(-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \frac{1}{2}(-\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ &= (0, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Če je  $\|\mathcal{U}\| = 1$ , pravimo, da je  $\mathcal{U}$  *enotski kvaternion*. Vsak enotski kvaternion lahko zapišemo v obliki  $\mathcal{U} = (\cos \frac{1}{2}\theta, \sin \frac{1}{2}\theta \mathbf{n})$ , kjer je  $\theta \in [0, 2\pi)$  in  $\mathbf{n}$  nek enotski vektor v  $\mathbb{R}^3$ . Produkt dveh enotskih kvaternionov je vedno enotski kvaternion. Za vsak vektorski kvaternion  $\mathbf{v}$  in enotski kvaternion  $\mathcal{U}$  je produkt  $\mathcal{U}\mathbf{v}\mathcal{U}^*$  vedno enak vektorskemu kvaternionu (torej kvaternionu, ki ima skalarni del enak 0). Produkt lahko interpretiramo kot rotacijo vektorja  $\mathbf{v}$  za kot  $\theta$  okoli osi  $\mathbf{n}$ . Lahko je videti, da dosežemo isto z uporabo kvaterniona  $-\mathcal{U} = (-\cos \frac{1}{2}\theta, -\sin \frac{1}{2}\theta \mathbf{n})$ , ki poda zasuk za kot  $2\pi - \theta$  okoli osi, ki jo predstavlja vektor  $-\mathbf{n}$  [10, str. 387].

V nadaljevanju nam bo prišla prav rešitev enačbe

$$\mathcal{Q}\mathbf{i}\mathcal{Q}^* = \mathbf{c}, \quad (2.28)$$

kjer je  $\mathbf{c}$  vektorski kvaternion. Zato se ji podrobneje posvetimo v naslednji lemi [6, poglavje 3.2].

**Lema 2.1.** *Naj bo  $\mathbf{c}$  vektorski kvaternion in naj bo  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j} + \nu \mathbf{k}$ . Za  $\mathbf{c} \neq -\mathbf{i}$  se rešitev enačbe (2.28) izraža v obliki*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda)\|\mathbf{c}\|} \left( -\sin \phi + \cos \phi \mathbf{i} + \frac{\mu \cos \phi + \nu \sin \phi}{1 + \lambda} \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu \cos \phi - \mu \sin \phi}{1 + \lambda} \mathbf{k} \right), \end{aligned} \quad (2.29)$$

ali v ekvivalentni obliki

$$\mathcal{Q}(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\lambda)\|\mathbf{c}\|} \left( \mathbf{i} + \frac{\mu}{1+\lambda}\mathbf{j} + \frac{\nu}{1+\lambda}\mathbf{k} \right) (\cos \phi + \sin \phi \mathbf{i}), \quad (2.30)$$

kjer je  $\phi$  prost parameter. Če je  $\mathbf{c} = -\mathbf{i}$ , je rešitev enaka

$$\mathcal{Q}(\phi) = \cos \phi \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k}. \quad (2.31)$$

*Dokaz.* Naj bo  $\mathbf{c} \neq -\mathbf{i}$ . Pišimo  $\mathcal{Q} = q_0 + q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$ . Ob upoštevanju pravil za množenje vidimo, da je enačba (2.28) ekvivalentna sistemu treh enačb

$$q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 = \lambda \|\mathbf{c}\|, \quad 2(q_0 q_z + q_x q_y) = \mu \|\mathbf{c}\|, \quad 2(q_x q_z - q_0 q_y) = \nu \|\mathbf{c}\|, \quad (2.32)$$

za neznanke  $q_0, q_x, q_y, q_z$ . Ker imamo tri enačbe in štiri neznanke, bo splošna rešitev enačbe (2.28) izražena z enim prostim parametrom.

Če postavimo  $q_0 = 0$ , lahko s pomočjo (2.32) preverimo, da je

$$\mathcal{Q} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1+\lambda)\|\mathbf{c}\|} \left( \mathbf{i} + \frac{\mu}{1+\lambda}\mathbf{j} + \frac{\nu}{1+\lambda}\mathbf{k} \right) \quad (2.33)$$

partikularna rešitev enačbe (2.28). Naj bo sedaj  $\mathcal{A}$  kvaternion, ki reši enačbo

$$\mathcal{A} \mathbf{i} \mathcal{A}^* = \mathbf{i}. \quad (2.34)$$

Potem je tudi  $\mathcal{Q} \mathcal{A}$  rešitev za (2.28), saj velja

$$(\mathcal{Q} \mathcal{A}) \mathbf{i} (\mathcal{Q} \mathcal{A})^* = \mathcal{Q} (\mathcal{A} \mathbf{i} \mathcal{A}^*) \mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \mathbf{i} \mathcal{Q}^*.$$

Kvaternion, ki reši enačbo (2.34), je oblike

$$\mathcal{A} = \cos \phi + \sin \phi \mathbf{i}, \quad (2.35)$$

kar sledi iz naslednjega sistema enačb, ki je ekvivalenten enačbi (2.34), če vzamemo  $\mathcal{A} = a_0 + a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ :

$$a_0^2 + a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = 1, \quad 2(a_0 a_z + a_x a_y) = 0, \quad 2(a_x a_z - a_0 a_y) = 0.$$

Pri tem je  $\phi$  prost parameter. Splošna rešitev enačbe (2.28), podana v (2.29), sedaj sledi iz (2.33) in (2.35). Predznaka  $\pm$  ni potrebno pisati, saj velja  $\sin(\phi + \pi) = -\sin \phi$  in  $\cos(\phi + \pi) = -\cos \phi$ . Zato nam že premik parametra  $\phi$  za  $\pi$  spremeni predznak rešitve.

Če je  $\mathbf{c} = -\mathbf{i}$ , rešujemo enačbo

$$\mathcal{Q} \mathbf{i} \mathcal{Q}^* = -\mathbf{i}. \quad (2.36)$$

Kvaternion, ki reši to enačbo, je oblike

$$\mathcal{Q}(\phi) = \cos \phi \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k}. \quad (2.37)$$

To lahko preverimo podobno kot pri reševanju enačbe (2.34).  $\square$

### 3 Krivulje s pitagorejskim hodografom

Pomemben podrazred Bézierjevih krivulj so krivulje s pitagorejskim hodografom, saj je pri le-teh izračun dolžine loka krivulje zelo preprost. Poleg tega ponujajo še marsikatero druge privlačne lastnosti, zato jih je vredno analizirati. Uporablja pa se jih tudi v realnem svetu, npr. pri CNC strojih. V tem poglavju si bomo ogledali definicijo in nekaj osnovnih lastnosti.

#### 3.1 Definicije

**Definicija 3.1.** Prostorska polinomska krivulja  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , kjer je  $I$  interval v  $\mathbb{R}$ , ima *pitagorejski hodograf*, če obstaja tak realen polinom  $\sigma$ , da velja

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \sigma^2(t), \quad t \in I. \quad (3.1)$$

Temu pogoju pravimo tudi *pitagorejski pogoj*, krivulji pa krajše rečemo *PH krivulja*.

Če imamo ravninsko krivuljo  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , je ta krivulja *ravninska krivulja s pitagorejskim hodografom*, če velja

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t) \quad (3.2)$$

za nek realen polinom  $\sigma$ . Naslednji izrek nam bo pokazal, kako izpolniti pitagorejski pogoj za prostorske krivulje.

**Izrek 3.2.** Naj za tuje realne polinome  $a(t), b(t), c(t)$  in  $d(t)$  velja pitagorejski pogoj

$$a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t). \quad (3.3)$$

Potem obstajajo taki realni polinomi  $u(t), v(t), p(t)$  in  $q(t)$ , da se  $a(t), b(t), c(t)$  in  $d(t)$  izražajo na naslednji način:

$$\begin{aligned} a(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\ b(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t)), \\ c(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t)), \\ d(t) &= u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

*Dokaz.* Enačbo (3.3) preuredimo in nato razstavimo:

$$\begin{aligned} b^2(t) + c^2(t) &= d^2(t) - a^2(t), \\ [b(t) + ic(t)][b(t) - ic(t)] &= [d(t) - a(t)][d(t) + a(t)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Če sta si realna polinoma  $b(t)$  in  $c(t)$  tuja, potem kompleksna polinoma  $b(t) + ic(t)$  in  $b(t) - ic(t)$  nimata skupnih ničel. To sledi iz lastnosti računanja največjega skupnega delitelja polinomov. Velja tudi, da nimata realnih ničel in iz zapisa je očitno, da je ničla enega polinoma enaka konjugirani vrednosti drugega polinoma. Ker sta  $d(t) - a(t)$  in  $d(t) + a(t)$  realna polinoma, se ju lahko razcepi na kompleksno konjugirane pare linearnih polinomov na tak način, da en polinom iz vsakega para

deli polinom  $b(t) + ic(t)$ , drug polinom iz para pa deli polinom  $b(t) - ic(t)$ . Povedano drugače, polinoma  $b(t) \pm ic(t)$  imata obliko

$$b(t) + ic(t) = f(t)\bar{g}(t), \quad b(t) - ic(t) = \bar{f}(t)g(t), \quad (3.6)$$

kjer sta  $f(t)$  in  $g(t)$  taka dva kompleksna polinoma, da velja

$$d(t) - a(t) = f(t)\bar{f}(t), \quad d(t) + a(t) = g(t)\bar{g}(t). \quad (3.7)$$

Kompleksna polinoma  $f(t)$  in  $g(t)$  lahko zapišemo tudi kot  $f(t) = \sqrt{2}(p(t) + iq(t))$  in  $g(t) = \sqrt{2}(v(t) + iu(t))$ , kjer so  $p(t), q(t), v(t)$  in  $u(t)$  realni polinomi. Če vnesemo te izraze v enačbe (3.6) in (3.7), lahko iz njih dobimo izraze za polinome  $a(t), b(t), c(t)$  in  $d(t)$ , kot so zapisani v (3.4).

Če je  $w(t) = \gcd(b(t), c(t))$  nekonstanten polinom, lahko iz enačbe (3.5) vidimo, da  $w^2(t)$  deli natanko enega izmed polinomov  $d(t) - a(t)$  in  $d(t) + a(t)$ , saj bi v **nasprotnem** primeru to pomenilo, da obstaja skupna ničla polinomov  $b(t), c(t), d(t) - a(t)$  in  $d(t) + a(t)$ , kar pa je v nasprotju s predpostavko, da so polinomi  $a(t), b(t), c(t)$  in  $d(t)$  tuji. Če delimo izraza  $b(t) + ic(t)$  in  $b(t) - ic(t)$  z  $w(t)$  ter enega izmed izrazov  $d(t) - a(t), d(t) + a(t)$  z  $w^2(t)$  (delimo tistega, ki je deljiv s tem polinomom), pridemo do primera, ki smo ga že analizirali. Dokaz je tako končan.  $\square$

**Opomba 3.3.** V izreku 3.2 lahko enačbe (3.4) glede na permutacije polinomov  $a, b, c$  in  $u, v, p, q$  zapišemo na več različnih načinov.

Enostavno je preveriti, da velja trditev izreka 3.2 tudi v drugo smer. Vidimo torej, da je  $\mathbf{r}$  prostorska **PH** krivulja natanko takrat, ko je njen hodograf oblike

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))w(t), \\ y'(t) &= 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))w(t), \\ z'(t) &= 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))w(t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

za realne polinome  $u, v, p, q$  in  $w$ . Parametrična hitrost se poenostavi v

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = (u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t))w(t). \quad (3.9)$$

Pri tem polinom  $w$  predstavlja skupni faktor komponent hodografa. Parametrizacijo prostorske PH krivulje  $\mathbf{r}$  dobimo z integracijo hodografa  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ .

**Opomba 3.4.** Za obravnavo ravninskih **PH krivulj** se pogoj izreka 3.2 poenostavi na  $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$ , ki velja natanko takrat, ko se da te polinome izraziti s polinomi  $u, v$  in  $w$  kot

$$\begin{aligned} a(t) &= (u^2(t) - v^2(t))w(t), \\ b(t) &= 2u(t)v(t)w(t), \\ c(t) &= (u^2(t) + v^2(t))w(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

kjer sta si  $u$  in  $v$  tuja polinoma. Pri tem polinom  $w$  **prestavlja** skupni faktor polinomov  $a, b$  in  $c$ . Dokaz je dostopen v [5, str. 382]. Tako je potem ravninska PH **krivulja**  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  definirana s pomočjo polinomov  $u, v$  in  $w$  preko odvodov

$$x'(t) = (u^2(t) - v^2(t))w(t) \quad \text{in} \quad y'(t) = 2u(t)v(t)w(t), \quad (3.11)$$

parametrizacijo krivulje pa dobimo z integracijo hodografa  $(x'(t), y'(t))$ .



Pri krivulji, ki je podana z enačbami (3.8), sicer nimamo zagotovila, da je ta krivulja res regularna, saj imajo lahko komponente hodografa skupne polinomske faktorje.

**Definicija 3.5.** Za krivuljo s pitagorejskim hodografom  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  pravimo, da ima *primitiven* pitagorejski hodograf, če je največji skupni delitelj komponent hodografa konstanten:  $\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = \text{konstanta}$ .

V praksi se raje uporablja primitivne hodografe, saj skupna ničla komponent hodografa implicira točko, kjer tangentni vektor ni določen. Izbira tujih si polinomov  $u, v, p$  in  $q$  ter  $w \equiv 1$  še ne zagotavlja, da je potem hodograf res primitiven.

**Izrek 3.6.** Naj bodo realni polinomi  $p, q, v$  in  $u$  paroma si tuji in komponente hodografa take kot v (3.8), pri čemer vzamemo  $w \equiv 1$ . Potem velja

$$\gcd(x', y', z') = |\gcd(u + iv, p - iq)|^2. \quad (3.12)$$

*Dokaz.* Dokaz najdemo v [10, str. 371].  $\square$

Vidimo torej, da je v primeru paroma si tujih polinomov  $u, v, p, q$  in  $w \equiv 1$  največji skupni delitelj komponent hodografa realen polinom sode stopnje, ki nima realnih ničel. To pa pomeni, da je za realno krivuljo, ki je porojena s takimi polinomi, tangentni vektor določen povsod in je zato regularna. V nadaljevanju bomo privzeli, da je  $w \equiv 1$ .

## 3.2 Lastnosti PH krivulj

Oglejmo si nekaj glavnih lastnosti krivulj s pitagorejskim hodografom. Iz karakterizacije krivulj s polinomi  $u, v, p$  in  $q$  je razvidno naslednje: če so ti polinomi maksimalne stopnje  $m$  in izberemo  $w \equiv 1$ , potem je krivulja (po množenju polinomov in integriranju) stopnje  $2m+1$ . Torej so PH krivulje lihe stopnje. Če je polinom  $w$  lihe stopnje, je krivulja sode stopnje, vendar nas ti primeri zaradi neregularnosti ne bodo zanimali.

Naslednja lastnost se nanaša na dolžino loka PH krivulje.

**Trditev 3.7.** Naj bo  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  regularna krivulja s pitagorejskim hodografom. Potem je ločna dolžina krivulje od parametra  $a$  do parametra  $t$  izražena v obliki

$$s(t) = \int_a^t \sigma(\xi) d\xi \quad (3.13)$$

in je polinomska v odvisnosti od parametra  $t$ .

*Dokaz.* Ločna dolžina krivulje med točkama  $\mathbf{r}(a)$  in  $\mathbf{r}(t)$  je enaka

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t \|\mathbf{r}'(\xi)\| d\xi = \int_a^t \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi)} d\xi \\ &= \int_a^t \sqrt{\sigma^2(\xi)} d\xi = \int_a^t |\sigma(\xi)| d\xi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ker je krivulja  $\mathbf{r}$  regularna, je potem  $\|\mathbf{r}'(\xi)\| \neq 0$  za vsak  $\xi$  iz definicijskega območja parametrizacije. Ker je  $|\sigma(\xi)| = \|\mathbf{r}'(\xi)\|$ , se torej predznak  $\sigma(\xi)$  ohranja za vsak  $\xi$ . Ker se predznak  $\sigma$  ohranja in ker je  $\sigma$  polinom, sledi, da je tudi ločna dolžina krivulje v polinomski odvisnosti od parametra  $t$ .  $\square$

Integral polinoma, ki ga tako dobimo, ni **zaželen** le, ker dobimo z njim natančen rezultat, **ampak** tudi zaradi tega, ker je hitro izračunljiv. Dalje si oglejmo, kako izgleda Frenetovo ogrodje **PH krivulje**. Kot lahko razberemo iz (2.3) in v skladu s karakterizacijo **PH krivulje** s polinomi  $u, v, p$  in  $q$ , podano z (3.8), se lahko enotska tangenta krivulje izrazi na naslednji način:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathbf{r}'}{\sigma} = \frac{(x', y', z')}{\sigma} \\ &= \frac{(u^2 + v^2 - p^2 - q^2, 2(uq + vp), 2(vq - up))}{p^2 + q^2 + v^2 + u^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vidimo, da je enotska tangenta **PH krivulje** racionalna funkcija parametra  $t$ . Ali velja enako tudi za normalo in binormalo? Če se spomnimo formul (2.10) in (2.11), vidimo, da sta tako normala kot binormala odvisni od količine  $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ . Oglejmo si njen kvadrat

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2. \quad (3.16)$$

Če vstavimo v zgornjo enačbo vrednosti iz (3.8) in upoštevamo vrednost  $\sigma$ , z nekaj računanja [4, str. 386] ugotovimo, da je

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = \sigma^2 \rho, \quad (3.17)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \rho &= 4[(up' - u'p)^2 + (uq' - u'q)^2 + (vp' - v'p)^2 \\ &\quad + (vq' - v'q)^2 + 2(uv' - u'v)(pq' - p'q)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Zgornjo količino se da izraziti (glej v [1, str. 118]) tudi drugače:

$$\rho = 4[(up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q + vp' - v'p)^2]. \quad (3.19)$$

Iz vsega povedanega lahko sklepamo, da vsebujeta tako normala kot binormala člen  $\sqrt{\rho(t)}$ , kar pomeni, da v splošnem tako normala kot binormala nista racionalni funkciji parametra  $t$ . V nadaljevanju nam bo prišla prav stopnja polinoma  $\rho$  v odvisnosti od stopnje **PH krivulje**, zato si oglejmo naslednjo trditev.

**Trditev 3.8.** *Naj bo  $\mathbf{r}$  **PH krivulja** stopnje  $n$ . Potem je  $\rho$  polinom stopnje  $2n - 6$ .*

*Dokaz.* V začetku poglavja 3.2 smo omenili, da je stopnja krivulje  $\mathbf{r}$  enaka  $n = 2m + 1$ , če so polinomi  $u, v, p, q$  maksimalne stopnje  $m$ . Pokažimo najprej, da je polinom  $up' - u'p$  stopnje  $2m - 2$ . Polinoma  $u$  in  $p$  zapišemo v standardni bazi

$$u(t) = \sum_{i=0}^m u_i t^i \quad \text{in} \quad p(t) = \sum_{i=0}^m p_i t^i$$

za ustrezne koeficiente  $u_i, p_i \in \mathbb{R}$ . Potem je polinom  $u(t)p'(t) - u'(t)p(t)$  enak

$$\left( \sum_{i=0}^m u_i t^i \right) \left( \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) p_{i+1} t^i \right) - \left( \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) u_{i+1} t^i \right) \left( \sum_{i=0}^m p_i t^i \right).$$

Koeficient pri členu  $t^{2m-1}$  polinoma  $u(t)p'(t) - u'(t)p(t)$  je enak

$$u_m m p_m - m u_m p_m = 0,$$

medtem ko je koeficient pri členu  $t^{2m-2}$  v splošnem neničeln:

$$u_m(m-1)p_{m-1} + u_{m-1}m p_m - (m-1)u_{m-1}p_m - m u_m p_{m-1} = -u_m p_{m-1} + u_{m-1}p_m.$$

Tako smo pokazali, da je polinom  $up' - u'p$  res stopnje  $2m-2$ . Podobno velja za ostale polinome, ki nastopajo v izrazu (3.18), kar implicira, da je

$$\text{st}(\rho) = 2(2m-2) = 4 \frac{n-1}{2} - 4 = 2n-6.$$

Torej je polinom  $\rho$  res stopnje  $2n-6$ . □

**Opomba 3.9.** Če sta polinoma  $u$  in  $p$  različnih stopenj, je potem stopnja polinoma  $up' - u'p$  enaka  $\text{st}(u) + \text{st}(p) - 2$ . To dokažemo povsem analogno, kot v dokazu trditve 3.8.

Izrazimo sedaj še ukrivljenosti **PH krivulj**. Fleksijska ukrivljenost (2.9) se izraža kot

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma^2}. \quad (3.20)$$

Sledi, da v splošnem tudi fleksijska ukrivljenost ni racionalna funkcija parametra  $t$ . Iz izraza za torzijsko ukrivljenost (2.14) pa je razvidno, da je le-ta racionalna funkcija parametra  $t$ , saj se v števcu nahaja skalarni produkt vektorjev  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  in  $\mathbf{r}'''$ , ki pa se ga da zapisati kot polinom, v imenovalcu pa imamo izraz (3.17), ki je tudi polinom.

Krivulje s pitagorejskim hodografom imajo zanimivo povezavo z “vijačnimi” polinomskimi krivuljami. Oglejmo si najprej definicijo vijačnice [11, str. 41].

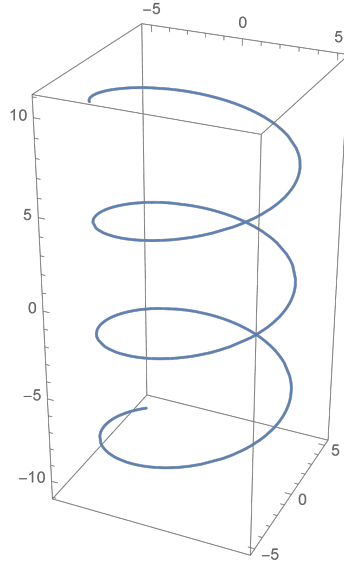
**Definicija 3.10.** Krivulja  $\mathbf{r}$  je vijačnica, če oklepa njena enotska tangenta  $\mathbf{t}$  konstanten kot  $\psi$  (kjer je  $0 < \psi \leq \frac{\pi}{2}$ ) z nekim fiksnim enotskim vektorjem  $\mathbf{a}$ . Vektor  $\mathbf{a}$  predstavlja os vrtenja vijačnice.

Primer vijačnice  $\mathbf{r}(t) = (5 \cos t, \sin t, t)$  vidimo na sliki 1. Os vrtenja predstavlja vektor  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ . Zlahka lahko po formuli (3.21) preverimo, da je kot med osjo  $\mathbf{a}$  in enotsko tangento  $\mathbf{t}$  enak  $\pi/4$  za vsak  $t$ .

Ker sta vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{t}$  enotska, potem velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi. \quad (3.21)$$

Zanimivo dejstvo o vijačnicah, ki nam bo prišlo prav kasneje, je Lancretov izrek [11, str. 41].



Slika 1: Na sliki je prikazan graf vijačnice  $\mathbf{r}(t) = (5 \cos t, \sin t, t)$ .

**Izrek 3.11** (Lancet). *Krivulja z neničelno fleksijsko ukrivljenostjo je vijačnica natančno takrat, ko je za vse njene točke razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo konstantno.*

*Dokaz.* Naj bo krivulja  $\mathbf{r}(s)$  vijačnica izražena v naravni parametrizaciji. Torej drži enačba (3.21) za nek vektor  $\mathbf{a}$  in kot  $\psi$ . Če to enačbo odvajamo po  $s$  in upoštevamo (2.6), dobimo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Zaradi predpostavke in nenegativnosti  $\kappa$  sledi, da je  $\kappa > 0$ . Torej mora veljati

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} = 0. \quad (3.22)$$

To pomeni, da je v vsaki točki na krivulji enotska normala pravokotna na os vrtenja  $\mathbf{a}$ . Vektor  $\mathbf{a}$  se torej ves čas nahaja v ravnini, ki jo razpenjati enotska tangenta  $\mathbf{t}$  ter enotska binormala  $\mathbf{b}$ . Če velja formula (3.21), je potem iz slike 2 razvidno, da mora veljati tudi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sin \psi.$$

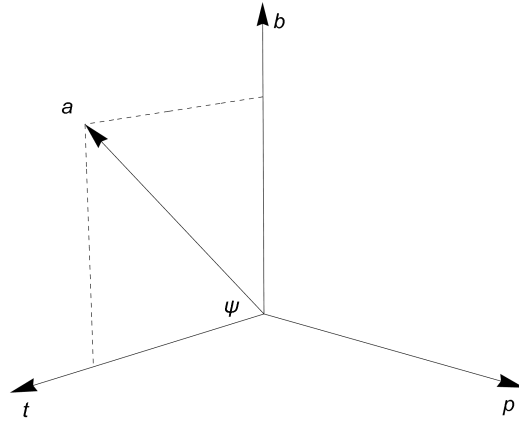
Sedaj odvajajmo enačbo (3.22) in upoštevamo Frenetovo formulo za odvod enotske normale v naravni parametrizaciji (2.16). Dobimo naslednji izraz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{a} \cdot (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) = -\kappa \cos \psi + \tau \sin \psi = 0.$$

Torej je  $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \cot \psi$ , kar je res konstantna vrednost.

Dokažimo izrek še v drugo smer. Predpostavimo, da je za krivuljo  $\mathbf{r}$ , podano v naravni parametrizaciji, razmerje med torzijsko in fleksijsko krivuljo konstanto

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_0,$$



Slika 2: Os vijačnice v primerjavi z enotsko tangento, normalo in binormalo.

kjer je  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Velja torej  $c_0\kappa - \tau = 0$ . Ob upoštevanju (2.16), vidimo, da velja

$$c_0\mathbf{t}' + \mathbf{b}' = (c_0\kappa - \tau)\mathbf{p} = 0.$$

Ko ta izraz integriramo, dobimo  $c_0\mathbf{t} + \mathbf{b} = \mathbf{c}^*$ , kjer je  $\mathbf{c}^*$  neničeln konstanten vektor. Če ta vektor normaliziramo, dobimo

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{c}^*}{\|\mathbf{c}^*\|} = \frac{c_0\mathbf{t} + \mathbf{b}}{\sqrt{1 + c_0^2}}.$$

Sedaj lahko skalarno pomnožimo vektor  $\mathbf{c}$  z enotsko tangento  $\mathbf{t}$ . Dobimo

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{t} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + c_0^2}}.$$

Jasno je, da je ta skalarni produkt po absolutni vrednosti strogo manjši od 1. Torej enotska tangenta  $\mathbf{t}$  oklepa konstanten kot s konstantnim vektorjem  $\mathbf{c}$ . Sledi, da je krivulja  $\mathbf{r}$  vijačnica, kar pa smo želeli dokazati.  $\square$

Naslednja trditev nam bo osvetlila povezavo med vijačnimi polinomskimi krivuljami (vijačnicami, ki so hkrati tudi polinomske krivulje) in PH krivuljami [10, str. 368].

**Trditev 3.12.** *Če je polinomska krivulja vijačnica, ima potem tudi pitagorejski hodograf.*

*Dokaz.* Za prostorsko krivuljo  $\mathbf{r}$  lahko njeno enotsko tangento zapišemo kot  $\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$ . Potem lahko enačbo (3.21) preoblikujemo kot

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'(t) = \cos \psi \|\mathbf{r}'(t)\|. \quad (3.23)$$

Leva stran enačba predstavlja polinom v spremenljivki  $t$ . Na desni strani enačbe se lahko nahaja polinom le, če je  $\mathbf{r}$  PH krivulja, kajti po definiciji so PH krivulje tiste krivulje, ki imajo hitrost  $\|\mathbf{r}'\|$  v polinomske odvisnosti od parametra  $t$ .  $\square$

Če je krivulja polinomska vijačnica, potem je tudi PH krivulja. Ali velja tudi obratno? Odgovor na to vprašanje je **negativen**, kot lahko vidimo iz spodnjega primera [1, str. 121].

**Primer 3.13.** Dana je naslednja krivulja

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{t^7}{21} + \frac{t^5}{5} + t^3 - 3t, -\frac{t^4}{2} + 3t^2, -2t^3 \right).$$

Če izračunamo njeno parametrično hitrost in količino  $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ , dobimo

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{3}(t^6 + 3t^4 + 9t^2 + 9) \quad \text{in} \quad \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = 2(t^2 + 1)(t^6 + 3t^4 + 9t^2 + 9).$$

Vidimo, da je krivulja res PH krivulja. Če upoštevamo formuli (2.9) ter (2.14) in izračunamo razmerje

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{2t^6 + 9t^4 - 9}{9(t^2 + 1)^2},$$

pa po Lancretovemu izreku 3.11 sledi, da krivulja  $\mathbf{r}$  ne more biti vijačnica, saj razmerje med torzijsko in fleksijsko ukrivljenostjo ni konstantno.

Lancretov izrek nam omogoča, da za polinomske vijačnice še drugače izrazimo količino  $\rho$ , ki nastopa v enačbi (3.17). Razmerje med fleksijsko ukrivljenostjo (2.9) in torzijsko ukrivljenostjo (2.14) je enako

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3}}{\frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}} = \frac{(\sigma \sqrt{\rho})^3}{\sigma^3 (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''} = \frac{\rho^{3/2}}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''} = \tan \psi. \quad (3.24)$$

Iz tega lahko sklepamo, da je PH krivulja polinomska vijačnica tedaj, ko je izpolnjen pogoj

$$\rho^{3/2} = \tan \psi (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''. \quad (3.25)$$

### 3.3 Izražanje prostorskih PH krivulj v kvaternionski obliki

Za študij PH krivulj je zelo prikladna kvaternionska predstavitev le-teh. To obliko so najprej opisali avtorji v [2]. Spomnimo se predstavitve regularne PH krivulje  $\mathbf{r}$  s pomočjo polinomov  $u, v, p$  in  $q$ . Če so ti polinomi stopnje največ  $m$ , je potem PH krivulja, ki jo pridobimo z integriranjem hodografa  $\mathbf{r}'$ , lihe stopnje, ki je enaka  $n = 2m + 1$ .

Tvorimo kvaternionski polinom na naslednji način

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}. \quad (3.26)$$

Če kvaternione z ničelnim skalarnim delom identificiramo z vektorji v  $\mathbb{R}^3$ , kot smo opisali v poglavju 2.3, ugotovimo, da lahko enačbe (3.8) precej bolj kompaktno zapišemo s pomočjo zgornjega polinoma. Izračunamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) &= (u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t))\mathbf{i} \\ &\quad + 2(u(t)q(t) + v(t)p(t))\mathbf{j} \\ &\quad + 2(v(t)q(t) - u(t)p(t))\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

kjer je

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k} \quad (3.28)$$

konjugirana vrednost polinoma  $\mathcal{A}(t)$ . Če primerjamo formuli (3.8) in (3.27), opazimo, da velja  $\mathbf{r}'(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t)$ . Kvaternionski polinom  $\mathcal{A}$  lahko izrazimo tudi v Bernsteinovi obliki

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k} = \sum_{\ell=0}^m \mathcal{A}_\ell \binom{m}{\ell} (1-t)^{m-\ell} t^\ell, \quad (3.29)$$

kjer so z  $\mathcal{A}_\ell \in \mathbb{H}$  označeni Bernsteinovi koeficienti, ki so enaki

$$\mathcal{A}_\ell = u_\ell + v_\ell\mathbf{i} + p_\ell\mathbf{j} + q_\ell\mathbf{k} \quad \text{za } \ell = 0, \dots, m. \quad (3.30)$$

Pri tem  $u_\ell, v_\ell, p_\ell, q_\ell$ ,  $\ell = 0, \dots, m$ , predstavljajo Bernsteinove koeficiente za vsakega od polinomov  $u, v, p, q$  posebej. Parametrična hitrost krivulje  $\mathbf{r}$  se prav tako preprosto izrazi kot

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2 = \mathcal{A}(t)\mathcal{A}^*(t) = u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \quad (3.31)$$

Spomnimo se sedaj definicije 3.5 o primitivnem pitagorejskem hodografu. Če je največji skupni delitelj komponent hodografa nekonstanten, je torej enak nekemu polinomu  $h$ , ki je sode stopnje brez realnih ničel. Potem se lahko tak “nep primitiven” hodograf zapiše kot

$$\mathbf{r}'(t) = h(t)\mathcal{B}(t)\mathbf{i}\mathcal{B}^*(t) \quad (3.32)$$

za nek kvaternionski polinom  $\mathcal{B}(t)$  stopnje  $m-r$ , kjer je  $h$  polinom stopnje  $\text{st}(h) = 2r$ .

### 3.4 Izražanje prostorskih PH krivulj s Hopfovo preslikavo

Poleg kvaternionske oblike poznamo še en način za izražanje prostorskih PH krivulj, in sicer s Hopfovo preslikavo. Definiramo jo na naslednji način.

**Definicija 3.14.** Hopfova preslikava  $H$  je preslikava, ki slika iz  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in je za  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  določena z naslednjim predpisom:

$$H(\alpha, \beta) = (|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2\text{Re}(\alpha\bar{\beta}), 2\text{Im}(\alpha\bar{\beta})). \quad (3.33)$$

S pomočjo že znanih polinomov  $u, v, p$  in  $q$  lahko definiramo kompleksna polinoma  $\alpha(t) = u(t) + iv(t)$  ter  $\beta(t) = q(t) + ip(t)$ . Z malo računanja ugotovimo, da velja ravno  $\mathbf{r}'(t) = H(\alpha(t), \beta(t))$ .

Parametrična hitrost ima v Hopfovi predstavitvi enostaven zapis, in sicer

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2.$$

Kot bomo videli v nadaljevanju, je Hopfova oblika primernejša za obravnavo DPH krivulj.

### 3.4.1 Pretvorba med predstavitvama

Spoznali smo dva načina, kako izraziti hodograf PH krivulje: s pomočjo kvaternion-ske predstavitve ter predstavitve s Hopfovo preslikavo. Pretvorba med eno in drugo predstavitvijo je dokaj enostavna. Če identificiramo imaginarno enoto  $i$  v kompleksnih številih z imaginarno enoto  $\mathbf{i}$  v kvaternionih, vidimo, da se do kvaternion-ske oblike  $\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}$  da priti s pomočjo kompleksnih polinomov  $\alpha(t) = u(t) + iv(t)$  in  $\beta(t) = q(t) + ip(t)$  na naslednji način:

$$\begin{aligned}\alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t) &= u(t) + iv(t) + \mathbf{k}(q(t) + ip(t)) \\ &= u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k} \\ &= \mathcal{A}(t).\end{aligned}\tag{3.34}$$

Tudi kompleksna polinoma  $\alpha(t)$  in  $\beta(t)$  ni težko pridobiti iz kvaternion-skega polinoma  $\mathcal{A}(t)$ . Hitro se da preveriti, da velja

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}(t) - \mathbf{i}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}) \quad \text{in} \quad \beta(t) = \frac{1}{2}\mathbf{k}(\mathcal{A}(t) + \mathbf{i}\mathcal{A}(t)\mathbf{i}).\tag{3.35}$$

**Opomba 3.15.** Za dani hodograf  $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  je možno pridobiti enoparametrično družino kvaternion-skih polinomov. Ker je  $\mathbf{r}' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$ , je po lemi 2.1 kvaternion-ski polinom  $\mathcal{A}$  enak

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t) &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma(t) + x'(t))} \left( -\sin \phi + \cos \phi \mathbf{i} + \frac{y'(t) \cos \phi + z'(t) \sin \phi}{\sigma(t) + x'(t)} \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z'(t) \cos \phi - y'(t) \sin \phi}{\sigma(t) + x'(t)} \mathbf{k} \right),\end{aligned}$$

kjer je  $\phi$  prost parameter. Prav tako lahko preko pretvorbe (3.35) vidimo, da je za dan hodograf možno pridobiti enoparametrično družino kompleksnih polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ , ki ustrezajo danemu hodografu:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma(t) + x'(t))} (-\sin \phi + i \cos \phi), \\ \beta(t) &= \frac{(z'(t) \cos \phi - y'(t) \sin \phi) + i(y'(t) \cos \phi + z'(t) \sin \phi)}{\sqrt{2(\sigma(t) + x'(t))}}.\end{aligned}$$



## 4 DPH krivulje

Kot smo že videli v poglavju 3.2, sta za krivuljo  $\mathbf{r}$  s pitagorejskim hodografom v splošnem tangenta  $\mathbf{t}$  in torzijska ukrivljenost  $\tau$  racionalni funkciji parametra krivulje, normala  $\mathbf{p}$ , binormala  $\mathbf{b}$  ter fleksijska ukrivljenost  $\kappa$  pa niso, saj vsebujejo člen  $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$ , ki je v splošnem koren nekega polinoma. Zanimajo nas pogoji, pri katerih so vse omenjene količine racionalne funkcije parametra krivulje, torej Frenetovo ogrodje  $(\mathbf{t}, \mathbf{p}, \mathbf{b})$  in obe ukrivljenosti  $\kappa$  in  $\tau$ .

Iz enačbe (3.17) je moč razbrati naslednje: če je količina  $\rho(t)$  popolni kvadrat, je potem tudi količina  $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|$  polinom in ne koren nekega polinoma, kar **potem** vodi do racionalne odvisnosti Frenetovega ogrodja ter ukrivljenosti od parametra  $t$ .

**Definicija 4.1.** Za prostorsko polinomsko krivuljo  $\mathbf{r}$  pravimo, da je **DPH krivulja** ali “dvojna” **PH krivulja** (angl.: *double PH curve*), če sta tako  $\|\mathbf{r}'\|$  kot  $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$  polinomski funkciji parametra  $t$ , torej če sta izpolnjena pogoja

$$\|\mathbf{r}'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sigma^2, \quad (4.1)$$

$$\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 = (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2 = (\sigma\omega)^2 \quad (4.2)$$

za neka polinoma  $\sigma$  in  $\omega$ . Pogoj (4.2) pravimo **DPH pogoj**.

Vsaka **DPH krivulja** je očitno tudi **PH krivulja**. Na **DPH pogoj** lahko pogledamo tudi s pomočjo karakterizacije **PH krivulj** s polinomi  $u, v, q$  in  $p$ . Količina  $\rho$  v enačbi (3.19) mora biti enaka kvadratu nekega polinoma  $\omega$ . Zapišimo sedaj formule za Frenetovo ogrodje in ukrivljenosti pri **DPH krivuljah**:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{r}'}{\sigma}, \\ \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \times \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\sigma\omega} \times \frac{\mathbf{r}'}{\sigma} = \frac{(-\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}' + \sigma^2\mathbf{r}''}{\sigma^2\omega} \\ &= \frac{-((\sigma'\mathbf{t} + \sigma\kappa\mathbf{p}) \cdot (\sigma\mathbf{t}))\mathbf{r}' + \sigma^2\mathbf{r}''}{\sigma^2\omega} = \frac{\sigma\mathbf{r}'' - \sigma'\mathbf{r}'}{\sigma\omega}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\sigma\omega}, \\ \kappa &= \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\sigma^3} = \frac{\omega}{\sigma^2}, \\ \tau &= \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2} = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\sigma^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Če si še enkrat ogledamo enačbo (3.19),

$$\rho = 4[(up' - u'p + vq' - v'q)^2 + (uq' - u'q - vp' + v'p)^2] = \omega^2, \quad (4.4)$$

vidimo, da polinomi  $2(up' - u'p + vq' - v'q)$ ,  $2(uq' - u'q - vp' + v'p)$  in  $\omega$  tvorijo pitagorejsko trojico. Po opombi 3.4 mora biti trojica oblike

$$\begin{aligned} up' - u'p + vq' - v'q &= h(a^2 - b^2), \\ uq' - u'q - vp' + v'p &= 2hab, \\ \omega &= h(a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

za polinome  $h, a, b$  kjer sta si  $a$  in  $b$  tuja. Če sta si tudi polinoma  $up' - u'p + vq' - v'q$  in  $uq' - u'q - vp' + v'p$  tuja, lahko potem vzamemo  $h \equiv 1$ . V takem primeru pravimo, da imamo *primitivno* pitagorejsko trojico.

## 4.1 DPH krivulje in vijačnice

V trditvi 3.12 smo pokazali, da so vse polinomske vijačnice hkrati tudi PH krivulje. Da se pokazati še več.

**Trditev 4.2.** Če je polinomska krivulja vijačnica, potem je tudi DPH krivulja.

*Dokaz.* Dokaz je povzet po [1, str. 117]. Naj bo  $\mathbf{r}$  polinomska vijačnica, ki ima os v smeri enotskega vektorja  $\mathbf{a}$ . Po (3.21) je  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi = k$ , kjer smo s  $k \in \mathbb{R}$  poudarili, da je ta skalarni produkt med  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{t}$  enak konstanti vrednosti. Iz dokaza izreka 3.11 lahko sklepamo, da velja tudi  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{1 - k^2}$ . Ker velja  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}$  in  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}$ , lahko oba skalarna produkta preoblikujemo ter dobimo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}' = k\|\mathbf{r}'\| \quad \text{in} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') = \sqrt{1 - k^2}\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|. \quad (4.6)$$

Po istem razmisleku kot pri dokazu trditve 3.12 vidimo, da sta levi strani obeh zgornjih enačb enaki polinomu, kar pomeni, da morata biti tudi desni strani polinomski. Tako je poleg hitrosti  $\|\mathbf{r}'\|$  tudi količina  $\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|$  enaka polinomu, torej je izpolnjen DPH pogoj. Pokazali smo, da je krivulja  $\mathbf{r}$  res DPH krivulja.  $\square$

Za DPH krivuljo tretje in pete stopnje velja tudi obrat trditve.

**Izrek 4.3.** Polinomska krivulja stopnje tri ali pet je vijačnica natanko tedaj, ko je DPH krivulja.

*Dokaz.* Dokaz je dostopen v [1, str. 121].  $\square$

Iz primera 3.13 tudi vidimo, da je krivulja  $\mathbf{r}$  pravzaprav DPH krivulja. Ker je razmerje med ukrivljenostma nekonstantno, potem ta DPH krivulja sedme stopnje ni vijačnica, torej izrek 4.3 v splošnem ne drži za krivulje stopenj več kot pet.

Iz enačbe (3.24) je razvidno, da je za DPH krivulje razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enako

$$\frac{\kappa}{\tau} = \frac{\omega^3}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''} \quad (4.7)$$

Če je polinomska krivulja  $\mathbf{r}$  vijačnica, je po trditvi 4.2 hkrati tudi DPH krivulja in zato mora biti po Lancretovem izreku 3.11 razmerje med  $\omega^3$  in  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''$  konstantno. Če je stopnja PH krivulje enaka  $n$ , je potem stopnja polinoma  $\rho$  enaka  $2n - 6$ , kot smo videli v trditvi 3.8. Iz tega sledi, da je  $\text{st}(\omega) = n - 3$ .

To pomeni, da je razmerje med ukrivljenostma za kubične PH krivulje vedno konstantno, saj sta obe količini  $\omega^3$  in  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''$  konstantni. Slednje lahko preverimo po daljšem, a elementarnem računanju. Torej lahko sklepamo, da je vsaka kubična PH krivulja hkrati vijačnica in tako tudi DPH krivulja.

**Primer 4.4.** Dana je krivulja  $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{3}t^3 - t, \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 2t, -\frac{2}{3}t^3 + t^2 - 2t)$ . Hitro lahko vidimo, da je njen hodograf enak  $\mathbf{r}'(t) = (t^2 - 1, 2t^2 - 4t + 2, -2t^2 + 2t - 2)$ . Z nekaj računanja preverimo, da je parametrična hitrost te krivulje enaka

$$\sigma(t) = 3t^2 - 4t + 3,$$

torej imamo res opravka s PH krivuljo. Izračunajmo še  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ :

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (4(t^2 - 1), 2(t^2 - 4t + 1), 4(t - 1)^2).$$

Preverimo lahko, da je kvadrat norme zgornjega vektorskega produkta enak

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2 = 4(3t^2 - 4t + 3)^2 = 4\sigma^2(t).$$

Po (4.2) je potem ta krivulja DPH krivulja in velja  $\omega \equiv 2$ , torej je tudi  $\omega^3$  konstantna funkcija. Izračunajmo sedaj še mešani produkt  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''$ . Enak je

$$(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t) = -16.$$

Po enačbi (4.7) je potem razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enako  $-\frac{1}{2}$ . Tako smo za to PH krivuljo stopnje 3 preverili, da je hkrati tudi vijačnica in DPH krivulja.

Polinomske vijačnice stopnje 5, ki so po izreku 4.3 tudi DPH krivulje, tvorijo pravo podmnožico množice vseh PH krivulj stopnje 5. To dejstvo je razvidno iz naslednjega primera.

**Primer 4.5.** Dana je krivulja

$$\mathbf{r}(t) = \left( \frac{17}{5}t^5 - 7t^4 + \frac{10}{3}t^3, -\frac{6}{5}t^5 + t^4 - \frac{4}{3}t^3 + 2t^2, -6t^5 + 11t^4 - \frac{14}{3}t^3 - 2t \right).$$

Njen hodograf je enak

$$\mathbf{r}'(t) = (-4t^3 + 2t^2 - 1, 8t^4 - 12t^3 + 12t^2 - 6t + 2, 4t^3 - 8t^2 + 6t - 2)$$

in parametrična hitrost te krivulje se poenostavi v

$$\sigma(t) = 35t^4 - 52t^3 + 18t^2 + 2.$$

Dana krivulja je torej PH krivulja stopnje 5. Podobno kot v prejšnjem primeru izračunamo  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ :

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (-8(t-2)t(2t^2-2t+1)^2, 6(2t^2-2t+1)^2, -2(2t^2-2t+1)^2(4t^2+4t-3)).$$

Kvadrat norme tega vektorskega produkta je enak

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2 = 16(2t^4 + 6t^3 + 3t^2 - 4t + 1)(35t^4 - 52t^3 + 18t^2 + 2)^2 = \rho(t)\sigma^2(t),$$

pri čemer je  $\rho(t) = 16(2t^4 + 6t^3 + 3t^2 - 4t + 1)$ . Po (4.2) potem naša PH krivulja ni DPH krivulja, saj polinom  $\rho$  ni kvadrat nobenega drugega polinoma.

Podobno kot pri stopnji 5, tudi za stopnjo 7 (ali več) tvorijo DPH krivulje pravo podmnožico PH krivulj. Pri stopnji 7 ali več pa lahko imamo tako vijačne kot nevijačne DPH krivulje. Če DPH krivulja sedme oziroma višje stopnje izpolnjuje enakost

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}''' = \cot \psi \omega^3 \quad (4.8)$$

za nek konstanten kot  $\psi$ , je potem tudi vijačnica, kar sledi iz pogoja (3.25). To enakost se lahko uporablja kot "sito", ki ločuje vijačne od nevijačnih DPH krivulj stopenj 7 ali več.

## 4.2 Kvaternionska predstavitev DPH krivulj

Kot smo že videli v poglavju 3.3 o izražanju PH krivulj v kvaternionski obliki, se lahko hodograf običajne PH krivulje  $\mathbf{r}$  izraža s pomočjo kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}(t)$  kot  $\mathbf{r}'(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t)$ , parametrična hitrost pa kot  $\sigma(t) = \|\mathcal{A}(t)\|^2$ .

Sedaj bomo izpeljali izraz za  $\rho$ , kot smo ga navedli v (3.19). Začnemo z

$$\mathbf{r}'' = \mathcal{A}'\mathbf{i}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}'^*.$$

Če gledamo na  $\mathbf{r}'$  in  $\mathbf{r}''$  kot na kvaterniona z ničelnim skalarnim delom, se potem njun vektorski produkt  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  izrazi kot polovica njunega produkta brez polovice njunega konjugiranega produkta, kot smo videli v (2.27). Tako imamo

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \frac{1}{2} ((\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*)(\mathcal{A}'\mathbf{i}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}'^*) - (\mathcal{A}'\mathbf{i}\mathcal{A}^* + \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}'^*)(\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*)^*)$$

in ko ta izraz razpišemo in malce poenostavimo, dobimo

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \frac{1}{2} (\mathcal{A}\mathbf{i}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}' - \mathcal{A}'^*\mathcal{A})\mathbf{i}\mathcal{A}'^* + \sigma(\mathcal{A}'\mathcal{A}^* - \mathcal{A}\mathcal{A}'^*)).$$

Ker je  $\sigma = \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ , je potem

$$\sigma' = \mathcal{A}'\mathcal{A}^* + \mathcal{A}\mathcal{A}'^* = \mathcal{A}'^*\mathcal{A} + \mathcal{A}^*\mathcal{A}'.$$

Člena  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}' - \mathcal{A}'^*\mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}'\mathcal{A}^* - \mathcal{A}\mathcal{A}'^*$  se lahko izrazita s pomočjo  $\sigma'$ , in sicer tako, da je  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}' - \mathcal{A}'^*\mathcal{A} = \sigma' - 2\mathcal{A}'^*\mathcal{A}$  ter  $\mathcal{A}'\mathcal{A}^* - \mathcal{A}\mathcal{A}'^* = \sigma' - 2\mathcal{A}\mathcal{A}'^*$ . Če vstavimo ta dva izraza v izraz za  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  in upoštevamo  $\sigma = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ , se nekaj členov pokrajša in ostane

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*\mathcal{A}'\mathbf{i}\mathcal{A}^* + \sigma\mathcal{A}'\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(\mathbf{i}\mathcal{A}^*\mathcal{A}'\mathbf{i} + \mathcal{A}^*\mathcal{A}')\mathcal{A}^*.$$

Če izrazimo  $\mathcal{A}$  s polinomi  $u, v, p$  in  $q$ , sta potem produkta  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}'$  in  $\mathbf{i}\mathcal{A}^*\mathcal{A}'\mathbf{i}$  enaka

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*\mathcal{A}' &= (uu' + vv' + pp' + qq') + (uv' - u'v - pq' + p'q)\mathbf{i} \\ &\quad + (up' - u'p + vq' - v'q)\mathbf{j} + (uq' - u'q - vp' + v'p)\mathbf{k}, \\ \mathbf{i}\mathcal{A}^*\mathcal{A}'\mathbf{i} &= -(uu' + vv' + pp' + qq') - (uv' - u'v - pq' + p'q)\mathbf{i} \\ &\quad + (up' - u'p + vq' - v'q)\mathbf{j} + (uq' - u'q - vp' + v'p)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vidimo, da se skalarni del v  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  (pričakovano) pokrajša. Pokrajša se tudi člen pri enoti  $\mathbf{i}$ , koeficienta pri enotah  $\mathbf{j}$  in  $\mathbf{k}$  pa sta enaka. Definiramo ju kot nova polinoma

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t)p'(t) - u'(t)p(t) + v(t)q'(t) - v'(t)q(t), \\ g(t) &= u(t)q'(t) - u'(t)q(t) - v(t)p'(t) + v'(t)p(t). \end{aligned} \tag{4.9}$$

S pomočjo polinomov  $f$  in  $g$  zapišemo

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = 2\mathcal{A}(f\mathbf{j} + g\mathbf{k})\mathcal{A}^*. \tag{4.10}$$

Spet izrazimo  $\mathcal{A}$  z znanimi polinomi in po daljšem izračunu in poenostavljanju izrazov dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= 2(2((vp - uq)f + (up + vq)g)\mathbf{i} + (2(u^2 - v^2 + p^2 - q^2)f + 2(pq - uv)g)\mathbf{j} \\ &\quad + (2(uv + pq)f + (u^2 - v^2 - p^2 + q^2)g)\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Če si sedaj pogledamo še kvadrat norme vektorskega produkta (4.10), vidimo, da je enak

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2 &= 4\|\mathcal{A}(f\mathbf{j} + g\mathbf{k})\mathcal{A}^*\|^2 \\
&= 4\mathcal{A}(f\mathbf{j} + g\mathbf{k})\mathcal{A}^*(\mathcal{A}(f\mathbf{j} + g\mathbf{k})\mathcal{A}^*)^* \\
&= 4\mathcal{A}(f\mathbf{j} + g\mathbf{k})\mathcal{A}^*\mathcal{A}(-f\mathbf{j} - g\mathbf{k})\mathcal{A}^* \\
&= 4\sigma\mathcal{A}(f\mathbf{j} + g\mathbf{k})(-f\mathbf{j} - g\mathbf{k})\mathcal{A}^* \\
&= 4\sigma(f^2 + g^2)\mathcal{A}\mathcal{A}^* \\
&= 4\sigma^2(f^2 + g^2).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Tako smo končno pokazali, da res drži enačba (3.19), saj sta kvadrata polinomov  $f$  in  $g$  natanko tista izraza, ki se pojavita v formuli za  $\rho$ , podani z (3.19). Opravka imamo s pravzaprav isto pitagorejsko trojico kot v (4.5). Sklepamo, da morata biti polinoma  $f$  in  $g$  enaka

$$f = h(a^2 - b^2), \quad g = 2hab \tag{4.12}$$

za neke polinome  $a, b$  ter  $h$ , kjer sta si  $a$  in  $b$  tuja.

Vektorski produkt  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  lahko pri DPH krivuljah s pomočjo kvaternionskih polinomov zapišemo še malce bolj kompaktno. To si oglejmo v naslednji trditvi.

**Trditev 4.6.** Naj bo  $\mathbf{r}$  DPH krivulja, določena s kvaternionskim polinomom  $\mathcal{A} = u + v\mathbf{i} + p\mathbf{j} + q\mathbf{k}$ . Potem se vektorski produkt  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  da izraziti s pomočjo kvaternionskega polinoma  $\mathcal{B}$  kot  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = h\mathcal{B}\mathbf{i}\mathcal{B}^*$ . Polinom  $\mathcal{B}$  se izraža kot  $\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{C}$ , kjer je  $\mathcal{C} = -b + a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ , polinomi  $a, b$  in  $h$  pa so znani iz (4.5).

*Dokaz.* Če upoštevamo enačbo (4.10) za  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  ter enakost (4.12) za  $f$  in  $g$ , je potem vektorski produkt  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$  enak

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = h(2\mathcal{A}((a^2 - b^2)\mathbf{j} + 2ab\mathbf{k})\mathcal{A}^*). \tag{4.13}$$

Predpostavimo, da je  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = h\mathcal{B}\mathbf{i}\mathcal{B}^*$  in poskusimo določiti  $\mathcal{B}$ . Če izraz  $\mathcal{B}\mathbf{i}\mathcal{B}^*$  pomnožimo z leve z  $\mathcal{A}^*$  ter z desne z  $\mathcal{A}$ , dobimo

$$\mathcal{Q}\mathbf{i}\mathcal{Q}^* = 2\sigma^2((a^2 - b^2)\mathbf{j} + 2ab\mathbf{k}), \tag{4.14}$$

kjer je  $\mathcal{Q} = \mathcal{A}^*\mathcal{B}$ . Po lemi 2.1 ima splošna rešitev enačbe (4.14) obliko

$$\mathcal{Q} = \sigma \frac{((a^2 + b^2)\mathbf{i} + (a^2 - b^2)\mathbf{j} + 2ab\mathbf{k})}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos \phi + \sin \phi \mathbf{i}),$$

kjer je  $\phi$  prost parameter, odvisen od parametra  $t$ . Sledi, da je  $\mathcal{B}$  enak

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \frac{((a^2 + b^2)\mathbf{i} + (a^2 - b^2)\mathbf{j} + 2ab\mathbf{k})}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cos \phi + \sin \phi \mathbf{i}).$$

Želimo, da je  $\mathcal{B}(t)$  kvaternionski polinom, zato moramo izbrati  $\phi$  v odvisnosti od  $t$ , tako da bo  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(\cos \phi + \sin \phi \mathbf{i})$  polinomski izraz. Implicitno definiramo  $\phi(t)$  z naslednjima formulama

$$\sin \phi(t) = \frac{b(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}} \quad \text{in} \quad \cos \phi(t) = \frac{a(t)}{\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}}.$$

Vstavimo ta dva izraza v izraz za  $\mathcal{B}(t)$  in poenostavimo

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \mathcal{A} \left( -b + a\mathbf{i} + \frac{a(a^2 - b^2) + 2ab^2}{a^2 + b^2} \mathbf{j} + \frac{2a^2b - b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \mathbf{k} \right) \\ &= \mathcal{A}(-b + a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + b\mathbf{k}) = \mathcal{AC}.\end{aligned}$$

Torej res drži  $\mathcal{B} = \mathcal{AC}$ , kar smo hoteli dokazati.  $\square$

### 4.3 Predstavitev DPH krivulj s Hopfovo preslikavo

Za nadaljnjo obravnavo in klasifikacijo DPH krivulj se predstavitev le-teh s Hopfovo preslikavo izkaže za bolj primerno od predstavitve s kvaternionskim polinomom. Za kompleksna polinoma  $\alpha(t) = u(t) + iv(t)$  in  $\beta(t) = q(t) + ip(t)$  lahko podamo hodograf PH krivulje s pomočjo preslikave, kot smo že videli v poglavju 3.4. Oglejmo si, čemu je enak polinom  $\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)$ :

$$\begin{aligned}\alpha\beta' - \alpha'\beta &= (u + iv)(q' + ip') - (u' + iv')(q + ip) \\ &= (uq' - u'q + v'p - vp') + i(vq' - v'q + up' - u'p).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Če primerjamo kvadrat absolutne vrednosti te izračunane količine z enačbo (3.19), vidimo da je

$$\rho(t) = 4|\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)|^2.\tag{4.16}$$

Tu se nam ponudi nova karakterizacija DPH krivulj: DPH krivulje so tiste prostorske PH krivulje, za katere je  $|\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)|^2$  popolni kvadrat nekega realnega polinoma. Izkaže se, da je polinom  $\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)$  pomemben za nadaljnji študij DPH krivulj, zato si zasluži tudi svojo definicijo.

**Definicija 4.7.** Polinomu  $\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)$ , ki ga sestavimo iz polinomov  $\alpha(t) = u(t) + iv(t)$  ter  $\beta(t) = q(t) + ip(t)$  za neke realne polinome  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $p(t)$  ter  $q(t)$ , pravimo tudi *polinom proporcionalnosti* polinomov  $\alpha(t)$  in  $\beta(t)$  (angl.: *proportionality polynomial*).

Enostavno je videti, da je polinom proporcionalnosti identično enak nič natanko takrat, ko se polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  razlikujeta za multiplikativno kompleksno konstanto. V eno smer se to pokaže direktno, za dokaz v drugo smer se pa reši preprosto diferencialno enačbo. S polinomom proporcionalnosti se da lepo izraziti tudi fleksijsko ukrivljenost DPH krivulj, in sicer kot

$$\kappa = \frac{\omega}{\sigma^2} = \frac{\sqrt{\rho}}{\sigma^2} = 2 \frac{|\alpha\beta' - \alpha'\beta|}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}.\tag{4.17}$$

Iz tega je razvidno sledeče. Če je za dano DPH krivuljo njen polinom proporcionalnosti identično enak 0, je potem tudi fleksijska ukrivljenost te krivulje enaka 0, kar pomeni, da imamo pravzaprav opravka z daljico (ravno črto). Če ima ta polinom kakšno realno ničlo, potem pri tej vrednosti parametra  $t$  normalni oziroma binormalni vektor nista določena, saj tako normalni kot binormalni vektor v imenovalcu vsebujeta  $\omega$ , kot lahko vidimo v enačbah (4.3). Podobno velja tudi za torzijsko ukrivljenost.

Sedaj lahko preoblikujemo **DPH pogoja** v primernejšo obliko za nadaljnjo obravnavo. Spomnimo se enakosti (4.5). Če to primerjamo s polinomom proporcionalnosti, vidimo, da je

$$\begin{aligned}\alpha\beta' - \alpha'\beta &= (up' - u'p + v'q - vq') \\ &\quad + i(uq' - u'q + vp' - v'p) \\ &= h(a^2 - b^2 + i2ab) \\ &= h\mathbf{w}^2,\end{aligned}\tag{4.18}$$

kjer je  $\mathbf{w} = a + ib$ . Polinoma  $a$  in  $b$  morata biti tuja, tako da velja tudi

$$\text{st}(h) + 2\text{st}(\mathbf{w}) = \text{st}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = \text{st}(\alpha) + \text{st}(\beta) - 2.\tag{4.19}$$

Da je  $\text{st}(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = \text{st}(\alpha) + \text{st}(\beta) - 2$ , vemo iz opombe 3.9. Če identificiramo  $\mathbb{C}$  z  $\mathbb{R}^2$ , potem kompleksna polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  porodita ravninske krivulje. Ob upoštevanju enakosti (3.11) iz opombe 3.4 ter izpeljave (4.18) je jasno, da velja naslednja trditev.

**Trditev 4.8.** *Naj bo  $\mathbf{r}$  prostorska **PH krivulja**, podana s Hopfovo preslikavo polinomov  $\alpha$  ter  $\beta$ . Potem je  $\mathbf{r}$  **DPH krivulja** natanko takrat, ko polinom proporcionalnosti  $\alpha\beta' - \alpha'\beta$  določa hodograf ravninske **PH krivulje**.*

Iz enačbe (4.16) za  $\rho$  in karakterizacije **DPH pogoja** s pomočjo polinoma proporcionalnosti (4.18) sledi, da je za **DPH krivulje**  $\rho$  enak

$$\rho = 4h^2|\mathbf{w}|^4,$$

kjer je  $\mathbf{w} = a + ib$ ,  $a, b$  in  $h$  pa so realni polinomi. Ker je po enačbi (4.4) kvadrat polinoma  $\omega$  enak polinomu  $\rho$  in če predpostavimo, da je polinom  $h$  nenegativen, je potem res

$$\omega = 2h|\mathbf{w}|^2.$$

Kot smo že videli v poglavju 4.1, je za vijačne **DPH krivulje** razmerje med mešanim produktom  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''$  in kubom polinoma  $\omega$  konstantno, zato je tudi razmerje med  $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''$  in  $(2h|\mathbf{w}|^2)^3$  konstantno.

Polinom proporcionalnosti se da izraziti tudi v jeziku kvaternionov. Najprej identificiramo imaginarno enoto  $i$  v  $\mathbb{C}$  z imaginarno enoto  $\mathbf{i}$  v  $\mathbb{H}$ . Polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  lahko zapišemo v Bernsteinovi bazi s koeficienti

$$\alpha_\ell = \gamma_\ell + \delta_\ell \mathbf{i} \quad \text{in} \quad \beta_\ell = \zeta_\ell + \eta_\ell \mathbf{i} \quad \text{za} \quad \ell = 0, \dots, m.$$

Bernsteinovi koeficienti kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  so potem po pretvorbi (3.34) enaki

$$\mathcal{A}_\ell = \alpha_\ell + \mathbf{k}\beta_\ell = \gamma_\ell + \delta_\ell \mathbf{i} + \eta_\ell \mathbf{j} + \zeta_\ell \mathbf{k}$$

za  $\ell = 0, \dots, m$ . Kvaternion  $\mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_\ell - \mathcal{A}_\ell^* \mathcal{A}_k$  ima ničelni skalarni del in ga zato lahko identificiramo z vektorjem. Ko razpišemo izraz  $\frac{1}{2}(\mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_\ell - \mathcal{A}_\ell^* \mathcal{A}_k) \times \mathbf{i}$  vidimo, da je enak

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_\ell - \mathcal{A}_\ell^* \mathcal{A}_k) \times \mathbf{i} &= (\gamma_k \zeta_\ell + \eta_k \delta_\ell - \zeta_k \gamma_\ell - \delta_k \eta_\ell) \mathbf{j} \\ &\quad + (\zeta_k \delta_\ell + \eta_k \gamma_\ell - \gamma_k \eta_\ell - \delta_k \zeta_\ell) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Isti izraz dobimo, če poračunamo  $\mathbf{j}(\alpha_k \beta_\ell - \alpha_\ell \beta_k)$ . Iz teh enakosti lahko sklepamo, da se da polinom proporcionalnosti polinomov  $\alpha(t)$  in  $\beta(t)$  izraziti s kvaternionskim polinom  $\mathcal{A}(t)$  kot

$$\mathbf{j}(\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t)) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) - \mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t)) \times \mathbf{i}. \quad (4.20)$$

S pomočjo pravkar izpeljanega izraza lahko tudi DPH pogoj (4.18) izrazimo malce drugače. Uporabimo polinom  $\mathcal{C}(t) = -b(t) + a(t)\mathbf{i} + a(t)\mathbf{j} + b(t)\mathbf{k}$  iz trditve 4.6. Potem velja

$$\frac{1}{2}\mathcal{C}(t)\mathbf{i}\mathcal{C}^*(t) = (a^2(t) - b^2(t))\mathbf{j} + 2a(t)b(t)\mathbf{k} = \mathbf{w}^2(t)\mathbf{j}.$$

Pomnožimo sedaj desno stran enačbe (4.20) z desne z  $\mathbf{j}$ . Dobimo

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2}(\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) - \mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t)) \times \mathbf{i} \right) \mathbf{j} &= \mathbf{j}(\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t))\mathbf{j} \\ &= h(t)\mathbf{j}\mathbf{w}^2(t)\mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2}h(t)\mathbf{j}\mathcal{C}(t)\mathbf{i}\mathcal{C}^*(t). \end{aligned}$$

Rezultat lahko še lepše izrazimo v obliki

$$(\mathcal{A}^*(t)\mathcal{A}'(t) - \mathcal{A}'^*(t)\mathcal{A}(t)) \times \mathbf{i} = h(t)\mathcal{D}(t)\mathbf{i}\mathcal{D}^*(t), \quad (4.21)$$

kjer je  $\mathcal{D}(t) = \mathbf{j}\mathcal{C}(t) = -a(t) + b(t)\mathbf{i} - b(t)\mathbf{j} - a(t)\mathbf{k}$ . Če povzamemo: prostorska PH krivulja, podana s kvaternionskim polinomom  $\mathcal{A}$ , je DPH krivulja natanko takrat, ko velja enačba (4.21) za nek kvaternionski polinom  $\mathcal{D}$ , ki mora biti predpisane oblike, pri čemer sta si polinoma  $a$  ter  $b$  tuja.



## 5 Klasifikacija DPH krivulj nizkih stopenj

V tem poglavju si bomo ogledali različne tipe DPH krivulj, ki se pojavljajo pri nizkih stopnjah. Analizirali bomo tipe krivulj pri tretji, peti in sedmi stopnji. Glavno orodje pri tej analizi bo Hopfova oblika DPH krivulj s polinomom proporcionalnosti. Izpeljali bomo pogoje (odvisne od koeficientov polinoma proporcionalnosti), pri katerih je dana PH krivulja tudi DPH krivulja. Pri tem bomo privzeli, da sta polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  podana v Bernsteinovi obliki

$$\alpha(t) = \sum_{\ell=0}^m \alpha_{\ell} \binom{m}{\ell} (1-t)^{m-\ell} t^{\ell} \quad \text{in} \quad \beta(t) = \sum_{\ell=0}^m \beta_{\ell} \binom{m}{\ell} (1-t)^{m-\ell} t^{\ell},$$

kjer je  $m$  enak  $m = \frac{n-1}{2}$ , pri čemer je  $n$  stopnja krivulje.

### 5.1 DPH krivulje stopnje 3 in 5

Naj bo  $\mathbf{r}$  prostorska PH krivulja tretje stopnje, podana s kompleksnima polinomoma  $\alpha$  in  $\beta$ . Potem sta oba kompleksna polinoma pravzaprav linearna:

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t \quad \text{in} \quad \beta(t) = \beta_0(1-t) + \beta_1 t.$$

Po krajšem računu hitro vidimo, da je polinom proporcionalnosti enak

$$\begin{aligned} \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) &= \alpha_0\beta_1(1-t) - \alpha_0\beta_0(1-t) + \alpha_1\beta_1t - \alpha_1\beta_0t \\ &\quad - \alpha_1\beta_0(1-t) - \alpha_1\beta_1t + \alpha_0\beta_0(1-t) - \alpha_0\beta_1t \\ &= \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0. \end{aligned}$$

Polinom proporcionalnosti je torej konstanten in je po (4.18) enak  $h(t)\mathbf{w}^2(t)$ . Iz zgornjega računa vidimo, da je  $\text{st}(h) = \text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je  $h(t) \equiv 1$  ter  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0$  za neko konstanto  $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{C}$ . Potem lahko DPH pogoj izrazimo kot  $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = \mathbf{w}_0^2$ . Ta pogoj jasno velja za vse možne izbire  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$  in  $\beta_1$ , saj lahko za  $\mathbf{w}_0$  vzamemo  $\pm\sqrt{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}$ , ki je v kompleksnih številih vedno definirano število. Zato je vsaka prostorska PH krivulja tretje stopnje tudi DPH krivulja.

Naj bo sedaj  $\mathbf{r}$  prostorska PH krivulja pete stopnje, ki je podana s kompleksnima polinomoma  $\alpha$  in  $\beta$ . V tem primeru sta ta dva polinoma kvadratična. Tokrat je polinom proporcionalnosti enak

$$\begin{aligned} \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) &= 2(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)(1-t)^2 + (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)2(1-t)t \\ &\quad + 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)t^2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Krivulja je DPH krivulja, ko je zgornji izraz enak  $h(t)\mathbf{w}^2(t)$  za nek realen polinom  $h$  in nek kompleksni polinom  $\mathbf{w}$ . Tu ločimo dva primera: ali je  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$  ali pa  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ .

### 5.1.1 Primer $\text{st}(h) = 0$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$

Recimo, da je  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . Kot prej lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je  $h(t) \equiv 1$ , polinom  $\mathbf{w}(t)$  pa je enak  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1t$ , torej je

$$\mathbf{w}^2(t) = \mathbf{w}_0^2(1-t)^2 + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_12(1-t)t + \mathbf{w}_1^2t^2.$$

Če enačimo koeficiente izraza  $h(t)\mathbf{w}^2(t)$  s koeficienti izraza (5.1), dobimo naslednje enačbe:

$$2(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) = \mathbf{w}_0^2, \quad \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 = \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, \quad 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = \mathbf{w}_1^2. \quad (5.2)$$

Če pomnožimo prvo in tretjo enačbo, vidimo, da je zmnožek desnih strani enak kvadratu desne strani druge enačbe. Torej te enačbe res držijo za neka  $\mathbf{w}_0$  in  $\mathbf{w}_1$  natanko takrat, ko za koeficiente polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  velja enačba

$$4(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)^2. \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Primer $\text{st}(h) = 2$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$

Oglejmo si še drugi primer, ko je  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . Polinom

$$h(t) = h_0(1-t)^2 + h_12(1-t)t + h_2t^2$$

prav tako podamo v Bernsteinovi obliki, za  $\mathbf{w}(t)$  pa postavimo  $\mathbf{w}(t) \equiv \mathbf{w}_0$ . Spet enačimo koeficiente izraza  $h(t)\mathbf{w}^2(t)$  s koeficienti izraza (5.1). Dobimo naslednji sistem enačb:

$$2(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) = h_0\mathbf{w}_0^2, \quad \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 = h_1\mathbf{w}_0^2, \quad 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = h_2\mathbf{w}_0^2. \quad (5.4)$$

Ta sistem enačb je rešljiv natanko takrat, ko kompleksna števila  $\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0$ ,  $\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0$  ter  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$  ležijo na isti premici v kompleksni ravnini.

## 5.2 DPH krivulje stopnje 7

Imejmo prostorsko PH krivuljo  $\mathbf{r}$  sedme stopnje, ki je podana s kompleksnima polinomoma  $\alpha$  in  $\beta$ . Tokrat sta ta dva polinoma kubična. Po daljšem a elementarnem računanju vidimo, da je polinom proporcionalnosti enak

$$\begin{aligned} \alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) &= 3(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)(1-t)^4 + \frac{3}{2}(\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)4(1-t)^3t \\ &\quad + \left( \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0) + \frac{3}{2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \right) 6(1-t)^2t^2 \\ &\quad + \frac{3}{2}(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)4(1-t)t^3 + 3(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)t^4. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Za izpolnitev DPH pogoja imamo tokrat tri možnosti: ali je  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$  ali je  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$  ali je  $\text{st}(h) = 4$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . Opozoriti velja na dejstvo, da vrednosti  $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$  za  $0 \leq i, j \leq 3$ , kjer sta  $i \neq j$ , ki se pojavljajo kot členi znotraj koeficientov polinoma proporcionalnosti, niso med seboj neodvisne. Za njih

velja pogoj, ki mu bomo rekli *pogoj kompatibilnosti*. Po tem pogoju za te vrednosti velja enakost

$$(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = (\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0)(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0). \quad (5.6)$$

Če levo in desno stran enakosti (5.6) razpišemo, vidimo, da je enakost vselej izpolnjena za poljubne  $\alpha_i, \beta_i$ , kjer je  $i = 0, 1, 2, 3$ .

### 5.2.1 Primer $\text{st}(h) = 0$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$

Lahko vzamemo kar  $h(t) \equiv 1$ . Naj ima kvadratičen kompleksni polinom  $\mathbf{w}$  Bernsteineve koeficiente  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$  in  $\mathbf{w}_2$ . Če ta polinom kvadriramo in primerjamo koeficiente s koeficienti v enačbi (5.5), dobimo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned} 3(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) &= \mathbf{w}_0^2, \\ 3(\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) &= 2\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, \\ (\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0) + 3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= \frac{2}{3}(2\mathbf{w}_1^2 + \mathbf{w}_0\mathbf{w}_2), \\ 3(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) &= 2\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2, \\ 3(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) &= \mathbf{w}_2^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Vrednost  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$  označimo z  $\mathbf{z}$ . Potem se v zgornjih enačbah tretja enačba preoblikuje v  $\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 = \frac{4}{3}\mathbf{w}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 - 3\mathbf{z}$ . Sedaj uporabimo pogoj kompatibilnosti (5.6) in izrazimo vse člene s koeficienti polinoma  $\mathbf{w}$  in številom  $\mathbf{z}$ . Dobimo

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{w}_0^2\right)\left(\frac{1}{3}\mathbf{w}_2^2\right) = \left(\frac{2}{3}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\right)\left(\frac{2}{3}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\right) - \mathbf{z}\left(\frac{4}{3}\mathbf{w}_1^2 + \frac{2}{3}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 - 3\mathbf{z}\right).$$

Ko to enačbo poenostavimo, vidimo, da imamo opravka s kvadratno enačbo v  $\mathbf{z}$ . Le-ta je enaka

$$27\mathbf{z}^2 - (12\mathbf{w}_1^2 + 6\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2)\mathbf{z} + (4\mathbf{w}_1^2 - \mathbf{w}_0\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 = 0.$$

Ker ima kvadratna enačba dve rešitvi, lahko vrednost  $\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$  podamo s pomočjo koeficientov  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$  in  $\mathbf{w}_2$  kot

$$\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{3}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 \quad \text{ali} \quad \mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{9}(4\mathbf{w}_1^2 - \mathbf{w}_0\mathbf{w}_2). \quad (5.8)$$

Na začetku lahko torej poljubno izberemo koeficiente  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$  in  $\mathbf{w}_2$  (in s tem polinom  $\mathbf{w}$ ) ter še tri koeficiente polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  (recimo  $\alpha_0, \alpha_1$  in  $\beta_0$ ). Nato rešimo linearni sistem enačb (5.7) za preostale neznane koeficiente. Zaradi dveh možnih rešitev za  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ , ki sta podani v (5.8), dobimo dve različni množici rešitev sistema (5.7). Tako so vse vrednosti Bernsteinovih koeficientov polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  določene in prostorska PH krivulja, ki je porojena iz teh dveh kompleksnih polinomov, je res DPH krivulja. Ker imamo dve različni množici rešitev sistema (5.7), dobimo dva različna hodografa, ki določata DPH krivuljo.

### 5.2.2 Primer $\text{st}(h) = 2$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$

Vzamemo  $h_0, h_1, h_2$  za Bernsteinove koeficiente polinoma  $h$  ter  $\mathbf{w}_0$  in  $\mathbf{w}_1$  za Bernsteinove koeficiente polinoma  $\mathbf{w}$ . Če poračunamo  $h(t)\mathbf{w}^2(t)$  in primerjamo Bernsteinove koeficiente tega polinoma s koeficienti polinoma proporcionalnosti (5.5), dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} 3(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) &= h_0\mathbf{w}_0^2, \\ 3(\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) &= h_1\mathbf{w}_0^2 + h_0\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, \\ (\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0) + 3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= \frac{1}{3}(h_2\mathbf{w}_0^2 + 4h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_0\mathbf{w}_1^2), \\ 3(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) &= h_2\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_1\mathbf{w}_1^2, \\ 3(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) &= h_2\mathbf{w}_1^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Uporabimo isti trik kot v prejšnjem primeru. Nastavimo  $\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ . Potem je vrednost  $\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0$  po tretji enačbi iz (5.9) enaka

$$\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 = \frac{1}{3}(h_2\mathbf{w}_0^2 + 4h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_0\mathbf{w}_1^2) - 3\mathbf{z}.$$

Spet uporabimo pogoj kompatibilnosti (5.6). Dobimo enačbo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}h_0\mathbf{w}_0^2\right) \left(\frac{1}{3}h_2\mathbf{w}_1^2\right) &= \frac{1}{3}(h_1\mathbf{w}_0^2 + h_0\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1) \frac{1}{3}(h_2\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_1\mathbf{w}_1^2) \\ &\quad - \mathbf{z} \left(\frac{1}{3}(h_2\mathbf{w}_0^2 + 4h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_0\mathbf{w}_1^2) - 3\mathbf{z}\right). \end{aligned}$$

Preoblikujemo jo v (standardno) kvadratno enačbo za  $\mathbf{z}$ . Vidimo, da je enaka

$$27\mathbf{z}^2 - 3(h_2\mathbf{w}_0^2 + 4h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_0\mathbf{w}_1^2)\mathbf{z} + h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1(h_2\mathbf{w}_0^2 + h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 + h_0\mathbf{w}_1^2) = 0.$$

Rešitvi kvadratne enačbe podamo s pomočjo koeficientov polinomov  $h$  in  $\mathbf{w}$  kot

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{3}h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 \quad \text{ali} \\ \mathbf{z} &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{9}(h_2\mathbf{w}_0^2 + h_1\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 - h_0\mathbf{w}_1^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Postopamo podobno kot prej. Poljubno izberemo koeficiente  $h_0, h_1, h_2, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1$  ter še tri koeficiente polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  (recimo  $\alpha_0, \alpha_1$  in  $\beta_0$ ). Potem rešimo sistem enačb (5.9). Ob upoštevanju enačb (5.10) je sklep isti kot prej. Vse vrednosti Bernsteinovih koeficientov polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  so s tem tako določene, da je prostorska PH krivulja, ki je porojena iz teh dveh kompleksnih polinomov, res DPH krivulja. Podobno kot prej imamo zaradi dveh različnih možnih rešitev za  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ , kot lahko razberemo v (5.10), dve različni množici rešitev sistema (5.9). Tako dobimo dva različna hodografa, ki določata DPH krivuljo.

### 5.2.3 Primer $\text{st}(h) = 4$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$

Obravnavajmo še zadnji primer. Naj bodo  $h_0, h_1, h_2, h_3$  in  $h_4$  Bernsteinovi koeficienti polinoma  $h$ , polinom  $\mathbf{w}$  pa naj bo identično enak konstanti  $\mathbf{w}_0$ . Če spet primerjamo istoležne koeficiente polinoma proporcionalnosti (5.5) s koeficienti polinoma  $h(t)\mathbf{w}^2(t)$  in jih enačimo, dobimo

$$\begin{aligned} 3(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) &= h_0\mathbf{w}_0^2, \\ 3(\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0) &= 2h_1\mathbf{w}_0^2, \\ (\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0) + 3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) &= 2h_2\mathbf{w}_0^2, \\ 3(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) &= 2h_3\mathbf{w}_0^2, \\ 3(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) &= h_4\mathbf{w}_0^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Spet nastavimo  $\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ . Iz tretje enačbe iz (5.11) izrazimo  $\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0$ , tokrat je ta vrednost enaka

$$\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 = 2h_2\mathbf{w}_0^2 - 3\mathbf{z}.$$

Po pogoju kompatibilnosti (5.6) dobimo enačbo

$$\left(\frac{1}{3}h_0\mathbf{w}_0^2\right)\left(\frac{1}{3}h_4\mathbf{w}_0^2\right) = \left(\frac{2}{3}h_1\mathbf{w}_0^2\right)\left(\frac{2}{3}h_3\mathbf{w}_0^2\right) - \mathbf{z}(2h_2\mathbf{w}_0^2 - 3\mathbf{z}),$$

ki se še preoblikuje v

$$27\mathbf{z}^2 - 18h_2\mathbf{w}_0^2\mathbf{z} + (4h_1h_3 - h_0h_4)\mathbf{w}_0^4.$$

Ta kvadratna enačba za  $\mathbf{z}$  ima rešitvi podani s koeficienti  $h_0, \dots, h_4$  in  $\mathbf{w}_0$ . Rešitvi sta enaki

$$\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{9} \left( 3h_2 \pm \sqrt{9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_3} \right) \mathbf{w}_0^2. \tag{5.12}$$

Povzemimo: na začetku poljubno izberemo koeficiente  $h_0, \dots, h_4$ ,  $\mathbf{w}_0$  ter še tri koeficiente polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ . Kot smo že videli v prejšnjih primerih, ponavadi izberemo kar  $\alpha_0, \alpha_1$  in  $\beta_0$ . S pomočjo teh znanih podatkov rešimo sistem enačb (5.11). Pri reševanju sistema upoštevamo eno izmed rešitev v (5.12). Zaradi dveh različnih rešitev za  $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$  dobimo dva različna hodografa, ki določata DPH krivuljo.

## 6 Polinomske vijačnice in Hopfova preslikava

V trditvi 4.2 smo pokazali, da je vsaka polinomska vijačnica tudi DPH krivulja. V tem poglavju bomo podrobneje raziskali strukturo vijačnic in pogoje, ki so potrebni za njihovo konstrukcijo. Te pogoje bomo opredelili s pomočjo Hopfove preslikave. Za začetek nam bo prišla prav naslednja trditev. Povzeta je po [12, str. 72].

**Trditev 6.1.** *Naj bo krivulja  $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$  naravno parametrizirana vijačna krivulja, katere tangenta oklepa z osjo  $\mathbf{a}$  kot  $\psi$ . Potem obstajajo ortonormirani vektorji  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  in  $\mathbf{e}_3$ , tako da lahko krivuljo izrazimo v obliki*

$$\mathbf{r}(\hat{s}) = \hat{x}(\hat{s})\mathbf{e}_1 + \hat{y}(\hat{s})\mathbf{e}_2 + \hat{s} \cos \psi \mathbf{e}_3, \quad (6.1)$$

pri čemer še vedno velja  $\|\mathbf{r}'(\hat{s})\| = 1$ .

*Dokaz.* Za vektor  $\mathbf{e}_3$  vzamemo kar normiran vektor  $\mathbf{a}$ , tako da je  $\mathbf{e}_3$  vzporeden osi vijačnice. Ostala dva vektorja si izberemo tako, da lahko potem vijačnico izrazimo v obliki

$$\mathbf{r}(s) = \hat{x}(s)\mathbf{e}_1 + \hat{y}(s)\mathbf{e}_2 + \hat{z}(s)\mathbf{e}_3.$$

Dodatno še predpostavimo, da središče spremenjenega koordinatnega sistema leži na krivulji. Potem je po enačbi (3.21)

$$\hat{z}'(s) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{r}'(s) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = \cos \psi.$$

Sedaj integriramo  $\hat{z}'(s)$ . Dobimo, da je  $\hat{z}(s) = s \cos \psi + c$ , kjer je  $c \in \mathbb{R}$  konstanta. Ločimo dva primera. Če je  $\psi \neq \pi/2$ , vzamemo nov parameter  $\hat{s} = s + \frac{c}{\cos \psi}$ . Potem je  $\hat{z}(\hat{s}) = \hat{s} \cos \psi$  in tako res lahko izrazimo vijačnico v obliki (6.1). Če pa je  $\psi = \pi/2$ , potem je  $\hat{z}(s) = c = 0$ , saj središče leži na krivulji. Teda je  $\mathbf{r}(s) = \hat{x}(s)\mathbf{e}_1 + \hat{y}(s)\mathbf{e}_2$ . V tem primeru imamo opravka z ravninsko krivuljo, ki leži v ravnini, ki jo oklepata vektorja  $\mathbf{e}_1$  in  $\mathbf{e}_2$ . Taka krivulja je pa trivialna vijačnica. Formula (6.1) prav tako drži.  $\square$

**Posledica 6.2.** *Slika enotske tangente krivulje  $\mathbf{r}$  na (enotski) sferi tvori krožnico natanko tedaj, ko je krivulja  $\mathbf{r}$  vijačna.*

*Dokaz.* Če je krivulja  $\mathbf{r}$  vijačna, sledimo karakterizaciji vijačnice po prejšnji trditvi in izračunamo odvod

$$\mathbf{r}'(s) = x'(s)\mathbf{e}_1 + y'(s)\mathbf{e}_2 + \cos \psi \mathbf{e}_3.$$

Ker je krivulja naravno parametrizirana, velja

$$x'^2(s) + y'^2(s) + \cos^2 \psi = 1.$$

Če damo  $\cos^2 \psi$  na drugo stran enačbe, dobimo ravno enačbo za krožnico s polmerom  $1 - \cos^2 \psi$ . Tako je slika enotske tangente vijačnice na sferi res krožnica.

Obratno, naj bo slika enotske tangente krivulje  $\mathbf{r}$  na enotski sferi krožnica. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da krožnica leži v ravnini, ki je vzporedna

ravnini  $z = 0$ . Prav tako lahko privzamemo, da je krivulja  $\mathbf{r}$  naravno parametrizirana. Sledi, da je enotska tangenta enaka  $\mathbf{t} = (x', y', c)$ , kjer je  $c \in (-1, 1)$  konstanta. Trdimo, da oklepa enotska tangenta  $\mathbf{t}$  konstanten kot z vektorjem  $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ . Velja

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = c = \cos \phi,$$

kjer je  $\phi = \arccos c$ . Pogoji (3.21) je izpolnjen, torej je krivulja  $\mathbf{r}$  res vijačna.  $\square$

Spomnimo se predpisa za Hopfovo preslikavo (3.33) in formule za enotsko tangento. Potem lahko enotsko **tangento**, za **hodograf** definiran s pomočjo Hopfove preslikave kompleksnih polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ , podamo v obliki

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{H(\alpha, \beta)}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2 \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}), 2 \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}))}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \quad (6.2)$$

Ta izraz nam bo prišel prav v nadaljnji obravnavi, zato ga ustrezno poimenujmo.

**Definicija 6.3.** *Normalizirana Hopfova preslikava* je preslikava, ki slika iz  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  in ima naslednji predpis za  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$$\hat{H}(\alpha, \beta) = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2 \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}), 2 \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}))}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \quad (6.3)$$

Lahko je preveriti, da velja **enakost**

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + (2 \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}))^2 + (2 \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}))^2. \quad (6.4)$$

Iz tega sledi, da slika normalizirane Hopfove preslikave leži na enotski sferi  $S^2$ . To pravzaprav ni presenetljivo, saj smo normalizirano Hopfovo preslikavo izpeljali iz izraza za enotsko tangento (6.2).

Zelo lahko je videti, da za  $\beta \neq 0$  velja  $\hat{H}(\alpha/\beta, 1) = \hat{H}(\alpha, \beta)$ . Najprej pomnožimo števec in imenovalc izraza za  $\hat{H}(\alpha/\beta, 1)$  z  $|\beta|^2$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}(\alpha/\beta, 1) &= \frac{(|\alpha/\beta|^2 - |1|^2, 2 \operatorname{Re}(\alpha/\beta \cdot 1), 2 \operatorname{Im}(\alpha/\beta \cdot 1))}{|\alpha/\beta|^2 + |1|^2} \\ &= \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2, 2 \operatorname{Re}(|\beta|^2 \cdot \alpha/\beta), 2 \operatorname{Im}(|\beta|^2 \cdot \alpha/\beta))}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}. \end{aligned}$$

Upoštevamo še dejstvo  $\beta \cdot \bar{\beta} = |\beta|^2$  in dobimo enakost  $\hat{H}(\alpha/\beta, 1) = \hat{H}(\alpha, \beta)$ .

To dejstvo nam pove, da je za obravnavo enotskih tangent **PH krivulj** dovolj pogledati razmerje polinomov  $\alpha(t)/\beta(t)$ . Različne **PH krivulje**, ki so porojene z različnimi kompleksnimi polinomi, imajo lahko torej enako enotsko tangento, če so le polinomi v enakem razmerju. Pri takih krivuljah se v dani točki  $t$  hitrostni vektor  $\mathbf{r}'(t)$  razlikuje po velikosti, ne pa po smeri.

Razmerje  $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$  nam poda racionalno krivuljo v kompleksni ravnini. To razmerje preslikamo **s** normalizirano Hopfovo preslikavo, da dobimo sliko  $\mathbf{c}(t) = \hat{H}(\mathbf{z}(t), 1)$  na enotski sferi  $S^2$ . Preslikava  $\mathbf{z} \rightarrow \hat{H}(\mathbf{z}, 1)$  je v resnici inverz stereografske projekcije. Pri inverzni stereografski projekciji potegnemo premico skozi severni tečaj sfere  $S^2$  in točko  $\mathbf{z}$  na razširjeni kompleksni ravnini (ki jo identificiramo z

$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ ). Točka, ki je slika točke  $\mathbf{z}$  z inverzno stereografsko projekcijo, se nahaja na presečišču te premice s sfero. "Točka v neskončnosti" se tako preslika v severni tečaj.

Zelo uporabna lastnost stereografske projekcije je, da se vse krožnice na  $S^2$  preslikajo v premice ali krožnice na kompleksni ravnini. To je razloženo v [13, pogl. "Stereographic projection"]. Ker je po posledici 6.2 slika enotske tangente vijačnice na sferi krožnica, lahko pridobimo potrebne pogoje za konstrukcijo vijačnic tako, da izberemo taka kompleksna polinoma  $\alpha(t)$  in  $\beta(t)$ , katerih razmerje  $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$  nam poda racionalno parametrizacijo premice oziroma krožnice v  $\mathbb{C}$ . Slika premice oziroma krožnice z normalizirano Hopfovo preslikavo je torej krožnica na  $S^2$ , torej je po posledici 6.2 pripadajoča krivulja res vijačna.

## 6.1 Kompleksne premice in krožnice

Za konstrukcijo različnih vijačnih polinomskih krivulj bo pomembna naslednja funkcija, ki realno os preslika v množico točk v kompleksni ravnini. Ima predpis

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t}, \quad (6.5)$$

kjer so  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_0$  in  $\mathbf{b}_1$  kompleksna števila, za katera velja  $\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0 \neq 0$ . Izkaže se, da nam ta predpis poda krožnico ali pa premico v kompleksni ravnini.

Vprašanje je, v katerih primerih imamo opravka s krožnicami in v katerih primerih s premicami?

**Lema 6.4.** Če je  $\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0 = 2i \operatorname{Im}(\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0) \neq 0$ , nam predpis (6.5) poda izraz za krožnico, za  $\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 = \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0$  pa nam določa premico.

*Dokaz.* Recimo, da je  $\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0 \neq 0$ . Naj bosta

$$\mathbf{z}_c = \frac{\mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \mathbf{a}_0 \bar{\mathbf{b}}_1}{\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0} \quad \text{in} \quad R = \left| \frac{\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0}{\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0} \right|.$$

Trdimo, da je  $\mathbf{z}_c$  središče krožnice, vrednost  $R$  je pa enaka polmeru te krožnice. Oglejmo si torej izraz  $|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_c|^2$ . Enak je

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_c|^2 &= \left| \frac{\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t}{\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t} - \frac{\mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \mathbf{a}_0 \bar{\mathbf{b}}_1}{\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0} \right|^2 \\ &= \left| \frac{(\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0)((1-t)\bar{\mathbf{b}}_0 + t\bar{\mathbf{b}}_1)}{(\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0)((1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1)} \right|^2. \end{aligned}$$

Če s  $\xi$  označimo  $(1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$ , je potem zgornji izraz enak

$$\left| \frac{\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0}{\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0} \right|^2 \cdot \left| \frac{\bar{\xi}}{\xi} \right|^2 = R^2 \cdot 1^2 = R^2.$$

Torej imamo v tem primeru res opravka s krožnico.



Če pa je  $\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0 = 0$ , potem  $R$  naraste čez vse meje, središče  $\mathbf{z}_c$  pa postane “točka v neskončnosti”. Izraz (6.5) tako definira premico, kar lahko pokažemo s pomočjo odvoda

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1}{(\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t)^2}.$$

Smer odvoda oziroma kot, ki ga tangentni vektor oklepa z realno osjo, je enak

$$\arg\left(\frac{dz}{dt}\right) = \arg(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0 - \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1) - 2 \arg(\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t) \mod \pi,$$

pri čemer smo upoštevali naslednje lastnosti argumenta kompleksnega števila:

$$\begin{aligned} \arg(\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2) &= \arg(\mathbf{z}_1) + \arg(\mathbf{z}_2) \mod \pi, \\ \arg\left(\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2}\right) &= \arg(\mathbf{z}_1) - \arg(\mathbf{z}_2) \mod \pi, \\ \arg(\mathbf{z}^n) &= n \arg(\mathbf{z}) \mod \pi. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Zapišimo  $\mathbf{b}_0 = b_0 + i\beta_0$  in  $\mathbf{b}_1 = b_1 + i\beta_1$ . Potem je

$$\arg(\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t) = \arctan \frac{\beta_0(1-t) + \beta_1 t}{b_0(1-t) + b_1 t} \mod \pi.$$

Osredotočimo se na izraz

$$\frac{\beta_0(1-t) + \beta_1 t}{b_0(1-t) + b_1 t}. \tag{6.7}$$

Pokažimo, da je konstanten natanko takrat, ko velja

$$b_0 \beta_1 - b_1 \beta_0 = \operatorname{Im}(\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0) = \frac{\mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_0}{2i} = 0,$$

kar je ravno predpostavka leme. Recimo, da je izraz (6.7) konstanten. Potem je  $\beta_0(1-t) + \beta_1 t = c(b_0(1-t) + b_1 t)$  za nek  $c \in \mathbb{R}$ . To enačbo malce preuredimo in dobimo

$$(\beta_0 - c b_0)(1-t) + (\beta_1 - c b_1)t = 0.$$

Polinom na levi strani te enačbe bo ničelen, če bo  $\beta_0 = c b_0$  in  $\beta_1 = c b_1$ . Vidimo, da je izraz  $b_0 \beta_1 - b_1 \beta_0$  v tem primeru res enak 0.

Obratno, recimo, da drži  $b_0 \beta_1 - b_1 \beta_0 = 0$ . Števec in imenovalec izraza (6.7) množimo z  $b_0$ . Ker je  $b_0 \beta_1 = b_1 \beta_0$ , dobimo

$$\frac{\beta_0(1-t) + \beta_1 t}{b_0(1-t) + b_1 t} = \frac{\beta_0 b_0(1-t) + \beta_0 b_1 t}{b_0^2(1-t) + b_1 b_0 t} = \frac{\beta_0(b_0(1-t) + b_1 t)}{b_0(b_0(1-t) + b_1 t)} = \frac{\beta_0}{b_0},$$

kar pa je res enako konstantni vrednosti.  $\square$

V lemi 6.4 smo pokazali, da je izraz (6.7) konstanten natanko takrat, ko je  $b_0 \beta_1 - b_1 \beta_0 = 0$ . Iz tega pogoja sledi, da velja  $\mathbf{b}_0 = k_0 \mathbf{w}$  in  $\mathbf{b}_1 = k_1 \mathbf{w}$  za  $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$  ter  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$ . Označimo  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0/\mathbf{w}$  in  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1/\mathbf{w}$ . Potem lahko v tem primeru izraz (6.5) zapišemo kot

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{c}_0(1-t) + \mathbf{c}_1 t}{k_0(1-t) + k_1 t}.$$

Izraz torej predstavlja premico natanko takrat, ko ima realen imenovalac.

S pomočjo izraza (6.5) bomo lahko konstruirali različne tipe polinomskih vijačnih krivulj višjih stopenj. Ločimo dva načina. Prvič, lahko pomnožimo števec in imenovalac ulomka (6.5) s kompleksnim polinomom, da dobimo  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$ , tako pridobljena  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  in  $\boldsymbol{\beta}(t)$  si nista tuja. Ta dva polinoma preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf  $\mathbf{r}'(t)$ . Tako pridobljene krivulje pripadajo razredu *monotonih PH vijačnic* [10, str. 371].

Drug tip vijačnic pa pridobimo s reparametrizacijo parametra  $t$ . V izrazu (6.5) uporabimo racionalno reparametrizacijo  $t \rightarrow \frac{f(t)}{g(t)}$ , kjer sta  $f(t)$  in  $g(t)$  realna polinoma vsaj druge stopnje, ki sta si med seboj tuja. Spet pridobimo izraz oblike  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$ , le da sta si tokrat v splošnem  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  in  $\boldsymbol{\beta}(t)$  tuja. Ta tip krivulj pripada razredu *splošnih PH vijačnic* [10, str. 377]. Ta dva postopka lahko tudi kombiniramo, pridobljene splošne PH vijačnice pa imajo stopnjo enako vsaj sedem.

## 6.2 Polinomske vijačne krivulje stopnje 3 in 5

### 6.2.1 Polinomske vijačne krivulje stopnje 3

Najenostavnejša racionalna parametrizacija (parametrizacija najmanjše stopnje) krožnic oziroma premic v kompleksni ravnini je predpis (6.5). Za polinoma  $\boldsymbol{\alpha}$  in  $\boldsymbol{\beta}$  izberemo kar števec in imenovalac izraza (6.5):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}(t) &= \mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1t, \\ \boldsymbol{\beta}(t) &= \mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1t.\end{aligned}$$

Ta dva polinoma vstavimo v Hopfovo preslikavo (3.33), da dobimo hodograf  $\mathbf{r}'$ . Polinom proporcionalnosti (4.18) je enak

$$\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t) = \mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0.$$

Lahko nastavimo  $h(t) \equiv 1$  in  $\mathbf{w}^2(t) = \mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0$ . Če povzamemo, vse prostorske PH krivulje stopnje 3 so vijačne in hkrati tudi DPH krivulje.

### 6.2.2 Polinomske vijačne krivulje stopnje 5 - kvadratična reparametrizacija

Da lahko sploh govorimo o polinomski vijačni krivulji stopnje 5, morata biti polinoma  $\boldsymbol{\alpha}$  in  $\boldsymbol{\beta}$ , ki ju vstavimo v predpis za normalizirano Hopfovo preslikavo oziroma običajno Hopfovo preslikavo, stopnje 2. Obstajata dva načina, kako to doseči. Oglejmo si prvega, ki mu rečemo kvadratična reparametrizacija.

Pri tem načinu preslikamo parameter  $t$  z racionalno transformacijo

$$t \rightarrow \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f_0(1-t)^2 + f_12(1-t)t + f_2t^2}{g_0(1-t)^2 + g_12(1-t)t + g_2t^2}, \quad (6.8)$$

kjer sta si  $f$  in  $g$  med sabo tuja realna polinoma stopnje 2, podana v Bernsteini bazi. Predpis (6.5) za parametrizacijo krožnice oziroma premice v kompleksni

ravnini tako postane enak

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \frac{\mathbf{a}_0 \left(1 - \frac{f(t)}{g(t)}\right) + \mathbf{a}_1 \frac{f(t)}{g(t)}}{\mathbf{b}_0 \left(1 - \frac{f(t)}{g(t)}\right) + \mathbf{b}_1 \frac{f(t)}{g(t)}} \\ &= \frac{\mathbf{a}_0(g(t) - f(t)) + \mathbf{a}_1 f(t)}{\mathbf{b}_0(g(t) - f(t)) + \mathbf{b}_1 f(t)} \\ &= \frac{\boldsymbol{\alpha}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{\alpha}_1 2(1-t)t + \boldsymbol{\alpha}_2 t^2}{\boldsymbol{\beta}_0(1-t)^2 + \boldsymbol{\beta}_1 2(1-t)t + \boldsymbol{\beta}_2 t^2}, \end{aligned}$$

kjer so  $\boldsymbol{\alpha}_i = f_i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_i \mathbf{a}_0$  in  $\boldsymbol{\beta}_i = f_i(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_i \mathbf{b}_0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , Bernsteinovi koeficienti polinomov  $\boldsymbol{\alpha}$  in  $\boldsymbol{\beta}$ . S programom *Mathematica* lahko preverimo, da ima polinom proporcionalnosti obliko

$$\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t) = h(t)(\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0),$$

kjer s  $h(t)$  označimo realen polinom druge stopnje. Ta polinom ima Bernsteinove koeficiente enake

$$\begin{aligned} h_0 &= 2(f_1g_0 - f_0g_1), \\ h_1 &= f_2g_0 - f_0g_2, \\ h_2 &= 2(f_2g_1 - f_1g_2) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Izkaže se, da je tako podan polinom  $h(t)$  enak  $f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$ , kar lahko spet preverimo z *Mathematico*. **DPH pogoj** (4.18) je tako izpolnjen s  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . Kot smo že omenili pred začetkom tega poglavja in kot lahko zasledimo v [1, str. 118], nam tak postopek ne da monotone **PH vijačnice**, temveč splošno **PH vijačnico**.

Če preko relacije (3.34) tvorimo kvaternioni polinom  $\mathcal{A}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathbf{k}\boldsymbol{\beta}(t)$  opazimo zanimivo dejstvo. Bernsteinovi koeficienti tega polinoma se izražajo v obliki

$$\mathcal{A}_i = f_i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)) + g_i(\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0), \quad i = 0, 1, 2. \tag{6.10}$$

Vse tri koeficiente  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{A}_1$  in  $\mathcal{A}_2$  se da izraziti kot linearno kombinacijo dveh kvaternionov, in sicer  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  ter  $\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0$ . Vsi trije koeficienti torej ležijo v isti kvaternioni ravnini, ki jo razpenjata ta dva kvaterniona. Kot je omenjeno v [10, str. 378], je to tudi zadosten pogoj za to, da dobimo vijačno krivuljo stopnje 5. Koeficient  $\mathcal{A}_1$  izrazimo kot

$$\mathcal{A}_1 = c_0\mathcal{A}_0 + c_2\mathcal{A}_2, \tag{6.11}$$

kjer sta  $c_0, c_2 \in \mathbb{R}$  konstanti. Ko to vrednost primerjamo z enačbami (6.10), ugotovimo, da se konstanti izražata kot

$$c_0 = \frac{h_2}{2h_1} \quad \text{in} \quad c_2 = \frac{h_0}{2h_1}.$$

### 6.2.3 Polinomske vijačne krivulje stopnje 5 - množenje z linearnim polinomom

Tokrat v izrazu (6.5) množimo števec in imenoalec z istim kompleksnim linearnim polinomom  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1t$ . Iskano racionalno parametrizacijo  $\mathbf{z}(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(t)}{\boldsymbol{\beta}(t)}$

krožnice oziroma premice dosežemo z

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= (\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t)(\mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1 t) \\
&= \mathbf{a}_0 \mathbf{w}_0 (1-t)^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_0 \mathbf{w}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{w}_0) 2(1-t)t + \mathbf{a}_1 \mathbf{w}_1 t^2, \\
\beta(t) &= (\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t)(\mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1 t) \\
&= \mathbf{b}_0 \mathbf{w}_0 (1-t)^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{b}_0 \mathbf{w}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{w}_0) 2(1-t)t + \mathbf{b}_1 \mathbf{w}_1 t^2.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Pri računanju polinoma proporcionalnosti si lahko pomagamo z *Mathematico*. Dobimo, da je enak

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = (\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0)(\mathbf{w}_0(1-t) + \mathbf{w}_1 t)^2.$$

DPH pogoj (4.18) je izpolnjen s  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . Kot je argumentirano v [1, str. 118], nam ta postopek poda monotono PH vijačnico.

V [10, str. 390] so monotone PH vijačnice stopnje 5 karakterizirane preko Bernsteinovih koeficientov kvadratičnega kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$ , med katerimi velja zveza

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \mathbf{c}_0 + \mathcal{A}_2 \mathbf{c}_2, \tag{6.13}$$

kjer sta  $\mathbf{c}_0$  in  $\mathbf{c}_2$  "kompleksni števili" - kvaterniona, ki sta enaka 0 pri komponentah  $\mathbf{j}$  in  $\mathbf{k}$ , in zanju velja enakost

$$4\mathbf{c}_0 \mathbf{c}_2 = 1. \tag{6.14}$$

Izpeljimo to kvaternionsko predstavitev iz Hopfove. Kvaternionski polinom  $\mathcal{A}(t) = \alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t)$  tvorimo preko zveze (3.34) in polinomov (6.12) in dobimo naslednje Bernsteinove koeficiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= (\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_0, \\
\mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2}((\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{a}_1 + \mathbf{k}\mathbf{b}_1)\mathbf{w}_0), \\
\mathcal{A}_2 &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{k}\mathbf{b}_1)\mathbf{w}_1.
\end{aligned}$$

Zaradi komutativnosti množenja kompleksnih števil lahko naslednje zmnožke zapišemo kot

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{w}_1 = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_2 \mathbf{w}_0 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{k}\mathbf{b}_1)\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1.$$

Če prvi zmnožek delimo z desne z  $2\mathbf{w}_0$ , drugega pa z  $2\mathbf{w}_1$  dobimo ravno izraz za  $\mathcal{A}_1$ ,

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \left( \frac{\mathbf{w}_1}{2\mathbf{w}_0} \right) + \mathcal{A}_2 \left( \frac{\mathbf{w}_0}{2\mathbf{w}_1} \right).$$

Sklepamo lahko, da je potem  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{w}_1/2\mathbf{w}_0$  in  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{w}_0/2\mathbf{w}_1$ , kar tudi ustreza pogoju (6.14).

Primera generiranja vijačnice preko kvadratične reparametrizacije oziroma množenja z linearnim polinomom se lahko tudi prekrivata. Če je v primeru kvadratične reparametrizacije polinom  $h$  enak kvadratu linearnega polinoma (če drži  $h_0 h_2 = h_1^2$ ),

je potem polinom proporcionalnosti produkt kompleksne konstante in kvadrata linearnega realnega polinoma. Podobno se lahko zgodi v primeru množenja z linearnim polinomom. Če se da en koeficient polinoma  $\mathbf{w}$  izraziti z drugim, npr.  $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{w}_0$ , kjer je  $k \in \mathbb{R}$  realna konstanta, je tudi v tem primeru polinom proporcionalnosti enak produktu kompleksne konstante s kvadratom realnega polinoma. Teh izrojenih primerov ne bomo obravnavali.

### 6.3 Polinomske vijačne krivulje stopnje 7

Pri polinomskih vijačnih krivuljah stopnje 7 bomo postopali podobno kot pri polinomskih vijačnicah stopnje 5. Polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ , ki ju preslikamo s Hopfovo preslikavo, da dobimo hodograf, morata biti stopnje 3. Tokrat imamo na voljo tri različne načine generiranja teh dveh polinomov. Prvi način je kubična reparametrizacija, ki je analogen kvadratični reparametrizaciji 6.2.2 v primeru vijačnic stopnje 5. Drugi način gre preko množenja s kvadratičnim polinomom, ki je analogen primeru 6.2.3, tretji način pa uporabi tako reparametrizacijo kot množenje s polinomom. Posvetimo se najprej prvemu primeru.

#### 6.3.1 Kubična reparametrizacija

Kot v poglavju 6.2.2 tudi zdaj reparametriziramo parameter  $t$  z racionalno parametrizacijo, le da tokrat izberemo polinoma  $f$  in  $g$  tretje stopnje namesto druge stopnje. Dobimo povsem analogen izraz

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\alpha_0(1-t)^3 + \alpha_1 3(1-t)^2 t + \alpha_2 3(1-t)t^2 + \alpha_3 t^3}{\beta_0(1-t)^3 + \beta_1 3(1-t)^2 t + \beta_2 3(1-t)t^2 + \beta_3 t^3},$$

kjer so  $\alpha_i = f_i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_i \mathbf{a}_0$  in  $\beta_i = f_i(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_i \mathbf{b}_0$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , Bernsteinovi koeficienti polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ . S programom *Mathematica* preverimo, da je izraz za polinom proporcionalnosti

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = h(t)(\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0)$$

povsem analogen kot v poglavju 6.2.2, saj je  $h(t) = f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$ . Bernsteinovi koeficienti tega polinoma so enaki

$$\begin{aligned} h_0 &= 3(f_1g_0 - f_0g_1), & h_1 &= \frac{3}{2}(f_2g_0 - f_0g_2), \\ h_2 &= \frac{3}{2}(f_2g_1 - f_1g_2) + \frac{1}{2}(f_3g_0 - f_0g_3), \\ h_3 &= \frac{3}{2}(f_3g_1 - f_1g_3), & h_4 &= 3(f_3g_2 - f_2g_3). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Vidimo, da je DPH pogoj (4.18) izpolnjen in velja  $\text{st}(h) = 4$  ter  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . Dobimo splošno PH vijačnico stopnje 7.

Oglejmo si še pripadajoč kvaternionski polinom  $\mathcal{A}(t) = \alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t)$ . Kot v poglavju 6.2.2 se Bernsteinovi koeficienti tega polinoma izražajo na enak način kot v (6.10), in sicer:

$$\mathcal{A}_i = f_i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)) + g_i(\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0), \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{6.16}$$

Sklep je podoben kot prej. Vsi ti koeficienti so linearna kombinacija kvaternionov  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  in  $\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0$ . Potemtakem se koeficienta  $\mathcal{A}_1$  in  $\mathcal{A}_2$  da izraziti s pomočjo koeficientov  $\mathcal{A}_0$  in  $\mathcal{A}_3$  kot

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 c_{10} + \mathcal{A}_3 c_{13} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_0 c_{20} + \mathcal{A}_3 c_{23} \quad (6.17)$$

za primerne realne konstante  $c_{10}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{20}$  in  $c_{23}$ . Ko vstavimo vrednosti koeficientov (6.16) v (6.17) in iz njih izrazimo vrednosti konstant, vidimo, da se konstante izražajo s pomočjo Bernsteinovih koeficientov polinoma  $h$ , ki smo jih že omenili v (6.15), ter s pomočjo vrednosti  $k = f_3 g_0 - f_0 g_3$ . Velja namreč

$$c_{10} = \frac{2h_3}{3k}, \quad c_{13} = \frac{h_0}{3k}, \quad c_{20} = \frac{h_4}{3k}, \quad c_{23} = \frac{2h_1}{3k}.$$

### 6.3.2 Množenje s kvadratičnim polinomom

Podobno kot smo v poglavju 6.2.3 pri krivuljah stopnje 5 množili števec in imenovalc ulomka (6.5) s kompleksnim linearnim polinomom, tokrat množimo s kompleksnim kvadratičnim polinomom. Polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  sta enaka

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1 t)(\mathbf{w}_0(1-t)^2 + \mathbf{w}_1 2(1-t)t + \mathbf{w}_2 t^2), \\ \beta(t) &= (\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1 t)(\mathbf{w}_0(1-t)^2 + \mathbf{w}_1 2(1-t)t + \mathbf{w}_2 t^2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Potemtakem so Bernsteinovi koeficienti obeh polinomov enaki

$$\alpha_0 = \mathbf{a}_0 \mathbf{w}_0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_0 \mathbf{w}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{w}_0), \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{a}_0 \mathbf{w}_2), \quad \alpha_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{w}_2, \quad (6.19)$$

$$\beta_0 = \mathbf{b}_0 \mathbf{w}_0, \quad \beta_1 = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_0 \mathbf{w}_1 + \mathbf{b}_1 \mathbf{w}_0), \quad \beta_2 = \frac{1}{3}(2\mathbf{b}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{b}_0 \mathbf{w}_2), \quad \beta_3 = \mathbf{b}_1 \mathbf{w}_2. \quad (6.20)$$

*Mathematica* nam ponovno olajša delo pri preverjanju, da je polinom proporcionalnosti enak

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = (\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_0)(\mathbf{w}_0(1-t)^2 + \mathbf{w}_1 2(1-t)t + \mathbf{w}_2 t^2)^2.$$

DPH pogoji (4.18) je tokrat izpolnjen pri  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ . Iz istega razloga kot v poglavju 6.2.3 je pridobljena vijačnica monotono vijačna.

Oglejmo si še analizo s kvaternioni. Tokrat imamo opravka s kubičnim kvaternionskim polinomom  $\mathcal{A}(t) = \alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t)$  z naslednjimi Bernsteinovimi koeficienti

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= (\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_0, \quad \mathcal{A}_1 = \frac{1}{3}(2(\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{a}_1 + \mathbf{k}\mathbf{b}_1)\mathbf{w}_0), \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{3}(2(\mathbf{a}_1 + \mathbf{k}\mathbf{b}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_2), \quad \mathcal{A}_3 = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{k}\mathbf{b}_1)\mathbf{w}_2, \end{aligned}$$

ki sledijo iz (6.19) in (6.20). Podobno kot v poglavju 6.2.3 lahko izrazimo koeficienta  $\mathcal{A}_1$  in  $\mathcal{A}_2$  s pomočjo  $\mathcal{A}_0$  in  $\mathcal{A}_3$  v obliki

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \mathbf{c}_{10} + \mathcal{A}_3 \mathbf{c}_{13} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_0 \mathbf{c}_{20} + \mathcal{A}_3 \mathbf{c}_{23}. \quad (6.21)$$

Ni težko preveriti, da so koeficienti  $\mathbf{c}_{10}$ ,  $\mathbf{c}_{13}$ ,  $\mathbf{c}_{20}$  in  $\mathbf{c}_{23}$  pravzaprav “kompleksna števila” – kvaternioni, ki so enaki 0 pri komponentah  $\mathbf{j}$  in  $\mathbf{k}$ , ter se izražajo s pomočjo  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{w}_1$  in  $\mathbf{w}_2$  kot

$$\mathbf{c}_{10} = \frac{2\mathbf{w}_1}{3\mathbf{w}_0}, \quad \mathbf{c}_{13} = \frac{\mathbf{w}_0}{3\mathbf{w}_2}, \quad \mathbf{c}_{20} = \frac{\mathbf{w}_2}{3\mathbf{w}_0}, \quad \mathbf{c}_{23} = \frac{2\mathbf{w}_1}{3\mathbf{w}_2}. \quad (6.22)$$

Tudi pri polinomskih vijačnih krivuljah stopnje 7 pride do prekrivanja primerov kubične reparametrizacije in množenja s kvadratičnim polinomom, podobno kot smo že videli pri polinomskih vijačnih krivuljah stopnje 5. Če je polinom  $h$  stopnje 4 iz primera kubične reparametrizacije 6.3.1 pravzaprav kvadrat kvadratičnega polinoma in če se v primeru množenja kvadratičnega polinoma koeficienti  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{w}_1$  in  $\mathbf{w}_2$  izražajo kot  $\mathbf{w}_i = \mathbf{c}w_i$ , kjer je  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}$  kompleksna konstanta ter  $w_i \in \mathbb{R}$  realne konstante za  $i = 0, 1, 2$ , je potem polinom proporcionalnosti v obeh primerih enak zmnožku kompleksne konstante in kvadrata realnega polinoma druge stopnje, kar nakazuje, da imamo opravka z izrojenimi DPH krivuljami.

### 6.3.3 Reparametrizacija in multiplikacija

Tretji način generiranja vijačnih krivulj stopnje 7 kombinira oba prejšnja načina: na izrazu (6.5) najprej izvedemo kvadratično reparametrizacijo, kot je bilo opisano v poglavju 6.2.2, in nato pomnožimo števec in imenovalc pridobljenega ulomka s kompleksnim linearnim polinomom  $\mathbf{w}_0(1 - t) + \mathbf{w}_1t$ , kot je bilo opisano v poglavju 6.2.3. Tako pridobljena polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  sta res polinoma stopnje 3, kar pomeni, da je potem polinomska vijačna krivulja, pridobljena iz hodografa, res krivulja stopnje 7. Pomembno je, da najprej izvedemo reparametrizacijo in šele nato množenje, saj v nasprotnem primeru ne dobimo racionalne parametrizacije premice oziroma krožnice, kjer bi bila  $\alpha$  in  $\beta$  polinoma stopnje 3, temveč bi bila potem stopnje 4. Po krajšem računu ugotovimo, da so Bernsteinovi koeficienti teh dveh polinomov enaki

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (f_0(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_0\mathbf{a}_0)\mathbf{w}_0, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{3} \left( (f_0(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_0\mathbf{a}_0)\mathbf{w}_1 + 2(f_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_1\mathbf{a}_0)\mathbf{w}_0 \right), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3} \left( (f_2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_2\mathbf{a}_0)\mathbf{w}_0 + 2(f_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_1\mathbf{a}_0)\mathbf{w}_1 \right), \\ \alpha_3 &= (f_2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_2\mathbf{a}_0)\mathbf{w}_1, \\ \beta_0 &= (f_0(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_0\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_0, \\ \beta_1 &= \frac{1}{3} \left( (f_0(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_0\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_1 + 2(f_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_1\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_0 \right), \\ \beta_2 &= \frac{1}{3} \left( (f_2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_2\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_0 + 2(f_1(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_1\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_1 \right), \\ \beta_3 &= (f_2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_2\mathbf{b}_0)\mathbf{w}_1. \end{aligned} \quad (6.23)$$

S pomočjo *Mathematice* ugotovimo, da je polinom proporcionalnosti enak

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = h(t)(\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0)(\mathbf{w}_0(1 - t) + \mathbf{w}_1t)^2,$$

kjer je  $h(t) = f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$  povsem enak, kot v poglavju 6.2.2. Tokrat je DPH pogoji (4.18) izpolnjen pri  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ .

Za lažji zapis kvaternionskega kubičnega polinoma  $\mathcal{A}(t) = \alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t)$  si najprej definirajmo kvaterniona  $\mathcal{V}_0 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  in  $\mathcal{V}_1 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0$ . Potem lahko iz (6.23) sklepamo, da so Bernsteinovi koeficienti polinoma  $\mathcal{A}$  enaki

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= (f_0\mathcal{V}_0 + g_0\mathcal{V}_1)\mathbf{w}_0, \\ \mathcal{A}_1 &= \frac{1}{3}(f_0\mathcal{V}_0 + g_0\mathcal{V}_1)\mathbf{w}_1 + \frac{2}{3}(f_1\mathcal{V}_0 + g_1\mathcal{V}_1)\mathbf{w}_0, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{3}(f_2\mathcal{V}_0 + g_2\mathcal{V}_1)\mathbf{w}_0 + \frac{2}{3}(f_1\mathcal{V}_0 + g_1\mathcal{V}_1)\mathbf{w}_1, \\ \mathcal{A}_3 &= (f_2\mathcal{V}_0 + g_2\mathcal{V}_1)\mathbf{w}_1.\end{aligned}$$

Kot smo že videli v prejšnjih poglavjih, lahko koeficienta  $\mathcal{A}_1$  in  $\mathcal{A}_2$  izrazimo s pomočjo  $\mathcal{A}_0$  in  $\mathcal{A}_3$  preko zveze

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0\mathbf{c}_{10} + \mathcal{A}_3\mathbf{c}_{13} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_0\mathbf{c}_{20} + \mathcal{A}_3\mathbf{c}_{23},$$

kjer so  $\mathbf{c}_{10}$ ,  $\mathbf{c}_{13}$ ,  $\mathbf{c}_{20}$  in  $\mathbf{c}_{23}$  kompleksne konstante, ki jih podamo s pomočjo koeficientov  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{w}_1$  in  $\mathbf{w}_2$  ter Bernsteinovih koeficientov polinoma  $h$ . Da se preveriti, da so enake

$$\mathbf{c}_{10} = \frac{h_1\mathbf{w}_1 + h_2\mathbf{w}_0}{3h_1\mathbf{w}_0}, \quad \mathbf{c}_{13} = \frac{h_0\mathbf{w}_0}{3h_1\mathbf{w}_1}, \quad \mathbf{c}_{20} = \frac{h_2\mathbf{w}_1}{3h_1\mathbf{w}_0}, \quad \mathbf{c}_{23} = \frac{h_1\mathbf{w}_0 + h_0\mathbf{w}_1}{3h_1\mathbf{w}_1}. \quad (6.24)$$

## 6.4 Polinomske vijačne krivulje višjih stopenj

V poglavjih 6.2.2 in 6.3.1 smo videli, da so se Bernsteinovi koeficienti polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  izražali preko pravzaprav iste zveze. Ta zveza je enaka tudi za višje stopnje. Recimo, da sedaj uporabimo reparametrizacijo  $t \rightarrow f(t)/g(t)$  stopnje  $m$ , kar pomeni, da sta polinoma  $f$  in  $g$  stopnje  $m$  ter je  $m \geq 2$ . Polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  sta stopnje  $m$ , tako da je potem pridobljena krivulja stopnje  $2m + 1$ . Koeficienti se izražajo kot

$$\alpha_i = f_i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + g_i\mathbf{a}_0 \quad \text{in} \quad \beta_i = f_i(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + g_i\mathbf{b}_0 \quad \text{za} \quad i = 0, \dots, m.$$

Prav tako je enostavno izraziti Bernsteinove koeficiente kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}(t) = \alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t)$ , ki so enaki

$$\mathcal{A}_i = f_i(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)) + g_i(\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0) \quad \text{za} \quad i = 0, \dots, m.$$

Ker so koeficienti  $f_i$  in  $g_i$  realni, lahko iz zgornjega opazimo, da je  $m+1$  kvaternionov linearno odvisnih od kvaternionov  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 + \mathbf{k}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$  in  $\mathbf{a}_0 + \mathbf{k}\mathbf{b}_0$ .

Prav tako lahko posplošimo postopek množenja izraza (6.5) s polinomom, kot smo ga spoznali v poglavjih 6.2.3 in 6.3.2. Polinoma  $\mathbf{a}_0(1-t) + \mathbf{a}_1t$  in  $\mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_1t$  množimo s kompleksnim polinomom stopnje  $m-1$ ,  $m \geq 2$ , ki ima Bernsteinove koeficiente  $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$ . Bernsteinovi koeficienti polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  so potem enaki  $\alpha_0 = \mathbf{a}_0\mathbf{w}_0$ ,  $\alpha_m = \mathbf{a}_1\mathbf{w}_{m-1}$ ,  $\beta_0 = \mathbf{b}_0\mathbf{w}_0$ ,  $\beta_m = \mathbf{b}_1\mathbf{w}_{m-1}$ , za  $k = 1, \dots, m-1$  pa velja

$$\alpha_k = \frac{(m-k)\mathbf{a}_0\mathbf{w}_k + k\mathbf{a}_1\mathbf{w}_{k-1}}{m} \quad \text{in} \quad \beta_k = \frac{(m-k)\mathbf{b}_0\mathbf{w}_k + k\mathbf{b}_1\mathbf{w}_{k-1}}{m}.$$



Formule sledijo neposredno iz pravil množenja polinomov, zapisanih v Bernsteinovi bazi. Za polinom proporcionalnosti tudi v splošnem velja formula

$$\boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\beta}'(t) - \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{\beta}(t) = (\mathbf{a}_0\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_0)\mathbf{w}^2(t).$$

Tudi pri kvaternionskem zapisu se da ugotoviti, da se koeficienti  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{m-1}$  izražajo s pomočjo dveh koeficientov  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_m$  in kompleksnih konstant  $\mathbf{c}_{k0}, \mathbf{c}_{km}$  za  $k = 1, \dots, m-1$ .

Po zgledu iz prejšnjega poglavja 6.3.3 lahko tudi najprej uporabimo reparametrizacijo in nato izvedemo še postopek množenja s kompleksnim polinomom, da dobimo še en različen razred polinomskih vijačnih krivulj.

## 7 Nevijačne DPH krivulje

Po trditvi 4.2 vemo, da je vsaka polinomska vijačna krivulja tudi DPH krivulja. Iz primera 3.13 je pa tudi razvidno, da obratno ni nujno res: obstajajo DPH krivulje, ki niso nujno polinomske vijačnice. Le-te morajo biti vsaj stopnje sedem, saj za nižje stopnje DPH krivulje sovpadajo z polinomskimi vijačnicami, kot smo omenili v izreku 4.3. V tem poglavju bomo raziskali pogoje, ki nam bodo za vsak tip DPH krivulj stopnje 7, opisanih v poglavju 5.2, povedali, ali je dana DPH krivulja stopnje 7 nevijačna ali vijačna.

Pri analizi si bomo pomagali s Hopfovim modelom. Začeli bomo z nekaj lemmami, ki jih bomo v nadaljevanju uporabili pri posameznih primerih DPH krivulj. Za kubična polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ , ki porodita ustrezno DPH krivuljo stopnje 7, bomo v nadaljevanju z  $\gamma$  označili največji skupni delitelj polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ , tako da velja  $\alpha(t) = \gamma(t)\tilde{\alpha}(t)$  in  $\beta(t) = \gamma(t)\tilde{\beta}(t)$ . Stopnjo polinoma  $\gamma$  označimo z  $r$ , torej je potem stopnja polinomov  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  enaka  $3 - r$ , kjer je  $0 \leq r \leq 3$ .

**Lema 7.1.** Če polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  porodita nevijačno DPH krivuljo, je  $r \leq 1$ .

*Dokaz.* Recimo, da je  $r = 3$ . Potem sta si polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  proporcionalna, tako da je njun polinom proporcionalnosti identično enak 0. Potem je po enačbi (4.17) tudi fleksijska ukrivljenost krivulje, ki ju generirata polinoma, enaka 0, kar pomeni, da imamo pravzaprav opravka s premico, premica pa je trivialno vijačna krivulja, saj lahko vzamemo v definiciji 3.10 kot  $\psi = 0$ .

Oglejmo si sedaj primer, ko je  $r = 2$ . Potem je  $\gamma$  kvadratičen polinom, polinoma  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  pa sta linearna. Sledi, da  $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t) = \tilde{\alpha}(t)/\tilde{\beta}(t)$  definira premico ali krožnico v kompleksni ravnini, kot smo opisali v poglavju 6.1 in kot se vidi iz enačbe (6.5). Vemo, da je slika premice oziroma krožnice v kompleksni ravnini z normalizirano Hopfovo preslikavo  $\hat{H}(\mathbf{z}, 1)$  krožnica na  $S^2$ . Ker velja  $\hat{H}(\mathbf{z}, 1) = \hat{H}(\alpha/\beta, 1) = \hat{H}(\alpha, \beta)$ , nam ta izraz predstavlja tudi izraz za enotsko tangento. Po posledici 6.2 je potem krivulja, porojena s polinomoma  $\alpha$  in  $\beta$ , res vijačna. V primerih  $r = 3$  in  $r = 2$  obakrat dobimo vijačne DPH krivulje, torej mora za nevijačne DPH krivulje res držati  $r \leq 1$ .  $\square$

**Lema 7.2.** Naj za polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  velja  $r = \text{st}(\gamma) = \text{st}(\text{gcd}(\alpha, \beta)) = 1$ . Če je polinom  $h$  konstanten polinom ali kvadrat kakega drugega polinoma, potem DPH pogoj (4.18) ni izpolnjen.

*Dokaz.* Če je  $r = 1$ , sta polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  kubična, medtem ko sta polinoma  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  kvadratična. Polinom proporcionalnosti teh dveh polinomov  $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}' - \tilde{\alpha}'\tilde{\beta}$  je tudi kvadratičen. Predružačimo DPH pogoj (4.18) v

$$\gamma^2(t)(\tilde{\alpha}(t)\tilde{\beta}'(t) - \tilde{\alpha}'(t)\tilde{\beta}(t)) = h(t)\mathbf{w}^2(t). \quad (7.1)$$

Če je polinom  $h$  identično enak neki realni konstanti ali pa je kvadrat nekega drugega realnega polinoma, je potem

$$\tilde{\alpha}(t)\tilde{\beta}'(t) - \tilde{\alpha}'(t)\tilde{\beta}(t) = \delta^2(t), \quad (7.2)$$

kjer je  $\delta$  kompleksen linearen polinom. Recimo, da je  $\tau$  ničla tega polinoma. Potem velja

$$\tilde{\alpha}(\tau)\tilde{\beta}'(\tau) - \tilde{\alpha}'(\tau)\tilde{\beta}(\tau) = \tilde{\alpha}(\tau)\tilde{\beta}''(\tau) - \tilde{\alpha}''(\tau)\tilde{\beta}(\tau) = 0. \quad (7.3)$$

Polinoma  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  sta si tuja po definiciji. Iz tega lahko sklepamo, da vrednosti  $\tilde{\alpha}(\tau)$  in  $\tilde{\beta}(\tau)$  ne moreta biti obe hkrati enaki nič. Označimo s  $\mathbf{k}$  razmerje  $\tilde{\beta}(\tau)/\tilde{\alpha}(\tau)$ . Iz (7.3) potem sledi

$$\tilde{\beta}(\tau) = \mathbf{k}\tilde{\alpha}(\tau), \quad \tilde{\beta}'(\tau) = \mathbf{k}\tilde{\alpha}'(\tau), \quad \tilde{\beta}''(\tau) = \mathbf{k}\tilde{\alpha}''(\tau). \quad (7.4)$$

Ker sta polinoma  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  kvadratična, je moč iz zgornjih enakosti sklepati, da sta polinoma proporcionalna. To pa je v protislovju s predpostavko, da sta si tuja.

Privzemimo, da je sedaj  $\tilde{\alpha}(\tau) = 0 \neq \tilde{\beta}(\tau)$ . Če ta podatka vnesemo v enačbo (7.3), vidimo, da je  $\tilde{\alpha}'(\tau) = \tilde{\alpha}''(\tau) = 0$ . Potem lahko polinom  $\tilde{\alpha}$  zapišemo kot  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_0(t - \tau)^2$  za neko neničelno kompleksno konstanto  $\tilde{\alpha}_0$ . Na podoben način zapišemo tudi polinom  $\delta$ , ki je enak  $\delta(t) = \delta_0(t - \tau)$  za neničelno kompleksno konstanto  $\delta_0$ . Če vstavimo to dvojico v enačbo (7.2), dobimo

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}_0(t - \tau)^2)\tilde{\beta}'(t) - (2\tilde{\alpha}_0(t - \tau))\tilde{\beta}(t) &= \delta_0^2(t - \tau)^2 \\ \tilde{\alpha}_0(\tilde{\beta}'(t)(t - \tau) - 2\tilde{\beta}(t)) &= \delta_0^2(t - \tau) \\ 2\tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}(t) &= (t - \tau)(-\delta_0^2 + \tilde{\alpha}_0\tilde{\beta}'(t)). \end{aligned}$$

Po tej izpeljavi je  $\tilde{\beta}(\tau) = 0$ , kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je  $\tilde{\beta}(\tau) \neq 0$ . Do podobnega protislovja pridemo, če predpostavimo  $\tilde{\alpha}(\tau) \neq 0$  in  $\tilde{\beta}(\tau) = 0$ . Dokazali smo, da če je  $r = 1$  in je polinom  $h$  konstanten ali enak kvadratu nekega drugega polinoma, DPH pogoj ne more biti izpolnjen.  $\square$

**Lema 7.3.** Naj bodo  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$  in  $\mathbf{b}_2$  taka kompleksna števila, da velja  $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 \neq 0$  in naj bo  $\phi$  realna spremenljivka. Če velja  $|\mathbf{b}_1| \neq |\mathbf{b}_2|$  nam funkcija s predpisom

$$\mathbf{z}(\phi) = \frac{\mathbf{a}_1 e^{i\phi} + \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 e^{i\phi} + \mathbf{b}_2} \quad (7.5)$$

poda krožnico v kompleksni ravnini s središčem v  $\mathbf{z}_c$  in polmerom  $R$ , ki sta podana z

$$\mathbf{z}_c = \frac{\mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{a}_2 \bar{\mathbf{b}}_2}{|\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2} \quad \text{in} \quad R = \left| \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2} \right|. \quad (7.6)$$

Če velja  $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2|$ , nam zgornja funkcija poda premico namesto krožnice.

*Dokaz.* Oglejmo si izraz  $\mathbf{z}(\phi) - \mathbf{z}_c$ , ki je enak

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\phi) - \mathbf{z}_c &= \frac{(\mathbf{a}_1 e^{i\phi} + \mathbf{a}_2)(|\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2) - (\mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{b}}_1 - \mathbf{a}_2 \bar{\mathbf{b}}_2)(\mathbf{b}_1 e^{i\phi} + \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_1 e^{i\phi} + \mathbf{b}_2)(|\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2)} \\ &= \frac{-\mathbf{a}_1 |\mathbf{b}_2|^2 e^{i\phi} + \mathbf{a}_2 |\mathbf{b}_1|^2 - \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 \bar{\mathbf{b}}_2 e^{i\phi}}{(\mathbf{b}_1 e^{i\phi} + \mathbf{b}_2)(|\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2)} \\ &= \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1|^2 - |\mathbf{b}_2|^2} \cdot \frac{\bar{\mathbf{b}}_1 e^{-i\phi} + \bar{\mathbf{b}}_2}{\mathbf{b}_1 e^{i\phi} + \mathbf{b}_2} e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Zanima nas absolutna vrednost tega izraza. V absolutni vrednosti levega ulomka prepoznamo izraz za  $R$ , v desnem ulomku pa opazimo, da je števec enak konjugirani vrednosti imenovalca. Absolutna vrednost desnega ulomka je tako enaka 1, prav tako je enaka 1 absolutna vrednost izraza  $e^{i\phi}$ . Tako velja  $|\mathbf{z}(\phi) - \mathbf{z}_c| = R$ , torej je za  $|\mathbf{b}_1| \neq |\mathbf{b}_2|$  slika funkcije  $\phi \mapsto \mathbf{z}(\phi)$  res krožnica s središčem  $\mathbf{z}_c$  in polmerom  $R$ .

Če je  $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2|$ , postane točka  $\mathbf{z}_c$  "točka v neskončnosti", polmer  $R$  pa tudi postane neskončen, kar pa ustreza karakterizaciji premice.  $\square$

**Opomba 7.4.** Če je  $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = 0$ , je potem  $\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1/\mathbf{b}_2 = \mathbf{k}$ , kjer je  $\mathbf{k}$  kompleksna konstanta. V tem primeru se nam tudi funkcija (7.5) izrodi v konstantno funkcijo. Ta primer nas ne zanima.

**Lema 7.5.** Če sta  $\tau_1, \tau_2$  obe realni števili ali kompleksni si konjugirani števili, nam funkcija

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_1(t - \tau_1)^m + \mathbf{a}_2(t - \tau_2)^m}{\mathbf{b}_1(t - \tau_1)^m + \mathbf{b}_2(t - \tau_2)^m} \quad (7.7)$$

realne spremenljivke  $t$  za celo število  $m$  poda premico oziroma krožnico v kompleksni ravnini. V nasprotnem primeru nam funkcija  $\mathbf{z}$  ne poda krožnice oziroma premice v kompleksni ravnini.

*Dokaz.* Označimo  $\mathbf{f}(t) = (t - \tau_1)^m / (t - \tau_2)^m$ . Potem velja

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{f}(t) + \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1\mathbf{f}(t) + \mathbf{b}_2}.$$

Če sta  $\tau_1, \tau_2$  realni števili, postane funkcija  $\mathbf{f}(t)$  realna funkcija  $f(t)$ . Vidimo, da imamo spet opravka z racionalno reparametrizacijo  $t \rightarrow f(t)$  parametra  $t$  v izrazu (6.5), ki opisuje krožnico oziroma premico v kompleksni ravnini.

Če sta si  $\tau_1, \tau_2$  kompleksni konjugirani si števili, lahko predpis za funkcijo  $\mathbf{f}(t)$  zapišemo krajše kot

$$\mathbf{f}(t) = \frac{(t - \tau_1)^{2m}}{|(t - \tau_1)^{2m}|} = e^{i2m \arg(t - \tau_1)}.$$

Označimo  $\phi = 2m \arg(t - \tau_1)$ . Opazimo, da ima potem funkcija  $\mathbf{z}(t)$  enak predpis kot funkcija (7.5) iz leme 7.3, katere slika je krožnica oziroma premica v kompleksni ravnini.

Recimo sedaj, da  $\tau_1, \tau_2$  nista realni števili in nista kompleksni konjugirani si števili. Potem je  $\mathbf{f}(t)$  enaka

$$\mathbf{f}(t) = \frac{(r_1(t))^m e^{im \arg(t - \tau_1)}}{(r_2(t))^m e^{im \arg(t - \tau_2)}},$$

kjer je  $r_i(t)$  funkcija, ki je enaka absolutni vrednosti števila  $t - \tau_i$  za  $i = 1, 2$ , in je odvisna od parametra  $t$ . Potem lahko funkcijo  $\mathbf{z}(t)$  zapišemo kot

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{a}_1 \left( \frac{r_1(t)}{r_2(t)} \right)^m e^{im(\arg(t - \tau_1) - \arg(t - \tau_2))} + \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 \left( \frac{r_1(t)}{r_2(t)} \right)^m e^{im(\arg(t - \tau_1) - \arg(t - \tau_2))} + \mathbf{b}_2}.$$

Vidimo, da je  $\mathbf{z}(t)$  enaka kompoziciji preslikav  $\mathbf{h}(\ell(t))$ , kjer sta

$$\mathbf{h}(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{w} + \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 \mathbf{w} + \mathbf{b}_2} \quad \text{in} \quad \ell(t) = \left( \frac{r_1(t)}{r_2(t)} \right)^m e^{im(\arg(t-\tau_1) - \arg(t-\tau_2))}.$$

V izrazu za  $\mathbf{h}$  prepoznamo Möbiusovo transformacijo, ki slika premice oziroma krožnice v kompleksni ravnini v premice oziroma krožnice [13, str. 148]. Ker je inverzna Möbiusova transformacija prav tako Möbiusova transformacija, nam tudi inverz preslikave  $\mathbf{h}$  slika premice oziroma krožnice v kompleksni ravnini v premice oziroma krožnice. Ker predpis  $\ell(t)$  ne predstavlja premice oziroma krožnice v kompleksni ravnini, potem tudi izraz  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\ell(t))$  ne more predstavljati premice oziroma krožnice v kompleksni ravnini.  $\square$

## 7.1 Primer $\text{st}(h) = 0$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$

V tem podpoglavju bomo raziskali pogoje, pri katerih je dana DPH krivulja stopnje 7 vijačna oziroma nevijačna. Algebraične pogoje, katerim morajo zadostiti koeficienti polinomov  $\alpha, \beta$  in  $\mathbf{w}$ , da lahko sploh govorimo o DPH krivulji, smo že obravnavali v poglavju 5.2.1. Polinom  $h$  naj bo identično enak konstanti  $h_0$ . Kriterij za ločevanje vijačnih in nevijačnih DPH krivulj znotraj tega primera je predstavljen v naslednji trditvi.

**Trditev 7.6.** *Naj polinoma  $\alpha, \beta$  generirata tako DPH krivuljo, da je v DPH pogoju (4.18) polinom  $h$  konstanten in polinom  $\mathbf{w}$  kvadratičen. Krivulja je nevijačna, če ničli  $\tau_1, \tau_2$  polinoma  $\mathbf{w}$  nista realni, nista par kompleksno si konjugiranih števil in če se da polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  izraziti kot*

$$\alpha(t) = \mathbf{a}_1(t - \tau_1)^3 + \mathbf{a}_2(t - \tau_2)^3 \quad \text{in} \quad \beta(t) = \mathbf{b}_1(t - \tau_1)^3 + \mathbf{b}_2(t - \tau_2)^3, \quad (7.8)$$

kjer velja  $\mathbf{a}_1 \mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 \neq 0$ .

*Dokaz.* Po lemah 7.1 in 7.2 je dovolj obravnavati primer  $r = 0$ , saj DPH pogoj ni izpolnjen, če je  $r = 1$  in je polinom  $h$  identično enak konstanti. Ker je  $r = 0$ , je polinom  $\gamma = \gcd(\alpha, \beta)$  konstanten in sta si polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  tuja. Potem je polinom proporcionalnosti enak

$$\alpha(t)\beta'(t) - \alpha'(t)\beta(t) = h_0 \mathbf{w}^2(t). \quad (7.9)$$

Naj bosta  $\tau_1, \tau_2$  ničli polinoma  $\mathbf{w}$ , ki je druge stopnje. Sledi, da sta  $\tau_1, \tau_2$  dvojni ničli polinoma proporcionalnosti. Če zgornjo enačbo odvajamo in vstavimo katerikoli od ničel, vidimo, da velja

$$\alpha(\tau_i)\beta'(\tau_i) - \alpha'(\tau_i)\beta(\tau_i) = \alpha(\tau_i)\beta''(\tau_i) - \alpha''(\tau_i)\beta(\tau_i) = 0 \quad (7.10)$$

za  $i = 1, 2$ . Predpostavimo najprej, da sta ničli  $\tau_1, \tau_2$  različni. Zapišimo sedaj polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  v spremenjeni Bernsteinovi bazi na naslednji način:

$$\alpha(t) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{p}_k \binom{3}{k} (t - \tau_1)^k (\tau_2 - t)^{3-k}, \quad \beta(t) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{q}_k \binom{3}{k} (t - \tau_1)^k (\tau_2 - t)^{3-k},$$

kjer so  $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$  ustrezni kompleksni koeficienti. Ker je polinom  $\gamma$ , največji skupni delitelj polinomov  $\alpha, \beta$ , enak konstanti, sledi, da vrednosti  $\alpha(\tau_i), \beta(\tau_i)$  ne moreta biti obe hkrati enaki nič za  $i = 1, 2$ . Sedaj bomo ločili dva primera.

Obravnavajmo najprej primer, ko velja  $\alpha(\tau_i) \neq 0$  in  $\beta(\tau_i) \neq 0$  za  $i = 1, 2$ . Enačbe (7.10) lahko preoblikujemo v

$$\frac{\alpha'(\tau_i)}{\alpha(\tau_i)} = \frac{\beta'(\tau_i)}{\beta(\tau_i)}, \quad \frac{\alpha''(\tau_i)}{\alpha(\tau_i)} = \frac{\beta''(\tau_i)}{\beta(\tau_i)},$$

za  $i = 1, 2$ . Zaradi lastnosti odvajanja polinomov v spremenjeni Bernsteinovi bazi lahko zgornje enačbe zapišemo kar s pomočjo koeficientov polinomov kot

$$\frac{\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_0} = \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_0}, \quad \frac{\mathbf{p}_2}{\mathbf{p}_0} = \frac{\mathbf{q}_2}{\mathbf{q}_0} \quad \text{za } i = 1 \quad \text{in} \quad \frac{\mathbf{p}_2}{\mathbf{p}_3} = \frac{\mathbf{q}_2}{\mathbf{q}_3}, \quad \frac{\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_3} = \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_3} \quad \text{za } i = 2.$$

Če je eden od koeficientov  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  neničeln, lahko iz zgornjega sklepamo, da je eden od koeficientov  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  neničeln. Iz preostalih enačb vidimo, da si potem polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  nista tuja, kar pa je v protislovju s predpostavko. Do istega zaključka pridemo, če je eden od koeficientov  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  neničeln. Če je  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$  in  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = 0$ , sta potem polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  enaka

$$\alpha(t) = \mathbf{p}_0(\tau_2 - t)^3 + \mathbf{p}_3(t - \tau_1)^3 \quad \text{in} \quad \beta(t) = \mathbf{q}_0(\tau_2 - t)^3 + \mathbf{q}_3(t - \tau_1)^3,$$

kjer dodatno predpostavimo  $\mathbf{p}_0\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_3\mathbf{q}_0 \neq 0$ , saj si v nasprotnem primeru polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  nista tuja. Če definiramo  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}_3$ ,  $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_3$  in  $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{q}_0$ , dobimo obliko polinomov, kot je zabeležena v (7.8) dokazovane trditve. Prav tako se pogoj  $\mathbf{p}_0\mathbf{q}_3 - \mathbf{p}_3\mathbf{q}_0 \neq 0$  spremeni v  $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 \neq 0$ , ki je tudi vsebovan v trditvi. Tako podana polinoma po lemi 7.5 porodita nevijačno DPH krivuljo, saj  $\tau_1, \tau_2$  po predpostavki nista obe realni števili in nista konjugirani si kompleksni števili ter tako slika  $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$  ne poda krožnice oziroma premice v kompleksni ravnini.

Oglejmo si še primer, da je vsaj ena od vrednosti  $\alpha(\tau_i)$  in  $\beta(\tau_i)$  za  $i = 1, 2$  enaka nič. Recimo, da je  $\alpha(\tau_1) = 0$ . Ker sta si polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  tuja, sledi, da je  $\beta(\tau_1) = \mathbf{q}_0 \neq 0$ . Iz enačb (7.10) lahko potem sklepamo, da velja  $\alpha'(\tau_1) = \alpha''(\tau_1) = 0$ . Drugače povedano, za koeficiente  $\mathbf{p}_i$  velja, da so za  $i = 0, 1, 2$  enaki nič. Polinom  $\alpha$  je tako enak  $\mathbf{p}_3(t - \tau_1)^3$ . Podobno kot prej lahko iz enačb (7.10) pri  $i = 2$  vidimo, da velja  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = 0$ . Polinom  $\beta$  je tako enak  $\mathbf{q}_0(\tau_2 - t)^3 + \mathbf{q}_3(t - \tau_1)^3$ . Ponovno dobimo isto obliko, kot je zapisana v (7.8), le da tokrat velja  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}_3$ ,  $\mathbf{a}_2 = 0$ ,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{q}_3$  in  $\mathbf{b}_2 = -\mathbf{q}_0$ . Do analognih sklepov pridemo, če predpostavimo  $\alpha(\tau_2) = 0$  ali  $\beta(\tau_1) = 0$  ali  $\beta(\tau_2) = 0$ . V vsakemu od teh primerov je eden od koeficientov  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  enak nič. Iz istega razloga kot v prejšnjem primeru je DPH krivulja, porojena iz polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ , nevijačna, saj po lemi 7.5 slika funkcije  $\mathbf{z}(t) = \alpha(t)/\beta(t)$  ni enaka krožnici oziroma premici v kompleksni ravnini.

Tekom dokaza smo predpostavili, da sta ničli  $\tau_1, \tau_2$  različni. Če bi veljalo  $\tau_1 = \tau_2$ , se iz (7.8) vidi, da si tako podana polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  ne bi bila tuja, kar pa je v nasprotju s predpostavko.  $\square$

## 7.2 Primer $\text{st}(h) = 2$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$

Tokrat bomo raziskali kriterije, pri katerih ločimo vijačne od nevijačnih DPH krivulj, kakršne smo že raziskali v poglavju 5.2.2. Po lemi 7.1 je dovolj obravnavati primere,

ko je  $\gamma(t) = \gcd(\alpha(t), \beta(t))$  stopnje  $r = 0$  ali  $r = 1$ . V naslednjih dveh trditvah bomo videli, da nevijačne krivulje v tem primeru obstajajo samo, kadar je  $r = 0$ .

**Trditev 7.7.** *Naj bosta polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  taka, da je  $\gamma$  stopnje  $r = 1$  ter naj generirata tako DPH krivuljo, da je polinom  $h$  druge stopnje in da je polinom  $w$  linearen. Potem je ta DPH krivulja vijačna.*

*Dokaz.* Po lemi 7.2 je dovolj obravnavati take kvadratične polinome  $h$ , ki imajo različni ničli  $\tau_1, \tau_2$ . Iz enačbe (7.1) v dokazu leme 7.2 je razvidno, da zaradi različnosti ničel polinoma  $h$  polinom  $\gamma$  nima skupnega faktorja s polinomom  $h$ , temveč z  $w$ . Še več, pravzaprav se razlikujeta za multiplikativno konstanto. Podobno velja za  $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}' - \tilde{\alpha}'\tilde{\beta}$  in  $h$ . Napišimo najprej polinoma  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  v primerno izbrani Bernsteinovi bazi

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t) &= p_0(\tau_2 - t)^2 + p_1 2(\tau_2 - t)(t - \tau_1) + p_2(t - \tau_1)^2, \\ \tilde{\beta}(t) &= q_0(\tau_2 - t)^2 + q_1 2(\tau_2 - t)(t - \tau_1) + q_2(t - \tau_1)^2,\end{aligned}$$

za primerno izbrane kompleksne koeficiente  $p_0, p_1, p_2, q_0, q_1$  in  $q_2$ . Po zgornjem razmisleku mora biti polinom  $\tilde{\alpha}\tilde{\beta}' - \tilde{\alpha}'\tilde{\beta}$  enak nič pri  $\tau_1, \tau_2$ . Iz tega sklepamo, da veljata enačbi

$$p_0q_1 - p_1q_0 = 0 \quad \text{in} \quad p_1q_2 - p_2q_1 = 0,$$

saj je

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(t)\tilde{\beta}'(t) - \tilde{\alpha}'(t)\tilde{\beta}(t) &= (\tau_2 - \tau_1)(2(p_0q_1 - p_1q_0)(\tau_2 - t)^2 \\ &\quad + (p_0q_2 - p_2q_0)2(\tau_2 - t)(t - \tau_1) + 2(p_1q_2 - p_2q_1)(t - \tau_1)^2).\end{aligned}$$

Če  $p_1, q_1$  nista oba enaka nič, lahko iz zgornjih dveh enačb vidimo, da se potem polinoma  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  razlikujeta za multiplikativno konstanto (če je eden od njiju ničelni polinom, to velja trivialno), kar je v protislovju s tem, da sta si  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{\beta}$  tuja. Edina možnost, ki preostane, je, da vzamemo  $p_1 = q_1 = 0$ . Zapišemo  $a_1 = p_2, a_2 = p_0, b_1 = q_2$  in  $b_2 = q_0$ . Po potrebi konstante  $a_1, a_2, b_1, b_2$  pomnožimo še s konstanto, ki povezuje  $w$  in  $\gamma$ . Tako pridobimo zapisa obeh polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ , ki sta enaka

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= w(t)(a_1(t - \tau_1)^2 + a_2(t - \tau_2)^2), \\ \beta(t) &= w(t)(b_1(t - \tau_1)^2 + b_2(t - \tau_2)^2).\end{aligned}$$

Ker je  $h$  realen polinom, morati biti ničli  $\tau_1, \tau_2$  realni števili ali pa kompleksni konjugirani si števili. Po lemi 7.5 lahko potem sklepamo, da je slika funkcije  $z(t) = \alpha(t)/\beta(t)$  krožnica oziroma premica v kompleksni ravnini, torej mora biti DPH krivulja, ki jo generirata  $\alpha$  in  $\beta$  res vijačna.  $\square$

Pri  $\text{st}(h) = 2, \text{st}(w) = 1$  in  $r = 1$  tako res ne moremo dobiti nevijačne krivulje. Ogledajmo si še primer, ko sta si  $\alpha$  in  $\beta$  tuja, torej ko je  $r = 0$ .

**Trditev 7.8.** *Naj bosta polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  taka, da je njun največji skupni delitelj  $\gamma$  stopnje  $r = 0$  ter naj generirata tako DPH krivuljo, da je polinom  $h$  druge stopnje in da je polinom  $w$  linearen. Potem je taka DPH krivulja nevijačna.*

*Dokaz.* V poglavju 6.3 smo se seznanili z vsemi možnimi tipi vijačnih krivulj stopnje 7, kjer smo preoblikovali izraz za parametrizacijo krožnice oziroma premice (6.5) v kompleksni ravnini. Obdelali smo kubično reparametrizacijo, množenje s kvadratičnim polinomom ter kombinacijo kvadratične reparametrizacije in množenja z linearnim polinomom. Pokazali smo, da je samo pri tej zadnji možnosti 6.3.3 **DPH pogoj** (4.18) izpolnjen pri  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . Za take krivulje morata imeti  $\alpha$  in  $\beta$  skupen faktor v polinomu  $\mathbf{w}$ . Če sta si  $\alpha$  in  $\beta$  tuja in velja  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ , lahko zaključimo, da je taka krivulja nevijačna.  $\square$

### 7.3 Primer $\text{st}(h) = 4$ in $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$

Preostal nam je še zadnji primer. Tokrat si bomo pomagali z rezultati iz poglavja 6.3.1. Pridobili bomo računski kriterij, preko katerega bomo ločili vijačne od nevijačnih **DPH krivulj**.

**Trditev 7.9.** *DPH krivulja stopnje 7, pri kateri je DPH pogoj (4.18) izpolnjen pri  $\text{st}(h) = 4$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$  je nevijačna, če je izraz*

$$\Delta = 9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_3, \quad (7.11)$$

ki je podan z Bernsteinovimi koeficienti polinoma  $h$ , negativen. Če je  $\Delta$  nenegativen, je **DPH krivulja** vijačna.

*Dokaz.* V poglavju 6.3.1 smo že omenili, je **DPH krivulja** pri  $\text{st}(h) = 4$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$  vijačna natanko takrat, ko se da polinom  $h$  zapisati s pomočjo kubičnih realnih polinomov  $f, g$ , in sicer kot  $h(t) = f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$ . To enakost lahko zapišemo drugače s pomočjo Bernsteinovih koeficientov vseh treh polinomov, kot smo že videli v enačbah (6.15). To si pravzaprav lahko interpretiramo kot sistem petih linearnih enačb s šestimi spremenljivkami oblike  $f_i g_j - f_j g_i$ , kjer je  $i \neq j$  za  $0 \leq i, j \leq 3$ . Eno od teh spremenljivk si lahko poljubno izberemo. Naj bo  $f_2 g_1 - f_1 g_2 = c$ . Dobimo sistem

$$\begin{aligned} f_1 g_0 - f_0 g_1 &= \frac{1}{3} h_0, & f_2 g_0 - f_0 g_2 &= \frac{2}{3} h_1, & f_3 g_0 - f_0 g_3 &= 2h_2 - 3c, \\ f_2 g_1 - f_1 g_2 &= c, & f_3 g_1 - f_1 g_3 &= \frac{2}{3} h_3, & f_3 g_2 - f_2 g_3 &= \frac{1}{3} h_4. \end{aligned}$$

Kot smo že videli pri pogoju kompatibilnosti (5.6), tudi tu vedno velja povsem analogna enakost

$$(f_2 g_0 - f_0 g_2)(f_3 g_1 - f_1 g_3) - (f_2 g_1 - f_1 g_2)(f_3 g_0 - f_0 g_3) = (f_1 g_0 - f_0 g_1)(f_3 g_2 - f_2 g_3),$$

ki jo s pomočjo koeficientov polinoma  $h$  in števila  $c$  preoblikujemo v

$$\left(\frac{2}{3}h_1\right)\left(\frac{2}{3}h_3\right) - c(2h_2 - 3c) = \left(\frac{1}{3}h_0\right)\left(\frac{1}{3}h_4\right).$$

To enačbo lahko preoblikujemo v kvadratno enačbo za  $c$ :

$$27c^2 - 18h_2c + 4h_1h_3 - h_0h_4 = 0.$$



Rešitvi enačbe sta enaki

$$c = f_2g_1 - f_1g_2 = \frac{1}{9} \left( 3h_2 \pm \sqrt{9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_3} \right).$$

Rešitev je realna natanko tedaj, ko je diskriminanta  $\Delta$  zgornje enačbe nenegativna. V teh primerih se polinom  $h$  da zapisati v obliki  $h(t) = f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$  za realna polinoma  $f$  in  $g$  tretje stopnje. DPH krivulja, za katero to velja, je vijačna, saj nam potem izraz  $\alpha(t)/\beta(t)$  poda kubično reparametrizacijo krožnice oziroma premice v kompleksni ravnini.

Če je diskriminanta  $\Delta$  negativna, ne obstajata taka realna kubična polinoma  $f, g$ , da bi lahko  $h$  izrazili v obliki  $f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$ . V teh primerih ne moremo pridobiti kubične reparametrizacije krožnice oziroma premice v kompleksni ravnini, torej imamo v takih primerih opravka s nevijačnimi DPH krivuljami.  $\square$

## 8 Izračunani primeri

V tem poglavju si bomo na podlagi do zdaj znanih dejstev ogledali, kako konstruirati prostorsko **DPH krivuljo** stopnje 7. Obdelali bomo primere polinomskih vijačnih krivulj, do katerih pridemo **z** kubično reparametrizacijo, množenjem s kvadratičnim polinomom, reparametrizacijo in multiplikacijo, ter še nekaj primerov vijačnih in nevijačnih krivulj.

Spomnimo se najprej, kako izražamo hodograf prostorske **PH krivulje** (3.27) v kvaternionski obliki. Recimo, da imamo kubični kvaternionski polinom, podan v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^3 + \mathcal{A}_1 3(1-t)^2 t + \mathcal{A}_2 3(1-t)t^2 + \mathcal{A}_3 t^3. \quad (8.1)$$

**PH krivuljo** lahko podamo kot Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^7 \mathbf{p}_i \binom{7}{i} (1-t)^{7-i} t^i$$

s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$ , kjer je  $0 \leq i \leq 7$ . Hodograf te krivulje je potem enak

$$\mathbf{r}'(t) = 7 \sum_{i=0}^6 (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \binom{6}{i} (1-t)^{6-i} t^i = \mathcal{A}(t) \mathbf{i} \mathcal{A}^*(t).$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da se kontrolne točke krivulje da izraziti s pomočjo Bernsteinovih koeficientov polinoma  $\mathcal{A}$ . Kontrolne točke so enake

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{7} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{14} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{35} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + 3\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{140} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_3^* + 9\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + 9\mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_3 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{35} (\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_3^* + 3\mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_3 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^*), \\ \mathbf{p}_6 &= \mathbf{p}_5 + \frac{1}{14} (\mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_3^* + \mathcal{A}_3 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^*), \\ \mathbf{p}_7 &= \mathbf{p}_6 + \frac{1}{7} \mathcal{A}_3 \mathbf{i} \mathcal{A}_3^*. \end{aligned} \quad (8.2)$$

V primerih, ki sledijo, bomo povsod vzeli  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$  kot integracijsko konstanto.

**Primer 8.1** (Kubična reparametrizacija). Konstruirali bomo tak tip vijačne krivulje, kot je opisan v poglavju 6.3.1. Za izraz podan v (6.5), ki predstavlja premico oziroma krožnico v kompleksni ravnini, izberemo konstante

$$\mathbf{a}_0 = 1, \quad \mathbf{a}_1 = 1 + \mathbf{i}, \quad \mathbf{b}_0 = 1 - \mathbf{i}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{i}.$$

Nato podamo še reparametrizacijsko funkcijo  $f/g$ , ki jo izrazimo s pomočjo polinomov  $f, g$ , ta polinoma pa podamo preko njihovih Bernsteinovih koeficientov

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (1, 2, 2, 1) \quad \text{in} \quad (g_0, g_1, g_2, g_3) = (1, 2, 3, 3).$$

Ko reparametrizacijo izvedemo, dobimo  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$ , kjer so Bernsteinovi koeficienti polinomov  $\boldsymbol{\alpha}$  in  $\boldsymbol{\beta}$  enaki

$$(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (1 + \mathbf{i}, 2 + 2\mathbf{i}, 3 + 2\mathbf{i}, 3 + \mathbf{i}) \quad \text{in} \quad (\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\mathbf{i}, 2\mathbf{i}, 1 + \mathbf{i}, 2 - \mathbf{i}).$$

S pretvorbo  $\mathcal{A}_\ell = \boldsymbol{\alpha}_\ell + \mathbf{k}\boldsymbol{\beta}_\ell$  pridemo do Bernsteinovih koeficientov kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$ . Koeficienti so enaki

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j}, & \mathcal{A}_2 &= 3 + 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= 2 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, & \mathcal{A}_3 &= 3 + \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Za integracijsko konstanto si izberemo točko  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ . Ostale kontrolne točke krivulje izračunamo preko zvez (8.2). Enake so

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left( \frac{21}{10}, \frac{99}{35}, -\frac{87}{35} \right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left( \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{2}{7} \right), & \mathbf{p}_5 &= \left( \frac{253}{70}, \frac{137}{35}, -\frac{93}{35} \right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left( \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{6}{7} \right), & \mathbf{p}_6 &= \left( \frac{353}{70}, \frac{177}{35}, -\frac{68}{35} \right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left( 1, \frac{62}{35}, -\frac{12}{7} \right), & \mathbf{p}_7 &= \left( \frac{403}{70}, \frac{227}{35}, -\frac{18}{35} \right). \end{aligned}$$

S tem postopkom dobimo krivuljo  $\mathbf{r}$  s komponentami

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{7}t^7 + 3t^6 - \frac{48}{5}t^5 + \frac{7}{2}t^4 + 5t^3 + 3t^2 + t, \\ y(t) &= \frac{2}{7}t^7 - 2t^6 + \frac{36}{5}t^5 - 9t^4 + 2t^3 + 6t^2 + 2t, \\ z(t) &= \frac{2}{7}t^7 - t^6 - \frac{24}{5}t^5 + 13t^4 - 6t^2 - 2t, \end{aligned} \tag{8.3}$$

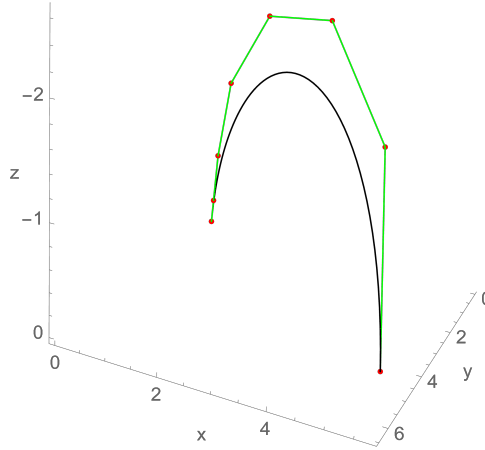
prikazano na sliki 3. Hodograf je primitiven, saj je  $\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1$ . Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 3t^6 - 18t^5 + 54t^4 - 54t^3 + 9t^2 + 18t + 3,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo pa je enako  $|\kappa(t)/\tau(t)| = \sqrt{5}/2$ .

**Primer 8.2** (Množenje s kvadratičnim polinomom). Videli bomo, kako konstruirati tak tip vijačne krivulje, kot smo ga spoznali v poglavju 6.3.2. Za izraz podan v (6.5), ki predstavlja premico oziroma krožnico v kompleksni ravnini, izberemo najprej naslednje konstante

$$\mathbf{a}_0 = 5\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_1 = 1 + \mathbf{i}, \quad \mathbf{b}_0 = 1 - \mathbf{i}, \quad \mathbf{b}_1 = 2 + 5\mathbf{i}.$$



Slika 3: Graf vijačne krivulje (8.3) iz primera 8.1 s pripadajočim kontrolnim poligonom, ki smo jo pridobili s postopkom kubične reparametrizacije parametra  $t$  v izrazu (6.5).

Polinom  $\mathbf{w}$  podamo preko Bernsteinovih koeficientov  $\mathbf{w}_0 = 1$ ,  $\mathbf{w}_1 = 1 + \mathbf{i}$  in  $\mathbf{w}_2 = 1$ . Števec in imenoalec izraza  $\mathbf{z}(t)$  množimo z  $\mathbf{w}(t)$  in dobimo  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)/\boldsymbol{\beta}(t)$ . Potem se Bernsteinove koeficiente polinomov  $\boldsymbol{\alpha}$  in  $\boldsymbol{\beta}$  izračuna preko enačb (6.19) in (6.20). Enaki so

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_0 &= 5\mathbf{i}, & \boldsymbol{\alpha}_1 &= -3 + \frac{11}{3}\mathbf{i}, & \boldsymbol{\alpha}_2 &= 3\mathbf{i}, & \boldsymbol{\alpha}_3 &= 1 + \mathbf{i}, \\ \boldsymbol{\beta}_0 &= 1 - \mathbf{i}, & \boldsymbol{\beta}_1 &= 2 + \frac{5}{3}\mathbf{i}, & \boldsymbol{\beta}_2 &= -\frac{5}{3} + \frac{13}{3}\mathbf{i}, & \boldsymbol{\beta}_3 &= 2 + 5\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Do kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  se dokopljemo preko zveze  $\mathcal{A}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathbf{k}\boldsymbol{\beta}(t)$ . Njegovi koeficienti so enaki

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, & \mathcal{A}_2 &= 3\mathbf{i} + \frac{13}{3}\mathbf{j} - \frac{5}{3}\mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= -3 + \frac{11}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= 1 + \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

S pomočjo Bernsteinovih koeficientov tega polinoma lahko izrazimo kontrolne točke hodografa krivulje oziroma krivulje same, kot smo že opisali v enačbah (8.2). Za integracijsko konstanto si izberemo točko  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ . Ostale kontrolne točke krivulje izračunamo preko enačb (8.2). Enake so

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left( \frac{66}{7}, \frac{376}{105}, \frac{692}{105} \right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left( \frac{23}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{10}{7} \right), & \mathbf{p}_5 &= \left( \frac{269}{35}, \frac{706}{105}, \frac{246}{35} \right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left( \frac{41}{7}, -\frac{25}{21}, \frac{62}{21} \right), & \mathbf{p}_6 &= \left( \frac{577}{105}, \frac{971}{105}, \frac{246}{35} \right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left( \frac{42}{5}, -\frac{11}{105}, \frac{100}{21} \right), & \mathbf{p}_7 &= \left( \frac{172}{105}, \frac{1181}{105}, \frac{216}{35} \right). \end{aligned}$$

Dobimo krivuljo  $\mathbf{r}$  s komponentami

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{80}{7}t^7 + \frac{20}{3}t^6 + \frac{252}{5}t^5 - 76t^4 + 24t^3 - 15t^2 + 23t, \\ y(t) &= -\frac{184}{7}t^7 + 108t^6 - \frac{784}{5}t^5 + 90t^4 - \frac{86}{3}t^3 + 35t^2 - 10t, \\ z(t) &= -\frac{80}{7}t^7 + \frac{88}{3}t^6 - \frac{72}{5}t^5 - 16t^4 + \frac{20}{3}t^3 + 2t^2 + 10t, \end{aligned} \quad (8.4)$$

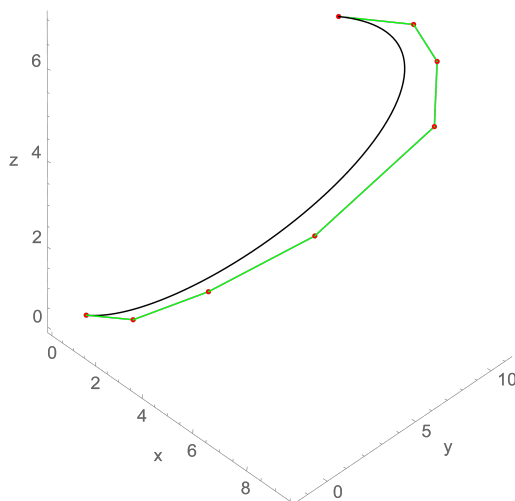
katere graf je prikazan na sliki 4. Hodograf ni primitiven, saj velja

$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 4t^4 - 8t^3 + 4t^2 + 1.$$

Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 216t^6 - 632t^5 + 724t^4 - 416t^3 + 162t^2 - 50t + 27,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pa je enako  $|\kappa(t)/\tau(t)| = \sqrt{829}/2$ .



Slika 4: Graf vijačne krivulje (8.4) iz primera 8.2 s pripadajočim kontrolnim polinomom, ki smo jo pridobili z množenjem števca in imenovalca izraza (6.5) s polinomom  $\mathbf{w}$ .

**Primer 8.3** (Reparametrizacija in multiplikacija). Tu bomo generirali tak tip krivulje, kot smo ga obravnavali v poglavju 6.3.3. Podobno kot v prejšnjih primerih si najprej izberemo konstante

$$\mathbf{a}_0 = 1 + i, \quad \mathbf{a}_1 = 1, \quad \mathbf{b}_0 = 1 - i, \quad \mathbf{b}_1 = 2.$$

Potem izvedemo kvadratično reparametrizacijo preko reparametrizacijske funkcije  $f/g$ , ki je določena z naslednjimi Bernsteinovi koeficienti polinomov  $f$  in  $g$ :

$$(f_0, f_1, f_2) = (1, 2, 1) \quad \text{in} \quad (g_0, g_1, g_2) = (1, 2, 2).$$

Nato v ulomku (6.5) množimo števec in imenoalec ulomka z linearnim kompleksnim polinomom  $\mathbf{w}$ , ki je podan z Bernsteinovimi koeficienti  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1) = (1, 1 + i)$ . Bernsteinove koeficiente polinomov  $\alpha$  in  $\beta$  lahko tako izračunamo kar preko enačb (6.23). Enaki so

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= \frac{5}{3} + \frac{1}{3}i, & \alpha_2 &= 2 + \frac{5}{3}i, & \alpha_3 &= 1 + 3i, \\ \beta_0 &= 2, & \beta_1 &= \frac{10}{3} + \frac{2}{3}i, & \beta_2 &= \frac{11}{3} + \frac{7}{3}i, & \beta_3 &= 4 + 2i.\end{aligned}$$

Bernsteinove koeficiente kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  izrazimo preko zveze  $\mathcal{A}_\ell = \alpha_\ell + \mathbf{k}\beta_\ell$  za  $\ell = 0, 1, 2, 3$ , in dobimo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= 1 + 2\mathbf{k}, & \mathcal{A}_2 &= 2 + \frac{5}{3}\mathbf{i} + \frac{7}{3}\mathbf{j} + \frac{11}{3}\mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= 1 + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Kontrolne točke krivulje  $\mathbf{r}$  izračunamo iz (8.2):

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left(-\frac{374}{105}, \frac{517}{105}, \frac{11}{35}\right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left(-\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right), & \mathbf{p}_5 &= \left(-\frac{37}{7}, \frac{53}{7}, \frac{103}{105}\right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left(-\frac{8}{7}, \frac{32}{21}, 0\right), & \mathbf{p}_6 &= \left(-\frac{148}{21}, \frac{75}{7}, \frac{13}{5}\right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left(-\frac{46}{21}, \frac{62}{21}, \frac{2}{35}\right), & \mathbf{p}_7 &= \left(-\frac{178}{21}, \frac{95}{7}, \frac{191}{35}\right).\end{aligned}$$

S tem je krivulja  $\mathbf{r}$  določena. Njene komponente so v potenčni bazi enake

$$\begin{aligned}x(t) &= -\frac{8}{7}t^7 + \frac{10}{3}t^6 - 2t^5 + 2t^4 - \frac{5}{3}t^3 - 6t^2 - 3t, \\ y(t) &= \frac{4}{7}t^7 - \frac{10}{3}t^6 + 2t^5 - t^4 + \frac{10}{3}t^3 + 8t^2 + 4t, \\ z(t) &= -\frac{8}{7}t^7 + 2t^6 - \frac{2}{5}t^5 + 3t^4 + 2t^3.\end{aligned}\tag{8.5}$$

Graf krivulje  $\mathbf{r}$  je prikazan na sliki 5. Hodograf ni primitiven, saj je

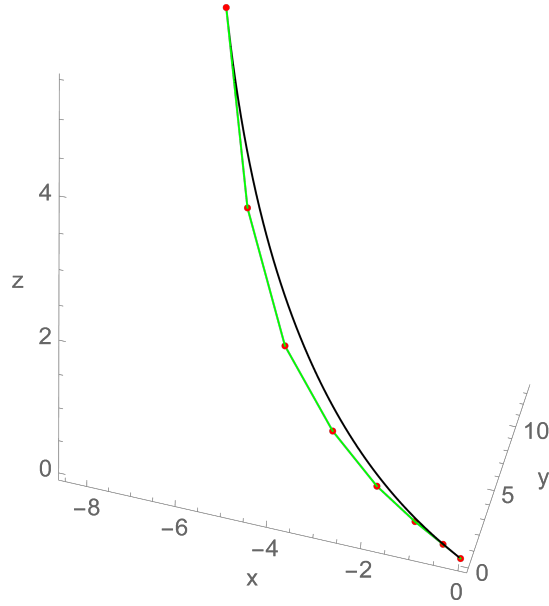
$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = t^2 + 1.$$

Parametrična hitrost krivulje je tu enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 12t^6 - 28t^5 + 18t^4 - 8t^3 + 11t^2 + 20t + 5,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pa je  $|\kappa(t)/\tau(t)| = \sqrt{10}$ .

Sedaj bomo obravnavali še nekaj primerov konstrukcij DPH krivulj za različne stopnje polinomov  $h$  in  $\mathbf{w}$ , ki smo jih analizirali v poglavju 5.2. Obenem bomo še uporabili kriterije za ločevanje med vijačnimi in nevijačnimi krivuljami, razvite v poglavju 7.



Slika 5: Graf vijačne krivulje (8.5) iz primera 8.3 s pripadajočim kontrolnim poligonom, ki smo jo pridobili s postopkom reparametrizacije in multiplikacije

**Primer 8.4** (Vijačna krivulja,  $\text{st}(h) = 0$ ,  $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ ). Ogledali si bomo primer krivulje takega tipa, kot smo ga obravnavali v poglavju 5.2.1. Najprej si izberemo polinoma  $h$  in  $\mathbf{w}$  z naslednjimi Bernsteinovimi koeficienti

$$h_0 = 1, \quad \mathbf{w}_0 = 1, \quad \mathbf{w}_1 = 1 + i, \quad \mathbf{w}_2 = i.$$

Izberemo si še vrednosti koeficientov  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2i$  in  $\beta_0 = i$  ter drugo rešitev za  $\mathbf{z}$  v (5.8). Nato lahko rešimo sistem enačb (5.7). Sistem lahko rešimo kar s pomočjo programa *Mathematica*. Ko to naredimo, dobimo vse Bernsteinove koeficiente za polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= 2i, & \alpha_2 &= -4 + \frac{5}{3}i, & \alpha_3 &= -4 - 2i, \\ \beta_0 &= i, & \beta_1 &= -\frac{5}{3}, & \beta_2 &= -1 - \frac{10}{3}i, & \beta_3 &= 2 - 3i. \end{aligned}$$

S pomočjo teh koeficientov lahko izračunamo tudi Bernsteinove koeficiente kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$ . Dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= 1 + \mathbf{j}, & \mathcal{A}_2 &= -4 + \frac{5}{3}\mathbf{i} - \frac{10}{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= 2i - \frac{5}{3}\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= -4 - 2i - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ob upoštevanju zvez (8.2) so kontrolne točke krivulje  $\mathbf{r}$  enake

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left( \frac{4}{15}, \frac{3}{35}, -\frac{20}{21} \right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left( 0, 0, -\frac{2}{7} \right), & \mathbf{p}_5 &= \left( \frac{4}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{326}{105} \right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left( 0, \frac{1}{21}, -\frac{2}{7} \right), & \mathbf{p}_6 &= \left( \frac{22}{15}, -\frac{10}{21}, -\frac{626}{105} \right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left( \frac{1}{15}, \frac{3}{35}, -\frac{46}{105} \right), & \mathbf{p}_7 &= \left( \frac{37}{15}, -\frac{22}{21}, -\frac{158}{15} \right). \end{aligned}$$

Komponente parametrizacije  $\mathbf{r}$  pa se v potenčni bazi glasijo

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t^7 - \frac{14}{3}t^6 + \frac{14}{5}t^5 + \frac{7}{3}t^3, \\ y(t) &= -\frac{12}{7}t^7 + \frac{14}{3}t^6 - 4t^5 + t^4 - 2t^3 + t^2, \\ z(t) &= -12t^7 + 32t^6 - \frac{136}{5}t^5 + 8t^4 - \frac{46}{3}t^3 + 6t^2 - 2t. \end{aligned} \tag{8.6}$$

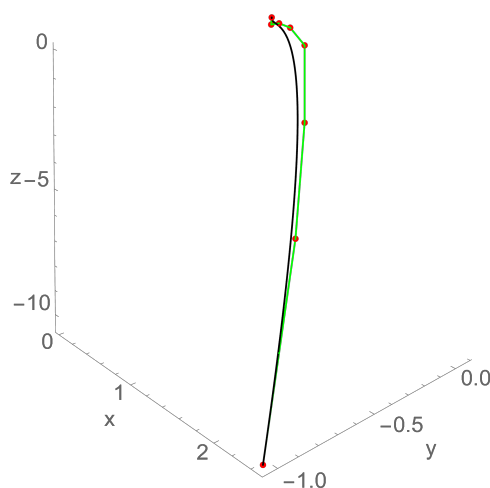
Graf krivulje  $\mathbf{r}$  je razviden na sliki 6. Hodograf ni primitiven, saj je

$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 2t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 1.$$

Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 86t^6 - 196t^5 + 138t^4 - 32t^3 + 47t^2 - 12t + 2,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pa je enako  $|\kappa(t)/\tau(t)| = 1/7$ . Po Lancretovem izreku 3.11 velja, da je ta krivulja vijačna.



Slika 6: Graf vijačne krivulje (8.6) iz primera 8.4 s pripadajočim kontrolnim poligonom, za katero velja  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ .



**Primer 8.5** (Nevijačna krivulja,  $\text{st}(h) = 0$ ,  $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ ). Sedaj si bomo ogledali še primer nevičajne krivulje, kjer je  $\text{st}(h) = 0$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 2$ . Izberemo si ista polinoma  $h$  in  $\mathbf{w}$  in iste koeficiente  $\alpha_0, \alpha_1$  in  $\beta_0$ , kot smo jih izbrali v primeru 8.4, le da **vzamemo prvi izraz za  $\mathbf{z}$  namesto drugega v (5.8)**. Potem rešimo sistem enačb (5.7) in dobimo Bernsteinove koeficiente za polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= 2i, & \alpha_2 &= -4 + 3i, & \alpha_3 &= -12 - 2i, \\ \beta_0 &= i, & \beta_1 &= -\frac{5}{3}, & \beta_2 &= -\frac{7}{3} - \frac{10}{3}i, & \beta_3 &= 2 - \frac{29}{3}i.\end{aligned}$$

Bernsteinovi koeficienti kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  so potem enaki

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= 1 + \mathbf{j}, & \mathcal{A}_2 &= -4 + 3i - \frac{10}{3}\mathbf{j} - \frac{7}{3}\mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= 2i - \frac{5}{3}\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= -12 - 2i - \frac{29}{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\end{aligned}$$

kontrolne točke krivulje  $\mathbf{r}$  pa se poračunajo v

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left(\frac{32}{105}, \frac{3}{35}, -\frac{48}{35}\right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left(0, 0, -\frac{2}{7}\right), & \mathbf{p}_5 &= \left(\frac{104}{105}, \frac{1}{105}, -\frac{466}{105}\right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left(0, \frac{1}{21}, -\frac{2}{7}\right), & \mathbf{p}_6 &= \left(\frac{962}{315}, -\frac{34}{105}, -\frac{1486}{105}\right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left(\frac{1}{15}, \frac{3}{35}, -\frac{46}{105}\right), & \mathbf{p}_7 &= \left(\frac{1079}{105}, -\frac{58}{35}, -\frac{5086}{105}\right).\end{aligned}$$

S kontrolnimi točkami krivulje  $\mathbf{r}$  so določene tudi komponente parametrizacije  $\mathbf{r}$  v potenčni bazi

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{86}{63}t^7 + \frac{22}{9}t^6 + \frac{14}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^4 + \frac{7}{3}t^3, \\ y(t) &= -\frac{4}{21}t^7 - \frac{2}{3}t^6 - \frac{4}{5}t^5 + t^4 - 2t^3 + t^2, \\ z(t) &= -\frac{124}{21}t^7 - \frac{40}{3}t^6 - \frac{56}{5}t^5 - \frac{20}{3}t^4 - \frac{46}{3}t^3 + 6t^2 - 2t.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Na **sliki 7** je prikazan graf krivulje. Hodograf je primitiven, saj je

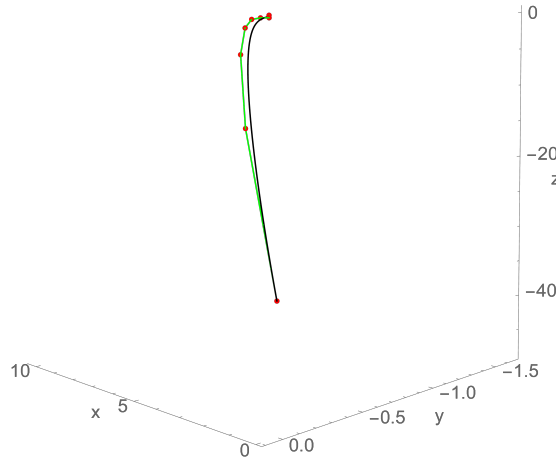
$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1/9.$$

Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{382}{9}t^6 + \frac{244}{3}t^5 + 58t^4 + \frac{80}{3}t^3 + 47t^2 - 12t + 2,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pa je enako

$$\left| \frac{\kappa(t)}{\tau(t)} \right| = \left| \frac{9(2t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 1)^2}{460t^8 - 1840t^7 - 296t^6 - 2688t^5 + 1272t^4 + 624t^3 - 180t^2 + 144t + 63} \right|.$$



Slika 7: Graf nevijačne krivulje (8.7) iz primera 8.5 s pripadajočim kontrolnim poligonom, **za katero** velja  $st(h) = 0$  in  $st(\mathbf{w}) = 2$ .

**Po** Lancretovem izreku 3.11 vidimo, da je ta krivulja nevijačna. To lahko preverimo tudi drugače. Polinom  $\mathbf{w}$  ima ničli  $\tau_1, \tau_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2} + i)$ . Ti ničli nista obe realni in tudi nista par konjugiranih si kompleksnih števil. Z nekaj osnovnega računanja lahko preverimo, da se da polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  zapisati v obliki (7.8) s koeficienti

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1 + (4\sqrt{2} - 5)i), & \mathbf{b}_1 &= \frac{1}{3}(6 - 5\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)i), \\ \mathbf{a}_2 &= -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1 + (4\sqrt{2} + 5)i), & \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{3}(6 + 5\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1)i). \end{aligned}$$

Ker velja  $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}i \neq 0$ , so potem pogoji za trditev 7.6 izpolnjeni in je krivulja tudi po tej trditvi res nevijačna.

**Primer 8.6** (Vijačna krivulja,  $st(h) = 2$ ,  $st(\mathbf{w}) = 1$ ). Sedaj je na vrsti primer krivulje takega tipa, kot smo ga obravnavali v poglavju 5.2.2. Izberimo si naslednje Bernsteinove koeficiente za polinoma  $h$  in  $\mathbf{w}$ :

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 2, \quad h_2 = 1, \quad \mathbf{w}_0 = i, \quad \mathbf{w}_1 = 1.$$

Podobno kot v prejšnjih primerih si izberemo vrednosti  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = -1$  ter drugo rešitev za  $\mathbf{z}$  v (5.10). Sedaj imamo vse potrebno, da lahko rešimo sistem (5.7) in da dobimo Bernsteinove koeficiente polinomov  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= 2 - \frac{1}{3}i, & \alpha_3 &= 2 - 5i, \\ \beta_0 &= -1, & \beta_1 &= -\frac{4}{3}, & \beta_2 &= -\frac{8}{3} + \frac{2}{3}i, & \beta_3 &= -2 + 7i. \end{aligned}$$

Kvaternionski polinom  $\mathcal{A}$  ima potem naslednje Bernsteinove koeficiente

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= 1 - \mathbf{k}, & \mathcal{A}_2 &= 2 - \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{8}{3}\mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= 1 - \frac{4}{3}\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= 2 - 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Kontrolne točke krivulje  $\mathbf{r}$  so enake

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left(-\frac{37}{105}, -\frac{13}{7}, -\frac{8}{105}\right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left(0, -\frac{2}{7}, 0\right), & \mathbf{p}_5 &= \left(-\frac{24}{35}, -\frac{323}{105}, -\frac{6}{35}\right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left(-\frac{1}{21}, -\frac{13}{21}, 0\right), & \mathbf{p}_6 &= \left(-\frac{137}{105}, -\frac{548}{105}, -\frac{38}{105}\right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left(-\frac{16}{105}, -\frac{39}{35}, -\frac{2}{105}\right), & \mathbf{p}_7 &= \left(-\frac{71}{15}, -\frac{1718}{105}, -\frac{158}{105}\right), \end{aligned}$$

komponente krivulje  $\mathbf{r}$  v potenčni bazi pa so

$$\begin{aligned} x(t) &= -2t^7 - t^6 + \frac{3}{5}t^5 - t^4 - \frac{1}{3}t^3 - t^2, \\ y(t) &= -\frac{52}{7}t^7 + \frac{2}{3}t^6 - \frac{18}{5}t^5 + t^4 - 4t^3 - t^2 - 2t, \\ z(t) &= -\frac{4}{7}t^7 - \frac{2}{3}t^6 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3. \end{aligned} \tag{8.8}$$

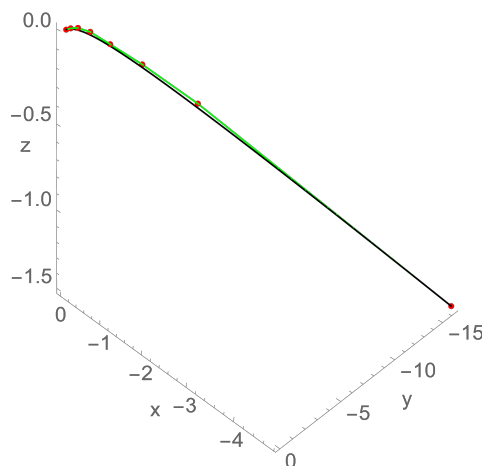
Na **sliki 8** je razviden graf krivulje  $\mathbf{r}$ . Hodograf ni primitiven, saj je

$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 2t^2 - 2t + 1.$$

Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 54t^6 - 2t^5 + 17t^4 - 4t^3 + 13t^2 + 2t + 2,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pa je enako  $|\kappa(t)/\tau(t)| = 1/2$ . Po Lancretovem izreku 3.11 velja, da je ta krivulja vijačna.



Slika 8: Graf vijačne krivulje (8.8) iz primera 8.6 s pripadajočim kontrolnim poligonom, **za katero** velja  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ .

Ni težko videti, da je  $\gamma(t) = \gcd(\alpha(t), \beta(t)) = (1+i)t - 1$ . Torej je  $r = \text{st}(\gamma) = 1$ . Po trditvi 7.7 lahko še lažje preverimo, da je ta krivulja res vijačna.

**Primer 8.7** (Nevijačna krivulja,  $\text{st}(h) = 2$ ,  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ ). Sedaj si bomo ogledali še primer nevijačne krivulje, kjer je  $\text{st}(h) = 2$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 1$ . Izberemo si ista polinoma  $h$  in  $\mathbf{w}$  in iste koeficiente  $\alpha_0, \alpha_1$  in  $\beta_0$ , kot smo jih izbrali v primeru 8.6, le da v (5.8) vzamemo prvi izraz za  $\mathbf{z}$  namesto drugega. Nato še rešimo sistem enačb (5.7) in dobimo Bernsteinove koeficiente za polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= 2 + \mathbf{i}, & \alpha_3 &= 2 - \mathbf{i}, \\ \beta_0 &= -1, & \beta_1 &= -\frac{4}{3}, & \beta_2 &= -\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\mathbf{i}, & \beta_3 &= -2 + \frac{5}{3}\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Bernsteinovi koeficienti kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  so tako enaki

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= 1 - \mathbf{k}, & \mathcal{A}_2 &= 2 + \mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{8}{3}\mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= 1 - \frac{4}{3}\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= 2 - \mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Preko enačb (8.2) izračunamo, da so kontrolne točke krivulje  $\mathbf{r}$  enake

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left(-\frac{37}{105}, -\frac{13}{7}, -\frac{4}{35}\right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left(0, -\frac{2}{7}, 0\right), & \mathbf{p}_5 &= \left(-\frac{64}{105}, -\frac{331}{105}, -\frac{38}{105}\right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left(-\frac{1}{21}, -\frac{13}{21}, 0\right), & \mathbf{p}_6 &= \left(-\frac{247}{315}, -\frac{436}{105}, -\frac{58}{105}\right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left(-\frac{16}{105}, -\frac{39}{35}, -\frac{2}{105}\right), & \mathbf{p}_7 &= \left(-\frac{109}{105}, -\frac{202}{35}, -\frac{14}{15}\right).\end{aligned}$$

S kontrolnimi točkami krivulje  $\mathbf{r}$  imamo določene tudi komponente krivulje  $\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned}x(t) &= -\frac{22}{63}t^7 - \frac{5}{9}t^6 + \frac{11}{5}t^5 - t^4 - \frac{1}{3}t^3 - t^2, \\ y(t) &= -\frac{124}{21}t^7 + \frac{34}{3}t^6 - \frac{26}{5}t^5 + t^4 - 4t^3 - t^2 - 2t, \\ z(t) &= -\frac{4}{3}t^7 + 2t^6 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^4 - \frac{2}{3}t^3.\end{aligned}\tag{8.9}$$

Graf krivulje  $\mathbf{r}$  je prikazan na [sliki 9](#). Hodograf je primitiven, saj je

$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1/9,$$

parametrična hitrost krivulje je enaka

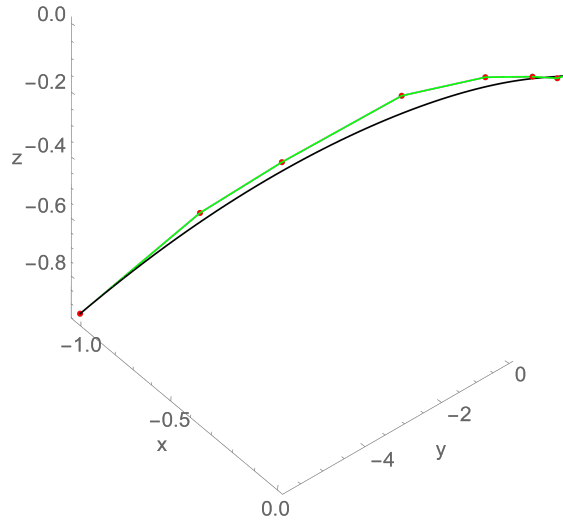
$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{382}{9}t^6 - \frac{206}{3}t^5 + 25t^4 - 4t^3 + 13t^2 + 2t + 2,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pa je enako

$$\left| \frac{\kappa(t)}{\tau(t)} \right| = \left| \frac{9(2t^2 - 2t - 1)(2t^2 - 2t + 1)^2}{2(92t^6 - 276t^5 - 60t^4 + 228t^3 - 126t^2 + 54t + 9)} \right|.$$

Po Lancretovem izreku 3.11 je ta krivulja nevijačna.

Lažje lahko to preverimo s pomočjo trditve 7.8. Ni težko videti, da sta si polinoma  $\alpha$  in  $\beta$  tuja, torej je  $r = \text{st}(\gamma) = \text{st}(\gcd(\alpha, \beta)) = 0$ . Po trditvi 7.8 je naša krivulja nevijačna.



Slika 9: Graf nevičajne krivulje (8.9) iz primera 8.7 s pripadajočim kontrolnim polinomom, za katero velja  $st(h) = 2$  in  $st(\mathbf{w}) = 1$ .

**Primer 8.8** (Vijačna krivulja,  $st(h) = 4$ ,  $st(\mathbf{w}) = 0$ ). Konstruirali bomo krivuljo takega tipa, kot smo ga analizirali v poglavju 5.2.3. Za začetek si izberemo naslednja polinoma  $h$  in  $\mathbf{w}$ , izražena v Bernsteinovi bazi z izbiro koeficientov

$$h_0 = -1, \quad h_1 = 2, \quad h_2 = 3, \quad h_3 = 4, \quad h_4 = -5, \quad \mathbf{w}_0 = 1.$$

Vidimo, da je količina  $\Delta = 9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_4 = 0$  nenegativna in po trditvi 7.9 sledi, da je krivulja, ki jo generiramo, vijačna. Prosto si izberemo še vrednosti koeficientov  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1 - i$  in  $\beta_0 = -1 + i$ . Nato rešimo sistem enačb (5.11) in pri tem upoštevamo rešitev, ki ima pozitiven predznak pri korenu v izrazu (5.12), ki določa  $\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ . Tako dobimo naslednje Bernsteinove koeficiente za polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= 1 - i, & \alpha_2 &= -1 + 4i, & \alpha_3 &= -1 + 9i, \\ \beta_0 &= -1 + i, & \beta_1 &= -\frac{1}{3} + 2i, & \beta_2 &= -\frac{5}{3} - 5i, & \beta_3 &= -5 - 10i. \end{aligned}$$

Z relacijo  $\mathcal{A}(t) = \alpha(t) + \mathbf{k}\beta(t)$  pridobimo kvaternionski zapis, preko katerega izrazimo zapis hodografa krivulje. Bernsteinovi koeficienti kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  so enaki

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= 1 + \mathbf{j} - \mathbf{k}, & \mathcal{A}_2 &= -1 + 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \frac{5}{3}\mathbf{k}, \\ \mathcal{A}_1 &= 1 - \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}, & \mathcal{A}_3 &= -1 + 9\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Za integracijsko konstanto si kot ponavadi izberemo točko  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0)$ . Ostale

kontrolne točke krivulje izračunamo preko enačb (8.2) in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left( \frac{26}{105}, \frac{26}{35}, \frac{8}{35} \right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left( -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{7} \right), & \mathbf{p}_5 &= \left( -\frac{1}{5}, -\frac{16}{15}, -\frac{34}{35} \right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left( -\frac{1}{3}, -\frac{13}{21}, -\frac{4}{7} \right), & \mathbf{p}_6 &= \left( -\frac{341}{105}, -\frac{429}{35}, -\frac{284}{35} \right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left( -\frac{8}{21}, -\frac{29}{35}, -\frac{26}{35} \right), & \mathbf{p}_7 &= \left( -\frac{986}{105}, -\frac{1279}{35}, -\frac{834}{35} \right). \end{aligned}$$

S tem dobimo krivuljo  $\mathbf{r}$  s komponentami

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{48}{7}t^7 + 36t^6 - \frac{276}{5}t^5 + 12t^4 + \frac{20}{3}t^3 - t^2 - t, \\ y(t) &= -\frac{120}{7}t^7 + 100t^6 - \frac{872}{5}t^5 + 52t^4 + 6t^3 - t^2 - 2t, \\ z(t) &= -\frac{80}{7}t^7 + 64t^6 - \frac{552}{5}t^5 + 32t^4 + 4t^3 - 2t. \end{aligned} \quad (8.10)$$

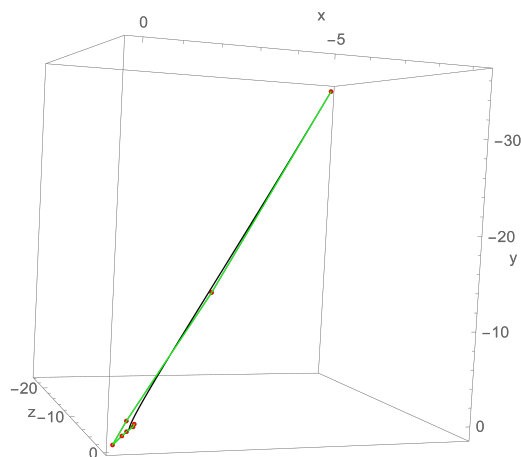
Graf krivulje je razviden na [sliki 10](#). Hodograf je primitiven, saj velja

$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1.$$

Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 152t^6 - 744t^5 + 1068t^4 - 248t^3 - 26t^2 + 2t + 3.$$

Razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo pa je  $|\kappa(t)/\tau(t)| = 1/8$ , torej konstantno. Tudi po Lancretovem izreku 3.11 lahko preverimo, da je taka krivulja res vijačna.



Slika 10: Graf vijačne krivulje (8.10) iz primera 8.8 s pripadajočim kontrolnim poligonom, [za katero](#) velja  $\text{st}(h) = 4$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ .

**Primer 8.9** (Nevijačna krivulja,  $\text{st}(h) = 4$ ,  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ ). Sedaj si bomo ogledali še nevičajno krivuljo, kjer je  $\text{st}(h) = 4$  in  $\text{st}(\mathbf{w}) = 0$ . Izberemo si naslednja polinoma  $h$  in  $\mathbf{w}$ , izražena v Bernsteinovi bazi z izbiro koeficientov

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 2, \quad h_2 = 2, \quad h_3 = 2, \quad h_4 = 1, \quad \mathbf{w}_0 = 1.$$

Tokrat je količina  $\Delta = 9h_2^2 + 3h_0h_4 - 12h_1h_4 = -9$  negativna in po trditvi 7.9 sledi, da je krivulja, ki jo generiramo, nevičajna. Podobno kot v prejšnjih primerih si prosto izberemo še vrednosti koeficientov  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$  in  $\beta_0 = -1$ . Nato rešimo sistem enačb (5.11) in pri tem upoštevamo rešitev, ki ima negativni predznak pri korenu v izrazu (5.12), ki določa  $\mathbf{z} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ . Dobimo naslednje Bernsteinove koeficiente za polinoma  $\alpha$  in  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= 1, & \alpha_2 &= 2 + i, & \alpha_3 &= 2 + 3i, \\ \beta_0 &= -1, & \beta_1 &= -\frac{2}{3}, & \beta_2 &= -\frac{2}{3} - i, & \beta_3 &= -2i. \end{aligned}$$

Bernsteinovi koeficienti kvaternionskega polinoma  $\mathcal{A}$  so enaki

$$\mathcal{A}_0 = 1 - \mathbf{k}, \quad \mathcal{A}_1 = 1 - \frac{2}{3}\mathbf{k}, \quad \mathcal{A}_2 = 2 + i - \mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}, \quad \mathcal{A}_3 = 2 + 3i - 2\mathbf{j}.$$

Kontrolne točke krivulje izračunamo preko enačb (8.2). Enake so

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= (0, 0, 0), & \mathbf{p}_4 &= \left(\frac{2}{5}, -\frac{113}{105}, \frac{1}{35}\right), \\ \mathbf{p}_1 &= \left(0, -\frac{2}{7}, 0\right), & \mathbf{p}_5 &= \left(\frac{86}{105}, -\frac{163}{105}, \frac{9}{35}\right), \\ \mathbf{p}_2 &= \left(\frac{1}{21}, -\frac{11}{21}, 0\right), & \mathbf{p}_6 &= \left(\frac{23}{15}, -\frac{86}{35}, \frac{29}{35}\right), \\ \mathbf{p}_3 &= \left(\frac{6}{35}, -\frac{83}{105}, 0\right), & \mathbf{p}_7 &= \left(\frac{296}{105}, -\frac{146}{35}, \frac{69}{35}\right). \end{aligned}$$

Tako dobimo krivuljo  $\mathbf{r}$  s komponentami

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2}{7}t^7 - \frac{2}{3}t^6 + \frac{6}{5}t^5 + t^3 + t^2, \\ y(t) &= -\frac{4}{7}t^7 + \frac{8}{3}t^6 - \frac{28}{5}t^5 + 3t^4 - \frac{8}{3}t^3 + t^2 - 2t, \\ z(t) &= \frac{4}{7}t^7 - 2t^6 + \frac{12}{5}t^5 + t^4. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Graf krivulje je prikazan na [sliki 11](#). Hodograf je primitiven, saj velja

$$\gcd(x'(t), y'(t), z'(t)) = 1.$$

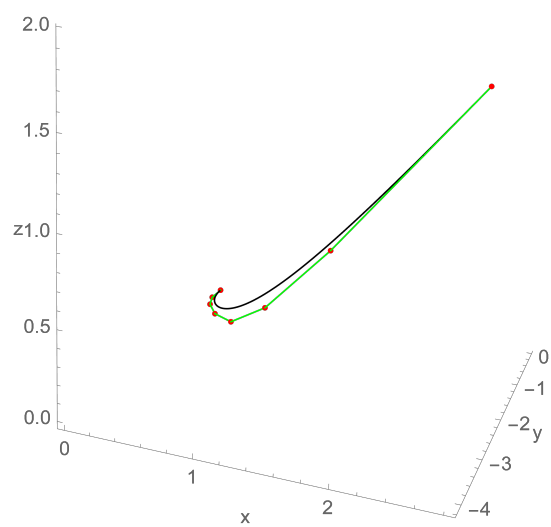
Parametrična hitrost krivulje je enaka

$$\sigma(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = 6t^6 - 20t^5 + 30t^4 - 8t^3 + 9t^2 - 2t + 2,$$

razmerje med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo pa je

$$\left| \frac{\kappa(t)}{\tau(t)} \right| = \left| \frac{-2t^4 + 4t^3 - 6t^2 + 4t + 1}{8t^4 + 2t^3 - 6t^2 + 12t} \right|,$$

kar ni identično enako konstanti. Tudi po Lancretovem izreku 3.11 lahko preverimo, da je taka krivulja nevičajna.



Slika 11: Graf vijačne krivulje (8.11) iz primera 8.9 s pripadajočim kontrolnim poligonom, za katero velja  $st(h) = 4$  in  $st(\mathbf{w}) = 0$ .



## 9 Hermiteova interpolacija z DPH krivuljami stopnje 5

V tem razdelku se bomo osredotočili na problem interpolacije dveh točk in pripadajočih tangent. Takemu problemu bomo rekli **Hermiteov** interpolacijski problem. Obravnavali bomo reševanje tega problema s “splošnimi” vijačnimi **DPH krivuljami** stopnje 5, torej takimi, za katere velja  $\gcd(x', y', z') = \text{konstanta}$ . To so krivulje, ki jih dobimo s postopkom kvadratične racionalne reparametrizacije, **opisane** v poglavju 6.2.2. Razdelek je povzet po [10].

Recimo, da imamo kvadratični kvaternionski polinom, podan v Bernsteinovi bazi kot

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(1-t)^2 + \mathcal{A}_1 2(1-t)t + \mathcal{A}_2 t^2. \quad (9.1)$$

**DPH krivuljo** stopnje 5 lahko podamo kot Bézierjevo krivuljo

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^5 \mathbf{p}_k \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k \quad (9.2)$$

s kontrolnimi točkami  $\mathbf{p}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$ , kjer je  $0 \leq k \leq 5$ . Hodograf te krivulje je enak

$$\mathbf{r}'(t) = 5 \sum_{k=0}^4 (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) \binom{4}{k} (1-t)^{4-k} t^k = \mathcal{A}(t) \mathbf{i} \mathcal{A}^*(t). \quad (9.3)$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da so kontrolne točke enake

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5} \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{10} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{30} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + 4 \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{10} (\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^*), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5} \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^*. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Problem, ki ga želimo rešiti, je naslednji. Za dani točki  $\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_f \in \mathbb{R}^3$  ter dani tangenti  $\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f \in \mathbb{R}^3$  bi radi izračunali splošno vijačno **DPH krivuljo**  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  stopnje 5, ki zadošča pogojem:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_s, \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{d}_s \quad \text{in} \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_f, \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{d}_f. \quad (9.5)$$

Krajiščni kontrolni točki krivulje  $\mathbf{r}$  v (9.2) sta zaradi prve in tretje enačbe v (9.5) enaki

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_s \quad \text{in} \quad \mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_f, \quad (9.6)$$

interpolacija tangent pa nam s pomočjo druge in četrte enačbe v (9.5) ter prve in zadnje enačbe v (9.4) poda pogoja

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \mathbf{d}_s \quad \text{in} \quad \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* = \mathbf{d}_f. \quad (9.7)$$

Iz (9.4) izrazimo

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_0^* + \frac{1}{10}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*) \\
&+ \frac{1}{30}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + 4\mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*) \\
&+ \frac{1}{10}(\mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_1^*) + \frac{1}{5}\mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_2^*.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Definirajmo  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_5 - \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_s$ . Po krajšem računu se lahko prepričamo, da velja enakost

$$\begin{aligned}
&(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)\mathbf{i}(3\mathcal{A}_0 + 4\mathcal{A}_1 + 3\mathcal{A}_2)^* \\
&= 120\Delta\mathbf{p} - 15(\mathbf{d}_s + \mathbf{d}_f) + 5(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*).
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Za kvaternionske neznanke  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  nam enačbe (9.7) in (9.9) predstavljajo sistem nelinearnih enačb. Ko rešimo ta sistem, lahko kontrolne točke  $\mathbf{p}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}$  izračunamo iz (9.4), kjer upoštevamo enačbi (9.6). Za koeficiente kvaternionskega polinoma interpolacijske vijačnice, ki jo uporabljamo, velja enakost (6.11), to je  $\mathcal{A}_1 = c_0\mathcal{A}_0 + c_2\mathcal{A}_2$  za konstanti  $c_0, c_2 \in \mathbb{R}$ . To enakost vstavimo v (9.9) in z nekaj računanja dobimo

$$\begin{aligned}
&(1 + 3(c_0 + c_2) + 4c_0c_2)(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*) \\
&= 30\Delta\mathbf{p} - (6 + 6c_0 + 4c_0^2)\mathbf{d}_s - (6 + 6c_2 + 4c_2^2)\mathbf{d}_f.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Označimo sedaj  $\mathbf{d}_s = \|\mathbf{d}_s\|(\lambda_s, \mu_s, \nu_s)$  in  $\mathbf{d}_f = \|\mathbf{d}_f\|(\lambda_f, \mu_f, \nu_f)$ . Recimo najprej, da velja  $\mathbf{d}_s \neq (-1, 0, 0)$  in  $\mathbf{d}_f \neq (-1, 0, 0)$ . Po lemi 2.1 lahko rešitvi enačb (9.7) zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_s)\|\mathbf{d}_s\|} \left( -\sin\phi_0 + \cos\phi_0\mathbf{i} + \frac{\mu_s\cos\phi_0 + \nu_s\sin\phi_0}{1 + \lambda_s}\mathbf{j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu_s\cos\phi_0 - \mu_s\sin\phi_0}{1 + \lambda_s}\mathbf{k} \right)
\end{aligned} \tag{9.11}$$

in

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \lambda_f)\|\mathbf{d}_f\|} \left( -\sin\phi_2 + \cos\phi_2\mathbf{i} + \frac{\mu_f\cos\phi_2 + \nu_f\sin\phi_2}{1 + \lambda_f}\mathbf{j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu_f\cos\phi_2 - \mu_f\sin\phi_2}{1 + \lambda_f}\mathbf{k} \right),
\end{aligned} \tag{9.12}$$

kjer sta  $\phi_0, \phi_2$  prosta parametra. Iz (9.11) in (9.12) sledi, da je vsota  $\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*$  enaka

$$\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2\mathbf{i}\mathcal{A}_0^* = \sqrt{\|\mathbf{d}_s\|\|\mathbf{d}_f\|}(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}) = \mathbf{u}\cos\phi + \mathbf{v}\sin\phi, \tag{9.13}$$

kjer so

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{((1 + \lambda_s)(1 + \lambda_f) - (\mu_s \mu_f + \nu_s \nu_f)) \cos \phi - (\mu_s \nu_f - \mu_f \nu_s) \sin \phi}{\sqrt{(1 + \lambda_s)(1 + \lambda_f)}}, \\ c_y &= \frac{((1 + \lambda_f)\mu_s + (1 + \lambda_s)\mu_f) \cos \phi + ((1 + \lambda_s)\nu_f - (1 + \lambda_f)\nu_s) \sin \phi}{\sqrt{(1 + \lambda_s)(1 + \lambda_f)}}, \\ c_z &= \frac{((1 + \lambda_f)\nu_s + (1 + \lambda_s)\nu_f) \cos \phi + ((1 + \lambda_f)\mu_s - (1 + \lambda_s)\mu_f) \sin \phi}{\sqrt{(1 + \lambda_s)(1 + \lambda_f)}}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

in  $\phi = \phi_2 - \phi_0$ . Zapis vektorjev  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  se lahko razbere iz (9.14) ob upoštevanju enakosti (9.13).

Če je  $\mathbf{d}_s = (-1, 0, 0)$ , je po lemi 2.1 rešitev prve enačbe v (9.7) enaka

$$\mathcal{A}_0 = \cos \phi_0 \mathbf{j} + \sin \phi_0 \mathbf{k}. \quad (9.15)$$

Podobno je za  $\mathbf{d}_f = (-1, 0, 0)$  rešitev druge enačbe v (9.7) oblike

$$\mathcal{A}_2 = \cos \phi_2 \mathbf{j} + \sin \phi_2 \mathbf{k}. \quad (9.16)$$

Iz (9.15) in (9.12) sledi, da je vsota  $\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*$  enaka

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \sqrt{2 \|\mathbf{d}_f\|} (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) = \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi, \quad (9.17)$$

kjer so

$$\begin{aligned} c_x &= -\frac{\mu_f \cos \phi + \nu_f \sin \phi}{\sqrt{1 + \lambda_f}}, \\ c_y &= \sqrt{1 + \lambda_f} \cos \phi, \\ c_z &= \sqrt{1 + \lambda_f} \sin \phi, \end{aligned} \quad (9.18)$$

in  $\phi = \phi_0 + \phi_2$ . Tako kot prej se zapis vektorjev  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  ob upoštevanju enakosti (9.17) razbere iz (9.18).

Ob upoštevanju (9.11) in (9.16) sledi

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = \sqrt{2 \|\mathbf{d}_s\|} (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) = \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi. \quad (9.19)$$

Tokrat so vrednosti  $c_x, c_y, c_z$  enake

$$\begin{aligned} c_x &= -\frac{\mu_s \cos \phi + \nu_s \sin \phi}{\sqrt{1 + \lambda_s}}, \\ c_y &= \sqrt{1 + \lambda_s} \cos \phi, \\ c_z &= \sqrt{1 + \lambda_s} \sin \phi, \end{aligned} \quad (9.20)$$

za  $\phi = \phi_0 + \phi_2$ .

Preostalo nam je še zadnji primer, ko sta  $\mathbf{d}_s$  in  $\mathbf{d}_f$  oba enaka  $(-1, 0, 0)$ . V tem primeru ima  $\mathcal{A}_0$  enak zapis kot v (9.15), kvaternion  $\mathcal{A}_2$  pa ima enak zapis kot v enačbi (9.16). Tokrat se vsota  $\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*$  poenostavi v

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* = -2 \cos \phi \mathbf{i} = \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi, \quad (9.21)$$

pri čemer je  $\phi = \phi_2 - \phi_0$ . Vektor  $\mathbf{u}$  je tako enak  $(-2, 0, 0)$ , vektor  $\mathbf{v}$  pa  $(0, 0, 0)$ .

Enačba (9.10) nam predstavlja sistem treh skalarnih enačb v spremenljivkah  $c_0, c_2, \phi$ . Naj bosta  $k_0 = c_0 + \frac{3}{4}$  in  $k_2 = c_2 + \frac{3}{4}$ . Videli smo, da lahko v vseh primerih vsoto  $\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*$  zapišemo v obliki  $\mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi$ . Če to upoštevamo, lahko enačbo (9.10) enostavneje zapišemo kot

$$\mathbf{d}_s 16k_0^2 + \mathbf{d}_f 16k_2^2 + (\mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi)(16k_0 k_2 - 5) = \mathbf{h}, \quad (9.22)$$

kjer je  $\mathbf{h} = 120\Delta\mathbf{p} - 15(\mathbf{d}_s + \mathbf{d}_f)$ . Enačbo (9.22) lahko obravnavamo kot sistem linearnih enačb v spremenljivkah  $16k_0^2, 16k_2^2, 16k_0 k_2 - 5$ . S Cramerjevim pravilom pridemo do rešitev

$$r_1 = 16k_0^2 = \frac{[\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi]}{[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi]}, \quad (9.23)$$

$$r_2 = 16k_2^2 = \frac{[\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi]}{[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi]}, \quad (9.24)$$

$$r_3 = 16k_0 k_2 - 5 = \frac{[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h}]}{[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{u} \cos \phi + \mathbf{v} \sin \phi]}, \quad (9.25)$$

kjer je z

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \det([\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}])$$

označena determinanta  $3 \times 3$  matrike  $[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ . Očitno morajo te rešitve zadoščati pogoju

$$16k_0^2 \cdot 16k_2^2 = ((16k_0 k_2 - 5) + 5)^2 \\ r_1 \cdot r_2 = (r_3 + 5)^2. \quad (9.26)$$

S pomočjo substitucije  $\xi = \tan \frac{1}{2}\phi$  lahko zapišemo  $\cos \phi = (1 - \xi^2)/(1 + \xi^2)$  in  $\sin \phi = 2\xi/(1 + \xi^2)$ . Ob upoštevanju rešitev (9.23)-(9.25) in pogoja (9.26) dobimo enačbo stopnje 4 oblike

$$d_4 \xi^4 + d_3 \xi^3 + d_2 \xi^2 + d_1 \xi + d_0 = 0 \quad (9.27)$$

v spremenljivki  $\xi$ , kjer so koeficienti enaki

$$\begin{aligned} d_4 &= [\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{u}][\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{u}] - [\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h} - 5\mathbf{u}]^2, \\ d_3 &= -2[\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{u}][\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{v}] - 2[\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{u}][\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{v}] - 20[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{v}][\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h} - 5\mathbf{u}], \\ d_2 &= -2[\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{u}][\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{u}] + 4[\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{v}][\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{v}] \\ &\quad - 100[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{v}]^2 - 2[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h} - 5\mathbf{u}][\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h} + 5\mathbf{u}], \\ d_1 &= 2[\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{v}][\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{u}] + 2[\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{v}][\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{u}] - 20[\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{v}][\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h} + 5\mathbf{u}], \\ d_0 &= [\mathbf{h}, \mathbf{d}_f, \mathbf{u}][\mathbf{d}_s, \mathbf{h}, \mathbf{u}] - [\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_f, \mathbf{h} + 5\mathbf{u}]^2. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Ker je enačba (9.27) stopnje 4, ima lahko štiri, dve ali nič realnih ničel. Za vsako realno ničlo  $\xi$  lahko poračunamo izraza  $\cos \phi = (1 - \xi^2)/(1 + \xi^2)$  in  $\sin \phi = 2\xi/(1 + \xi^2)$  ter ju vstavimo v (9.23)-(9.25). Izraza za  $16k_0^2$  in  $16k_2^2$  morata biti oba nenegativna. Če je vsaj eden od teh izrazov negativen, nam ničla  $\xi$  ne da veljavne rešitve za  $k_0$

in  $k_2$ . Vsak od izrazov  $16k_0^2$  in  $16k_2^2$  nam poda dve možni vrednosti, ki se razlikujeta v predznaku. Tako dobimo štiri različne kombinacije parov  $(k_0, k_2)$ , ki pa niso vsi dopustni. Upoštevati moramo tudi enačbo (9.25), kar eliminira dve možnosti. Tako nam vsaka realna ničla enačbe (9.27) poda največ dva različna para vrednosti  $(k_0, k_2)$ , kar pomeni, da lahko za dane podatke (9.5) generiramo sodo število (med 0 in 8) različnih interpolacijskih vijačnih **DPH krivulj** stopnje 5.

Ko enkrat izračunamo ničle enačbe (9.27), pri konstrukciji vijačne **DPH krivulje** postopamo takole: izberemo ustrezno rešitev  $\xi, k_0, k_2$  in nastavimo  $\phi_0 = 0$ . Ker je  $\phi = \phi_2 - \phi_0$  ali pa  $\phi = \phi_0 + \phi_2$  in  $\phi = 2 \arctan \xi$ , je potem  $\phi_2 = 2 \arctan \xi$ . Odvisno od vrednosti tangent  $\mathbf{d}_s$  in  $\mathbf{d}_f$  izberemo ustrezna izraza za  $\mathcal{A}_0$  in  $\mathcal{A}_2$ . Upoštevamo tudi, da velja  $c_0 = k_0 - \frac{3}{4}$  in  $c_2 = k_2 - \frac{3}{4}$ . Preko enakosti (6.11) poračunamo še  $\mathcal{A}_1$ . Sedaj imamo znane vse potrebne podatke, da lahko izračunamo kontrolne točke (9.4) krivulje  $\mathbf{r}$ .

Ker imamo na voljo več rešitev za naš interpolacijski problem, se je smiselno vprašati, katera rešitev je "najboljša". Najboljša bi bila tista rešitev, pri kateri je krivulja v prostoru najmanj ukrivljena. Za mero ukrivljenosti lahko recimo vzamemo integral

$$E = \int_0^1 \kappa^2(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (9.29)$$

Integral (9.29) ponazarja prožnostno energijo, ki je potrebna, da ravno elastično palico spravimo v obliko, ki jo ponazarja prostorska krivulja  $\mathbf{r}$ . Izmed vseh interpolacijskih krivulj je "najboljša" tista krivulja, pri kateri ima (9.29) najmanjšo vrednost.

**Primer 9.1.** Za začetne podatke  $\mathbf{p}_s = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{d}_s = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{p}_f = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{d}_f = (0, 1, 1)$  se enačba (9.27) glasi

$$-3765.49\xi^4 + 68726.2\xi^3 + 88889.6\xi^2 - 80193.2\xi - 5064.36 = 0 \quad (9.30)$$

in ima štiri realne ničle

$$\xi_1 = -0.059419, \quad \xi_2 = -1.761857, \quad \xi_3 = 19.411014, \quad \xi_4 = 0.661850. \quad (9.31)$$

Ničli  $\xi_1$  in  $\xi_3$  zavržemo, saj nam ne dasta nenegativnih vrednosti za  $k_0^2$  in  $k_2^2$ . Ničla  $\xi_2$  nam da par ustreznih rešitev

$$(k_0, k_2, \phi) = (\mp 1.705395, \pm 1.705395, -2.109108). \quad (9.32)$$

Za ta par ustreznih rešitev lahko izračunamo os vijačnice  $\mathbf{a}$  ter kot  $\psi$  med osjo in enotsko tangento:

$$\mathbf{a} = (-0.309913, -0.309913, -0.898837), \quad \psi = 148.728^\circ. \quad (9.33)$$

Absolutna vrednost razmerja med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo znaša  $|\kappa/\tau| = 0.607333$  za obe krivulji. Za obe krivulji je vrednost integrala (9.29) enaka  $E = 322.30$ .

Podobno pridobimo tudi pri ničli  $\xi_4$  dve interpolacijski krivulji, ki ju lahko podamo preko parametrov

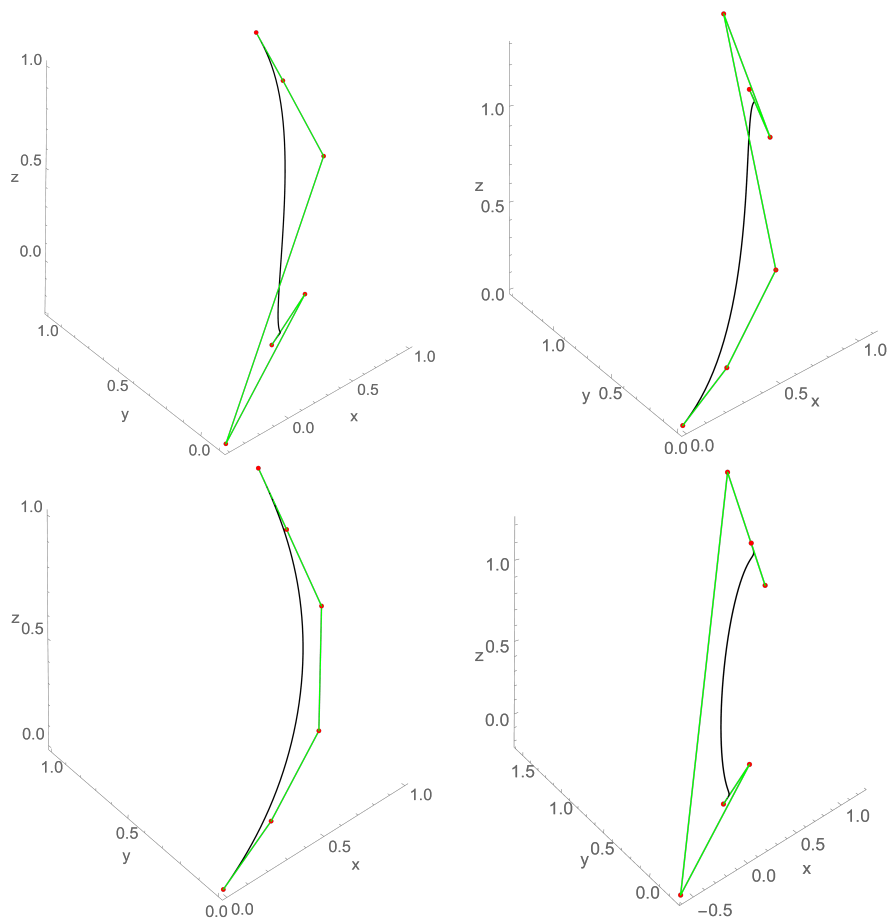
$$(k_0, k_2, \phi) = (\mp 1.850380, \mp 1.850380, 1.169321). \quad (9.34)$$

Os vijačnice  $\mathbf{a}$  in kot  $\psi$  sta tokrat enaka

$$\mathbf{a} = (0.354664, 0.354664, 0.865117), \quad \psi = 30.3998^\circ. \quad (9.35)$$

Tokrat je za oba primera absolutna vrednost razmerja med fleksijsko in torzijsko ukrivljenostjo enaka  $|\kappa/\tau| = 0.586692$ , energija je pri izbiri  $k_0 = k_2 = 1.850380$  enaka  $E = 1.27$ , pri izbiri  $k_0 = k_2 = -1.850380$  pa je enaka  $E = 89.58$ .

“Najboljša” interpolacijska krivulja je tista krivulja, ki ima najmanjšo energijo  $E$ . V našem primeru je to krivulja, ki jo dobimo pri ničli  $\xi_4$  in izbiri  $k_0 = k_2 = 1.850380$ . Na **sliki 12** se nahaja spodaj levo.



Slika 12: Štiri interpolacijske **DPH krivulje** s pripadajočimi kontrolnimi poligoni za podatke  $\mathbf{p}_s = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{p}_f = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{d}_s = (1, 0, 1)$  in  $\mathbf{d}_f = (0, 1, 1)$ . Zgoraj: krivulji, definirani z ničlo  $\xi_2$ . Spodaj: krivulji, definirani z ničlo  $\xi_4$ .

Opisano konstrukcijo interpolacijskih polinomskih vijačnic stopnje 5 lahko direktno uporabimo za konstrukcijo zvezno odvedljivih interpolacijskih zlepkov, ki na nekem polinomskem odseku interpolirajo dve točki in dve tangenti. Konstrukcija je povsem lokalna.

## 10 Zaključek

Namen tega dela je bil predstaviti DPH krivulje, opisati njihove glavne lastnosti, osvetliti povezavo med njimi in polinomskimi vijačnimi krivuljami, analizirati in opisati njihovo konstrukcijo za nizke stopnje ter jih uporabiti tudi pri reševanju Hermiteovega interpolacijskega problema.

Ugotovili smo, da so DPH krivulje tisti podrazred krivulj s pitagorejskim hodografom, ki imajo poleg racionalno parametrizirane enotske tangente in torzijske ukrivljenosti racionalno parametrizirano celotno Frenetovo ogrodje ter tudi fleksijsko ukrivljenost. Spoznali smo, da je vsaka polinomska vijačna krivulja tudi DPH krivulja. Obratno je res za krivulje stopnje 3 in 5. Videli smo, da je vsaka PH krivulja stopnje 3 hkrati vijačnica in hkrati DPH krivulja. DPH krivulje stopnje 5, ki so hkrati vijačnice, predstavljajo pravo podmnožico PH krivulj stopnje 5. Za stopnjo 7 ali več pa predstavlja množica DPH krivulj pravo podmnožico množice PH krivulj, pri čemer obstajajo tako vijačne kot nevijačne DPH krivulje. Pri konstrukciji DPH krivulj in vijačnic smo si pomagali s Hopfovo preslikavo ter stereografsko projekcijo. Klasificirali smo veliko različnih tipov polinomskih vijačnih krivulj ter DPH krivulj ter podali pogoje za njihov obstoj in opis konstrukcij. Podali smo tudi veliko izračunanih primerov DPH krivulj stopnje 7.

Pri problemu interpolacije dveh točk in pripadajočih tangent z DPH krivuljami stopnje 5 smo videli, da moramo rešiti nelinearen sistem enačb, ki pa se reducira na reševanje polinomske enačbe stopnje 4. V splošnem je za dane podatke možno pridobiti sodo mnogo različnih interpolacijskih krivulj, in sicer med 0 in 8. Če je rešitev več, se kot najboljšo izbere tisto, ki ima najmanjšo energijo oziroma tisto, ki je v prostoru najmanj ukrivljena.

Zaradi svojih edinstvenih lastnosti bodo DPH krivulje in polinomske vijačne krivulje tudi v prihodnje verjetno ostale aktivno področje nadaljnjega raziskovanja.





## Literatura

- [1] J. Beltran in J. Monterde, *A characterization of quintic helices*, Journal of computational and applied mathematics **206**(1) (2007) 116–121.
- [2] H. I. Choi, D. S. Lee in H. P. Moon, *Clifford algebra, spin representation, and rational parameterization of curves and surfaces*, Advances in Computational Mathematics **17**(1) (2002) 5–48.
- [3] G. Farin, J. Hoschek in M.-S. Kim, *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier, 2002.
- [4] R. T. Farouki, *Exact rotation-minimizing frames for spatial Pythagorean-hodograph curves*, Graphical Models **64**(6) (2002) 382–395.
- [5] R. T. Farouki, *Pythagorean—hodograph Curves*, Springer, 2008.
- [6] R. T. Farouki, M. al Kandari in T. Sakkalis, *Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves*, Advances in Computational Mathematics **17**(4) (2002) 369–383.
- [7] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs I. Quaternion and Hopf map representations*, Journal of Symbolic Computation **44**(2) (2009) 161–179.
- [8] R. T. Farouki, C. Giannelli in A. Sestini, *Helical polynomial curves and double Pythagorean hodographs II. Enumeration of low-degree curves*, Journal of Symbolic Computation **44**(4) (2009) 307–332.
- [9] R. T. Farouki in T. Sakkalis, *Pythagorean hodographs*, IBM Journal of Research and Development **34**(5) (1990) 736–752.
- [10] R. T. Farouki in dr., *Characterization and construction of helical polynomial space curves*, Journal of Computational and Applied Mathematics **162**(2) (2004) 365–392.
- [11] E. Kreyszig, *Differential geometry*, Dover Publications, 1991.
- [12] M. M. Lipschutz, *Schaum's outline of theory and problems of differential geometry*, McGraw-Hill, 1969.
- [13] T. Needham, *Visual complex analysis*, Oxford University Press, 1998.
- [14] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, Dover Publications, 1988.