Spazi vettoriali

$V \rightarrow$ insieme di vettori (n-uple di scalari)

$K \rightarrow$ campo (moltiplicando/sommando elementi in K ottengo un elemento di K)

Def. V è uno spazio vettoriale (sul campo K) se esistono due operazioni su V:

1. $+ : V \times V \longrightarrow V \quad (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \xrightarrow{+} \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ (gruppo abeliano)
   - $\exists\, \underline{o} \in V : \underline{o} + \underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$ — elemento neutro
   - $\forall \underline{v} \in V, \exists\, -\underline{v} \in V : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{o}$ — $-\underline{v}$ è l'opposto di $\underline{v}$

   associatività

   commutatività

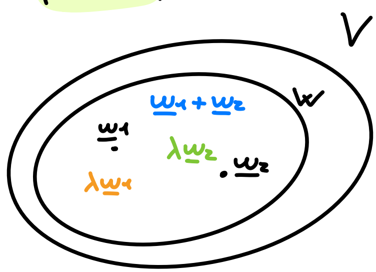
2. $\cdot : K \times V \longrightarrow V \quad (\lambda, \underline{v}) \xrightarrow{\cdot} \lambda \underline{v}$
   - $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 + \underline{v}$
   - $\lambda(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2$
   - $0 \cdot \underline{v} = \underline{o}$
   - $\lambda \cdot \underline{o} = \underline{o} \quad \forall \underline{v} \in V$
   - $-1 \cdot \underline{v} = -\underline{v}$

Sottospazi vettoriali

V s.v. su K, $W \subset V$ W è sottospazio vettoriale di V ($W < V$) se:

- $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W \quad \forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$
- $\lambda \underline{w} \in W \quad \forall \underline{w} \in W, \forall \lambda \in K \Rightarrow \underline{o} \in W$

deve avere il vettore nullo per essere sottospazio V.



il più banale è quello che contiene solo $\underline{o}$, gli altri hanno infiniti vettori

def: $\langle S \rangle < V$ indica il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente S

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i \quad \lambda_i \in \mathbb{R},\ \underline{z}_i \in S \right\}$$

combinazioni lineari dei vettori di S

Dipendenza lineare

$S < V$ i vettori di S sono detti linearmente dipendenti se

$$\exists\, \underline{w} \in S \text{ e } S_{\underline{w}} = \{ \underline{z}_1, \dots, \underline{z}_n \} \subset S \text{ t.c. } \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i \,,\ \lambda_i \in K$$

$\not\ni \underline{w}$

$\underline{w}$ é combinazione lineare di vettori di S.
Altrimenti si dicono indipendenti

$S \subset V$ insieme di vettori lin. ind. SSE

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{z}_i = \underline{0} \longrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$$

Basi

Problema di comunicare un s.s.v.
$w < V$, quindi $<s> = w$ per qualche insieme $s \subset V$
obiettivo trovare s minimale per il quale questo ē vero

teorema ① le seguenti affermazioni sono equivalenti

finito

- $S = \{ \underline{V}_1, \dots \underline{V}_n \} \subset V$ é una base di V
- S é un sistema di generatori per V, cioē $V = <s>$ e i vettori di S sono l.i.
- $<s> = V$ e $\forall \underline{v} \in V \quad \exists! \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{V}_i = \underline{V} \quad \underline{V}_i \in S$
- S é un insieme minimale di generatori
- S é un insieme massimale di v. lin. ind. di V

teorema di completamento a una base ②

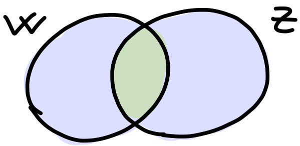
$I = \{ \underline{v}_1, \dots \underline{v}_n \}$ vettori ind. di V
$G = \{ \underline{w}_1, \dots \underline{w}_n \}$ generatori di V ③
allora $\exists G' \subset G : I \cup G'$ é una base di V $\quad \|I\| \leq \|G\|$
ogni base ha lo stesso numero di elementi
La dimensione di uno spazio vettoriale ē il numero di elementi delle sue basi
$\dim(V) = n \Rightarrow n$ vett. lin. ind sono anche generatori

Sia V SV. di dim finita

- $W \cap V < V$
- $W + V = \{ \underline{w} \underset{v}{+} \underline{z} : \underline{w} \in W \text{ e } \underline{z} \in Z \} < V$ più piccolo sottospazio v. che contiene $W \cup Z$

Teorema di Grassman

$$\dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$$



$$|W \cup Z| = |W| + |Z| - |(W \cap Z)|$$

W e Z finiti

Matrici

Servono per rappresentare informazioni con ordine, es: sistemi di eq. lineari

Def: una matrice $K \times n$ è un elemento di $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \mathbb{R}^n}_{K \text{ volte}}$

$K \to$ num righe
$n \to$ num colonne

Operazioni su matrici

- $A + B = C \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- $\lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

Prodotto tra matrici

$A \in M(m,n)$ $B \in M(K,f)$ $A \cdot B$ definita solo se $n = K$

$A \cdot B = (c_{ij})$ dove $c_{ij} = \sum_{u=1}^{n} a_{iu} \cdot b_{ui}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

l'el. neutro della moltiplicazione tra matrici è l'identità

$\forall A (n \times n)$ $A \cdot id_{n \times n} = A$

oss. $A \cdot B$ può essere definita ma $B \cdot A$ no

Inversa

Non tutte le matrici sono invertibili

$A \cdot A^{-1} = id_n$

Sistemi di equazioni lineari

fissati
variabili

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \dots a_n x_n = b$

l'eguaglianza deve valere al variare delle x

$$A = \begin{cases} a_{1,1} x_1 \dots a_{n,1} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{K,1} x_1 \dots a_{n,n} x_n = b_K \end{cases}$$

ad A posso associare una matrice completa e una incompleta $A = (a_{ij})$

$A|\underline{b} = \overbrace{(A|\underline{b})}^{n+1} \Big] K$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_K \end{pmatrix}$

le soluzioni saranno vettori $\in \mathbb{R}^K$

Se A è invertibile c'è una sola soluzione

Teorema di Rouché-capelli

(A) $\exists\, \underline{x}$ t.c. $A\underline{x}=\underline{b} \iff rg(A)=rg(A|\underline{b})$

(B) se c'é soluzione l'insieme delle sol. é:

$\underline{c}+W=\{\underline{c}+\underline{w} \mid \underline{w}\in W\}$

non contiene $\underline{0}$, no s.v.

$\underline{c}$ soluzione qualsiasi del sistema

soluzioni di $A\underline{x}=\underline{0}$, $W<\mathbb{R}^n$

Sia $A\underline{c}=\underline{0}$ $\quad A(\lambda\underline{c})=A(\lambda\, Id_n\underline{c})=(A\lambda id_n)\cdot\underline{c}=\lambda\, id_n \overset{\underline{0}}{A\underline{c}}=\underline{0}$

Anche moltiplicando $\underline{c}$ le sol. non cambiano

numero di incognite

$Dim(W)=n-rg(A)$

Rango di matrici

$rg(A)=$ numero di $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{righe}}{\text{colonne}}$ lin. ind. di A

$= \dim\left(\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{\text{righe}}{\text{colonne}} \text{ l.i. di } A\rangle\right)$

Trasformazioni elementari

Sia T trasf. el. $rg(A)=rg(T(A))$

1. scambio righe
2. moltiplicare riga per $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
3. sommare a una riga un'altra moltiplicata per $\lambda\neq 0$

le soluzioni del sistema associato non cambiano con le trasf. el.

def: Una matrice é a scala se il numero di 0 a sx nell'i-esima riga é strettamente maggiore di quella prima

Se riduco a scala una matrice con le trasformazioni il rango non cambia peró é piú facile da vedere.

Questo permette di usare il teorema di Rouché-Capelli per valutare l'esistenza di soluzioni. Se ci sono riscrivo il sistema partendo dalla matrice a scala e trovo le soluzioni.

Determinante

é una f.ne strettamente legata al rango $det_n : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$

proprietá

- multilinearitá

rispetto la somma:

$$det_n(\underline{c}_1, \dots, \overset{i}{\underline{a}+\underline{b}}, \dots, a_n) = det_n(\underline{c}_1, \dots, \overset{i}{\underline{a}}, \dots, a_n) + det_n(\underline{c}_1, \dots, \overset{i}{\underline{b}}, \dots, a_n)$$

rispetto il prodotto per scalare

$$det_n(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_i, \dots \underline{c}_n) = \lambda det_n(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_i, \dots \underline{c}_n)$$

- alternanza

uguali

$$\cdot\ det_n(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}, \dots, \underline{c}, \dots \underline{c}_n) = 0$$

$\cdot\ det_n(e_i, \dots, e_n) = 1$ il determinante della base canonica di $\mathbb{R}^n$ é 1

esiste una sola f.ne che soddisfa queste proprietá

Formula di Laplace

$A = (a_{ij})$ matrice quadrata $n \times n$

A_{ij} matrice ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

sviluppando su i-esima riga

$$det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det_{n-1}(A_{ij})$$

altrimenti sviluppo sulle colonne

conviene usare colonne/righe con tanti 0 per semplificare i calcoli

Determinanti veloci

$\mathbb{R}^2$ $\quad \det_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$

matrici diagonali e triangolari $\quad \det_n\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ 0 & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

moltiplicatoria

$\det({}^tA) = \det(A)$

formula di Sarruss

solo su matrici 3x3

ricopio prime due righe

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

se ho riga/colonna nulla $\Rightarrow \det(A) = 0$

trasformazioni elementari e determinante

1. permutazione di righe $\to$ det. cambia di segno
2. moltiplico riga per $\lambda \neq 0$ $\to$ det. viene moltiplicato per λ
3. rimpiazzo $\underline{r}_i$ con $\underline{r}_i + \lambda \underline{r}_j$ $\to$ det non cambia

Teorema di Binet

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

se A é invertibile allora $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Formula di Cramer

A matrice $n \times n$

- il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ammette una sola soluzione $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

  in tal caso la soluzione $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ é data da:

$$c_i = \frac{\det(\underline{A}_1 | \dots | \overset{i}{\underline{b}} | \dots | \underline{A}_n)}{\det(A)}$$

$\underline{A}_j$ é la j-esima colonna di A

Relazione tra rango e determinante

minore di A $\to$ determinante di una sottomatrice quadrata di A
Il rango di A é uguale al massimo ordine dei minori non nulli di A

- $\det(B) \neq 0 \iff$ tutti i vettori riga/colonna sono l. ind
  quindi il rango é massimo

Matrici inverse

una matrice A é invertibile $\iff \exists B \cdot A = B \cdot A = id$ quindi $B = A^{-1}$

$\iff \det(A) \neq 0$

in tal caso $\underline{x_{ij}} = (-1)^{i+j} \dfrac{\det(A_{ij})}{\det(A)}$

correlazione con trasformazioni elemetari

T trasf. el.
$T(A) = T(id) \cdot A$
metodo di calcolo matrici inverse
Una matrice é invertibile SSE $\exists$ successione di t.e. sulle righe
t.c. $T_n(T_{n-1}(\dots T_1(A))) = id$, ponendo $c_i = T_i(id)$ allora $c_K \cdot \dots c_1 A = id$

trucco pratico

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ per trovare inversa $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & id \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$ applico t.e. per avere a sinistra identitá, a destra avró l' inversa