Prodotto interno $V \times V \to K$

simmetrica, bilineare

Se $K = \mathbb{R}$ deve essere funzione definita positiva

norma di V rispetto a $\langle , \rangle$ é $\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$

$\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono ortogonali se $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$, quindi $\underline{v} \perp \underline{w}$

Prodotto scalare

somma dei vettori componente per componente (solo $\mathbb{R}^n$)

Prodotto vettoriale

solo in $\mathbb{R}^3$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

vettori

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 - x_3 y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_2 - x_3 y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$(\underline{v} \wedge \underline{w}) \perp \underline{v}$ e $\perp \underline{w}$ e quindi piano eventualmente generano

$v \wedge w = -(w \wedge v)$

$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $v_5=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ $v_6=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

1) trovare tutti $\langle v_i, v_j \rangle$ e norma

- $\langle v_1, v_1\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle = 3$ $\qquad \|v_1\| = \sqrt{3}$

  $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle = 1$

  $\langle v_1, v_3\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle = 1$

  $\langle v_1, v_4\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\rangle = 1-1+2 = 2$

  $\vdots$

- $\langle v_2, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle = 1$ $\qquad \|\underline{v_2}\| = \sqrt{1} = 1$ $\qquad v_2$ è normale

  $\vdots$

  $\langle v_1, v_6\rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\rangle = -1$

  $\langle v_2, v_3\rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle = 0$ $\qquad v_2$ e v_3 sono ortogonali (in realtà ortonormali)

2) $v_i \wedge v_j \quad i \neq j$

ad es.

$$v_1 \wedge v_2 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ è ortogonale a v_1 e v_2? sì per def

$$v_2 \wedge v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_3 \wedge v_5 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$ invert segno

$$v_4 \wedge v_6 = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

3) trovare norma

$$\| v_1 \| = \sqrt{3}$$
$$\| v_2 \| = 1$$
$$\vdots$$

4) trovare angolo $\alpha_{ij} \in [0, \pi]$ tra v_i e v_j

ricordo che:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \cos\theta \implies \cos\theta = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\|}$$

$$\sin\theta = \frac{\| \underline{v} \wedge \underline{w} \|}{\| \underline{v} \| \, \| \underline{w} \|}$$

ad es. angolo tra $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$

$$\alpha_{23} = \arccos\left(\frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{\|v_2\| \, \|v_3\|} \right) = \arccos\left(\frac{0}{\cdot \ \cdot \cdot} \right) = \pi/2$$ (infatti sono ortogonali)

tutti uguali

5) proiezione su un altro vettore

$$P_{\underline{v}}(w) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \cdot \underline{v}}{\|v\|^2}$$

$$P_{\underline{v}_1}(v_1) = \frac{\cancel{3} \cdot v_1}{\cancel{3}} = v_1$$

uguale quando proietto sul vettore stesso

$$P_{v_1}(v_4) = \frac{\langle v_1, v_4 \rangle \cdot v_1}{\|v_1\|^2} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot v_1}{3} = \frac{2 \cdot v_1}{3} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

7.3) 1° modo Gram-Schimt a partire dal vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2° modo siccome voglio base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ posso usare il prodotto vettoriale. Posso trovare 2 vett. ortonormali di $\mathbb{R}^3$ $\underline{o}_1, \underline{o}_2$ e definire $\underline{o}_3 = \underline{o}_1 \times \underline{o}_2$

normalizzo $\underline{v}$ per avere $\underline{o}_1$

$$\underline{o}_1 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{\sqrt{\langle v, v\rangle}} = \frac{v}{\sqrt{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

devo trovare ortogonale a $\underline{o}_1$

ad es. $\underline{z}_2 = (1, 1, 1)$

perché $\langle \underline{o}_1, \underline{z}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

ora definisco $\underline{o}_2$ normalizzando $\underline{z}_2$

$$\underline{o}_2 = \frac{\underline{z}_2}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

ora trovo $\underline{o}_3$ con il prodotto vettoriale

$$\underline{o}_3 = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1/\sqrt{6} \cdot 1/3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \\ \left(1/\sqrt{6} \cdot 1/3\right) - \left(1/3 \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) \\ \left(1/\sqrt{6} \cdot 1/3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{ \underline{o}_1, \underline{o}_2, \underline{o}_3 \}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$