3

Insiemi ordinati

gli insiemi non sono ordinati $\{a, b\} = \{b, a\}$
Spesso però è utile ordinare gli elementi.

Una coppia ordinata è una collezione di due elementi dove posso distinguere il primo dal secondo $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$

Formulazione insiemistica $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

Posso distinguere il primo dal secondo. Il primo appartiene a entrambi gli insiemi della famiglia. Il secondo a uno solo

- x è il primo elemento SSE $x \in \bigcap \mathcal{F}$ (appartiene a tutti gli insiemi)
- y è il secondo elemento SSE $y \in \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{F}$

In generale tuple ordinate di elementi definite come:

$\langle x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\rangle = \langle\langle x_1, \dots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle \quad n \geq 2$
$\langle a, b, c\rangle = \langle\langle a, b\rangle, c\rangle$

$\langle a, b, c, d\rangle = \langle\langle\langle a, b\rangle, c\rangle, d\rangle$

Prodotto cartesiano

dati gli insiemi A e B il prodotto cartesiano

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \}$$

proprietà

- $A \times B \neq B \times A$
- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$
- se A ha n elementi e B m elementi $\rightarrow A \times B$ ha $n \times m$ elementi

prodotto cartesiano di n elementi

$$S \times S = S^2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y\, S \}$$

$$S \times S \times S = S^3 = \{ \langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in S \}$$

$$S^n = S \times S \times \dots S = \{ \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle \mid s_i \in S \}$$

Sequenze

- S^n insieme di tutte le n-uple su S
- una sequenza finita di elementi di S è un elemento di S^n $n \in \mathbb{N}$
  è una tupla ordinata

$\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ $n \in \mathbb{N}$ $s_i \in S$

- un segmento è una partizione di essa

$\sigma = \langle s_k, s_{k+1}, \dots s_l \rangle$ $1 \leq k \leq l \leq n$

si dice iniziale sse $k = 1$

Relazioni

relazione R tra elementi di A e B $R \subseteq A \times B$

rappresenta <u>normalmente</u> un collegamento tra A e B

es. $A = \{Arno, Po, Tevere\}$

$B = \{Firenze, Pisa, Torino\}$

$A \times B$ enorme 

R = "un fiume e una città bagnata da esso"

$R = \{\langle Arno, Firenze \rangle, \langle Po, Torino \rangle, \langle Arno, Pisa \rangle\}$

$\langle x, y \rangle \in R$ x è in relazione con y

Rappresentazione tabulare

B \ A	Arno	PO	Tevere
Torino		X	
Pisa	X		
Firenze	X		

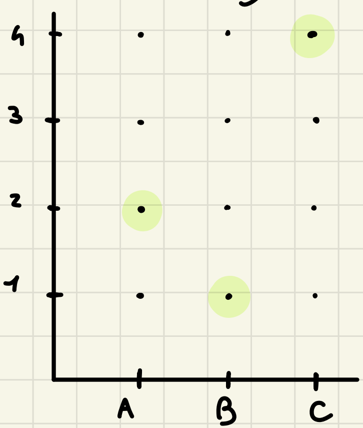
Rappresentazione Matriciale (booleana)

- 0 assente, 1 presente

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} \text{Torino} & \text{Pisa} & \text{Firenze} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Arno} \\ \text{Po} \\ \text{Tevere} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Relazioni sul piano (circa) cartesiano

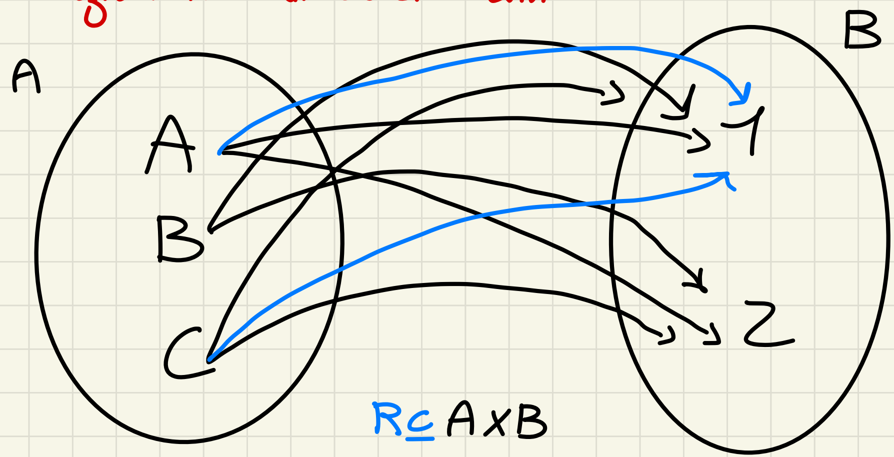
$A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$



$R = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$

sottoinsieme del prodotto cartesiano

Diagramma di Eulero Venn



$R \subseteq A \times B$

Elementi di una relazione

$R \subseteq A \times B$

Dominio tutte le $x \in A$: $\exists \langle x,y \rangle \in R$ per qualche $y \in B$

$$Dom(R) = \{ x \in A \mid \exists y \in B,\ \langle x,y \rangle \in R \}$$

Codominio tutte le $y \in B$: $\exists \langle x,y \rangle \in R$ per qualche $x \in A$

$$Codom(R) = \{ y \in B \mid \exists x \in A,\ \langle x,y \rangle \in R \}$$

campo di R = $Dom(R) \cup Codom(R)$

Operazioni su relazioni $S \subseteq A \times B \quad R \subseteq A \times B$

- $R \cup S$ tutte le coppie che appartengono a S o R
- $R \cap S$ coppie in comune
- $\bar{R} = \{ <x,y> \mid <x,y> \notin R \} \subseteq A \times B$ (complemento di R)

  normalmente l'universo è implicitamente $A \times B$
- $R^{-1} = \{ <y,x> \mid <x,y> \in R \} \subseteq B \times A$

Proprietà

- se $R \subseteq S$ allora $\bar{S} \subseteq \bar{R}$
- $\overline{(R \cap S)} = \bar{R} \cup \bar{S} \quad \overline{(R \cup S)} = \bar{R} \cap \bar{S}$ (leggi di Morgan)
- se $R \subseteq S$ allora $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

  $<x,y> \in R^{-1} \rightarrow <y,x> \in R \qquad R \subseteq S \rightarrow <y,x> \in S \rightarrow <x,y> \in S^{-1}$
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Identitá

dato A, relazione $I_A = \{<x,x> \mid x \in A\}$ $\quad I_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonale 1, resto 0

Proprietá delle relazioni binarie

$R \subseteq A^2$ è :

- riflessiva se $<x,x> \in R \ \forall x \in A$ $(I_A \subseteq R)$
- simmetrica se $<x,y> \in R$ allora $<y,x> \in R$ $(R = R^{-1})$
- antisimmetrica se $<x,y>, <y,x> \in R$ implica $x = y$
- transitiva se $<x,y>, <y,z> \in R$ allora $<x,z> \in R$