es 5.1

1) $\exists f$ lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ t.c.
$f(\overbrace{1,1,0,-1}^{v_1}) = (1,-2,3)$
$f(\overbrace{0,2,0,1}^{v_2}) = (0,0,0)$
$f(\overbrace{1,0,-1,2}^{v_3}) = (1,-2,3)$

controllo dipendenza dei vettori

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2$ la matrice iniziale ha rg=3

v_1, v_2, v_3 sono l. ind.

completo a una base $\mathbb{R}^4$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ co $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

infatti $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$

sono ind quindi $\mathbb{R}^4 = \langle \{v_1, v_2, v_3, e_4\} \rangle$

è già fissata da esercizio l'immagine di v_1, v_2, v_3 posso scegliere liberamente dove mandare e_4 ad es. $f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) calcolare $f(\underset{\underline{v}}{0,0,1,1})$ $f(\underset{\underline{w}}{-1,0,0,1})$ e $f(\underset{\underline{z}}{1,1,1,0})$ da fare

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ risolvo il sistema

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -\gamma = 1 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 1 \end{cases}$ $\gamma = -1$

$\alpha - 1 = 0$ $\alpha = 1$

$\beta = -\frac{\alpha}{2} \to \beta = -\frac{1}{2}$

$-1 - \frac{1}{2} + 2 + \delta = 1$ $\delta = 1 + 2 + \frac{1}{2} + 1$

$\delta = 4 + \frac{1}{2} = 9/2$

quindi $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

uso la linearità

$f(\underline{v}) = f(v_1) - \frac{1}{2}f(v_2) - f(v_3) + 9/2\, f(e_4)$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\exists f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c. $f\underset{v_1}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $f\underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $f\underset{v_3}{\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 + C_2} \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \det = 0 \text{ perché } C_2 = 2C_1$$

$\underline{v_1}, \underline{v_2}$ e $\underline{v_3}$ sono dipendenti

infatti

$\underline{v_3} = 2\underline{v_1} - \underline{v_2}$ $\quad$ $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$ sono tra loro indipendenti

$\Uparrow$ questa relazione deve valere anche per le immagini per essere lineare

$$f(v_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \neq 2f(\underline{v_1}) - f(\underline{v_3}) = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

questa f.ne non è lineare

da es precedente

3) $\exists f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c. $f\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$?

se si determinarne una e calcolare $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

esiste f perché $f(\underline{v_3}) = 2f(\underline{v_1}) - f(v_2)$ con $\underline{v_3} = 2\underline{v_1} - \underline{v_2}$

completo $\{\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}\}$ a una base di $\mathbb{R}^3$ come $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, e_1\}$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{cases} \beta + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{indipendenti}$$

$$\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

decido $f(e_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

calcolare $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ tra comb. lin. dei vett. della base

$$\begin{cases} \beta + \lambda = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix}\lambda = 2 \\ \beta = -1\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

calcolo $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \beta + \lambda = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix}\lambda = 2 \\ \beta = -2\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

4) $\exists f(t): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3(x)$ lineare che abbia $N_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - z = t-1\}$ come nucleo e contenga il polinomio $2x^3 - x^2 - 2$ nella sua immagine, in caso affermativo calcolare $f_t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $f_t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e $f_t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

- Siccome il nucleo un sottospazio vettoriale del dominio N_t puó essere il nucleo di una f.ne lineare
  Quindi $\underline{0} \in N_t$ per essere nucleo, ció vale solo per $t=1$
  $N_1 = \{(x,y,z) : 2x - z = 0\}$ piano passante per l'origine
- cerchiamo base per il nucleo.
  N_1 ha dimensione 2
  $\dim N_1 = n.\ variabili - rg(A) = 2$
  $n.\ variabili = 3$
  $A = (2 \ \ 0 \ \ -1)$ $rg(A) = 1$

  quindi ho due vettori lin. ind. e sono:
  ad esempio
  $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ é una base di N_1

  poniamo perció $f_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = f_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{0}_{P_3(x)} = 0$ polinomio nullo
- per completare la definizione di f_1, estendiamo $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ a una base di $\mathbb{R}^3$ scegliendo $\underline{b}_3$ in quanto: $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{b}_3$ sono indipendenti
  affinché $2x^3 - x^2 - 2 \in Imm(f_1)$ imponiamo che $f(b_3) = 2x^3 - x^2 - 2$
  Questo determina f_1 in modo univoco

- $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 1\\ 2\alpha + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1\end{cases} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $f_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = f_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + f_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ per linearitá

  $f_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 + 2x^3 - x^2 - 2$

- $f_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ giá calcolato
- $f_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $\begin{cases}\alpha = -1\\ \beta = 1\\ 2\alpha - \lambda = 1 \to -2-\lambda = 1 \to \lambda = -3\end{cases} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

  $f\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 + 0 - 3(2x^3 - x^2 - 2)$

5) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lin t.c. $f(H)=H'$ con $H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \ \begin{matrix}2y-w=0\\ x-2z+w=0\end{matrix}\right\}$ e $*$

$H'=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\right\}$ e t.c. $f(\mathbb{R}^4)=\mathbb{R}^3$?

surietiva

$*$ $\begin{cases}0x+2y+0z-1w=0\\ 1x+0y-2z+1w=0\end{cases}$

$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)$

- costruisco basi di H e H'

-osservo che la $\dim(H)=4-2=2$ per la 2ª parte del th. di R-C
questo perché H e un vettore che rappresenta un sist. di eq. lin. omogeneo quindi il numero di soluzioni é in n° di variabili (4) - il rango della matrice incompleta

- $\dim(H')=3-1=2$

$\{x+y-z=0 \quad rg\,(1\ 1\ -1|0)=1$

per entrambi gli spazi le basi avranno due vettori

$*$ $w=2y \Rightarrow y=w/2$

$x=2z-w$

$$\begin{pmatrix}2z-w\\ w/2\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z\\0\\z\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-w\\ w/2\\ 0\\ w\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\1/2\\0\\1\end{pmatrix}=\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{h_1},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}}_{h_2}\Big\rangle$$

base di H

base di H'

per H' $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}=\Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{h'_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{h'_2}\Big\rangle$

per avere $f(H)=H'$ basta imporre che $f\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
perché da linearità segue che io possa ottenere qualsiasi elemento dell'immagine come combinazione lineare delle immagini dei vettori della base del dominio, questo vale perché queste immagini sono i vettori della base dell' insieme immagine.
per avere $f(\mathbb{R}^4)=\mathbb{R}^3$ devo completare a una base di $\mathbb{R}^4$ $\{h_1,h_2\}$ scegliendo b_3 e b_4 $\quad b_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad b_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$f(b_3)$ deve essere lin. ind. da h'_1 e h'_2, mentre posso scegliere liberamente $f(b_4)$

per conformitá con prof. scelgo $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

per $f(b_3)$ scelgo $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ perchè $\quad \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=0$

e arbitrariamente $f(b_4)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{cases}\beta=0 & \beta=0\\ \alpha+\lambda=0 & \to \alpha=0\\ \beta+\lambda=0 & \to \lambda=0\end{cases}$ $\iff$ i tre vettori sono lin indipendenti

i vettori $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ quindi f é suriettiva