7

Ordinamenti:

Molto spesso gli elementi di un insieme hanno la struttura di un ordine.

Va definito in maniera formale.

Un ordinamento definisce una relazione di precedenza

- pre-ordine SSE R è:
  - riflessiva e transitiva su S
- ordine stretto (o quasi ordine) SSE R:

  irriflessiva, transitiva (e quindi asimmetrica) su S

  si rappresenta con $<$ (precede)
- ordine parziale R é un prodotto antisimmetrico

  è riflessiva, antisimmetrica, transitiva

  si rappresenta con $\leq$ ($\preccurlyeq$)

Poset

- coppia $(S, \preccurlyeq)$ insieme parzialmente ordinato
- se $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$ allora sono comparabili (precedenza)
- qualsiasi ordine parziale $\preccurlyeq$ é la chiusura riflessiva che contiene l'ordine stretto

- ordine totali

ordinamento parziale in cui tutti gli elementi sono comparabili $(\preccurlyeq)$

- ordine stretto totale

ordine totale ma irriflessiva $(<)$

R é connessa

Relazioni tra ordini totali

- R ordine totale (non stretto)

  $R \setminus I_S$ è un ordine totale stretto

- R totale stretto $R \cup I_S$ è totale non stretto (chiusura riflessiva)

Tricotomia

ordine totale stretto ($<$) per ogni coppia di elementi di S ho tre opzioni

- $x = y$
- $\langle x, y \rangle \in R$
- $\langle y, x \rangle \in R$

Prodotto di ordinamenti

siano $(S, \leq_S)$ $(T, \leq_T)$ due poset

$\leq_{S \times T}$ su $S \times T$

$<s, t> \leq_{S \times t} <s', t'>$ SSE $s \leq_s s'$, $t \leq_t t'$

$(S \times T, \leq_{S \times t})$ é anch'esso un poset

Copertura

dato un poset $(S, \leq)$ siano x, y, z elementi di S

si dice che y é una copertura di x SSE:

- $x \leq y$
- $x \neq y$
- $\nexists\, z$ $z \neq y$, $y \neq x$ t.c. $x \leq z$ $z \leq y$

non c'è elemento in mezzo a x e y

Elementi estremanti

$(S, \leqslant)$

- minimale : non esiste $s' \neq s$ t.c. $s' \leqslant s$

  se s é l' unico minimale é il **minimo** $(\underline{0})$

- massimale : non esiste $s' \neq s$ t.c. $s \leqslant s'$

  se s é l' unico massimale é il **massimo** $(\underline{1})$

Minoranti

Sottoinsieme $X \subseteq S$ $s \in S$ è:

- minorante di X SSE $s < x \; \forall x \in X$
- massimo minorante di X $(\sqcap X)$ SSE $s' \leqslant s$ per ogni minorante s' di X

Maggioranti

Sottoinsieme $X \subseteq S$ $s \in S$ è:

- maggiorante di X SSE $s < x \; \forall x \in X$
- minimo maggiorante di X $(\sqcup X)$ SSE $s \leqslant s'$ per ogni maggiorante s' di X

Diagramma di Hasse

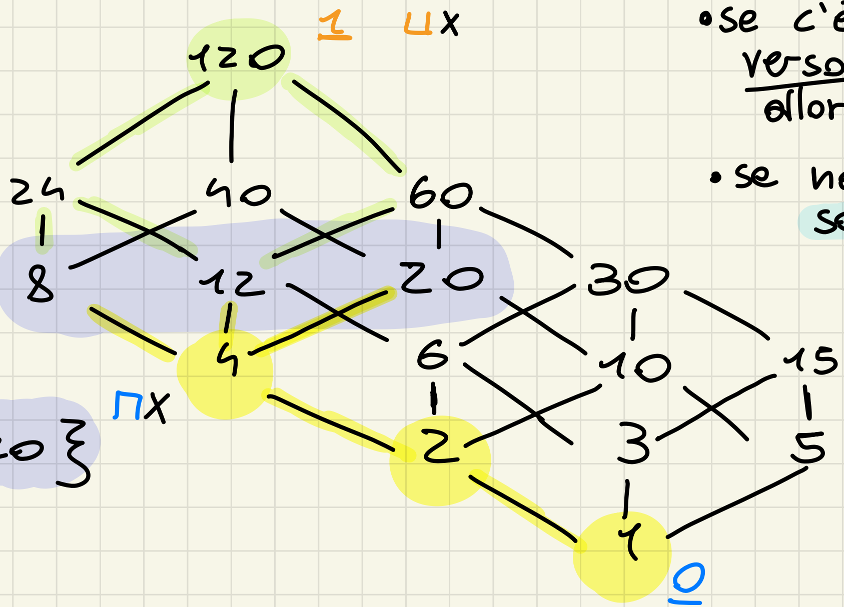
- rappresentare compattamente poset
- uso posizione per rappresentare l'ordine, riflessività e transitività implicite

poset $(S, \preccurlyeq)$ un diagramma di Hasse è un grafo non orientato t.c. $\forall x, y$:

- x e y sono collegati SSE y è copertura di x
- $x \preccurlyeq y$ $\quad$ x è sotto y (in basso)
- l'ordine corrispondente è la chiusura riflessiva e transitiva del grafo orientato verso l'alto

$(S, \leq_{div})$

divisori di 120



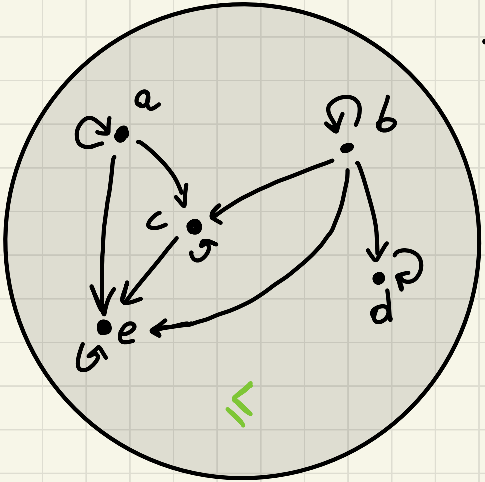
$X = \{8, 12, 20\}$

- se c'è almeno un cammino verso l'alto che collega due nodi allora quello in basso precede
- se non c'è un cammino non sono confrontabili
  - minimali no archi entranti
  - massimali no archi uscenti

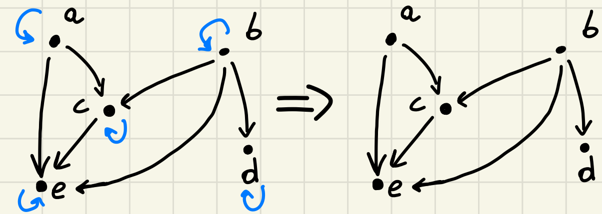
- minoranti: nodi che raggiungono ogni elemento di $X \subseteq S$ con almeno un cammino verso l'alto
  - $\sqcap X$ (meet) massimo minorante: il più vicino a X
- maggioranti: nodi raggiungibili da tutti gli elementi di $X \subseteq S$
  - $\sqcup X$ (join) minimo maggiorante: il più vicino a X

Da poset ad Hasse

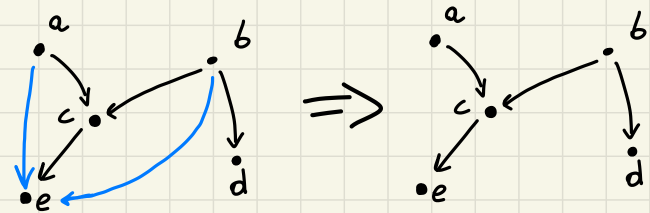
S



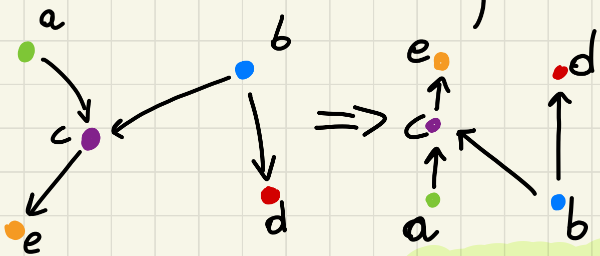
1) rimuovo cappi



2) mantengo archi delle coperture



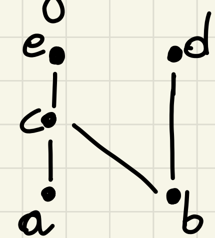
3) ordino nodi per livello



a||b
a||d
d||c
d||e

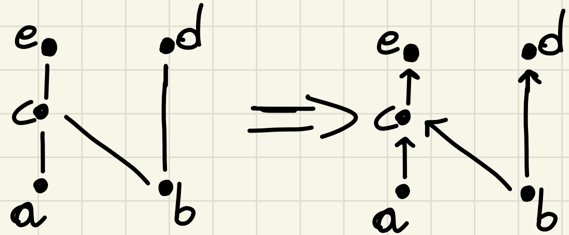
|| non confrontabile

4) rendo il grafo non orientato

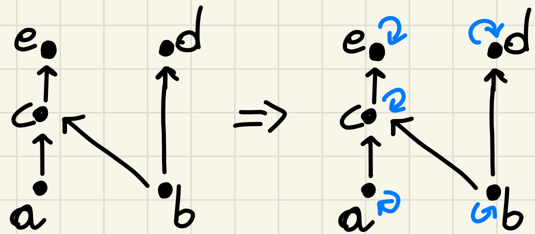


Da Hasse a poset

1) rendo il grafo orientato



2) chiusura riflessiva



3) chiusura transitiva

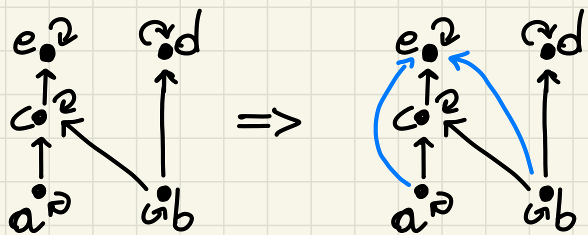
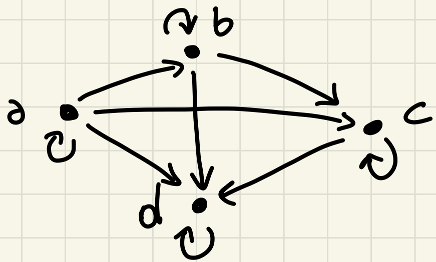
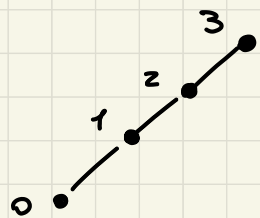


Diagramma di Hasse di un ordinamento totale



ogni elemento ha al max una copertura

Convertendolo esce un albero del tipo catena



Reticoli

poset $(S, \leq)$ t.c. per ogni coppia $x, y \in S$

- esiste un minimo maggiorante $\sqcup\{x, y\} = x \sqcup y$
- esiste un massimo minorante $\sqcap\{x, y\} = x \sqcap y$

Se esiste un cammino tra x e y:

- $x \leq y$ $\quad x \sqcup y = y$
- $x \leq y$ $\quad x \sqcap y = x$
- per coppie $\{x, x\}$ $\quad x$ é sia Join che meet

Nei reticoli posso sempre dire cosa viene $\overset{\sqcap}{\text{prima}}$ e cosa $\overset{\sqcup}{\text{dopo}}$
(tutti gli elementi sono confrontabili)

Reticolo prodotto

$(L_1, \leq_{L_1})$ e $(L_2, \leq_{L_2})$ reticoli, anche $(L_1 \times L_2, \leq_{L_1 \times L_2})$ é un reticolo

Proprietá dei reticoli

$(L, \leqslant_L) \quad a, b, c \in L$

(I)

- $a \leqslant a \sqcup b \;,\; b \leqslant a \sqcup b$
- $a \sqcap b \leqslant a \;,\; a \sqcap b \leqslant b$

$\Big\}$ banali

- $a \leqslant c \,,\, b \leqslant c \implies a \sqcup b \leqslant c$
- $c \leqslant a \,,\, c \leqslant b \implies c \leqslant a \sqcap b$
- $a \sqcup b = b$ SSE $a \leqslant b$
- $a \sqcap b = a$ SSE $a \leqslant b$

(II) Soin e meet sono op. binarie

- idempotenza $a \sqcup a = a = a \sqcap a$
- commutativitá $a \overset{\sqcap}{\sqcup} b = b \overset{\sqcap}{\sqcup} a$
- associativitá $a \overset{\sqcap}{\sqcup} (b \overset{\sqcap}{\sqcup} c) = (a \overset{\sqcap}{\sqcup} b) \overset{\sqcap}{\sqcup} c$
- assorbimento $a \sqcup (a \sqcap b) = a = a \sqcap (a \sqcup b)$

Soin e meet sono monotoni:

$a \leqslant c \quad b \leqslant d$ allora $a \overset{\sqcap}{\sqcup} b \leqslant c \overset{\sqcap}{\sqcup} d$

Tipi di reticoli

un reticolo $(L, \leq)$ è:

- **completo** SSE $\forall M \subseteq L$, $\sqcap M$ e $\sqcup M$ esistono

  es. $(\mathbb{N}, \leq)$ non lo è perché non ho Join

- **limitato** SSE $\underline{1} = \sqcup L$ e $\underline{0} = \sqcap L$ esistono

  - ogni reticolo completo è limitato
  - ogni reticolo finito è completo e limitato

- **distributivo** SSE meet e Join distribuiscono fra di loro:

  - $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$
  - $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

Complemento

$(L, \leq)$ reticolo distributivo limitato e $a \in L$

- un elemento $b \in L$ è il complemento di a $(b = \bar{a})$ SSE:

$$a \sqcup b = 1_L$$

$$a \sqcap b = 0_L$$

- se a ha un complemento $\bar{a}$ questo è unico

$(L, \leq)$ è un reticolo complementato SSE $\forall a \in L \; \exists \bar{a}$