Def sia V uno spazio vettoriale sul campo K
i vettori $\{v_1 \dots v_n\}$ vengono detti lin. dipendenti se $\exists j \quad 1 \leq j < n$

e $\exists \alpha_1, \dots \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \in K$ tc.

$$v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{n} \alpha_i v_i$$ combinazione lineare

altrimenti sono lin. dipendenti

oss. in alternativa all'uso della definizione posso controllare se sono indipendenti verificando se:

$$\alpha_i \underline{v}_i + \dots \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

altrimenti sono lin. dip.

<u>es 1.2</u>

i) dati i vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{V}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

verificare dipendenza

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{V}_2 + \lambda_3 \underline{V}_3 = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$ se $\lambda_{1,2,3} = 0$ sono ind

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in modo equivalente
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-5\lambda_2 + 3\lambda_3}{2} \\ 2(-5\lambda_2 + 3\lambda_3) = 0 \qquad \lambda_3 = \dfrac{5}{3}\lambda_2 \\ 3\left(\dfrac{\cancel{-5\lambda_2 + 5\lambda_2}^{\,0}}{2}\right) + 2\lambda_2 + \dfrac{20}{3}\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

i vettori sono Lin. ind.

$2\lambda_2 + \frac{20}{3}\lambda_2 = 0 \quad \frac{26}{3}\lambda_2 = 0 \quad \lambda_- = 0$

stabilire se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono base di $\mathbb{R}^3$

Si, perché $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e S è di 3 vettori lin. ind. di $\mathbb{R}^3$

<u>1.3</u>

dati $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ verificare se sono lin. dip

$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ è combinazione lineare. Sono dipendenti

cioé $-\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = \underline{0}$

completare a una base. Vedere se almeno 2 sono ind.

$\underline{v}_1 \neq \lambda \underline{v}_2 \quad \forall \lambda \in K$ quindi sono lin. ind.

$\text{gen}\,\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$S = \left\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \quad \langle S \rangle = \mathbb{R}^3$

Def. dato V s.v. sul campo K, $S \subset V$ denotiamo con $\langle S \rangle$ il sottospazio vettoriale generale dall' insieme S.
cioé il piú piccolo sottospazio vettoriale che contiene S

Def $S = \{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_n\} \subset V$ si dice base di V se $\langle S \rangle = V$
ogni base ha lo stesso numero di elementi (dimensione di V)
$\dim(V)$

1.4