Continuitá

Weierstrass

ipotesi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$\uparrow$ chiuso, limitato

min max

$$\exists x_1, x_2 \mid f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x \in [a,b]$$

Th. dei valori intermedi

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, siano $l = \inf f(I)$

$L = \sup f(I)$

allora $\forall y_0 \quad l < y_0 < L \quad \exists x_0 \in I \quad f(x_0) = y_0$

Th. degli zeri

ipotesi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua,

$\uparrow$ chiuso, limitato

$f(a)\cdot f(b) < 0$

$$\exists x_0 \in [a,b] \mid f(x_0) = 0$$

Th. della continuitá della f.ne inversa

(quindi invertibile)

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, strettamente monotona

anche $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua

DERIVATE

Fermat

ipotesi: $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 interno a I

↑ intervallo

> se x_0 estremante locale e $\exists f'(x_0)$ allora $f'(x_0)=0$. x_0 è detto punto stazionario

Cauchy

$f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- f, g continue su $[a,b]$
- f, g derivabili in (a,b)
- $g'(x_0) \neq 0$

> Allora $\exists x_0 \in (a,b): f'(x_0) \cdot (g(b)-g(a)) = g'(x_0)(f(b)-f(a))$

(serve solo per Lagrange)

Rolle

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in (a,b)
- $f(a) = f(b)$

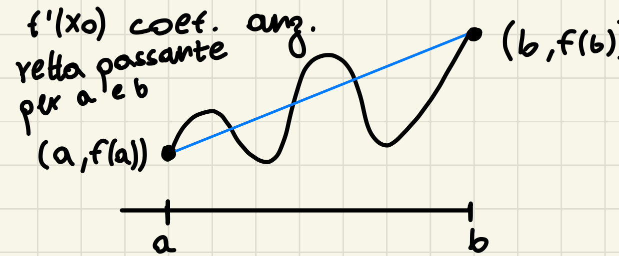
> Allora $\exists x_0 \in (a,b): f'(x_0) = 0$

Lagrange

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- f continua in $[a,b]$
- f derivabile in (a,b)

> allora $\exists x_0 \in (a,b): f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



de l'Hôpital

$f, g : [a,b]$

ipotesi :

- derivabili in (a,b)
- $g'(x) \neq 0$ in $(a, a+r)$ $r>0$
- $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ $[F.I.]$
- $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\boxed{\text{allora} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$$

condizione necessaria per estremanti locali

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile almeno n volte

$f'(x_0) = 0 = f''(x_0) \ldots = f^{n-1}(x_0)$ $f^{n}(x_0) \neq 0$

n pari : x_0 punto estremante

- $f^{n}(x_0) > 0$ x_0 p.to di min
- $f^{n}(x_0) < 0$ x_0 p.to di max

n dispari : x_0 non p.to estremante

CALCOLO INTEGRALE

definizione di Riemann integrabilità

hp:
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- f f.ne limitata
- P partizione di $[a,b]$

f. è Riemann-integrabile su $[a,b]$:

$$\sup(s(f,P)) = \inf(S(f,P)) = \int_a^b f$$

caratterizzazione della Riemann-integrabilità

hp:
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- f limitata
- $P([a,b])$ partizione di $[a,b]$

f è integrabile SSE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P$ t.c.

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Classi di f.ni integrabili

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua $\longrightarrow$ f è integrabile

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f monotona (per forza limitata) $\to$ f è integrabile

Th. fondamentale del calcolo integrale

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
- f continua

$$\boxed{\exists F[a,b] \to \mathbb{R} \text{ t.c. } F'(x) = f(x)}$$

F è una primitiva di f $\quad F(x) = \int f(x)\,dx$

N.B. $\underbrace{G_1, G_2}_{\text{primitive di } f \text{ qualsiasi}}$ $\quad G_1 - G_2 = \text{cost}$

Secondo th fondamentale del calcolo integrale

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
- f continua
- G primitiva di f

$$\boxed{\int_a^b f = G(b) - G(a)}$$

media integrale

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
- f R-integrabile
- $m = \inf(f) \cup M = \sup(f)$

$$\boxed{M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \qquad m \leq M_f \leq M}$$