$M(n,m)$

$A \in M(n,m)$ • $A+B$ se $n=p$ $m=q$
stesse righe e colonne

$B \in M(p,q)$ • $\underset{\underset{M(n,q)}{\Uparrow}}{AB}$ se $m=p$

$AB \neq BA$ se $A,B \in M(n,n)$

$A = (- \; v \; -) \in M(1,m)$

$\Rightarrow AB \in M(1,1) \quad BA(n,n)$

$B = \begin{pmatrix} | \\ w \\ | \end{pmatrix} \in M(n,1)$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ⓐ Descrivere insieme $U = \{ X \in M(2,2) \mid AX = XA \}$
ⓑ dimostrare che U é un s.v. di $M(2,2)$
ⓒ trovare base e dimensione

$$\begin{pmatrix} 0\cdot a+1\cdot c & 0\cdot c+1\cdot d \\ 1\cdot a+0\cdot b & 1\cdot b+0\cdot d \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AX=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$XA=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b=c \\ d=a \\ \cancel{a=d} \\ \cancel{b=c} \end{cases}$$

$$U=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in U \quad a=0 \quad b=0$

(i) $B_1, B_2 \in U \Rightarrow B_1+B_2\in U$

(ii) $B_1A=AB_1$

$B_2A=AB_2$ $\Rightarrow (B_1+B_2)A=A(B_1+B_2)$

$$B_1A+B_2A \overset{?}{=} AB_1+AB_2$$

$$B_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad B_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$B_1+B_2=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}\in U$$

$B\in U \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda B=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$$

© $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$U = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ dim due

~ · ~ · ~ · ~ · ~

$A = \begin{pmatrix} - & v & - \end{pmatrix} \quad M(1,n)$

$B = \begin{pmatrix} | \\ w \\ | \end{pmatrix} \quad M(n,1)$

$B \cdot A \in M(n,n)$

$rg(BA) \leq 1_{\text{BOH}}$

calcolare rango BA

$B = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} da & db & dc \\ ea & eb & ec \\ fa & fb & fc \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} d(v_i) \\ e(v_i) \\ f(v_i) \end{pmatrix}$

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 0\}$

$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + z = 0\}$

trovare base di $V_1 \cap V_3$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$$

$(0, 1, -1)$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)}^{Ab}$$

$0 \quad 1 \quad 0 \quad t$

$rg(A) = rg(A|b)$

$Ax = b$

$y = t$

$3t + z = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -3t \end{cases}$$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX=\begin{pmatrix} 0\cdot a+1\cdot c & 0\cdot b+1\cdot d \\ 1\cdot a+0c & 1b+0d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$XA \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \quad \begin{cases} c=b \\ d=a \\ \cancel{a=d} \\ \cancel{b=c} \end{cases} \quad \begin{cases} c=b \\ d=a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} \; a,b\in\mathbb{R} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}= a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

31/03/2023 $A \in M(n,n)$ $\det A \neq 0 \Rightarrow rg A$ è massimo

Piani e rette in $\mathbb{R}^3$

piano in $\mathbb{R}^3$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ ax+by+cz+d=0$

$x, y, c \in \mathbb{R}$

$(a, b, c) \neq (0,0,0)$

retta in $\mathbb{R}^3$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ ax+by+cz+d=0$

$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$(a, b, c) \neq (0,0,0)$ $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$

$(a, b, c) \neq \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$

posizione reciproca piano- retta

retta, piano $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ int. tra due piani non paralleli formano una retta

$r \cap \pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ldots\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a'' & b'' & c'' & -d'' \end{array}\right)$$

$A \in M(3,3)$ $0 < rg < 3$ $\quad A|\underline{b} \in M(3,4)$ $0 < rg < 3$

1° caso : $\det A \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 \Rightarrow rg(A|\underline{b}) = 3 \Rightarrow \exists!$ soluzione del sistema =

$\Rightarrow$ l'intersezione è in un solo punto

2 caso $\det(A) = 0 \Longrightarrow 0 \leq rg(A) \leq 2$ ma so già che $rg(A) = 2$

2.1 $rg(A|\underline{b}) = 3 \Longrightarrow$ teorema R.C. non ci sono sol.

2.2 $rg(A|\underline{b}) = 2$ $\quad \exists \, \infty^1$ soluzioni (dipendenti da 1 parametro

se aless:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ a'' & b'' & c'' & -d'' \\ a''' & b''' & c''' & -d''' \end{array}\right)$$

NO

$A \in M(4,3)$

$A|\underline{b} \in M(4,4)$

<u>1° caso</u> $\det A\underline{b} \neq 0 \implies rg(A|\underline{b})$

Discutere risolvibilità del sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 & k+3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$r_3 \to r_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2k & 0 & k+3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{array}\right)$$

$rg(A)=rg(A|\underline{b})$ ho soluzioni

per $k=2$ infinite sol. altrimenti una sola

$$\begin{cases} x+2ky+(k+3)w=2 \\ y+3w=k \\ z+2w=1 \\ (k-2)w=k-2 \end{cases} \quad k=2 \quad \begin{cases} x+4(2-3w)+5w=2 \\ y=2-3w \\ z=1-2w \end{cases}$$

$$x+8-12w+5w=2$$
$$x=-6+7w$$

$$\begin{pmatrix} -6 \; 7w \\ 2-3w \\ 1-2w \\ w \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} w \Rightarrow S=\left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ kx + y + z = 0 \\ x + ky - z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \end{array}\right)$$

~~1) non rispondo~~

2) $\forall k$ $(0,0,0)$ é l'unica sol.

~~3) $k=-1$ no sol.~~

rg(A) = rg(A|b) no soluzione

~~4) $k=2$ 2 sol.~~

$\forall k \in \mathbb{R}$

5) $k = \pi$ 1 sol.

legge di Sarrus

$$\det(A) = \begin{matrix} 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ k & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & -1 & 1 & k \end{matrix}$$

$$(3 \cdot 1 \cdot (-1)) + (-2 \cdot 1 \cdot 1) + k^2 - (1 + 3k + 2k)$$

$$-3 - 2 + k^2 - 1 - 5k = k^2 - 5k - 6$$

05/04/2023 andrea.rivezzi@unimib.it

Matrici

$M(n,m)$

$A \in M(n,m) \quad B \in M(p,q)$

- $\underline{A+B}$ SSE $n=p$ e $m=q$
- $\underline{A \cdot B}$ SSE $m=p \quad A \cdot B \in M(n,q)$
- $\lambda \in \mathbb{R} \quad \underline{\lambda A}$

- $M(n,m)$ è uno spazio vettoriale con somma e prodotto per scalari

$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ el. neutro della somma

la dim di $M(n,m)$ è $n \cdot m$

base canonica $\{E_{ij}\}_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots m}}$

$M(2,2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

prodotto tra matrici

$A \cdot B \neq B \cdot A$ in generale

$A \in M(n,1) \qquad B \in M(1,m)$

$A \cdot B \in M(n,m)$
$B \cdot A \in M(1,1) \cong \mathbb{R}$

se $n=m=p=q$ posso fare sia $A \cdot B$ che $B \cdot A$ ed entrambe sarebbero $\in M(n,m)$ (quadrate)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1+0\cdot 1 & 0 \\ 1\cdot 1+1\cdot 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $M(n,m)$ ho almeno 2 matrici che commutano con tutte le alte

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Id \cdot A = A \cdot id = A \\ \bullet\ A \cdot O_n = O_n \cdot A = O_n \end{array}\right\} \forall A \in M(n,m)$$

① $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ⓐ determinare insieme delle matrici che commutano con A

$$U = \{ X \in M(2,2) \mid AX = XA \}$$

ⓑ verificare che U è un s.v. di $M(2,2)$

ⓒ calcola la dimensione di U

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} b = c \\ d = a \end{cases}$$

devo risolvere un sistema di eq. lineari

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

① $I_2 \Rightarrow a = 1 \quad b = 0$
② $O_2 \Rightarrow a = 0 \quad b = 0$
③ $A \Rightarrow a = 1 \quad b = 1$
④ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

ⓑ U s.v. di $M(2,2)$

ii

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$
$b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$

iii

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda B \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$$

$\lambda a, \lambda b \in \mathbb{R}$ soddisfano le condizioni per stare in U

U s.s.v. di $M(2,2)$

c) determinare dim. di U

cardinalità base $= 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La dim. è 2

(2) $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}$

$A \cdot B \in M(n,n)$

$rg(A \cdot B)$? $\quad = 1$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \dots & v_1 w_n \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \dots & v_2 w_n \\ \vdots & & & \\ v_n w_1 & v_n w_2 & \dots & v_2 w_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} v_1 (w_1 \dots w_2) \\ v_2 (w_1 \dots w_2) \\ \vdots \end{matrix}$$

$$rg(AB) \begin{cases} 0 & \text{se } A=0 \,/\, B=0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

③ $V_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+z=0 \}$

$V_3 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y+z=0 \}$

V_1 e V_3 sono piani passanti per l'origine
trovare una base di $V_1 \cap V_3$

$$V_1 \cap V_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x+3y+z=0 \\ 3y+z=0 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

rg uguale ho sol. per teorema di Rouche-capelli

$\Rightarrow V_1 \cap V_3 \neq \emptyset$

$\underline{v}_1 \to \underline{v}_1 - \underline{v}_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \quad z=t$$

quando scelgo l'incognità da assegnare al parametro devo ottenere una matrice quadrata con rango massimo

$$\begin{cases} 2x=0 \\ 3y+z=0 \\ z=t \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{t}{3} \\ z=t \end{cases}$$

le sol sono $\{ (0,-\frac{1}{3},1), t \in \mathbb{R} \} =$
$= \langle (0,-\frac{1}{3},1) \rangle$

$(0,-\frac{1}{3},1)$ é una base di $V_1 \cap V_3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ A^2, B^2, AB, BA, AC, BC

Matrice inversa

invertibile SSE $\det A \neq 0$

$\exists B \in M(3,3)$ t.c.

$A \cdot B = I_n = B \cdot A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ ← solo con matrici 3x3

Sarruss

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{array}$$

$0 + 2 + 0 - (0 - 3 + 4)$

$2 + 3 - 4 = 1 \neq 0$ A è invertibile

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})}{\det A} \leftarrow 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1^{+} & -1^{-} & 0^{+} \\ 1^{-} & 0^{+} & -1^{-} \\ 2^{+} & 3^{-} & -4^{+} \end{pmatrix}$$

$(-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

fare prima trasposta

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$