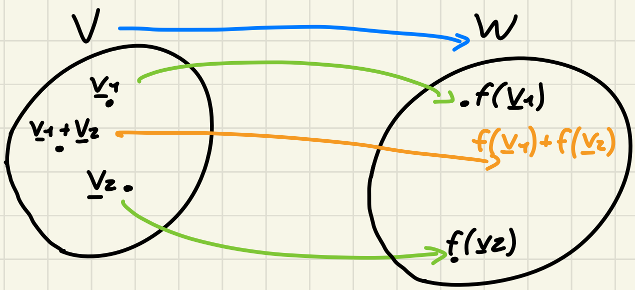
Motivazione: le funzioni insiemistiche non sono adatte a studiare gli spazi vettoriali. Per esempio riesco a trovare f.ni insiemistiche biunivoche tra $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ $\forall n, m$.
Quindi per studiare s.v. tramite f.ni é meglio imporre condizioni a tali f.ni.

Def. Siano V e W due spazi vettoriale su K.
$f: V \to W$ f.ne qualsiasi insiemistica
Diremo che f é lineare (o omomorfismo) se:

① $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) \quad \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

② $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V, \forall \lambda \in K$

equivalente. $f(\lambda \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2) = \lambda f(\underline{v}_1) + \beta f(\underline{v}_2)$



corollario
- f lineare $\Rightarrow f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$, $f(-\underline{v}) = -f(\underline{v})$

③. se $U < V$, $f(U) < W$, $\underline{z}_1, \underline{z}_2 \in f(U)$, quindi $\underline{z}_1 = f(\underline{u}_1)$ $\underline{z}_2 = f(\underline{u}_2)$

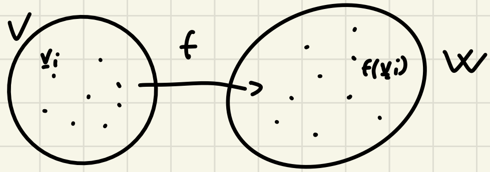
$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 \in f(U)$? $\longleftrightarrow$ $\underline{u}_3 : f(\underline{u}_3) = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$

pongo $\underline{u}_3 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$

$$f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) = \underbrace{f(\underline{u}_1)}_{= \underline{z}_1} + \underbrace{f(\underline{u}_2)}_{= \underline{z}_2}$$

④ $H < W$, $f^{-1}(H) < V$.
Se $\{h_i\} \subset H$ é un insieme di generatori di H
$f^{-1}(H)$ non é detto che siano generatori di $f^{-1}(H)$

⑤ $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\underline{v}_i)$



in particolare f è completamente determinata come f.ne dall' insieme $\{f(\underline{v}_i)\}$ dove $\underline{v}_i$ è una base di V o un suo sistema di generatori

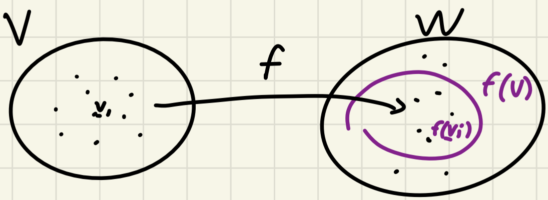
oss.

se $\{\underline{v}_i\}$ è una base di V, ogni scelta di $f(\underline{v}_i) \in W$ è compatibile con le condizioni di linearità. Cioè per ogni scelta di $\{\underline{w}_i\} \subset W$ $\exists!\ f: V \to W$ lineare $\mid f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$. f deve essere definita come $f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i\right)$.

$\Uparrow$
V

Si verifica che tale f è lineare

corollario $f: V \to W$ lineare $\dim f(V) \leq \dim(V)$



devo prendere una base di f(V) che avrà dimensione ≤ di f(v)

Definizione ⓐ Due s.v. V e W sono detti isomorfi se esistono 2 f.ni lin.

$V \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} W$ t.c. $g \circ f = id_V$ $f \circ g = id_W$

ⓑ $f: V \to W$ lineare è isomorfismo se è biettiva (quindi invertibile)

è vero che V e W sono isomorfi SSE $\dim(V) = \dim(W)$

esempi

① $V \xrightarrow{f} W$ s.v. applicazioni costanti?

Solo con costante nulla

$f(V) = \underline{0}_W$ f si chiama applicazione nulla

② $V \xrightarrow{f} V$ $f = id_V$ è lineare

③ $\mathbb{R}^{2\times1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{3\times1}$ $\quad \binom{a}{b} \longrightarrow M\binom{a}{b}$ $\quad$ M é una matrice 3x2

$$f\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{a_2}{b_2}\right) = M\cdot\left(\binom{a_1}{b_1}+\binom{a_2}{b_2}\right) = \underbrace{M\binom{a_1}{b_1}}_{f\binom{a_1}{b_1}} + \underset{f\binom{a_2}{b_2}}{M\binom{a_2}{b_2}}$$

$$\overset{?}{\parallel}$$

$$f\binom{a_1}{b_1} + f\binom{a_2}{b_2}$$

$$f\left(\lambda\binom{a_1}{b_1}\right) = M\left(\lambda\binom{a}{b}\right) \overset{?}{=} \lambda M\binom{a}{b}$$

commutabile solo perché diagonale

$$\parallel$$

$$M\cdot\left(\lambda \underset{\Downarrow \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}}{\underline{id_2}} \cdot \binom{a}{b}\right) = M(\lambda id)\cdot\binom{a}{b} = \lambda id \cdot M\binom{a}{b}$$

$f: V \longrightarrow W$ lineare $\quad f^{-1}(\underline{z}) < V$? affinché lo sia $\underline{0}_V \in f^{-1}(\underline{z}) \Longrightarrow \underline{z} = \underline{0}_W$ per propr. ① del corollario

$f^{-1}(\underline{z}) \quad \underline{z} \in W$

quindi $f^{-1}(\underline{0}_W) < f$

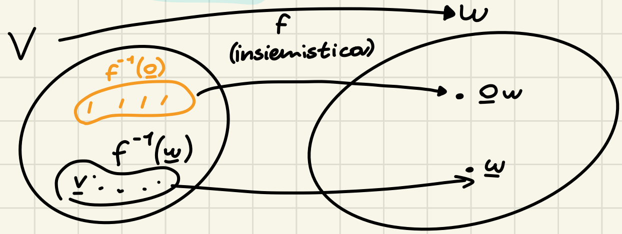
Def. $f^{-1}(\underline{0}_W)$ si chiama nucleo o kernel di f $(N(f))$

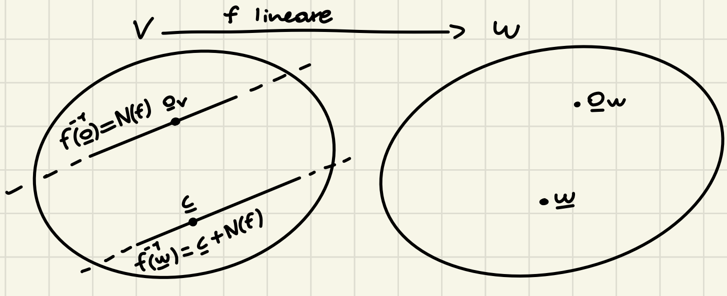
Teorema principale dell'isomorfismo

$f: V \longrightarrow W$ lineare allora f può essere fattorizzata come

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \\ V/N(f) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$g \simeq$ isomorfismo





tutte traslate di $f^{-1}(\underline{0})$ (nucleo)

Teorema di Grassmann

$f: V \longrightarrow W$ lineare

allora $\dim V = \dim f(V) + \dim N(f)$

corollario $V_1, V_2 < V$ allora $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$

corollario sia $\dim W = \dim V$ allora

f è iniettiva SSE è suriettiva, quindi biettiva

Come si comunica un' applicazione lineare?

sottospazi vettoriali

- "in coordinate": $V = \mathbb{R}^n$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots = 0 \\ \vdots \text{ sistema} \end{array} \right\}$$

$$U = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad \text{a matrice } k \times n \}$$

- "parametrica"

$$V = \langle \underbrace{\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \ldots \underline{v}_n \}}_{\text{base di } V} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

non supponiamo $V = \mathbb{R}^n$

omomorfismi

- "in coordinate" $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} f_1(x_1 \cdots x_n) \\ f_2(x_1 \ldots x_n) \\ \vdots \\ f_k(x_1 \cdots x_n) \end{pmatrix}$$

lo esprimo come se fosse una f.ne normale

- "parametrica" posso usarla con sottospazi qualsiasi

$f: V^n \longrightarrow W$ sfrutto che f è lineare trovo base e da lì è fatta

$$(\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_n) \longrightarrow (f(\underline{v}_1) \ldots f(\underline{v}_n))$$

base ordinata di V^n

$$\forall\, \underline{w} \in V^n, \quad \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i \,.\quad f(\underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\underline{v}_i)$$

serve per scrivere poi in coordinate che é più utile. È un passaggio intermedio

- la rappresentazione in coordinate ci permette di utilizzare meglio le informazioni contenute in f (eg. trovare l' immagine di tanti vettori)

- expr parametrica: può essere usata se dom e cod non sono euclidei
  Spesso é la forma più immediata per esprimere un' applicazione lineare

es. ① Stabilire se esiste un omomorfismo $f: \underset{N}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\underline{z}}{\mathbb{R}^3}$ ed eventualmente determinarlo, t.c.

ⓐ abbia come nucleo $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \right\}$ $\quad x = z/2$, $y = z$

ⓑ $\underline{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{imm}(f)$

scegliamo una base $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ del dominio tale che un suo sottoinsieme sia una base di N

(i) determinare una base di $N = \left\{ \begin{pmatrix} z/2 \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

base di $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(ii) completo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ a base di $\mathbb{R}^3$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \begin{array}{c} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to rg = 3$

comunque base di N

(iii) definisco f come l'unico omomorfismo tale che $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

ⓐ $\underline{v}_1 \to \underline{0}$

ⓑ $\underline{v}_2 \to \underline{z} = (-1, 1, 1)$

$\underline{v}_3 \to$

th. di Grassman: $\underset{\underset{3}{\parallel}}{\dim(\text{dom})} = \underset{\underset{\text{deve essere } 2}{\Downarrow}}{\dim(\text{Imm})} + \underset{\underset{1}{\parallel}}{\dim(\text{Nucleo})}$

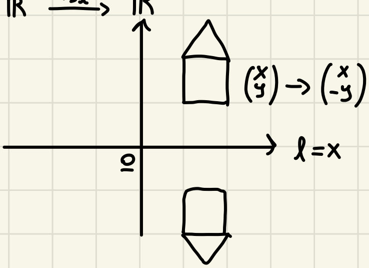
Nucleo = N sse $\dim(\text{Imm}) = 2$

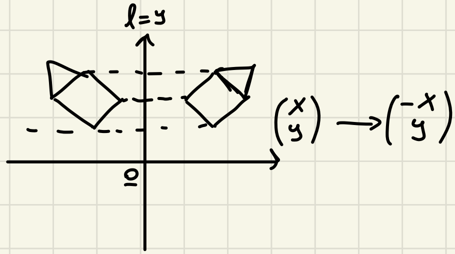
$\text{Imm} = \langle (\underline{z}, f(\underline{v}_3) \rangle \iff \{\underline{z}, f(\underline{v}_3)\}$ sono indipendenti

eg. $f(\underline{v}_3) = (1, 0, 0)$

② Simmetria assiale s_l in $\mathbb{R}^2$ rispetto a un asse l

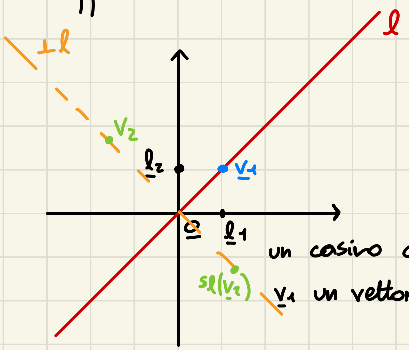
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{s_l} \mathbb{R}^2$





queste sono semplici, sono lineari

supponiamo di avere un asse qualsiasi per l'origine



un casino con la base canonica, ne scelgo un'altra più comoda

$\underline{v}_1$ un vettore non nullo sulla retta $\quad \underline{v}_1 \in \ell, \ \underline{v}_1 \neq \underline{0}$

$\underline{v}_2 \in \perp \ell$

$s\ell(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$ $\qquad$ espressione di $s\ell$ in funzione di $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$

$s\ell(\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$

$$s_\ell\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = s\ell(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) = \lambda_1 s\ell(\underline{v}_1) + \lambda_2 s\ell(\underline{v}_2) = \lambda_1 \underline{v}_1 - \lambda_2 \underline{v}_2$$

$s\ell\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \ s_\ell\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$