03/05/2023

$f: V^n \longrightarrow W^K \supset \{\underline{w}_1, \dots \underline{w}_K\}$ base (deve essere ordinata)

v_j e w_i basi di dominio e immagine

ⓐ come calcolo $A_f(v_j, w_i)$?

① fisso v_j

② scrivo le immagini di v_j come combinazioni lin. di $\{w_i\}$: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{K} a_{ij} w_i$

③ per j fissato $(a_{ij})_{i=1 \dots K}$ è la j-esima colonna di $A_f(v_j, w_i)$

$$A_f((\underline{v}_j),(\underline{w}_i)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{K1} & a_{Kn} & & a_{Kn} \end{pmatrix}$$

es. $f(\underline{v}_1) = a_{11}\underline{w}_1 + a_{21}\underline{w}_2 + \dots a_{K1}\underline{w}_K$

Def. La matrice $A_f((\underline{v}_j),(\underline{w}_i))$ è detta matrice associata a f e alla scelta di basi ordinate $(\underline{v}_j)$ e $(\underline{w}_i)$. Da essa posso ricavare f.

ⓑ sia $\underline{z} \in V^n$, come ricavo $f(\underline{z})$?

① $\underline{z} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j$ $\quad$ $\underline{z}$ è un vettore generato dalla base

② $f(\underline{z}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\underline{v}_j) =$ perché è lineare

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j \left(\sum_{i=1}^{K} a_{ij} \underline{w}_i\right)\right)$$

avendo la matrice e le basi posso ricavare f?

③ $f(\underline{z}) = \sum_{i=1}^{K} \beta_i \underline{w}_i$ dove $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cdot a_{ij})$

ricavo che $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix} = \underset{\underset{a_{ij}}{\parallel}}{A_f(\underline{v}_j, \underline{w}_i)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$K \times n$ $\quad$ $n \times 1$

$K \times 1$

es.

$\beta_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{2j}$

i-esima riga per trovare α_i

es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-1)$

Osservazione fondamentale

Consideriamo il caso particolare in cui $V^n = \mathbb{R}^n$ e $W^k = \mathbb{R}^k$ e $(v_j) = (e_j)$ base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $(w_i) = (e_i)$ base canonica di $\mathbb{R}^k$.

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Vediamo cosa ci dà la procedura (b)

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i = \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

dove $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = A_f(\underline{v_j}, \underline{w_i}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \longleftrightarrow \alpha_j = \underline{x}_j \quad \forall j$

con matrice data

In conclusione

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \underset{\overset{\|}{a_{ij}}}{A_f((v_j),(w_i))} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot x_j \end{pmatrix} \quad k\text{-upla}$$

è una rappresentazione in coordinate

Teorema del cambiamento di base

Vogliamo passare a una base canonica di uno spazio euclideo

$f: V^n \longrightarrow W^k$ lineare

(v_j) (w_i) basi ordinate
(v_j') (w_i')

formula generale

$$A_f((v_j'),(w_i')) = Q^{-1} \cdot A_f((v_j),(w_i)) \cdot P$$

dove $P = (p_{hj})$ e $Q = (q_{si})$ con $v_j' = \sum_{h=1}^{n} p_{hj} v_h$ e $w_i' = \sum_{s=1}^{k} q_{si} w_s$

teorema: $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$ entrambi omomorfismi

$$g \circ f(v) = g(f(v))$$

(v_s) (w_j) (u_i) basi ordinate

$$A_{g\circ f}((v_s),(u_i)) = A_g((w_j),(u_i)) \cdot A_f((v_s),(w_j))$$

corollario $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{f^{-1}} V$ stessa base ma indici diversi

(v_s) (w_j) (v_i)

$$\underbrace{A_{\underbrace{f^{-1}\circ f}_{id}}((v_s),(v_i))}_{id} \overset{teor}{=} A_{f^{-1}}((w_j),(v_i)) \cdot A_f((v_s),(w_j))$$

è l'inversa