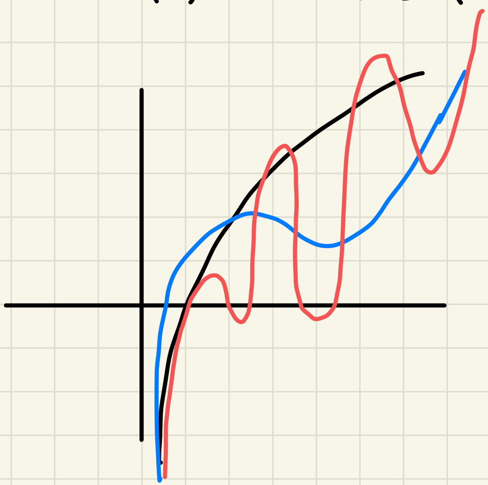
Funzioni convesse e concave

Es. $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ f continua

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

non posso disegnare un grafico accettabile con solo queste info

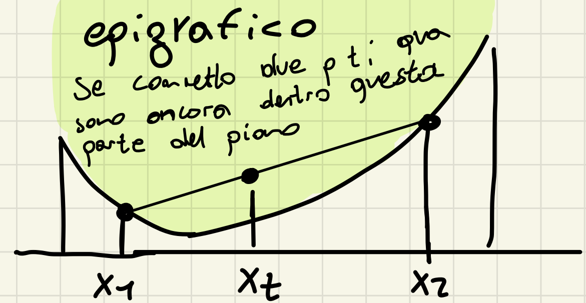


queste tre rispettano le caratteristiche

ma non ho abbastanza info

Convessità

$f : I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo



DEF f è convessa (su I) se

$\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in (0,1)$

$$f(\underbrace{(1-t)x_1 + t x_2}_{x_t}) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

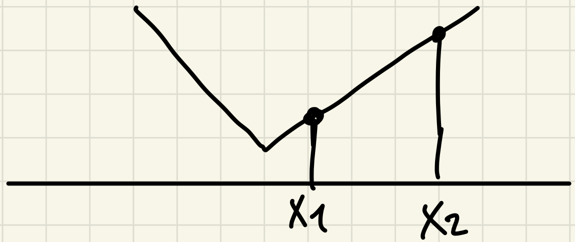
il valore della fne é minore di quello assunto dal segmento che congiunge x_1 e x_2 in x_t

descrivo tutti i p.ti del segmento

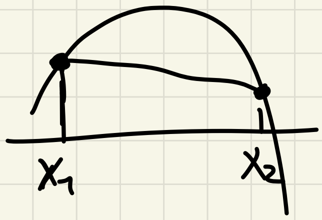
combinazione convessa

f è strettamente convessa se

$\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ e $\forall t \in (0,1)$ si ha $f(x_t) < (1-t)f(x_1) + t f(x_2)$

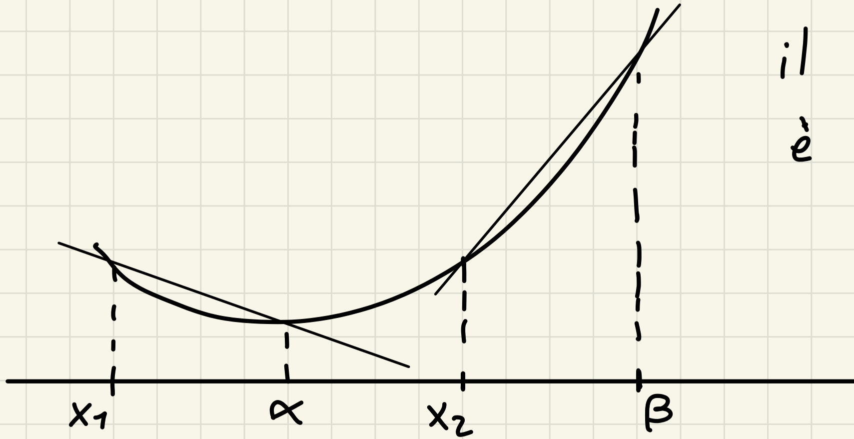


f è concava se $-f$ è convessa



il resto è analogo ma con $\leq$ e $<$

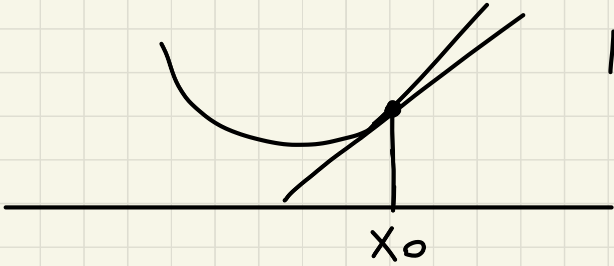
La retta è sia concava che convessa



il rapporto incrementale
è crescente

Th. sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, f derivabile in I.

f é convessa (concava) in I SSE $\forall x_0 \in I$ si ha $f(x) \underset{(\leq)}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$



la tangente é di supporto alla f.ne (la f.ne é sempre sopra)

Th. sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, f derivabile due volte in I

f è convessa (concava) in I SSE $f''(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0$ $\forall x \in I$

Inoltre se $f''(x) \underset{(<)}{>} 0$ $\forall x \in I$ f é strettamente convessa (concava) es. $f(x) = x^2 e^{-x} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2) e^{-x}$$

$$f''(x) = (2-2x) e^{-x} - (2x - x^2) e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) e^{-x} \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad x = 2 \pm \sqrt{2}$$

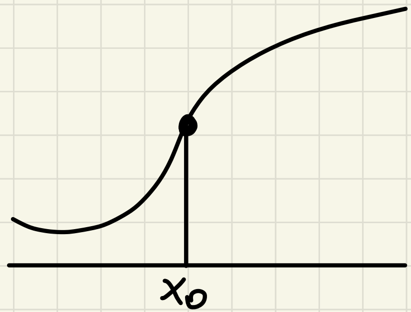
f é strettamente convessa su $I_1 = (-\infty, 2-\sqrt{2}]$

e su $I_2 = [2+\sqrt{2}, +\infty)$

f é strettamente concava su $I_3 = [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$

P.ti di flesso

I intervallo $x \in I$ interno e $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile



Si dice che x_0 é p.to di flesso per f se

$\exists\, r > 0$: f è convessa in $(x_0 - r, x_0)$
f è concava in $(x_0, x_0 + r)$ o viceversa

<u>condizione necessaria</u> per p.ti di flesso

$f: I \to R$ . . . se x_0 é p.to di flesso e $\exists f''(x_0)$ allora $f''(x_0) = 0$