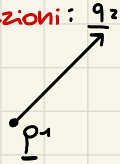
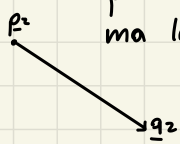
motivazioni:



coppia ordinata di elementi di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$

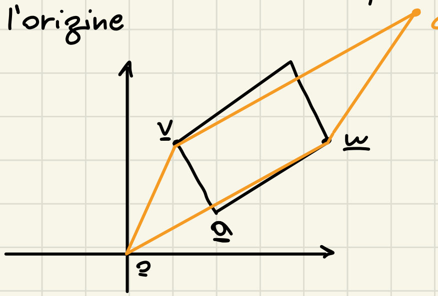


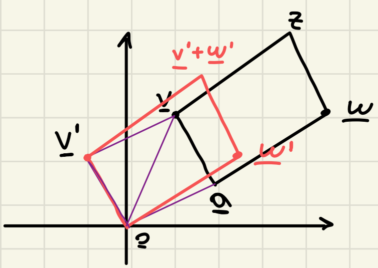
per essere vettori devo poterli sommare e rimanere dentro ma la somma non avrebbe senso. Vedere video su youtube

vettori applicati (non veri)

- supponiamo di voler calcolare l'area di un parallelogramma in $\mathbb{R}^2$ usando la formula del prodotto vettoriale, però nessuno dei vertici é l'origine

con la norma calcolerei questo che non c'entra niente





$\underline{v} = \underline{v}' + \underline{a}$

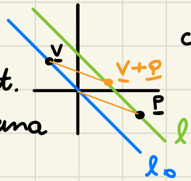
$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{a}$

così mi porto a un v' che mi permette di costruire un parallelogramma con un vertice $\underline{o}$ e con stessa area di quello che volevo calcolare originariamente

$$\left.\begin{array}{l}(\underline{a}, \underline{v}) \rightsquigarrow \underline{v}' = \underline{v} - \underline{a} \\ (\underline{a}, \underline{w}) \rightsquigarrow \underline{w}' = \underline{w} - \underline{a}\end{array}\right\} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{area}(\underline{a}, \underline{w}, \underline{v}, \underline{z}) = \text{area}(\underline{o}, \underline{w}', \underline{v}', \underline{v}'+\underline{w}') = \|\underline{w}' \wedge \underline{v}'\|$$

Rette in $\mathbb{R}^2$



cambiando $\underline{v}$ ottengo tutta l

l non é un sotto spazio vett.

Può essere sol. di un sistema di eq. lineari

l_0 é sottospazio, la posso comunicare tramite una base

rappr. parametrica

vedere l come traslato di un sotto spazio di dim=1

$l = l_0 + \underline{p} = \langle \underline{v} \rangle + \underline{p} =$ (l_0, $\neq \underline{0}$)

non vettori!

$= \{\lambda \underline{v} + \underline{p} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\underline{v} = (v_1, v_2)$

$\underline{p} = (p_1, p_2)$

$= \{(\lambda v_1 + p_1 \ , \ \lambda v_2 + p_2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ λ si chiama parametro della retta

$$= \begin{cases} x = \lambda_1 v_1 + p_1 \\ y = \lambda_2 v_2 + p_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

rappr. in coordinate

$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ controllare quali punti appartengono alla retta

$a \neq 0$ oppure $b \neq 0$

sistema di eq. lineari con una sola sol.

$\{ax + by = -c$ $\quad A|\underline{b} = (a \ b \mid -c)$

basta che uno tra a e b sia $\neq 0$

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$

Rette in $\mathbb{R}^3$

$$l \xrightarrow{\text{parametrica}} l_0 + \underline{p} = \langle \underbrace{\underline{v}}_{\in l_0} \rangle + \underline{p} = \left\{ \left(\lambda v_1 + p_1, \lambda v_2 + p_2, \lambda v_3 + p_3 \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

with $\underline{v} \neq 0$

$$= \begin{cases} x = \lambda v_1 + p_1 \\ y = \lambda v_2 + p_2 \\ z = \lambda v_3 + p_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$l \xrightarrow{\text{coordinate}} l = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z - b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z - b_2 = 0 \end{cases} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

teorema R-C

$\Downarrow$

l ha dim$=1$ SSE $rg(A) = rg(A|\underline{b}) = 2$

Piani in $\mathbb{R}^3$

$$H \xrightarrow{\text{parametrica}} H_0 + \underline{p} = \langle \underbrace{\underline{v}, \underline{w}}_{\text{base di } H_0} \rangle + \underbrace{\underline{p}}_{\text{vettore qualunque in } H} = \left\{ \alpha \underline{v} + \beta \underline{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} + \underline{p} =$$

$$= \left\{ \left(\alpha v_1 + \beta w_1 + p_1, \alpha v_2 + \beta v_2 + p_2, \alpha v_3 + \beta v_3 + p_3 \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$
$\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$

$$\begin{cases} x = \alpha v_1 + \beta w_1 + p_1 \\ y = \alpha v_2 + \beta w_2 + p_2 \\ z = \alpha v_3 + \beta w_3 + p_3 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$H \xrightarrow{\text{coordinate}} H = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad ax + by + cz + d = 0 \right.$$

basta una eq. $\quad (\underbrace{a \quad b \quad c}_{\text{almeno uno} \neq 0} \mid d)$

$d \neq 0$ senno o non ho sol($rg(A) \neq 0$) oppure ne ho infinite

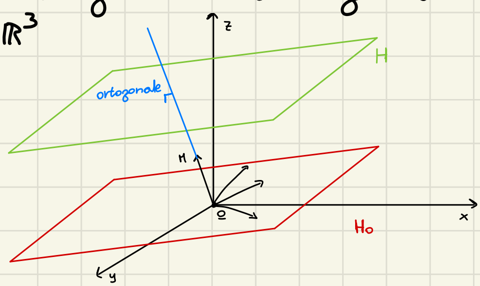
osservazioni

1) la componente omogenea H_0 di H in coordinate é $H_0 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{ax + by + cz = 0}_{} \}$

$\langle (x,y,z), (a,b,c) \rangle$
prodotto scalare

2) (a,b,c) é un vettore ortogonale a H e H_0 sia in senso geometrico che algebrico

$m = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$



Perpendicolarità e parallelismo tra rette e piani

Ricordiamo:

- $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono perpendicolari SSE $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$
- $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono paralleli SSE $\underline{v} = \lambda \underline{w}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

retta - retta

perpendicolare

$\ell = \langle \underline{v} \rangle + \underline{p}$ $\quad s = \langle \underline{v} \rangle + \underline{q}$ $\quad$ allora $\ell \perp s$ SSE $\underline{p} \perp \underline{q}$

$\quad //$ parallelo $\quad //$

retta - piano

(a, b, c) ort. a H

$\ell = \langle \underline{v} \rangle + \underline{p}$ $\quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz + d = 0\}$

allora: $\ell \perp H \longleftrightarrow \underline{v} = \alpha(a, b, c)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad$ parallelo alla retta ortogonale al piano

$\ell // H \longleftrightarrow \langle \underline{v}, (a, b, c) \rangle = 0$ $\quad$ é perpendicolare alla retta perp. al piano

trovare vettore perpendicolare é comodo perché permette di fare queste considerazioni ed esprimere in coordinate il piano.

Devo trovare vettore ortogonale a due vettori, faccio prodotto vettoriale

piano - piano

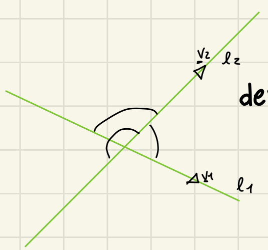
$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0\}$

$H_2 \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0\}$

allora $\quad H_1 \perp H_2 \Longleftrightarrow \langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle = 0$

$\quad H_1 // H_2 \Longleftrightarrow (a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

Angoli tra {rette, piani}



devo definire quale prendere

King

Rette sghembe

Sono rette non parallele tra di loro ma senza punti di intersezione
Si verifica la sghembitá con un metodo

$\ell = \langle \underline{v} \rangle + \underline{q}$ $\quad s = \langle \underline{w} \rangle + \underline{p}$ $\quad$ e S sono sghembe SSE $rg\left(\underline{v} \,|\, \underline{w} \,|\, \underline{q} - \underline{p} \right) = 3$

Distanza tra punti e piano

$\text{dist}(H, \underline{p}) = \text{dist}(\underline{p}, \underline{q})$ dove $\underline{q}$ é la proiezione ortogonale di $\underline{p}$ su H

$$\text{dist}(\underline{p}, \underline{q}) = \|\underline{p} - \underline{q}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

come trovare $\underline{q}$?

$$H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + z + d = 0 \}$$

io so che $(a, b, c) \perp H \longrightarrow \langle (a, b, c) \rangle \perp H$

la retta passante per $\underline{q}$ e $\underline{p}$ sará $\langle (a, b, c) \rangle + \underline{z}$

$\underline{q}$ é la sol del sistema $\begin{cases} \langle (a, b, c) \rangle + \underline{p} & \text{retta} \perp H \text{ per } \underline{p} \\ H \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = \lambda a + p_1 \\ y = \lambda b + p_2 \\ z = \lambda c + p_3 \end{cases} \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{ bisogna determinare } \lambda$$

Distanza tra punto e retta

$\underline{p}$ e ℓ determinare $H \perp \ell$ passante per $\underline{p}$. Dopodiché $\underline{q} = H \cap \ell$

$\ell = \langle \underline{v} \rangle + \underline{p}$ perció $H = \{ (x, y, z) . \langle (x, y, z) \cdot \underline{v} \rangle + d = 0 \}$

determinare d in modo che H passi per $\underline{p}$