Intersezione sempre sottospazio, questo non vale sempre per l'unione
Il più piccolo s.s.v. che contiene l'unione e la somma

Per le intersezioni lavoro con le equazioni che definiscono i sottospazi vettoriali in un sistema.
Per la somma uso la rappresentazione parametrica
$V_1 + V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ buttando eventuali ridondanze

trovare base di $V_i \cap V_i$

$U_2 = \{ (x,0,0) \mid x \in \mathbb{R} \} = \langle (1,0,0) \rangle$

$U_3 = \{ (x, y, -2x+y) : x, y \in \mathbb{R} \}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$z = -2x+y$

$U_4 = \{ (x, y, 3x) : x, y \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\langle U_5 \rangle = \mathbb{R}^3$

$\langle U_i \rangle \cap \mathbb{R}^3 = \langle U_1 \rangle \ \forall i$

$U_2 \cap U_3 = \{ (x,y,z) \ \ y = z = 0, \ z = -2x+y \} = \{(0,0,0)\}$ non esiste base

$x = 0$

$U_2 \cap U_4 = \{ (x,y,z) : y = z = 0 \quad z = 3x \} = \{(0,0,0)\}$

$x = 0$

$U_3 \cap U_4 = \{ (x,y,z) \ \ z = -2x+y = 3x \} = \{ (x, 5x, 3x) : x \in \mathbb{R} \} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

$y = 5x \qquad z = 3x \quad y = 5x \qquad \dim = 1$

trovare base V_i+V_j

$U_2=\{(x,0,0)\mid x\in\mathbb{R}\}=<(1,0,0)>$

$U_3=\{(x,y,-2x+y):x,y\in\mathbb{R}\}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}=<\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}>$

$z=-2x+y$

$U_4=\{(x,y,3x):x,y\in\mathbb{R}\}=<\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}>$

$<U_5>=\mathbb{R}^3$

$<U_i>+<U_5>=\mathbb{R}^3 \quad \forall i$

$U_2+U_3 \qquad U_2+U_4 \qquad U_3+U_4$

ricordo che $U_2\cap U_3=\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}=U_2\cap U_4$

e $U_3\cap U_4=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$U_2+U_3=<\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}>=\mathbb{R}^3$ i 3 vettori sono l.ind perché l'intersezione è il vettore nullo

$U_2+U_4=<\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}>=\mathbb{R}^3$

$U_3+U_4=<\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}>=<\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}>=\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ lin dip.

$U_3 + U_5 = \mathbb{R}^3 \qquad U_3 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$

trovare base di $\mathbb{R}^3$ che sia unione di una base per U_3 e di una base di U_5

Devo completare a una base con un vettore della base canonica

$\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} \right\} \}$ controllando che siano ind.

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x \quad =0 \\ x+2y=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y+z=0 \Rightarrow z=0 \\ 2y=0 \Rightarrow y=0 \end{matrix}$$

sono l. ind.