3

solo in $\mathbb{R}^3$

"$\underline{v}$ vettore $\underline{w}$"

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{v} \times \underline{w}$

Def: Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Il prodotto vettoriale $\underline{v} \wedge \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ è definito dall'espressione:
$\underline{v} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \underline{i}(x_2 y_3 - x_3 y_2) - \underline{j}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \underline{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

sono elementi di $\mathbb{R}^3$ quindi la somma é in $\mathbb{R}^3$

posso sviluppare

$$\begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

nota che bello

proprietá

1. se scambio due righe il det cambia di segno, quindi:

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = -(\underline{w} \wedge \underline{v})$$

2. é bilineare $(\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2) \wedge \underline{w} = \alpha(\underline{v}_1 \wedge \underline{w}) + \beta(\underline{v}_2 \wedge \underline{w})$
dipende dalla linearitá del determinante

3. $\langle \underline{v}, \underline{v} \wedge \underline{w} \rangle = \underline{0}$, $\langle \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w} \rangle = 0$
é ortogonale al piano per $\underline{0}$ che contiene $\underline{v}$ e $\underline{w}$ (lo spazio generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$)

4. $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0} \iff \underline{v} = \lambda \underline{w}$ e viceversa, questo per proprietá del determinante

osservazione $(\underline{v} \wedge \underline{w}) \wedge \underline{z} \neq \underline{v} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{z})$ in generale

esempio $e_2 \wedge (e_2 \wedge e_3) \neq \underbrace{(e_2 \wedge e_2)}_{=\underline{0}} \wedge e_3$

perché sono dip.

Nota asse

$$\Downarrow$$

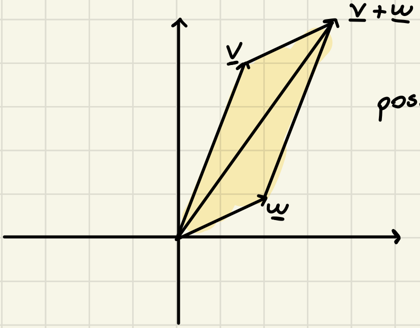
$$\det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$ che é ind da e_2, quindi il prod. é diverso da 0

⑤ $\|\underline{v} \wedge \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| \cdot \sin\sigma$, σ angolo tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$

da questo ottengo un'altra formula

$\Downarrow$

$\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|$ = area del parallelogramma $\underline{o}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{v}+\underline{w}$



posso calcolare l'area dei triangoli

($\dfrac{\|\underline{v} \wedge \underline{w}\|}{2}$ = area regione triangolare delimitata da o, $\underline{v}$, $\underline{w}$)

questo torna comodo perché:

ogni poligono reg. é triangolizzabile