$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$ minore $\to$ det di una sottomatrice quadrata

calcola rango con metodo dei minori, rg max è 4

rg=0 No perché non è tutta nulla

almeno due perché c'è sottomatrice 2x2 con det $\neq 0$

la quarta colonna è l'opposta della prima

proprietà della multilinearità

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ ha due colonne uguali, $\det(A)=0$

non ha rg max (≤ 3)

dip da c_2 e c_4 $\Rightarrow \det = 0$

fino a qua so che $2 \leq rg(A) \leq 3$

considero sottomatrice A'

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ La terza colonna è la somma delle prime due

$c_2 \to c_1 + c_2$ il determinante non cambia

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A'')=0 \quad \Longrightarrow \quad rg(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

rg ≥ 2 sicuramente

rg < 4 sicuramente

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3+3=6 \quad rg = 3$$

$rg(B) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$rg(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \neq 0$$

$2 \leq rg(C) \leq 3$

$r_4 = r_3 - r_1$

$r_3 \to r_3 - r_1$ non cambia

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cercare un eventuale sottomatrice per il calcolo del det $\neq 0$ tolgo una riga

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r_4 = 2r_3 - r_2$

$r_2 \to r_2 - 2r_3$

$$C''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ogni matrice che contiene entrambe le righe ha det $= 0$

l' unica che non ha entrambe è

$$C^{IV} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(C^{IV}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad rg(C) = 3$$

M invertibile SSE $\det(M) \neq 0$ é quindi quadrata