8

Strutture algebriche

costituite da:

- un insieme (sostegno)
- un sistema di operazioni

A insieme

operazione n-aria su A $\Rightarrow$ f.ne : $A^n \longrightarrow A$

l'operazione è totale SSE la f.ne è totale

proprietà delle operazioni l'op. $\circ : S \times S \to S$ è:

- associativa SSE $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z \quad \forall x, y, z \in S$
- commutativa SSE $x \circ y = y \circ x \quad \forall x, y \in S$
- elemento neutro $y \circ x = x$ $y \to$ elemento neutro $\forall x \in S,\ y \in S$
- elemento inverso x^{-1} $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = u$ $\leftarrow$ elemento neutro

Un semi gruppo é una struttura algebrica $(S, \circ)$

- $S \neq \emptyset$
- $\circ$ associativa

- se $\circ$ è commutativa si parla di semi gruppo abeliano

un monoide é un semigruppo con:

- elemento neutro

- monoide abeliano se $\circ$ é commutativa

un gruppo é un monoide per cui $\forall x \in S \; \exists x^{-1}$

- gruppo abeliano se $\circ$ é commutativa

inverso

el. neutro

definito $G = \{ S, \circ, {}^{-1}, u \}$

Chiusura

$\circ$ op. su S $\quad X \subseteq S$ si dice chiuso rispetto a $\circ$ se:

$\forall b, b' \in X \rightarrow b \circ b' \in X$

Relazione di congruenza

rel. riflessiva, simmetrica, transitiva: relazione di equivalenza)

semi gruppo $(S, \circ)$, $\cong$ rel. di congruenza su S è una rel di equivalenza t.c.

$\forall x, y, z \in S \quad x \cong y$ implica:

- $x \circ y \cong y \circ x$
- $z \circ x \cong z \circ y$

Algebra booleana

vero: 1 Falso: 0

- congiunzione and $\wedge$ ($\sqcap$ meet)
- disgiunzione or $\vee$ ($\sqcup$ Join)

$\Big\}$ op. binarie

- negazione not $\neg$ (complemento) op. unaria

- elementi neutri
  - $\vee$ $\underline{0}$
  - $\wedge$ $\underline{1}$

reticolo booleano $(L, \leq)$

- limitato → esistono $\underline{0}$ e $\underline{1}$
- distributivo ($\sqcap$ e $\sqcup$ sono distributivi)
- complementato ($\forall a \in L \ \exists \bar{a}$)

con questo reticolo definisco la logica di Boole

$(L, \sqcup, \sqcap, \bar{\ }, \underline{0}, \underline{1})$