La logica proposizionale parla di proprietà generali ma non si può parlare di oggetti specifici.

È impossibile sviluppare argomenti logici che dipendono da questi oggetti.

Non posso fare affermazioni esistenziali

Vogliamo un linguaggio logico capace di:

- riferirsi a oggetti, concetti, proprietà, relazioni
- fare affermazioni particolari o universali e aggettivi indefiniti con anche pronomi

usiamo costanti, variabili, quantificatori

Logica del primo ordine

Le variabili si riferiscono ad oggetti.

quantificatori:

- esiste ($\exists$)
- per ogni ($\forall$)

É formato da insiemi potenzialmente infiniti di:

- variabili $V = x_1, x_2, \dots, y_1, \dots$
- simboli di costanti $C = a_1, a_2, a_3, \dots b, \dots$
- simboli predicativi $\mathcal{P} = P_1, Q, \dots$ associati ad una arietà
- simboli funzionali $\mathcal{F} = f_1, g, \dots$ associati ad una arietà

numero di oggetti che manipolano

questi insiemi formano la segnatura del linguaggio.

le formule sono costruite tramite i costruttori logici e quantificatori

$\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}$ possono essere vuoti

$\mathcal{V}$ e $\mathcal{P}$ non sono mai vuoti

$\mathcal{V}$ è sempre infinito

arieta n di un predicato: P^n oppure P/n

Predicati tornato T/F

Funzioni tornano oggetti

Quantificatori

$\forall$ ogni oggetto di un dominio

$\exists$ oggetto potenzialmente sconosciuto

Definizione formale delle formule della logica dei predicati

- Data una segnatura L, l'insieme dei termini (Term) di L è definito induttivamente:

    ogni simbolo di costante e variabile è un termine

    $C \cup V \subseteq Term$

    se $t_1, t_2, \dots t_n \in Term$ e f è un simbolo di f.ne n-ario

    allora $f(t_1, t_2, \dots t_n) \in Term$ (termine funzionale)

    i termini si riferiscono sempre ad oggetti

- l'insieme Atom degli atomi è definito induttivamente:

    $\top$ e $\bot$ sono atomi

    se $t_1, t_2, \dots t_n \in Term$ e P è un simbolo di predicato n-ario

    allora $P(t_1, \dots t_n) \in Atom$

gli atomi parlano di proprietà vere o false

Le formule della segnatura L sono definite da:

- ogni atomo è una formula
- se φ è una formula, $\neg\varphi$ è una formula
- se φ e ψ sono formule allora lo sono:

$$\varphi \vee \psi, \quad \varphi \wedge \psi, \quad \varphi \rightarrow \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi$$

- se φ è una formula e $x \in V$ allora

$$\forall x \varphi \;, \; \exists x \varphi \text{ sono formule}$$

lettere greche minuscole per formule

lettere greche maiuscole per gli insiemi di formule

Precedenza tra operatori

$\forall \quad \exists \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \to \quad \leftrightarrow$

primo ... ultimo

si associa a destra

$\exists x \exists y \rightsquigarrow \exists x,y$

$(\forall x \forall y \rightsquigarrow \forall x,y)$

Campo d'azione

il campo di azione di $\exists$ $(\forall)$ in $\exists x\, \varphi(x)$ $(\forall)$ è φ

Variabili senza quantificatori

es. Rosso$(x) \to$ Bello(x) in questo caso si dice che x è una variabile libera.
Non possiamo dare valore di verità alla formula (perché dipenderebbe dalla singola x)

es. $\forall x($Rosso$(x) \to$ Bello$(x))$ qua x è una variabile legata al campo d'azione

Se nessuna variabile occorre libera in φ allora si dice formula chiusa o enunciato

Variabili di un termine

insieme var(t) variabili del termine t definito da:

- $var(t) = \{t\}$ se $t \in V$
- $var(t) = \emptyset$ se $t \in C$ (termine chiuso)
- $var(f(t_1, t_2, \dots t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$

Semantica nella logica predicativa

ogni formula chiusa ha un valore di verità che dipende dagli elementi che la compongono.

Gli atomi chiusi ricevono un valore di verità, ma le variabili dipendono da come le interpretiamo

Interpretazione

coppia $I = (\Delta^I, \cdot^I)$ t.c

- Δ^I insieme non vuoto detto dominio di I
- $\cdot^I$ funzione d'interpretazione che associa:
  - a ogni $c \in C$ un elemento $c^I \in \Delta^I$
  - a ogni $f/n \in \mathcal{F}$ una f.ne n-aria $f^I : (\Delta^I)^n \to \Delta^I$
  - a ogni $P/n \in \mathcal{P}$ una relazione n-aria $P^I \subseteq (\Delta^I)^n$

(N.B. differenza tra simboli e la loro interpretazione)

Assegnazione

data interpretazione $I = (\Delta^I, \cdot^I)$, un'assegnazione in I è una f.ne $\eta : V \to \Delta^I$

η associa un elemento del dominio alle variabili in V

η è una f.ne totale

- data interpretazione I e assegnazione η, l' assegnazione sui termini $\bar{\eta}$ è:
  - per $x \in V$, $\bar{\eta}(x) = \eta(x)$
  - per $c \in C$, $\bar{\eta}(x) = I^c$
  - $f/n \in \mathcal{F}$ $t_1 \dots t_n$ termini allora

$$\bar{\eta}(f(t_1, \dots t_n)) = f^I(\bar{\eta}(t_1), \dots \bar{\eta}(t_n))$$

al posto di $\bar{\eta}(t)$ scriviamo $t^{I,\eta}$ per abbreviare

- dati I e η insieme:
  - associano ogni termine a un elemento del dominio $(t^{I,\eta} \in \Delta^I)$
  - determinano un valore di verità per ogni atomo

$$I, \eta \models P(t_1, \dots t_n)$$

soddisfano

l' atomo è vero nell' interpretazione I sotto l' assegnazione η

Sostituzione

modifica l'assegnazione per la variabile x

$I = (\Delta', \cdot')$ $\quad \eta : V \to \Delta'$

$x \in V$ e $d \in \Delta'$

$$\eta\left[\frac{x}{d}\right](y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{se } x \neq y \\ d & \text{se } x = y \end{cases}$$

Soddisfacibilità delle formule

- $I, \eta \models \top \quad I, \eta \not\models \bot$
- $I, \eta \models P(t_1 \dots t_n)$ SSE $\langle t_1^{I,\eta} \dots t_n^{I,\eta} \rangle \in P^I$

per gli operatori booleani è la stessa cosa della logica proposizionale scritta in maniera inutilmente complicata: $\models$ è 1 $\not\models$ è falso

- quantificatori

  - $I, \eta \models \exists x . \varphi$ SSE esiste un $d \in \Delta'$ t.c. $I, \eta[x/d] \models \varphi$ → sostituisco tutte le occorrenze libere di x con d
  - $I, \eta \models \forall x . \varphi$ SSE per ogni $x \in \Delta'$ $I, \eta[x/d] \models \varphi$

Modelli:

l'interpretazione I é un modello della formula φ SSE per ogni assegnazione η si verifica $I, \eta \models \varphi$, si scrive:

$$I \models \varphi \quad \text{e che } \varphi \text{ é vera in } I$$

una formula è valida o tautologica se $I \models \varphi$ per ogni I $(\models \varphi)$.

Una formula aperta non sarà (quasi) mai valida, quindi usiamo solo quelle chiuse

Qui le variabili hanno un significato indipendente dalla interpretazione

Formule chiuse e assegnazioni

$I, \eta \models \exists x . \varphi \quad \rightsquigarrow \quad I, \eta[x/d] \models \varphi$

L' assegnazione originale diventa <u>irrilevante</u>

perché sono tutte legate da quantificatori, le sostituirei tutte e non cambierebbe nulla

Equivalenza semantica

φ e ψ sono equivalenti ($\varphi \equiv \psi$) SSE per ogni interpretazione I:

$I \models \varphi$ e $I \models \psi$

hanno lo stesso valore di verità con qualunque assegnazione