motivazioni

Def. Una matrice diagonale é una matrice quadrata con coeficenti $a_{ij}=0$ se $i \neq j$

la matrice nulla é diagonale

Def. A matrice quadrata é diagonalizzabile se esiste P invertibile t.c.

$P^{-1}AP = D$ - diagonale

sono simili ad A

A è diagonalizzabile se é simile a una matrice diagonale

Oss.

una matrice diagonale é diagonalizzabile

Considerazioni 1

$P^{-1}AP=D$ Poniamo $P=\left(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n\right)$ $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$AP=PD \longleftrightarrow \left(A\underline{v}_1 | A\underline{v}_2 | \dots | A\underline{v}_n\right) = \left(\lambda_1 \underline{v}_1 | \lambda_2 v_2 | \dots | \lambda_n v_n\right)$ (base di $\mathbb{R}^n$)

quindi A é diagonalizzabile SSE esistono n vettori $v_i \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti e scalari $\lambda_i \in \mathbb{R}$ t.c $A\underline{v}_i = \lambda \underline{v}_i$ $\forall i=1 \dots n$

Notazione a) tali v_i sono autovettori di A

b) λ_i ē chiamato autovalore di A associato a $\underline{v}_i$

ogni autovalore ha un solo autovalori

autovett. $\xrightarrow{N \quad\quad 1}$ autoval

$\cup \{\underline{0}\}$ é un sottospazio

considerazione 2

$A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \longleftrightarrow A\underline{v}_i - \underbrace{\lambda_i \underline{v}_i}_{\lambda_i id \cdot \underline{v}_i} = \underline{0} \longleftrightarrow (A-\lambda_i id)\underline{v}_i = \underline{0}$

Sia $f_b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é l'omomorfismo che associa a $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$, visto come vettore colonna il vettore B $\underline{z}$. Allora $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \longleftrightarrow f_{A-\lambda_i id}(\underline{v}_i) = \underline{0}$, cioé $\underline{v}_i \in N(f_{A-\lambda_i id})$

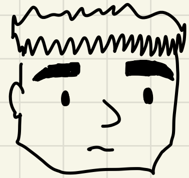
nucleo della applicazione

Notazione $N(f_{A-\lambda_i id})$ é detto autospazio di λ_i, é denotato con V_{λ_i}

quindi:

proposizione: A é diagonalizzabile $\longleftrightarrow \exists$ base di $\mathbb{R}^n$ fatta dall'unione di basi di V_{λ_i} al variare di λ_i - autovalori

Grassman



③ se $\lambda_i \neq \lambda_j$ due autovalori di A allora
$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\underline{0}\}$. Quindi $\dim(V_{\lambda_i} + V_{\lambda_j}) = \dim(V_{\lambda_i}) + \dim(V_{\lambda_j})$

proposizione: $\underset{n \times n}{A}$ é diagonalizzabile $\longleftrightarrow$ $n = \sum_{i=1}^{\overset{\text{\# autovalori di A}}{K}} \dim(V_{\lambda_i})$

④ Ricordo che $V_{\lambda_i} = N(f_{A-\lambda_i id})$ e che $\dim(\mathrm{Imm}(f_{A-\lambda_i id})) = rg(A-\lambda_i id)$
e usando il teorema di Grassman per omomorfismi
concludo che $\dim(V_{\lambda_i}) = \underset{\dim(\mathrm{dom}(f_{A-\lambda_i id}))}{\underset{\parallel}{n}} - rg(A-\lambda_i id)$

Teorema A é diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) SSE
① Ogni autovalore di A é in $\mathbb{R}$
② $\underset{\uparrow \text{molteplicitá geometrica di } \lambda_i}{mg(\lambda_i)} := \dim(V_{\lambda_i}) = \underset{\uparrow \text{molteplicitá algebrica di } \lambda_i}{m_a(\lambda_i)} \quad \forall i$

Def. $ma(\lambda_i)$ é l'intero non negativo t.c.

$$(x-\lambda_i)^{ma(\lambda_i)} \mid P_A(x) \quad \text{ma} \quad (x-x_i)^{ma(\lambda_i)+1} \nmid P_A(x)$$

dove $\underset{}{P_A(x)}$ = $\det(A - x \cdot id)$ ← polinomio caratteristico

oss. perché $P_A(x)$ é rilevante per il calcolo degli autovalori?
Sia λ una radice di $P_A(x)$, cioé $0 = P_A(\lambda) = \det(A-\lambda \cdot id)$, quindi non é inv.
questo SSE $N(f_{A-\lambda_i id}) \neq \{\underline{0}\}$

$$\exists \underline{v} \neq 0 : \underbrace{(A-\lambda id)\underline{v}}_{A\underline{v}-\lambda\underline{v}} = 0 \longleftrightarrow A\underline{v} = \lambda \underline{v}$$

cioé λ é un autovalore di A

OSS. È sempre vero che $1 \leq mg(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$

Riassunto procedura

1. determinare autovalori di A

trovare le radici di $P_A(x) = \det(A - \lambda id)$

tutte le radici $\{\lambda_i\} \subset \mathbb{R}$

magari è complesso

$\exists!\ \lambda_j$ t.c. $P_A(\lambda_j) = 0$, con $\lambda_j \notin \mathbb{R}$

$\Downarrow$

A non è diagonalizzabile

2. $\forall \lambda_i \mid ma(\lambda_i) > 1$

calcolare $mg(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_i}) = n - rg(A - \lambda_i id)$

quindi verificare che $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$

3. per determinare le matrici P e D-diagonale t.c. $P^{-1}AP = D$, nel caso in cui A è diagonalizzabile, devo:

- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_2 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ sono associati

- $P = \left(\underline{v}_{1_1} \mid \underline{v}_{1_2} \mid \underline{v}_{2_1} \mid \underline{v}_{2_2} \mid \underline{v}_{2_3} \mid \dots \right)$

$\{v_{ij}\}_j$ è una base delle soluzioni di

$(A - \lambda_i id)\underline{x} = 0$

(sistema omogeneo)

Teorema spettrale. ogni matrice reale A simmetrica ($a_{ij} = a_{ji}$) è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Inoltre la matrice P che diagonalizza A può essere scelta ortogonale

(i vettori riga o colonna sono ortonormali)