1

Un prodotto interno é una struttura supplementare che uno s.v. puó avere

Def. un prodotto interno in uno spazio vettoriale V é una f.ne $V \times V \longrightarrow K$ (campo degli scalari)

$$V \times V \longrightarrow K$$

tendenzialmente matematica non la usano

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \longrightarrow \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2$$

$$\longrightarrow \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$ no spazio generato ma uno scalare

proprietá

1. $\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$
2. multilinearitá ma con solo 2 (bilinearitá)
   $\langle \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2, \underline{w} \rangle = \alpha \langle \underline{v}_1, \underline{w} \rangle + \beta \langle \underline{v}_2, \underline{w} \rangle$
3. $\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0$ se $\underline{v} \neq \underline{0}$

osservazioni:

(A) $\langle \underline{0}, \underline{w} \rangle = \langle 0 \cdot \underline{v}, \underline{w} \rangle \overset{(2)}{=} 0 \cdot \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$

$\langle -\underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle -1 \cdot \underline{v}, \underline{w} \rangle \overset{(2)}{=} -1 \cdot \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

(B) sia $(\underline{v}_i)_{i=1 \dots n} \subset V^n$ una base ordinata

$\underline{v}, \underline{w} \in V^n$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underline{v}_j \rangle \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \underline{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underline{v}_j \rangle \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_i \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle$$

una volta che conosco la matrice dei prodotti tra n vettori

$P = (\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle) \quad i,j = 1 \dots n$

é quadrata e simmetrica

conosco $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V^n$

infatti $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

Def. La norma o lunghezza di un vettore $\underline{v} \in V$ rispetto ad un prodotto interno $\langle \ , \ \rangle$ é definita come $\|\underline{v}\| := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$

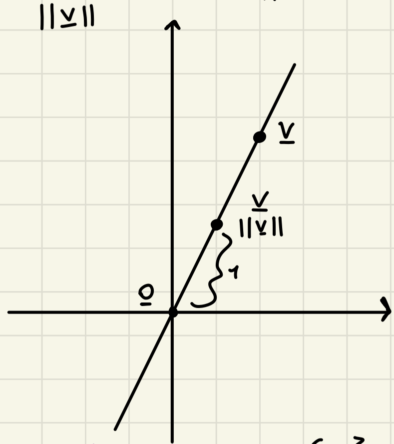
Def. • $\underline{v}, \underline{w} \in (V, \langle \ , \ \rangle)$ sono detti ortogonali rispetto al prodotto interno se $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$

• $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono ortonormali se sono ortogonali e normali, cioé $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| = 1$

osservazione

ad ogni $\underline{v} \in (V, <,>)$ possiamo associare in modo canonico un vettore normale versore:

$$\underbrace{\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}}_{\text{versore}} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}, \text{ Infatti } \left\| \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} \right\| = \sqrt{\left< \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right>} = \sqrt{\frac{1}{\|\underline{v}\|^2} <\underline{v}, \underline{v}>} = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underbrace{\sqrt{<\underline{v}, \underline{v}>}}_{\|v\|} = 1$$



- fondamentale sia $\{e_i\} \subset (V^n, <,>)$ una base ortonormale allora $\forall \underline{v} \in V^n$ $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

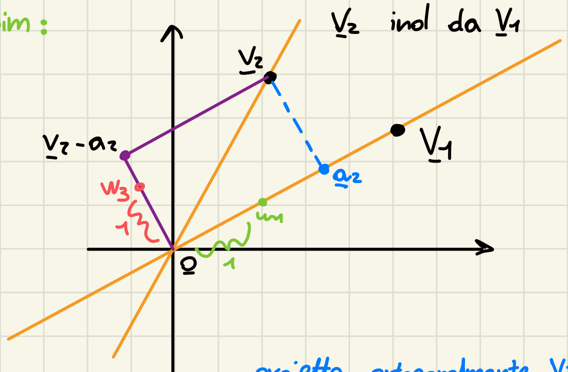
$$< \underline{v}, \underline{e}_j > = < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{e}_i, \underline{e}_j > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overbrace{< \underline{e}_i, \underline{e}_j >}^{\text{sono ortogonali}} = \lambda_i$$

$$< \underline{e}_i, \underline{e}_j > = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Teorema fondamentale

In ogni $(V, <,>)$ esiste una base ortonormale

Dim:



sostituisco v_1 con il versore $w_1 = \frac{v_1}{\|\underline{v}_1\|}$

se $\underline{v}_2$ fosse ort. basterebbe normalizzarlo e avrei una base normale

proietto ortogonalmente $\underline{v}_2$ sulla retta a cui appartiene $\underline{v}_1$

$\underline{v}_2 - a_2$ è ortogonale a $\underline{v}_1$ basta normalizzare

$$w_3 = \frac{\underline{v}_2 - \underline{a}_2}{\|\underline{v}_2 - \underline{a}_2\|}$$

$\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ base ortonormale

① $\underline{0} \neq \underline{v}_1 \in V^n$, poniamo $\underline{e}_1 = \dfrac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}$

② sia $\underline{v}_2$ lin. ind con $\underline{e}_1$. Poniamo $\underline{z}_2 = \underline{v}_2 - \overbrace{\langle \underline{v}_2, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1}^{a_2}$

verifichiamo che $\langle \underline{z}_2, \underline{e}_1 \rangle = 0$

$$\langle \underline{z}_2, \underline{e}_1 \rangle = \langle \underline{v}_2 - \langle \underline{v}_2, \underline{e}_1 \rangle \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{e}_1 \rangle - \langle \underline{v}_2, \underline{e}_1 \rangle \cdot \overbrace{\langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle}^{1} = 0$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\underline{z}_2}{\|\underline{z}_2\|}$$

③ prendo un altro vettore ind fuori dal piano faccio proiezione sul piano e faccio la sottrazione, trovo vettore orto. al piano

ultimo supponge di avere $\{e_1, e_2 \dots e_{n-1}\}$ ortonormali
Sia $\underline{v}_n : \{\underline{e}_1, \dots, e_{n-1}, \underline{v}_n\}$ é una base di V^n.

Pongo $\underline{z}_n = \underline{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \underline{v}_n, \underline{e}_i \rangle \cdot \underline{e}_i$

verifico che:

$j = 1 \dots n-1$

$$\langle \underline{z}_n, \underline{e}_j \rangle = \langle \underline{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \underline{v}_n, \underline{e}_i \rangle \cdot \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle =$$

$$= \langle \underline{v}_n, \underline{e}_j \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\langle \underline{v}_n, \underline{e}_i \rangle \cdot \langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle \right) = \langle \underline{v}_n, \underline{e}_j \rangle - \langle \underline{v}_n, \underline{e}_j \rangle \overbrace{\langle \underline{e}_j, \underline{e}_j \rangle}^{1}$$

$$= \langle \underline{v}_n, \underline{e}_j \rangle - \langle \underline{v}_n, \underline{e}_j \rangle = 0$$