УДК 519.2

Ю. И. Скалько

Лаборатория флюидодинамики и сейсмоакустики, Московский физико-технический институт

Задача Римана о распаде разрыва, в случае многих пространственных переменных

В работе изложено решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Ключевые слова: распад разрыва, условия сопряжения, гиперболические системы, обобщенные функции, задача Коши, матрица-функция Грина, характеристики, инварианты Римана, уравнения упругой динамики.

Y. I. Skalko

Laboratory of Fluid Dynamics and Seismic, Moscow Institute of Physics and Technology

The Riemann problem on decay of a discontinuity, in the case of several spatial variables

The paper set out the solution of the generalized Riemann problem of decay of a discontinuity for hyperbolic systems of linear first order differential equations with constant coefficients and with any number of spatial variables. The proposed algorithm reduces the problem of finding the values of the variables on both sides of the discontinuity surface of initial data to a system of algebraic equations with the right-hand side, depending on the values of the variables at the initial time in a finite number of points.

Key words: decay gap, junction conditions, hyperbolic systems, generalized functions, Cauchy problem, Green's matrix function, characteristics, Riemann invariants, elastic dynamics equations.

1. Введение

Многие эволюционные процессы в физике, биологии, экономике и других прикладных областях моделируются гиперболическими системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка. При построении численных алгоритмов решения краевых задач для таких систем уравнений, с использованием аппроксимации решения кусочно-гладкими функциями, ключевым моментом является решение задачи Римана о распаде разрыва. В случае одной пространственной переменной различными авторами [1], [2], [3] предложен ряд методов решения задачи Римана. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва [1], [2], [4] . Понятно, что такой подход, далеко не во всех случаях является обоснованным.

Кроме того, во всех известных автору случаях рассматриваются такие постановки задачи о распаде разрыва, которые допускают разрывные решения и эти решения не являются "физичными".

В работе будет приведено решение задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных.

2. Постановка задачи

Задачу Римана о распаде разрыва будем рассматривать в следующей постановке. Необходимо найти решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^N \tag{1}$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}(t=0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \tag{2}$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. Решение должно быть всюду непрерывно, кроме гиперплоскости Γ. При этом должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости Γ , т.е. $\mathbf{u}(t,\, x_1 = -0, x_2, ..., x_N)$ и $\mathbf{u}(t,\, x_1 = +0, x_2, ..., x_N)$:

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u}(t,\, x_1 = -0, x_2, ..., x_N),\ \mathbf{u}(t,\, x_1 = +0, x_2, ..., x_N)\right) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Кроме этого, полагаем, что начальные данные также удовлетворяют условиям сопряжения, т.е.

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u_0}(x_1 = -0, x_2, ..., x_N),\ \mathbf{u_0}(x_1 = +0, x_2, ..., x_N)\right) = \mathbf{0}. \tag{4}$$

В качестве примера соотношений, связывающих значения переменных $\mathbf{u}(t,\, x_1 = -0, x_2, ..., x_N)$ и $\mathbf{u}(t,\, x_1 = +0, x_2, ..., x_N)$, можно рассмотреть для случая системы уравнений упругой динамики «условия полного слипания», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость Γ непрерывны компоненты вектора смещений и непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений. Или «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость Γ непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты вектора смещений, непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны гиперплоскости, равны 0.

Сформулированную постановку будем, следуя [1], называть обобщенной задачей Римана о распаде разрыва. Обобщенная задача Римана отличается от классической задачи Римана тем, что в классической задаче начальные данные предполагаются константами по обе стороны от гиперплоскости, в обобщенной задаче Римана начальные данные по обе стороны от гиперплоскости Γ могут быть произвольными функциями, а также на всех поверхностях разрыва должны соблюдаться заданные условия сопряжения.

3. Фундаментальное решение.

В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций, изложение которой можно найти, например в [5], [6] или [7].

Определим пространство основных вектор-функций $\boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^N\right)$. Элементами этого пространства будут M-мерные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_M)$, компоненты которых $\varphi_1(\mathbf{y}), ..., \varphi_M(\mathbf{y})$ принадлежат пространству $\mathscr{S}\left(R^N\right)$, которое состоит из функций класса $C^\infty\left(R^N\right)$, убывающих при $|y| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|y|^{-1}$.

Определение 1. *Обобщенными вектор-функциями* $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_M) \in \boldsymbol{\mathscr{S}'}\left(R^N\right)$ *будем называть линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве* $\boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^N\right)$. *При этом функционал* $\mathbf{f}$ *действует на основную вектор-функцию* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_M)$ *по формуле* $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) = (f_1, \varphi_1) + ... + (f_M, \varphi_M)$.

Определение 2. *Обобщенным решением для системы уравнений*

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{5}$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}'\left(R^{N+1}\right)$, *удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т.е. для произвольной основной функции* $\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}\left(R^{N+1}\right)$ *выполняется равенство*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i},\boldsymbol{\varphi}\right)=(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi})$$

$\mathbf{A}_i$ - *матрицы коэффициентов системы уравнений* (5), *размера* $(M\times M)$.

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц $\mathbf{A}_i$ имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_i=\mathbf{R}_i\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{\Omega}_i \tag{6}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_i$ - диагональная матрица собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_i$, упорядоченных по не убыванию,
$\boldsymbol{\Omega}_i$ - матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_i$, соответствующие собственным числам $\boldsymbol{\Lambda}_i$,
$\mathbf{R}_i=\boldsymbol{\Omega}_i^{-1}$- матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_i$.

Определение 3. *Фундаментальным решением оператора задачи* (5) *называется обобщенная матрица-функция,* $\mathbf{G}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}'\left(R^{N+1}\right)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}=\mathbf{I}\,\delta(t,\mathbf{x}) \tag{7}$$

$\mathbf{I}$ - *единичная диагональная матрица* $(M\times M)$.

Определение 4. *Сверткой* $\mathbf{G}*\mathbf{f}$ *обобщенной матрицы-функции* $\mathbf{G}=G_{ij}\in\mathscr{S}'$ *и обобщенной вектор-функции* $\mathbf{f}=f_j\in\mathscr{S}'$ *будем называть обобщенную вектор-функцию* $\mathbf{u}=u_i\in\mathscr{S}'$, *такую что* $u_i=\sum\limits_{j=1}^{M}G_{i,j}*f_j$, *где* $G_{i,j}*f_j$ - *свертка* $G_{i,j}$ *и* f_j, *как обобщенных функций из* $\mathscr{S}'$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\in\mathscr{S}'$, *таково, что свертка* $\mathbf{G}*\mathbf{f}$ *существует в* $\mathscr{S}'$. *Тогда решение уравнения* (5) *существует в* $\mathscr{S}'$ *и дается формулой*

$$\mathbf{u}=\mathbf{G}*\mathbf{f}. \tag{8}$$

Это решение единственно в классе тех функций из $\mathscr{S}'$, *для которых существует свертка с* $\mathbf{G}$.

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования свертки, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}=\frac{\partial(\mathbf{G}*\mathbf{f})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\frac{\partial(\mathbf{G}*\mathbf{f})}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}\right)*\mathbf{f}=\delta(t,\mathbf{x})*\mathbf{f}=\mathbf{f}.$$

Поэтому формула (8), действительно дает решение уравнения (5). Докажем единственность решения уравнения (5) в классе тех обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, для которых свертка с

$\mathbf{G}$ существует в $\mathscr{S}'$. Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

имеет только нулевое решение в этом классе. Но это действительно так, поскольку, в силу (8) $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. □

Построим фундаментальное решение оператора задачи (5). Обозначим через $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ - преобразование Фурье $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ по пространственным переменным. Выполним преобразование Фурье уравнений (7) по пространственным переменным. Учитывая, что $F_{\mathbf{x}}\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_j}\right] = -i\xi_j F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - i \sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j \mathbf{V} = \mathbf{I}\,\delta(t) \tag{9}$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$\mathbf{V}(t,\ \boldsymbol{\xi}) = \theta(t) \exp\left(i \sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j t\right),$$

где $\theta(t)$ - функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0; \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0 \end{cases}.$$

Следуя определению матричной экспоненты,

$$\exp\left(i \sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N} \exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{j=1}^{N} (-i\xi_j)^{\alpha_j}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс), $|\boldsymbol{\alpha}| = (\alpha_1 + ... + \alpha_N)$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$ - матрицы размера $M \times M$, являющиеся полиномами матриц $\mathbf{A}_j$ степени $|\boldsymbol{\alpha}|$.

Учтем (6), тогда

$$\exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) = \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t)\, \boldsymbol{\Omega}_j .$$

Следовательно

$$\exp\left(i \sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t)\, \boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{j=1}^{N} (-i\xi_j)^{\alpha_j} .$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \left(\prod_{j=1}^{N} \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\, \boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} D^{\boldsymbol{\alpha}} \delta(\mathbf{x})\right)$$

Здесь
$\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)$ - диагональные матрицы, в k- ой строке которых стоит обобщенная функция $\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right)$, λ_j^k - k- ое собственное число матрицы $\mathbf{A}_j$,
$D^{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$ - оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Рассмотрим сомножитель $\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j-\mathbf{\Lambda}_j t\right)\mathbf{\Omega}_j$. Обозначим через $\mathbf{D}^k$ - квадратную матрицу размера $M\times M$, все элементы которой равны 0, кроме k- го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j-\mathbf{\Lambda}_j t\right)\mathbf{\Omega}_j=\sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}_j\mathbf{D}^k\mathbf{\Omega}_j\delta\left(x_j-\lambda_j^k t\right)=\sum_{k=1}^{M}\mathbf{C}_j^k\delta\left(x_j-\lambda_j^k t\right).$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j-\mathbf{\Lambda}_j t\right)\mathbf{\Omega}_j=\sum_{k_1=1}^{M}\sum_{k_2=1}^{M}...\sum_{k_N=1}^{M}\mathbf{C}_1^{k_1}\mathbf{C}_2^{k_2}...\mathbf{C}_N^{k_N}\delta\left(x_1-\lambda_1^{k_1}t\right)\delta\left(x_2-\lambda_2^{k_2}t\right)...\delta\left(x_N-\lambda_N^{k_N}t\right)$$

Если определить:
$\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_N)$ - мультииндекс, целочисленный вектор с составляющими $k_j=1:M$,
$\mathbf{C}^{\mathbf{k}}=\mathbf{C}_1^{k_1}\mathbf{C}_2^{k_2}...\mathbf{C}_N^{k_N}$ - многоиндексный массив матриц,
$\lambda^{\mathbf{k}}=\left(\lambda_1^{k_1},\lambda_2^{k_2},...,\lambda_N^{k_N}\right)$ - многоиндексный массив векторов, то

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j-\mathbf{\Lambda}_j t\right)\mathbf{\Omega}_j=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x}-\lambda^{\mathbf{k}}t\right),$$

тогда

$$\mathbf{G}\left(t,\mathbf{x}\right)=\theta\left(t\right)\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x}-\lambda^{\mathbf{k}}t\right)+\theta\left(t\right)\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2}t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}D^{\boldsymbol{\alpha}}\delta\left(\mathbf{x}\right). \qquad (10)$$

Обратим внимание на следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Поскольку $\mathbf{C}^{k_j}=\mathbf{R}_j\mathbf{D}^{k_j}\mathbf{\Omega}_j$, то

$$\sum_{k_j=1}^{M}\mathbf{C}^{k_j}=\mathbf{R}_j\left(\sum_{k_j=1}^{M}\mathbf{D}^{k_j}\right)\mathbf{\Omega}_j=\mathbf{R}_j\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}_j=\mathbf{I}. \qquad (11)$$

4. Задача Римана.

Пусть $\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ - решение задачи Римана (1), (2), (3). Определим функции

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) &= \begin{cases}\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right), \text{ если } t\geqslant 0, x_1\leqslant 0\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \ t,\mathbf{x}\end{cases} &
\mathbf{u}^+(t,\mathbf{x}) &= \begin{cases}\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right), \text{ если } t\geqslant 0, x_1\geqslant 0\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } t,\mathbf{x}\end{cases}\\
\mathbf{u}_0^-(t,\mathbf{x}) &= \begin{cases}\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x}\right), \text{ если } x_1\leqslant 0\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \mathbf{x}\end{cases} &
\mathbf{u}_0^+(t,\mathbf{x}) &= \begin{cases}\mathbf{u}_0\left(\mathbf{x}\right), \text{ если } x_1\geqslant 0\\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \mathbf{x}\end{cases}.\\
\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x}) &= \theta(t)\mathbf{u}\left(t,x_1=-0,x_2,...,x_N\right) &
\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x}) &= \theta(t)\mathbf{u}\left(t,x_1=+0,x_2,...,x_N\right)
\end{aligned}$$

Покажем, что $\mathbf{u}^-\left(t,\mathbf{x}\right)$, рассматриваемая, как обобщенная функция из $\mathscr{S}'$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial x_i}=\mathbf{u}_0^-\cdot\delta_{t=0}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\cdot\delta_{x_1=0} \qquad (12)$$

Действительно, при всех $\boldsymbol{\varphi}\left(t,\mathbf{x}\right)\in\mathscr{S}$ имеем цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial x_i},\,\boldsymbol{\varphi}\right)=-\int\left(\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial t};\mathbf{u}^-\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}^T}{\partial x_i};\mathbf{A}_i^-\mathbf{u}^-\right)\right)dtd\mathbf{x}\ldots$$

$$=\int\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i^-\frac{\partial\mathbf{u}^-}{\partial x_i}\right)dtd\mathbf{x}+\int\left(\boldsymbol{\varphi}^T\left(0,\mathbf{x}\right);\mathbf{u}^-\left(0,\mathbf{x}\right)\right)d\mathbf{x}-\int_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\mathbf{A}_1^-\mathbf{u}^-\right)dtd\Gamma$$

$$=\int\left(\boldsymbol{\varphi}^T\left(0,\mathbf{x}\right);\mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x}\right)\right)d\mathbf{x}-\int_{\Gamma}\left(\boldsymbol{\varphi}^T;\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}^-\right)dtd\Gamma$$

откуда и вытекает равенство (12).

Аналогично, $\mathbf{u}^+(t,\mathbf{x})$, рассматриваемая, как обобщенная функция из $\mathscr{S}'$, удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t}+\sum_i^N \mathbf{A}_i^+\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_i}=\mathbf{u}_0^+\cdot\delta_{t=0}+\mathbf{A}_1^+\mathbf{v}^+\cdot\delta_{x_1=0} \tag{13}$$

Докажем три Леммы, которые будут существенны в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $u(\mathbf{x})$ - локально интегрируемая функция в R^N. Тогда*

$$\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)*u(\mathbf{x})\cdot\delta_{t=0}=\theta(t)u(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)$$

Доказательство. Согласно определению свертки обобщенных функций [7], для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x},t)\in\mathscr{S}\left(R^{N+1}\right)$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\in\mathscr{S}\left(R^{2N+2}\right)$, сходящейся к 1 в R^{2N+2} (стр.133 монографии [7]), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)*u(\mathbf{x})\cdot\delta_{t=0},\,\varphi(\mathbf{x},t))\ldots\\
&\stackrel{def}{=}\lim_{k\to\infty}\left(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)\cdot u(\mathbf{y})\cdot\delta_{\tau=0},\;\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},t+\tau)\right)\ldots\\
&=\lim_{k\to\infty}\left(\theta(t)\,u(\mathbf{y})\cdot\delta_{\tau=0},\;\eta_k(\mathbf{a}t,\mathbf{y},t,\tau)\,\varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t+\tau)\right)\ldots\\
&=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Gamma:\tau=0}\theta(t)\,u(\mathbf{y})\,\eta_k(\mathbf{a}t,\mathbf{y},t,0)\,\varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t)\,d\Gamma\ldots\\
&=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\,u(\mathbf{y})\,\varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t)\,d\mathbf{y}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\,u(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)\,\varphi(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}dt\ldots\\
&=(\theta(t)\,u(\mathbf{x}-\mathbf{a}t),\,\varphi(\mathbf{x},t)).
\end{aligned}$$

Тем самым утверждение Леммы доказано. □

Лемма 3. *Пусть $v(t,\mathbf{x})$ - локально интегрируемая функция в R^{N+1} и $v(t,\mathbf{x})=0$, при $t\leqslant 0$, тогда если $a_1\neq 0$, то*

$$\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)*v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0}=\frac{1}{|a_1|}\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right)v\left(t-\frac{x_1}{a_1},\mathbf{x}-\frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right),$$

если $a_1=0$, то

$$\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)*v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0}=0.$$

Доказательство. Если $a_1\neq 0$, для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x},t)\in\mathscr{S}\left(R^{N+1}\right)$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\in\mathscr{S}\left(R^{2N+2}\right)$, сходящейся к 1 в R^{2N+2}, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)*v(t,\mathbf{x})\cdot\delta_{\Gamma:x_1=0},\;\varphi(\mathbf{x},t))\ \ldots\\
&\stackrel{def}{=}\lim_{k\to\infty}\left(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{a}t)\cdot v(\tau,\mathbf{y})\cdot\delta_{\Gamma:y_1=0},\,\eta_k(\mathbf{x},\mathbf{y},t,\tau)\,\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y},t+\tau)\right)\ldots\\
&=\lim_{k\to\infty}\left(\theta(t)v(\tau,\mathbf{y})\cdot\delta_{\Gamma:y_1=0},\,\eta_k(\mathbf{a}t,\mathbf{y},t,\tau)\,\varphi(\mathbf{a}t+\mathbf{y},t+\tau)\right)\ldots\\
&=\int\limits_{\Gamma:y_1=0}\theta(t')v(\tau',\mathbf{y})\,\varphi\left(\mathbf{a}t'+\mathbf{y},t'+\tau'\right)\,dy_2,\ldots,dy_N,dt'd\tau'\ldots\\
&=\frac{1}{|a_1|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right)v\left(t-\frac{x_1}{a_1},\mathbf{x}-\frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right)\varphi(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}dt\ldots\\
&=\frac{1}{|a_1|}\left(\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right)v\left(t-\frac{x_1}{a_1},\mathbf{x}-\frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right),\;\varphi(\mathbf{x},t)\right).
\end{aligned}$$

Тем самым утверждение Леммы для $a_1 \neq 0$, доказано.
Пусть $v(t, \mathbf{x}) = 0$, при $t \leqslant 0$.
Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $a_1 > 0$, то $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0} = 0$.
Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $x_1/t \leqslant a_1 < 0$, то $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0} = 0$.
В силу непрерывности свертки, для $t > 0$, $x_1 < 0$

$$\theta(t) \cdot \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - a_2 t) ... \delta(x_N - a_N t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0} = \ldots \\ = \lim_{a_1 \to 0} \left(\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0}\right) = 0$$

Точно также, для $t > 0$, $x_1 > 0$

$$\theta(t) \cdot \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - a_2 t) ... \delta(x_N - a_N t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0} = \ldots \\ = \lim_{a_1 \to 0} \left(\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma:x_1=0}\right) = 0$$

Отсюда следует справедливость утверждения Леммы для произвольных $\mathbf{a}$. □

5. Задача Римана, одна пространственная переменная.

В случае одной пространственной переменной формула (10), задающая фундаментальное решение оператора задачи, принимает вид

$$\mathbf{G}(t, x) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{R}\mathbf{D}^k \mathbf{\Omega} \delta\left(x - \lambda^k t\right)$$

Решение уравнения (12) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^-(t, x) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{R}^- \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^- \delta\left(x - \lambda_-^k t\right) * \left(\mathbf{u}_0^- \cdot \delta_{t=0} - \mathbf{A}^- \mathbf{v}^- \cdot \delta_{x=0}\right). \tag{14}$$

Используя обозначение $\mathbf{C}_-^k = \mathbf{R}^- \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^-$, и на основании Леммы 2 и Леммы 3, (14) можем записать

$$\mathbf{u}^-(t, x) = \sum_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- \left(x - \lambda_-^k t\right) + \sum_{k:\, x > \lambda_-^k t} \frac{1}{\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k \mathbf{A}^- \mathbf{v}^- \left(t - x/\lambda_-^k\right). \tag{15}$$

Поскольку $\mathbf{A}^- = \mathbf{R}^- \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{\Omega}^-$, то $\dfrac{1}{\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k \mathbf{A}^- = \mathbf{C}_-^k$, и (15) можно переписать

$$\mathbf{u}^-(t, x) = \sum_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- \left(x - \lambda_-^k t\right) + \sum_{k:\, x > \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{v}^- \left(t - x/\lambda_-^k\right). \tag{16}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to -0$, получаем

$$\sum_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{v}^-(t) = \sum_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- \left(x - \lambda_-^k t\right). \tag{17}$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}^-$, соответственно, N^- - отрицательных, Z^- - нулевых и P^- - положительных собственных чисел. Умножим равенство (16) на левые собственные векторастроки матрицы $\mathbf{A}^-$, соответствующие неотрицательным собственным числам. Получим $Z^- + P^-$ равенств

$$\mathbf{l}_k^- \mathbf{u}^-(t, x) = \mathbf{l}_k^- \mathbf{u}_0^- \left(x - \lambda_-^k t\right); k,\ \lambda_-^k \geqslant 0 \tag{18}$$

$\mathbf{l}_k^-$ - k-ая строка матрицы $\mathbf{\Omega}^-$. Равенства (18) отражают факт сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик, соответствующих собственным числам $\lambda_-^k \geqslant 0$.

Переходя в равенстве (18) к пределу $x \to -0$, получаем

$$\mathbf{l}_k^- \mathbf{v}^- (t) = \mathbf{l}_k^- \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^k t\right); k,\ \lambda_-^k \geqslant 0\,. \tag{19}$$

Аналогично (14), решение уравнения (13) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^+ (t, x) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{R}^+ \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^+ \delta \left(x - \lambda_+^k t\right) * \left(\mathbf{u}_0^+ \cdot \delta_{t=0} + \mathbf{A}^+ \mathbf{v}^+ \cdot \delta_{x=0}\right).$$

Введя обозначение $\mathbf{C}_+^k = \mathbf{R}^+ \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^+$, можем записать

$$\mathbf{u}^+ (t, x) = \sum_{k:\, x \geqslant \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+ \left(x - \lambda_+^k t\right) + \sum_{k:\, x < \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+ \left(t - x/\lambda_+^k\right). \tag{20}$$

И переходя в этом равенстве к пределу при $x \to +0$, получаем

$$\sum_{k:\, x \geqslant \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+ (t) = \sum_{k:\, x \geqslant \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+ \left(x - \lambda_+^k t\right). \tag{21}$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}^+$, соответственно, N^+ - отрицательных, Z^+ - нулевых и P^+ - положительных собственных чисел. Умножим равенство (20) на левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}^+$, соответствующие неположительным собственным числам. Получим $N^+ + Z^+$ равенств

$$\mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}^+ (t, x) = \mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}_0^+ \left(x - \lambda_+^k t\right); k,\ \lambda_+^k \leqslant 0 \tag{22}$$

$\mathbf{l}_k^+$ - k-ая строка матрицы $\mathbf{\Omega}^+$. Равенства (20) отражают факт сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик, соответствующих собственным числам $\lambda_+^k \leqslant 0$.

Переходя в равенстве (20) к пределу $x \to +0$, получаем равенство

$$\mathbf{l}_k^+ \mathbf{v}^+ (t) = \mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^k t\right); k,\ \lambda_+^k \leqslant 0\,. \tag{23}$$

Объединим равенства (17), (21) и добавим к ним условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи обобщенной Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^- (t)$ и $\mathbf{v}^+ (t)$.

$$\begin{cases} \sum\limits_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{v}^- (t) = \sum\limits_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- \left(x - \lambda_-^k t\right) \\ \sum\limits_{k:\, x \geqslant \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+ (t) = \sum\limits_{k:\, x \geqslant \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+ \left(x - \lambda_+^k t\right) \\ \mathbf{L} \left(\mathbf{v}^- (t),\ \mathbf{v}^+ (t)\right) = \mathbf{0} \end{cases}. \tag{24}$$

Так, как начальные данные удовлетворяют условиям сопряжения на границе Г, то необходимо, чтобы количество линейно независимых уравнений системы (24) было равно количеству неизвестных. Выделим линейно независимые уравнения системы (24). Решение полученной совместной СЛАУ и будет приближенным решением обобщенной задачи Римана. Решим систему уравнений (24) и определим значение $\mathbf{v}^- (t)$ и $\mathbf{v}^+ (t)$ при $t > 0$ по обе стороны точки $x = 0$.

Формулы (16) и (20) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^- (t)$ и $\mathbf{v}^+ (t)$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая одной пространственной переменной.

6. Задача Римана, несколько пространственных переменных.

Построим решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая произвольного количества пространственных переменных. Алгоритм решения в значительной степени аналогичен алгоритму, приведенному выше для случая одной пространственной переменной.

Рассмотрим первое уравнение системы (12). Фундаментальное решение оператора задачи задается формулой (10) и представимо в виде

$$\mathbf{G}^-(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \delta\left(\mathbf{x} - \lambda_-^{\mathbf{k}} t\right) + \sum_{|\alpha|\geqslant 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \delta(\mathbf{x}).$$

Решение уравнения (12) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \mathbf{G}^-(t,\mathbf{x}) * \left(\mathbf{u}_0^- \delta_{t=0} - \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \delta_{x_1=0}\right).$$

На основании утверждений Леммы 2 и Леммы 3, а также, учитывая, что $D^\alpha \delta(\mathbf{x}) * \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x}) \cdot \delta(t) = D^\alpha \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x})$, можем записать

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 \leqslant \lambda_-^{k_1} t} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x} - \lambda_-^{\mathbf{k}} t\right) + \sum_{|\alpha|\geqslant 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x}) \ldots$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 > \lambda_-^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^-\left(t - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}}\right). \quad (25)$$

Если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P, то в правой части формулы (25) останется только конечное число слагаемых

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 \leqslant \lambda_-^{k_1} t} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^-\left(\mathbf{x} - \lambda_-^{\mathbf{k}} t\right) + \sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x}) \ldots$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 > \lambda_-^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^-\left(t - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}}\right). \quad (26)$$

Переходя в (26) к пределу $x_1 \to -0$, получаем

$$\mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} < 0} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \ldots, x_N - \lambda_-^{k_N} t\right) \ldots$$
$$+ \sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^-(0, x_2, \ldots, x_N).$$

Так, как $\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{C}^{k_2} \ldots \mathbf{C}^{k_N}$ и учитывая (11), получаем, что

$$\mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{k_1:\, \lambda_-^{k_1} < 0} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \ldots, x_N - \lambda_-^{k_N} t\right) \ldots$$
$$+ \sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^-(0, x_2, \ldots, x_N).$$

Поскольку $\mathbf{A}_1^- = \mathbf{R}_1^- \mathbf{\Lambda}_1^- \mathbf{\Omega}_1^-$, то $\dfrac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{A}_1^- = \mathbf{C}_-^{k_1}$, следовательно

$$\sum_{k_1:\,\lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \ldots$$

$$+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- \left(0, x_2, ..., x_N\right). \quad (27)$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}_1^-$, соответственно, N_1^- - отрицательных, Z_1^- - нулевых и P_1^- - положительных собственных чисел. Умножим равенство (27) на левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}_1^-$, соответствующие неотрицательным собственным числам. Получим $Z_1^- + P_1^-$ равенств

$$\mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k},\,\lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \ldots$$

$$+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- \left(0, x_2, ..., x_N\right), \;\; k_1,\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0. \quad (28)$$

Аналогично, решение первого уравнения системы (13) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^+ (t, \mathbf{x}) = \mathbf{G}^+ (t, \mathbf{x}) * \left(\mathbf{u}_0^+ \delta_{t=0} + \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \delta_{x_1=0} \right).$$

На основании утверждений Леммы 2 и Леммы 3, если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P, можем записать

$$\mathbf{u}^+ (t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 \geqslant \lambda_+^{k_1} t} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(\mathbf{x} - \lambda_+^{\mathbf{k}} t \right) + \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (\mathbf{x}) \ldots$$

$$+ \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 < \lambda_+^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \left(t - \frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}_+^{\mathbf{k}} \right). \quad (29)$$

Переходя в (29) к пределу $x_1 \to +0$, получаем

$$\sum_{k_1:\,\lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_+^{k_N} t \right) \ldots$$

$$+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ \left(0, x_2, ..., x_N\right). \quad (30)$$

Пусть у матрицы $\mathbf{A}_1^+$, соответственно, N_1^+ - отрицательных, Z_1^+ - нулевых и P_1^+ - положительных собственных чисел. Умножим равенство (30) на левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}_1^+$, соответствующие неположительным собственным числам. Получим $N_1^+ + Z_1^+$ равенств

$$\mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_+^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_+^{k_N} t \right) \ldots$$

$$+ \sum_{|\alpha| \geqslant 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ \left(0, x_2, ..., x_N\right) k_1, \lambda_+^{k_1} \leqslant 0. \quad (31)$$

Объединим равенства (27), (30) и добавим к ним условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x})$

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{k_1:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{k_1}\mathbf{v}^- = &\sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t, x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\ldots\\ &+\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right)\\ \sum_{k_1:\,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0}\mathbf{C}_+^{k_1}\mathbf{v}^+ = &\sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0}\mathbf{C}_+^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^+\left(-\lambda_+^{k_1}t, x_2-\lambda_+^{k_2}t,...,x_N-\lambda_+^{k_N}t\right)\ldots\\ &+\sum_{|\alpha|\geqslant 2}^{P+1}t^{|\alpha|}\mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha\mathbf{u}_0^+\left(0,x_2,...,x_N\right)\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-,\ \mathbf{v}^+\right) = &\quad\mathbf{0} \end{aligned}\right. . \tag{32}$$

Так, как начальные данные удовлетворяют условиям сопряжения на границе Γ, то необходимо, чтобы количество линейно независимых уравнений системы (32) было равно количеству неизвестных. Выделим линейно независимые уравнения системы (32). Решение полученной совместной СЛАУ и будет приближенным решением обобщенной задачи Римана.

Решим систему уравнений (32) и определим значение $\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x})$ при $t>0$ по обе стороны гиперплоскости $x_1=0$.

Формулы (26) и (29) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t,\mathbf{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая многих пространственных переменных.

Обратим внимание, что если начальные данные заданы линейными функциями по обе стороны гиперплоскости $x_1=0$ то система уравнений (32), дающая решение обобщенной задачи Римана, принимает вид

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{k_1:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{k_1}\mathbf{v}^- = &\sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^{k_1}t, x_2-\lambda_-^{k_2}t,...,x_N-\lambda_-^{k_N}t\right)\\ \sum_{k_1:\,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0}\mathbf{C}_+^{k_1}\mathbf{v}^+ = &\sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0}\mathbf{C}_+^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^+\left(-\lambda_+^{k_1}t, x_2-\lambda_+^{k_2}t,...,x_N-\lambda_+^{k_N}t\right)\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-,\ \mathbf{v}^+\right) = &\quad\mathbf{0} \end{aligned}\right. . \tag{33}$$

При $t\to+0$ система уравнений (32) принимает вид

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{k_1:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{k_1}\mathbf{v}^- = &\sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_-^{k_1}\geqslant 0}\mathbf{C}_-^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right)\\ \sum_{k_1:\,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0}\mathbf{C}_+^{k_1}\mathbf{v}^+ = &\sum_{\mathbf{k}:\,\lambda_+^{k_1}\leqslant 0}\mathbf{C}_+^{\mathbf{k}}\mathbf{u}_0^+\left(0,x_2,...,x_N\right)\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-,\ \mathbf{v}^+\right) = &\quad\mathbf{0} \end{aligned}\right. . \tag{34}$$

Именно такое (34) приближенное решение задачи Римана используется при построении алгоритмов решения гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка [1], [2].

7. Заключение

В работе построено решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных в момент времени $t > 0$ по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Министерства образования и науки РФ №3.522.2014/К в лаборатории флюидодинамики и сейсмоакустики МФТИ.

Автор благодарит профессоров кафедры высшей математики МФТИ В.П. Бурского и В.Ж. Сакбаева, профессора кафедры информатики и вычислительной математики А.В. Колдобу, доцента этой же кафедры И.В. Цыбулина и студента 1-го года магистратуры В.А. Мазепова за полезные обсуждения и помощь.

Литература

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва: Физматлит, 2001.
2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Скалько Ю.И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование — 2014 — Т. 6, №3 — С. 347-356.
4. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes - I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. // Geophys. J. Int. — 2006 — V. 166 — P. 855-877.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1981.

References

1. *Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y.* Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems. — Moscow: Physmatlit, 2001.
2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. *Skalko Y.I.* The correct conditions on the boundary separating subdomains // Computer studies and modeling — 2014 — V. 6, №3 — P. 347-356.
4. *Martin Kaser, Michael Dumbser* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes - I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. // Geophys. J. Int. — 2006 — V. 166 — P. 855-877.
5. *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Spaces of fundamental and generalized functions. — Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1958.
6. *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Generalized functions and operations on them. — Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1959.

7. *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. — Moscow: Science, 1981.

Поступила в редакцию дд.мм.гггг.

Сведения об авторах статей
(на момент подачи статьи)

Задача Римана о распаде разрыва, в случае многих пространственных переменных
Скалько Юрий Иванович (кандидат физико-математических наук, лаборатория флюидодинамики и сейсмоакустики, старший научный сотрудник) skalko@mail.mipt.ru

Ссылки на опубликованные статьи
(в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008)

Скалько Ю.И. Задача Римана о распаде разрыва, в случае многих пространственных переменных // Труды МФТИ. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 1–12.

Skalko Y.I. The Riemann problem on decay of a discontinuity , in the case of several spatial variables // Proceedings of MIPT. — 2016. — V. 8, N 1. — P. 1–12.