УДК 519.2

Ю. И. Скалько

Лаборатория флюидодинамики и сейсмоакустики, Московский физико-технический институт

Вычислительные алгоритмы, основанные на решении обобщенной задачи Римана о распаде разрыва

В работе изложено решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек. Решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва использовано для построения вычислительных алгоритмов решения начально-краевых задач для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: распад разрыва, условия сопряжения, гиперболические системы, обобщенные функции, задача Коши, матрица-функция Грина, характеристики, инварианты Римана, уравнения упругой динамики.

Y. I. Skalko

Laboratory of Fluid Dynamics and Seismic, Moscow Institute of Physics and Technology

The Riemann problem on decay of a discontinuity, in the case of several spatial variables

The paper set out the solution of the generalized Riemann problem of decay of a discontinuity for hyperbolic systems of linear first order differential equations with constant coefficients and with any number of spatial variables. The proposed algorithm reduces the problem of finding the values of the variables on both sides of the discontinuity surface of initial data to a system of algebraic equations with the right-hand side, depending on the values of the variables at the initial time in a finite number of points.

Key words: decay gap, junction conditions, hyperbolic systems, generalized functions, Cauchy problem, Green's matrix function, characteristics, Riemann invariants, elastic dynamics equations.

1. Введение

Многие эволюционные процессы в физике, биологии, экономике и других прикладных областях моделируются гиперболическими системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка. При построении численных алгоритмов решения краевых задач для таких систем уравнений, с использованием аппроксимации решения кусочно-гладкими функциями, ключевым моментом является решение задачи Римана о распаде разрыва. В случае одной пространственной переменной различными авторами [1], [2], [3] предложен ряд методов решения задачи Римана. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва [1], [2], [4] . Понятно, что такой подход, далеко не во всех случаях является обоснованным.

Во всех известных автору случаях рассматриваются такие постановки задачи о распаде разрыва, которые допускают разрывные решения и эти решения не являются "физичными".
Обычно задача Римана решается в предположении, что начальные данные по обе стороны поверхности разрыва заданы постоянными значениями.

В работе будет приведено решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных в предположении, что начальные данные по обе стороны поверхности разрыва заданы произвольными функциями.

$$\frac{\partial \mathbf{u}\,(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{u}\,(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}=\mathbf{0},\quad \mathbf{x}\in R^N \tag{1}$$

Полученные результаты будут продемонстрированы на примере системы уравнений, описывающей распространение упругих волн, которую для случая двух пространственных переменных, следуя [2], можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{1\,1}-(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}v_1-\lambda\frac{\partial}{\partial x_2}v_2=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{2\,2}-\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}v_1-(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}v_2=0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{1\,2}-\mu\frac{\partial}{\partial x_1}v_2-\mu\frac{\partial}{\partial x_2}v_1=0,\\
\rho\frac{\partial}{\partial t}v_1-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{1\,1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{1\,2}=0,\\
\rho\frac{\partial}{\partial t}v_2-\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{1\,2}-\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{2\,2}=0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где λ и μ коэффициенты Ламе, ρ масовая плотность среды, $\sigma_{1\,1}$, $\sigma_{2\,2}$, $\sigma_{1\,2}$ компоненты тензора напряжений, v_1, v_2 компоненты вектора скорости смещений. Введя вектор переменных $\mathbf{u}=(\sigma_{1\,1},\sigma_{2\,2},\sigma_{1\,2},v_1,v_2)^T$ и матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix} 0&0&0&-(\lambda+2\mu)&0\\ 0&0&0&-\lambda&0\\ 0&0&0&0&-\mu\\ -\frac{1}{\rho}&0&0&0&0\\ 0&0&-\frac{1}{\rho}&0&0 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&-\lambda\\ 0&0&0&0&-(\lambda+2\mu)\\ 0&0&0&-\mu&0\\ 0&0&0&-\frac{1}{\rho}&0\\ 0&-\frac{1}{\rho}&0&0&0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

эту систему уравнений можно записать в виде (1).

2. Постановка задачи

Задачу Римана о распаде разрыва будем рассматривать в следующей постановке.
Необходимо найти функции $\mathbf{u}\,(t,\mathbf{x})$, которые почти всюду удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами (1) и $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\to\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ при $t\to+0$. Коэффициенты, задаваемые матрицами $\mathbf{A}_i$, постоянны справа и слева гиперплоскости $\Gamma:x_1=0$, но могут претерпевать разрыв при переходе через эту гиперплоскость. Начальные данные $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ полагаем всюду непрерывными, кроме гиперплоскости $\Gamma:x_1=0$.
Искомое решение должно быть непрерывным по обе стороны гиперплоскости $\Gamma:x_1=0$, но может претерпевать разрывы при переходе через эту гиперплоскость. При этом должны

выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости Г. В дальнейшем полагаем, что эти условия сопряжения линейны и однородны:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-), \mathbf{u}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+)) = \mathbf{0} \tag{4}$$

Условия сопряжения отражают физические условия, которые необходимо выполнять на границе Г. В качестве примера таких соотношений, связывающих значения переменных $\mathbf{u}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-), \mathbf{u}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+)$, можно рассмотреть, для случая системы уравнений упругой динамики, «условия полного слипания», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость Г непрерывны компоненты вектора смещений и выполнен третий закон Ньютона - силы действующие с разных сторон гиперплоскости равны по величине и противоположно направлены:

$$\begin{aligned} v_1\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= v_1\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) \\ v_2\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= v_2\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) \\ \sigma_{1\,1}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= \sigma_{1\,1}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) \\ \sigma_{1\,2}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= \sigma_{1\,2}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Или «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость Г непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты вектора смещений, нормальные к гиперплоскости компоненты силы с разных сторон гиперплоскости равны по величине и противоположно направлены, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны гиперплоскости, равны 0:

$$\begin{aligned} v_1\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= v_1\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) \\ \sigma_{1\,1}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= \sigma_{1\,1}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) \\ \sigma_{1\,2}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^-\right) &= 0 \\ \sigma_{1\,2}\left(t,\, \mathbf{x} \in \Gamma^+\right) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Сформулированную постановку будем, следуя [1], называть обобщенной задачей Римана о распаде разрыва. Обратим внимание, что начальные данные по обе стороны от гиперплоскости Г могут быть произвольными непрерывными функциями, в отличие от классической задачи Римана, где начальные данные предполагаются константами по обе стороны от гиперплоскости. .

3. Фундаментальное решение.

В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций, изложение которой можно найти, например в [5], [6] или [7].

Определим пространство основных вектор-функций $\boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^N\right)$. Элементами этого пространства будут M-мерные вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_M)^T$, компоненты которых $\varphi_1\left(\mathbf{y}\right), \ldots, \varphi_M\left(\mathbf{y}\right)$ принадлежат пространству $\mathscr{S}\left(R^N\right)$, которое состоит из функций класса $C^\infty\left(R^N\right)$, убывающих при $|y| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|y|^{-1}$.

Определение 1. *Обобщенными вектор-функциями* $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_M)^T \in \boldsymbol{\mathscr{S}'}\left(R^N\right)$ *будем называть линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве* $\boldsymbol{\mathscr{S}}\left(R^N\right)$. *При этом функционал* $\mathbf{f}$ *действует на основную вектор-функцию* $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_M)^T$ *по формуле* $(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) = ((f_1, \varphi_1), \ldots, (f_M, \varphi_M))^T$.

Определение 2. *Обобщенным решением для системы уравнений*

$$\frac{\partial \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right)}{\partial x_i} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right) \tag{7}$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}'\left(R^{N+1}\right)$, *удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т.е. для произвольной основной функции* $\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}\left(R^{N+1}\right)$ *выполняется равенство*

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \boldsymbol{\varphi}\right) = (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})$$

$\mathbf{A}_i$ - *матрицы коэффициентов системы уравнений* (7), *размера* $(M \times M)$.

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц $\mathbf{A}_i$ имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i \boldsymbol{\Lambda}_i \boldsymbol{\Omega}_i \tag{8}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_i$ - диагональная матрица собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_i$, упорядоченных по не убыванию,
$\boldsymbol{\Omega}_i$ - матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_i$, соответствующие собственным числам $\boldsymbol{\Lambda}_i$,
$\mathbf{R}_i = \boldsymbol{\Omega}_i^{-1}$- матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_i$.

Определение 3. *Фундаментальным решением оператора задачи* (7) *называется обобщенная матрица-функция,* $\mathbf{G}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}'\left(R^{N+1}\right)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} = \mathbf{I}\,\delta(t,\mathbf{x}) \tag{9}$$

$\mathbf{I}$ - *единичная диагональная матрица* $(M \times M)$.

Определение 4. *Сверткой* $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ *обобщенной матрицы-функции* $\mathbf{G} = G_{ij} \in \mathscr{S}'$ *и обобщенной вектор-функции* $\mathbf{f} = f_j \in \mathscr{S}'$ *будем называть обобщенную вектор-функцию* $\mathbf{u} = u_i \in \mathscr{S}'$, *такую что* $u_i = \sum\limits_{j=1}^{M} G_{i,j} * f_j$, *где* $G_{i,j} * f_j$ *- свертка* $G_{i,j}$ *и* f_j, *как обобщенных функций из* $\mathscr{S}'$.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}'$, *таково, что свертка* $\mathbf{G}*\mathbf{f}$ *существует в* $\mathscr{S}'$. *Тогда решение уравнения* (7) *существует в* $\mathscr{S}'$ *и дается формулой*

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} * \mathbf{f}. \tag{10}$$

Это решение единственно в классе тех функций из $\mathscr{S}'$, *для которых существует свертка с* $\tilde{\mathbf{G}}$, *где* $\tilde{\mathbf{G}}$ *- решение уравнения*

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial x_i} \mathbf{A}_i = \mathbf{I}\,\delta(t,\mathbf{x})$$

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования свертки, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial(\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial(\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i}\right) * \mathbf{f} = \delta(t,\mathbf{x}) * \mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Поэтому формула (10), действительно дает решение уравнения (7).

Докажем единственность решения уравнения (7) в классе тех обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, для которых свертка с $\tilde{\mathbf{G}}$ существует в $\mathscr{S}'$. Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

имеет только нулевое решение в этом классе. Но это действительно так, поскольку

$$\mathbf{u} = \mathbf{I}\,\delta * \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}}{\partial x_i}\mathbf{A}_i\right) * \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{G}} * \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\right) = \mathbf{0}.$$

□

Построим фундаментальное решение оператора задачи (7). Обозначим через $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ - преобразование Фурье $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ по пространственным переменным. Выполним преобразование Фурье уравнений (9) по пространственным переменным. Учитывая, что $F_{\mathbf{x}}\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_j}\right] = -i\xi_j F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j \mathbf{V} = \mathbf{I}\,\delta(t) \tag{11}$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\mathbf{V}(t,\ \boldsymbol{\xi}) = \theta(t) \exp\left(i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j t\right),$$

где $\theta(t)$ - функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant 0 \\ 1, & \text{если } t > 0; \end{cases}.$$

Следуя определению матричной экспоненты,

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N} \exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{j=1}^{N} (-i\xi_j)^{\alpha_j}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - мультииндекс, целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j, $|\boldsymbol{\alpha}| = (\alpha_1 + ... + \alpha_N)$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$ - матрицы размера $M \times M$, являющиеся полиномами матриц $\mathbf{A}_j$ степени не выше $|\boldsymbol{\alpha}|$.
Учтем (8), тогда

$$\exp(i\xi_j \mathbf{A}_j t) = \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t)\, \boldsymbol{\Omega}_j\,.$$

Следовательно

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{N} \xi_j \mathbf{A}_j t\right) = \prod_{j=1}^{N} \mathbf{R}_j \exp(i\xi_j \boldsymbol{\Lambda}_j t)\, \boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{j=1}^{N} (-i\xi_j)^{\alpha_j}\,.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \left(\prod_{j=1}^{N} \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)\, \boldsymbol{\Omega}_j + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}} D^{\boldsymbol{\alpha}} \delta(\mathbf{x})\right)$$

Здесь
$\delta(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t)$ - диагональные матрицы, в k- ой строке которых стоит обобщенная функция $\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right)$, λ_j^k - k- ое собственное число матрицы $\mathbf{A}_j$,
$D^{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$ - оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Рассмотрим сомножитель $\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t\right)\boldsymbol{\Omega}_j$. Обозначим через $\mathbf{D}^k$ - квадратную матрицу размера $M\times M$, все элементы которой равны 0, кроме k- го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t\right)\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}_j\mathbf{D}^k\boldsymbol{\Omega}_j\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right) = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{C}_j^k\delta\left(x_j - \lambda_j^k t\right).$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t\right)\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{k_1=1}^{M}\sum_{k_2=1}^{M}...\sum_{k_N=1}^{M}\mathbf{C}_1^{k_1}\mathbf{C}_2^{k_2}...\mathbf{C}_N^{k_N}\delta\left(x_1 - \lambda_1^{k_1}t\right)\delta\left(x_2 - \lambda_2^{k_2}t\right)...\delta\left(x_N - \lambda_N^{k_N}t\right)$$

Если определить:
$\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_N)$ - мультииндекс, целочисленный вектор с составляющими $k_j = 1 : M$,
$\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}_1^{k_1}\mathbf{C}_2^{k_2}...\mathbf{C}_N^{k_N}$ - многоиндексный массив матриц,
$\lambda^{\mathbf{k}} = \left(\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_2}, ..., \lambda_N^{k_N}\right)$ - многоиндексный массив векторов, то

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j\delta\left(\mathbf{I}x_j - \boldsymbol{\Lambda}_j t\right)\boldsymbol{\Omega}_j = \sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x} - \lambda^{\mathbf{k}}t\right),$$

тогда

$$\mathbf{G}\left(t,\mathbf{x}\right) = \theta\left(t\right)\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}^{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x} - \lambda^{\mathbf{k}}t\right) + \theta\left(t\right)\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2}t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}D^{\boldsymbol{\alpha}}\delta\left(\mathbf{x}\right). \tag{12}$$

Обратим внимание на следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Поскольку $\mathbf{C}^{k_j} = \mathbf{R}_j\mathbf{D}^{k_j}\boldsymbol{\Omega}_j$, то

$$\sum_{k_j=1}^{M}\mathbf{C}^{k_j} = \mathbf{R}_j\left(\sum_{k_j=1}^{M}\mathbf{D}^{k_j}\right)\boldsymbol{\Omega}_j = \mathbf{R}_j\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}_j = \mathbf{I}. \tag{13}$$

Докажем две Леммы, которые будут существенны в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $u(\mathbf{x})$ - локально интегрируемая функция в R^N. Тогда*

$$\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x})\cdot\delta(t) = \theta(t)u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Доказательство. Согласно определению свертки обобщенных функций [7], для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in S\left(R^{N+1}\right)$ и произвольной последовательности функций $\eta_k\left(\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,t,\,\tau\right) \in S\left(R^{2N+2}\right)$, сходящейся к 1 в R^{2N+2} (стр.133 монографии [7]), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&\left(\theta(t)\cdot\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x})\cdot\delta(t),\,\varphi\left(\mathbf{x},\,t\right)\right)\ldots\\
&\overset{def}{=}\lim_{k\to\infty}\left(\theta\left(t\right)\cdot\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{a}t\right)\cdot u\left(\mathbf{y}\right)\cdot\delta(\tau),\;\;\eta_k\left(\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,t,\,\tau\right)\,\varphi\left(\mathbf{x} + \mathbf{y},\,t + \tau\right)\right)\ldots\\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\theta\left(t\right)u\left(\mathbf{y}\right)\cdot\delta(\tau),\;\;\eta_k\left(\mathbf{a}t,\,\mathbf{y},\,t,\,\tau\right)\,\varphi\left(\mathbf{a}t + \mathbf{y},\,t + \tau\right)\right)\ldots\\
&= \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\Gamma:\tau=0}\theta\left(t\right)u\left(\mathbf{y}\right)\eta_k\left(\mathbf{a}t,\,\mathbf{y},\,t,\,0\right)\,\varphi\left(\mathbf{a}t + \mathbf{y},\,t\right)\,d\Gamma\ldots\\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta\left(t\right)u\left(\mathbf{y}\right)\,\varphi\left(\mathbf{a}t + \mathbf{y},\,t\right)\,d\mathbf{y}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta\left(t\right)u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)\,\varphi\left(\mathbf{x},\,t\right)\,d\mathbf{x}dt\ldots\\
&= \left(\theta\left(t\right)u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t),\,\varphi\left(\mathbf{x},\,t\right)\right).
\end{aligned}$$

Тем самым утверждение Леммы доказано. □

Замечание 1. *Пусть функция $u(\mathbf{x})$ такова, что $u(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} \notin G$, где G - некоторая область в R^N. Проведем через точку $(t > 0, \mathbf{x})$ прямую линию $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}$. Эта прямая пересекает гиперплоскость $t = 0$ в точке с координатами $\mathbf{x} - \mathbf{a}t$. Если эта точка пересечения лежит вне области G, то в точке $(t > 0, \mathbf{x})$ свертка $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x}) \cdot \delta(t) = 0$.*

Лемма 3. *Пусть $v(t, \mathbf{x})$ - локально интегрируемая функция в R^{N+1} и $v(t, \mathbf{x}) = 0$, при $t \leqslant 0$, тогда если $a_1 \neq 0$, то*

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = \frac{1}{|a_1|} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right),$$

если $a_1 = 0$, то

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = 0.$$

Доказательство. Если $a_1 \neq 0$, для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in S\left(R^{N+1}\right)$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \in S\left(R^{2N+2}\right)$, сходящейся к 1 в R^{2N+2}, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&(\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0},\ \varphi(\mathbf{x}, t)) \ \ldots \\
&\overset{def}{=} \lim_{k \to \infty} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) \cdot v(\tau, \mathbf{y}) \cdot \delta_{\Gamma: y_1 = 0},\ \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau)) \ldots \\
&= \lim_{k \to \infty} (\theta(t) v(\tau, \mathbf{y}) \cdot \delta_{\Gamma: y_1 = 0},\ \eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t + \tau)) \ldots \\
&= \int\limits_{\mathbf{\Gamma}: y_1 = 0} \theta(t') v(\tau', \mathbf{y}) \varphi\left(\mathbf{a}t' + \mathbf{y}, t' + \tau'\right) dy_2, \ldots, dy_N, dt' d\tau' \ldots \\
&= \frac{1}{|a_1|} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right) \varphi(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} dt \ldots \\
&= \frac{1}{|a_1|} \left(\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right),\ \varphi(\mathbf{x}, t)\right).
\end{aligned}$$

Тем самым утверждение Леммы для $a_1 \neq 0$, доказано.
Пусть $v(t, \mathbf{x}) = 0$, при $t \leqslant 0$.
Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $a_1 > 0$, то $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = 0$.
Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $x_1/t \leqslant a_1 < 0$, то $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = 0$.
В силу непрерывности свертки, для $t > 0$, $x_1 < 0$

$$\begin{aligned}
\theta(t) \cdot \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - a_2 t) \ldots \delta(x_N - a_N t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = \ldots \\
= \lim_{a_1 \to 0} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0}) = 0
\end{aligned}$$

Точно также, для $t > 0$, $x_1 > 0$

$$\begin{aligned}
\theta(t) \cdot \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - a_2 t) \ldots \delta(x_N - a_N t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = \ldots \\
= \lim_{a_1 \to 0} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0}) = 0
\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость утверждения Леммы для произвольных $\mathbf{a}$. □

Замечание 2. *Пусть функция $v(t, \mathbf{x})$ такова, что $v(t, \mathbf{x}) = 0$, если $(t, \mathbf{x}) \notin Q$, где Q - некоторая область в $T \times R^N$. Проведем через точку $(t > 0, \mathbf{x})$ прямую линию $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{a}$. Эта прямая пересекает гиперплоскость $x_1 = 0$ в точке с координатами $\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1}\mathbf{a}\right)$. Если $\frac{x_1}{a_1} < 0$ или точка пересечения лежит вне области Q, то в точке $(t > 0, \mathbf{x})$ свертка $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1 = 0} = 0$.*

4. Задача Римана.

Пусть $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ - решение задачи Римана (1), (4). Определим функции

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}(t,\mathbf{x}), \text{ если } t \geqslant 0, x_1 \leqslant 0 \\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } t,\mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{u}^+(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}(t,\mathbf{x}), \text{ если } t \geqslant 0, x_1 \geqslant 0 \\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } t,\mathbf{x} \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_0^-(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \text{ если } x_1 \leqslant 0 \\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \mathbf{x} \end{cases} \quad \mathbf{u}_0^+(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \text{ если } x_1 \geqslant 0 \\ \mathbf{0}, \text{ при остальных } \mathbf{x} \end{cases}.$$

$$\mathbf{v}^-(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\mathbf{u}(t, x_1=-0, x_2, ..., x_N) \quad \mathbf{v}^+(t,\mathbf{x}) = \theta(t)\mathbf{u}(t, x_1=+0, x_2, ..., x_N)$$

Покажем, что $\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x})$, рассматриваемая, как обобщенная функция из $\mathscr{S}'$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i^- \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0^- \cdot \delta_{t=0} - \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \cdot \delta_{x_1=0} \tag{14}$$

Действительно, учитывая непрерывность $\mathbf{u}^-$ при $x_1 \leqslant 0$, для всех $\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{S}$ имеем цепочку равенств:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i^- \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i}, \boldsymbol{\varphi}\right) = -\int \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_m}{\partial t}\mathbf{u}_m^- + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_m}{\partial x_i}\left(\mathbf{A}_i^- \mathbf{u}^-\right)_m\right) dt d\mathbf{x} \ldots$$
$$= \int \boldsymbol{\varphi}_m \left(\frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i^- \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i}\right)_m dt d\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma: t=0} \boldsymbol{\varphi}_m \mathbf{u}_m^- d\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma: x_1=0} \boldsymbol{\varphi}_m \left(\mathbf{A}_1^- \mathbf{u}^-\right)_m dt d\Gamma \ldots$$
$$= \int\limits_{\Gamma: t=0} \boldsymbol{\varphi}_m (\mathbf{u}_0^-)_m d\mathbf{x} - \int\limits_{\Gamma: x_1=0} \boldsymbol{\varphi}_m \left(\mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^-\right)_m dt d\Gamma$$

откуда и вытекает равенство (14).

Аналогично, $\mathbf{u}^+(t,\mathbf{x})$, рассматриваемая, как обобщенная функция из $\mathscr{S}'$, удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t} + \sum_{i}^{N} \mathbf{A}_i^+ \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0^+ \cdot \delta_{t=0} + \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \cdot \delta_{x_1=0}. \tag{15}$$

5. Задача Римана, одна пространственная переменная.

В случае одной пространственной переменной формула (12), задающая фундаментальное решение оператора задачи имеет вид

$$\mathbf{G}(t,x) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{R}\mathbf{D}^k \boldsymbol{\Omega} \delta(x - \lambda^k t)$$

Решение уравнения (14) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^-(t,x) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{R}^- \mathbf{D}^k \boldsymbol{\Omega}^- \delta(x - \lambda_-^k t) * \left(\mathbf{u}_0^- \cdot \delta_{t=0} - \mathbf{A}^- \mathbf{v}^- \cdot \delta_{x=0}\right). \tag{16}$$

Используя обозначение $\mathbf{C}_-^k = \mathbf{R}^- \mathbf{D}^k \boldsymbol{\Omega}^-$, и на основании Леммы 2 и Леммы 3, равенство (16) можем записать

$$\mathbf{u}^-(t,x) = \sum_{k:\, x \leqslant \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^-(x - \lambda_-^k t) + \sum_{k:\, x > \lambda_-^k t} \frac{1}{\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k \mathbf{A}^- \mathbf{v}^-(t - x/\lambda_-^k). \tag{17}$$

Поскольку $\mathbf{A}^- = \mathbf{R}^-\mathbf{\Lambda}^-\mathbf{\Omega}^-$, то $\dfrac{1}{\lambda_-^k}\mathbf{C}_-^k\mathbf{A}^- = \mathbf{C}_-^k$, и (17) можно переписать

$$\mathbf{u}^-(t,x) = \sum_{k:\, x\leqslant\lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k\mathbf{u}_0^-(x-\lambda_-^k t) + \sum_{k:\, x>\lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k\mathbf{v}^-(t-x/\lambda_-^k)\,. \tag{18}$$

Переходя в равенстве (18) к пределу $x\to -0$, получаем

$$\mathbf{v}^-(t) = \sum_{k:\, 0\leqslant\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^k t\right) + \sum_{k:\, 0>\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k\mathbf{v}^-(t)\,. \tag{19}$$

Учитывая (14),

$$\sum_{k:\, 0\leqslant\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k\mathbf{v}^-(t) = \sum_{k:\, 0\leqslant\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k\mathbf{u}_0^-\left(-\lambda_-^k t\right). \tag{20}$$

В пределе $t\to +0$, получаем

$$\sum_{k:\, 0\leqslant\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k\mathbf{v}^-(+0) = \sum_{k:\, 0\leqslant\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k\mathbf{u}_0^-(-0)\,. \tag{21}$$

Рассмотрим прямую линию γ_k: $x-\lambda_-^k t = 0$, $\lambda_-^k < 0$. Как следует из (18), решение задачи Римана при переходе через эту прямую может претерпевать разрыв

$$\left[\mathbf{u}^-(t,x)\right] = \mathbf{u}^-\left(t, x>\lambda_-^k t\right) - \mathbf{u}^-\left(t, x<\lambda_-^k t\right) = \mathbf{C}_-^k\left(\mathbf{v}^-(+0) - \mathbf{u}_0^-(-0)\right)\,. \tag{22}$$

По условиям постановки задачи $\mathbf{u}^-(t,x)$ непрерывно при $t\geqslant 0, x_1\leqslant 0$, следовательно

$$\mathbf{C}_-^k\mathbf{v}^-(+0) = \mathbf{C}_-^k\mathbf{u}_0^-(-0),\ k:\lambda_-^k < 0\,. \tag{23}$$

Учитывая (36) и (13), получаем, что

$$\mathbf{v}^-(+0) = \mathbf{u}_0^-(-0)\,. \tag{24}$$

Умножим уравнения (20) слева на матрицу $\mathbf{\Omega}^-$, получим систему уравнений

$$\mathbf{l}_k^-\mathbf{v}^-(t) = \mathbf{l}_k^-\mathbf{u}_0^-(-\lambda_-^k t),\ \mathrm{k}:\lambda_-^{\mathrm{k}}\geqslant 0. \tag{25}$$

Таких уравнений будет по количеству неотрицательных собственных чисел матрицы $\mathbf{A}^-$. Остальные уравнения (соответствующие отрицательным собственным числам матрицы $\mathbf{A}^-$, превращаются в тождества вида $0=0$.

Аналогично (16), решение уравнения (15) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^+(t,x) = \sum_{k=1}^{M}\mathbf{R}^+\mathbf{D}^k\mathbf{\Omega}^+\delta(x-\lambda_+^k t) * (\mathbf{u}_0^+\cdot\delta_{t=0} + \mathbf{A}^+\mathbf{v}^+\cdot\delta_{x=0})\,.$$

Введя обозначение $\mathbf{C}_+^k = \mathbf{R}^+\mathbf{D}^k\mathbf{\Omega}^+$, можем записать

$$\mathbf{u}^+(t,x) = \sum_{k:\, x\geqslant\lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k\mathbf{u}_0^+(x-\lambda_+^k t) + \sum_{k:\, x<\lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k\mathbf{v}^+(t-x/\lambda_+^k)\,. \tag{26}$$

Переходя в равенстве (26) к пределу $x\to +0$, получаем

$$\sum_{k:\, 0\geqslant\lambda_+^k} \mathbf{C}_+^k\mathbf{v}^+(t) = \sum_{k:\, 0\geqslant\lambda_+^k} \mathbf{C}_+^k\mathbf{u}_0^+(-\lambda_+^k t)\,. \tag{27}$$

В пределе $t \to +0$, получаем

$$\sum_{k:\,0 \geqslant \lambda_+^k} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+ (+0) = \sum_{k:\,0 \geqslant \lambda_+^k} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+ (+0) . \tag{28}$$

Аналогично (39)

$$\mathbf{v}^+(+0) = \mathbf{u}_0^+(+0) . \tag{29}$$

Также, аналогично (16), получаем

$$\mathbf{l}_k^+ \mathbf{v}^+(t) = \mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}_0^+(\lambda_+^k t),\ \mathrm{k} : \lambda_+^{\mathrm{k}} \leqslant 0. \tag{30}$$

Объединим равенства (36) и (30) и добавим к ним условия сопряжения (4), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять неизвестные $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$.

$$\begin{cases} \mathbf{l}_k^- \mathbf{v}^-(t) = \mathbf{l}_k^- \mathbf{u}_0^-(-\lambda_-^k t),\ \mathrm{k} : \lambda_-^{\mathrm{k}} \geqslant 0 \\ \mathbf{l}_k^+ \mathbf{v}^+(t) = \mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}_0^+(\lambda_+^k t),\ \mathrm{k} : \lambda_+^{\mathrm{k}} \leqslant 0. \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-(t),\, \mathbf{v}^+(t)\right) = \mathbf{0} \end{cases} . \tag{31}$$

Необходимым условием существования однозначного решения обобщенной задачи Римана в рассматриваемой постановке, является условие существования единственного решения системы линейных алгебраических уравнений уравнений (31).

Поскольку, следуя (39) и (29), $\mathbf{v}^-(+0) = \mathbf{u}_0^-(-0)$ и $\mathbf{v}^+(+0) = \mathbf{u}_0^+(+0)$, и $\mathbf{v}^-(+0)$, $\mathbf{v}^+(+0)$ удовлетворяют условиям сопряжения $\mathbf{L}\left(\mathbf{v}^-(+0),\, \mathbf{v}^+(+0)\right) = \mathbf{0}$, то и начальные условия должны удовлетворять условиям сопряжения

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u}_0^-(-0),\, \mathbf{u}_0^+(+0)\right) = \mathbf{0}. \tag{32}$$

Решим систему уравнений (31) и определим значение $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$ при $t > 0$ по обе стороны точки $x = 0$.
Формулы (18) и (26) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$ дают полное решение обобщенной задачи Римана для случая одной пространственной переменной.

В случае системы уравнений упругости (2), если в качестве условий сопряжения взяты «условия полного слипания» или «условия проскальзывания без трения», уравнения (31) и (32) дают необходимые и достаточные условия существования решения обобщенной задачи Римана в изложенной постановке.

6. Задача Римана, несколько пространственных переменных.

Алгоритм решения обобщенной задачи Римана в случае нескольких пространственных переменных в значительной степени аналогичен алгоритму, приведенному выше для случая одной пространственной переменной.

Рассмотрим уравнение (14). Фундаментальное решение оператора задачи задается формулой (12)

$$\mathbf{G}^-(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}} t\right) + \theta(t) \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \delta(\mathbf{x}) .$$

Решение уравнения (14) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^-(t, \mathbf{x}) = \mathbf{G}^-(t, \mathbf{x}) * \left(\mathbf{u}_0^- \delta_{t=0} - \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \delta_{x_1=0}\right) .$$

На основании утверждений Леммы 2 и Леммы 3, а также, учитывая, что $D^{\boldsymbol{\alpha}}\delta(\mathbf{x}) * \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x}) \cdot \delta(t) = D^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{u}_0^-(\mathbf{x})$, можем записать

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 \leqslant \lambda_-^{k_1} t} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}} t\right) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x}) \ldots$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 > \lambda_-^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \left(t - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}}\right). \quad (33)$$

Если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P, то в правой части формулы (33) останется только конечное число слагаемых

$$\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 \leqslant \lambda_-^{k_1} t} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{t}) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2}^{\mathrm{P}+1} \mathbf{t}^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- \mathbf{D}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_{\mathbf{0}}^-(\mathbf{x}) \ldots$$
$$+ \sum_{\mathbf{k}:\, x_1 > \lambda_-^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \left(t - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_-^{k_1}} \boldsymbol{\lambda}_-^{\mathbf{k}}\right). \quad (34)$$

Переходя в (33) к пределу $x_1 \to -0$, получаем

$$\mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} < 0} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_-^{k_N} t\right) \ldots$$
$$+ \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^-(0, x_2, ..., x_N).$$

Так, как $\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{C}^{k_2} ... \mathbf{C}^{k_N}$ и учитывая (13), получаем, что

$$\mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{k_1:\, \lambda_-^{k_1} < 0} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_-^{k_N} t\right) \ldots$$
$$+ \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^-(0, x_2, ..., x_N).$$

Поскольку $\mathbf{A}_1^- = \mathbf{R}_1^- \boldsymbol{\Lambda}_1^- \boldsymbol{\Omega}_1^-$, то $\dfrac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{A}_1^- = \mathbf{C}_-^{k_1}$, следовательно

$$\sum_{k_1:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_-^{k_N} t\right) \ldots$$
$$+ \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^-(0, x_2, ..., x_N). \quad (35)$$

В пределе $t \to +0$, получаем

$$\sum_{k_1:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^-(t = 0, x_2, ..., x_N) = \sum_{k_1:\, \lambda_-^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{u}_0^-(x_1 = 0, x_2, ..., x_N). \quad (36)$$

Рассмотрим гиперплоскость $x_1 - \lambda_-^{k_1} t = 0, \quad \lambda_-^{k_1} < 0$. Из (34) следует, что решение обобщенной задачи Римана при переходе через эту гиперплоскость может претерпевать разрыв

$$\left[\mathbf{u}^-(t,\mathbf{x})\right] = \sum_{k_1:\, x_1 = \lambda_-^{k_1} t} \mathbf{C}_-^{k_1} \left(\mathbf{v}^-(t = 0, x_2, ..., x_N) - \mathbf{u}_0^-(x_1 = 0, x_2, ..., x_N)\right), \quad \lambda_-^{k_1} < 0. \quad (37)$$

По условиям постановки задачи $\mathbf{u}^-(t,x)$ непрерывно при $t \geqslant 0, x_1 \leqslant 0$, следовательно

$$\sum_{k_1:\, x_1=\lambda_-^{k_1} t} \mathbf{C}_-^{k_1} \left(\mathbf{v}^-\left(t=0,x_2,...,x_N\right) - \mathbf{u}_0^-\left(x_1=0,x_2,...,x_N\right)\right) = 0, \quad \lambda_-^{k_1} < 0\,. \tag{38}$$

Учитывая (38) и (36), получаем, что

$$\mathbf{v}^-\left(t=0,x_2,...,x_N\right) = \mathbf{u}_0^-\left(x_1=0,x_2,...,x_N\right)\,. \tag{39}$$

Умножим равенство (35) на левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}_1^-$. Получим уравнения вида

$$\mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k},\, \lambda_-^{k_1}\geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2-\lambda_-^{k_2} t, ..., x_N-\lambda_-^{k_N} t\right)\ldots$$
$$+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right),\ \ k_1,\ \lambda_-^{k_1}\geqslant 0, \tag{40}$$

по количеству неотрицательных собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_1^-$.
Также получим уравнения вида

$$0 = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^- D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^-\left(0,x_2,...,x_N\right),\ \ k_1,\ \lambda_-^{k_1} < 0, \tag{41}$$

по количеству отрицательных собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_1^-$.

Из уравнений (41) следует, что для того, чтобы обобщенная задача Римана имела решение необходимо, чтобы начальные данные удовлетворяли условиям, задаваемым этими уравнениями.

Аналогично, решение уравнения (15) имеет вид

$$\mathbf{u}^+\left(t,\mathbf{x}\right) = \sum_{\mathbf{k}:\, x_1\geqslant\lambda_+^{k_1} t} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_+^{\mathbf{k}} t\right) + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^+ D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^+\left(\mathbf{x}\right)\ldots$$
$$+\sum_{\mathbf{k}:\, x_1<\lambda_+^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \left(t-\frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}, \mathbf{x}-\frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}\boldsymbol{\lambda}_+^{\mathbf{k}}\right). \tag{42}$$

Переходя в (42) к пределу $x_1 \to +0$, получаем

$$\sum_{k_1:\, \lambda_+^{k_1}\leqslant 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_+^{k_1}\leqslant 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2-\lambda_+^{k_2} t, ..., x_N-\lambda_+^{k_N} t\right)\ldots$$
$$+\sum_{|\alpha|\geqslant 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_{\alpha}^+ D^{\alpha} \mathbf{u}_0^+\left(0,x_2,...,x_N\right). \tag{43}$$

Умножим равенство (43) на левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}_1^+$. Получим уравнения вида

$$\mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}:\, \lambda_+^{k_1}\leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2-\lambda_+^{k_2} t, ..., x_N-\lambda_+^{k_N} t\right)\ldots$$
$$+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^+ D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^+\left(0,x_2,...,x_N\right) k_1, \lambda_+^{k_1}\leqslant 0\,. \tag{44}$$

по количеству неположительных собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_1^+$.

Также получим уравнения вида

$$0 = + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^{+} D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^{+} \left(0, x_2, ..., x_N\right) k_1, \lambda_{+}^{k_1} > 0\,. \tag{45}$$

по количеству положительных собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_1^{+}$.

Из уравнений (45) следует, что для того, чтобы обобщенная задача Римана имела решение необходимо, чтобы начальные данные также удовлетворяли условиям, задаваемым и этими уравнениями.

Объединим равенства (40), (44) и добавим к ним условия сопряжения (4), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^{-}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^{+}(t, \mathbf{x})$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{v}^{-} = & \sum_{\mathbf{k}\colon \lambda_{-}^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^{-} \left(-\lambda_{-}^{k_1} t, x_2 - \lambda_{-}^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_{-}^{k_N} t\right) \\ & + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-} D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^{-} \left(0, x_2, ..., x_N\right); \quad k_1, \lambda_{-}^{k_1} \geqslant 0 \\ \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{v}^{+} = & \sum_{\mathbf{k}\colon \lambda_{+}^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{C}_{+}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^{+} \left(-\lambda_{+}^{k_1} t, x_2 - \lambda_{+}^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_{+}^{k_N} t\right) \\ & + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|} \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{B}_{\boldsymbol{\alpha}}^{+} D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}_0^{+} \left(0, x_2, ..., x_N\right); \quad k_1, \lambda_{+}^{k_1} \leqslant 0 \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{-}, \mathbf{v}^{+}\right) = & \quad \mathbf{0} \end{aligned} \right. . \tag{46}$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (46) имела единственное решение.

Решим систему уравнений (46) и определим значение $\mathbf{v}^{-}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^{+}(t, \mathbf{x})$ при $t > 0$ по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$.
Формулы (34) и (42) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^{-}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^{+}(t, \mathbf{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая многих пространственных переменных.

Обратим внимание, что если начальные данные заданы линейными функциями по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ то система уравнений (46), дающая решение обобщенной задачи Римана, принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{v}^{-} = \sum\limits_{\mathbf{k}\colon \lambda_{-}^{k_1} \geqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^{-} \left(-\lambda_{-}^{k_1} t, x_2 - \lambda_{-}^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_{-}^{k_N} t\right); \quad k_1, \lambda_{-}^{k_1} \geqslant 0 \\ \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{v}^{+} = \sum\limits_{\mathbf{k}\colon \lambda_{+}^{k_1} \leqslant 0} \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{C}_{+}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^{+} \left(-\lambda_{+}^{k_1} t, x_2 - \lambda_{+}^{k_2} t, ..., x_N - \lambda_{+}^{k_N} t\right); \quad k_1, \lambda_{+}^{k_1} \leqslant 0 \\ \qquad\qquad\qquad \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{-}, \mathbf{v}^{+}\right) = \mathbf{0} \end{array} \right. .$$

При $t \to +0$ система уравнений (46) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{v}^{-} = \mathbf{l}_{k_1}^{-} \mathbf{u}_0^{-} \left(0, x_2, ..., x_N\right); k_1, \lambda_{-}^{k_1} \geqslant 0 \\ \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{v}^{+} = \mathbf{l}_{k_1}^{+} \mathbf{u}_0^{+} \left(0, x_2, ..., x_N\right); k_1, \lambda_{+}^{k_1} \leqslant 0 \\ \qquad \mathbf{L}\left(\mathbf{v}^{-}, \mathbf{v}^{+}\right) = \mathbf{0} \end{array} \right. . \tag{47}$$

Именно такое (47) приближенное решение задачи Римана используется при построении алгоритмов решения гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка [1], [2].

Замечание 3. *Если начальные данные таковы, что* $\mathbf{u}_0^+ = \mathbf{0}$, *то значения* $\mathbf{v}^-(t, \mathbf{x})$ *на границе* $x_1 = 0$, *полученные путем решения системы уравнений* (46) *или, соответственно, системы уравнений* (47) *дают, так называемые, «прозрачные граничные условия»*

Если рассматривается система уравнений упругой динамики, а в качестве условий сопряжения берутся «условия полного слипания» или « условия проскальзывания без трения», то система уравнений (46) или (47) имеет единственное решение и следовательно, обобщенная задача Римана также однозначно разрешима.

7. Вычислительный алгоритм

Построенное решение обобщенной задачи Римана позволяет сформулировать алгоритм численного решения начально краевых задач для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, обладающий рядом замечательных свойств. Продемонстрируем построение алгоритма на примере системы уравнений, описывающей распространение упругих волн для случая одной пространственой переменной, с кусочно-постоянными коэффициентами.

Следуя [2], эту систему уравнений можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{1\,1} - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{2\,2} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 = 0,\\
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{1\,2} - \mu\frac{\partial}{\partial x_1}v_2 = 0,\\
\rho\frac{\partial}{\partial t}v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{1\,1} = 0,\\
\rho\frac{\partial}{\partial t}v_2 - \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{1\,2} = 0,
\end{aligned} \tag{48}$$

где λ и μ коэффициенты Ламе, ρ масовая плотность среды, $\sigma_{1\,1}$, $\sigma_{2\,2}$, $\sigma_{1\,2}$ компоненты тензора напряжений, v_1, v_2 компоненты вектора скорости смещений. Введя вектор переменных $\mathbf{u} = (\sigma_{1\,1}, \sigma_{2\,2}, \sigma_{1\,2}, v_1, v_2)^T$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

эту систему уравнений можно записать в виде (1). Коэффициенты системы уравнений, задаваемые матрицей A, полагаем кусочно-постоянными. Всюду должны выполняться «условия полного слипания» (5). Задачу решаем на отрезке $[-1, 1]$ и полагаем, что на концах отрезка заданы «прозрачные граничные условия».

Разобъем отрезок $[-1, 1]$ узлами x_j, $j = 0 : J$, $x_0 = -1$, $x_J = 1$ на J равных интервалов G_i, которые будем нумеровать индексом $i = 1 : J$. На каждом интервале G_i определим, расположенные равномерно по интервалу узлы x_{il}, $i = 1 : J$, $l = 0 : L$, $x_{i0} = x_{i-1}$, $x_{iL} = x_i$.

Решение задачи в момент времени t на каждом интервале G_i будем аппроксимировать интерполяционными полиномами $P_i(t, x)$, построенными по значениям решения в узлах x_{il}.

Определим равномерную сетку по времени с шагом $\tau \leqslant \frac{2}{JL}$.

Значения решения в узлах x_{il} в момент времени $t + \tau$ вычисляем путем решения задачи Римана, в соответствии с приведенным выше алгоритмом (31).

Обратим внимание, что переход на следующий временной слой осуществляется в 2 этапа.

На первом этапе на новом временном слое решается задача Римана для всех узлов x_{il}. Для каждого такого узла решение задачи Римана зависит от значений начальных данных в конечном (не более $2(L+1)$) количестве узлов. Следовательно, первый этап может быть реализован для каждого узла x_{il} независимо и выполнен параллельно.
На втором этапе на новом временном слое для каждого интервала G_i. следует по определенным на предыдущем этапе значениям решения в узлах x_{il}, построить интерполяционный полином $P_i(t, x)$. Коэффициенты этого полинома зависят от значений решения в узлах только этого интервала G_i и следовательно, могут быть вычислены для каждого интервала независимо и параллельно.

8. Заключение

В работе построено решение задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных. Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных в момент времени $t > 0$ по обе стороны поверхности разрыва начальных данных к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Министерства образования и науки РФ №3.522.2014/К в лаборатории флюидодинамики и сейсмоакустики МФТИ.

Литература

1. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва: Физматлит, 2001.

2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

3. *Скалько Ю.И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование — 2014 — Т. 6, №3 — С. 347-356.

4. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes - I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. // Geophys. J. Int. — 2006 — V. 166 — P. 855-877.

5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.

6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1981.

References

1. *Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y.* Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems. — Moscow: Physmatlit, 2001.

2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

3. *Skalko Y.I.* The correct conditions on the boundary separating subdomains // Computer studies and modeling — 2014 — V. 6, №3 — P. 347-356.

4. *Martin Kaser, Michael Dumbser* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes - I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. // Geophys. J. Int. — 2006 — V. 166 — P. 855-877.

5. *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Spaces of fundamental and generalized functions. — Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1958.

6. *Gelfand I.M., Shilov G.E.* Generalized functions and operations on them. — Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1959.

7. *Vladimirov V.S.* Equations of mathematical physics. — Moscow: Science, 1981.

Поступила в редакцию дд.мм.гггг.

Сведения об авторах статей
(на момент подачи статьи)

Задача Римана о распаде разрыва, в случае многих пространственных переменных
Скалько Юрий Иванович (кандидат физико-математических наук, лаборатория флюидодинамики и сейсмоакустики, старший научный сотрудник) skalko@mail.mipt.ru

Ссылки на опубликованные статьи
(в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008)

Скалько Ю.И. Задача Римана о распаде разрыва, в случае многих пространственных переменных // Труды МФТИ. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 1–16.

Skalko Y.I. The Riemann problem on decay of a discontinuity , in the case of several spatial variables // Proceedings of MIPT. — 2016. — V. 8, N 1. — P. 1–16.