

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра информатики и вычислительной математики

На правах рукописи

УДК 519.63

Мазепов Виталий Александрович

**Вычислительные алгоритмы, основанные на решении обобщенной
задачи Римана**

Выпускная квалификационная работа

(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Заведующий кафедрой _____ Петров И.Б.

Научный руководитель _____ Скалько Ю.И.

Студент _____ Мазепов В.А.

г. Москва

2018

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	3
3. Фундаментальное решение	5
4. Задача Римана	9
4.1. Задача Римана, одна пространственная переменная.	13
4.2. Задача Римана, несколько пространственных переменных.	15
5. Вычислительный алгоритм	20
5.1. Верификация алгоритма	24
5.2. Вычислительный эксперимент	27
6. Заключение	34

1. Введение

Многие эволюционные процессы в физике, биологии, экономике и других прикладных областях моделируются гиперболическими системами линейных дифференциальных уравнений первого порядка. При построении численных алгоритмов решения краевых задач для таких систем уравнений, с использованием аппроксимации решения кусочно-гладкими функциями, ключевым моментом является решение задачи Римана о распаде разрыва. В случае одной пространственной переменной различными авторами [1], [2], [3] предложен ряд методов решения задачи Римана. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предположении, что вблизи разрыва решение представляет собой плоскую волну, движущуюся вдоль нормали к поверхности разрыва [1], [2], [4]. Понятно, что такой подход, далеко не во всех случаях является обоснованным.

Во всех известных автору случаях рассматриваются такие постановки задачи о распаде разрыва, которые допускают разрывные решения и эти решения не являются "физичными".

В работе будет приведено решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных в предположении, что начальные данные по обе стороны поверхности разрыва заданы произвольными функциями.

2. Постановка задачи

Задачу Римана о распаде разрыва будем рассматривать в следующей постановке. Необходимо найти решение задачи Коши для систем линейных диф-

ференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in R^N \quad (1)$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad (2)$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. Решение должно быть всюду непрерывно, кроме гиперплоскости Γ . При этом должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости Γ , т.е. $\mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N)$ и $\mathbf{u}(t, x_1 = +0, x_2, \dots, x_N)$:

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N), \mathbf{u}(t, x_1 = +0, x_2, \dots, x_N)) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Кроме этого, полагаем, что начальные данные также удовлетворяют условиям сопряжения, т.е.

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_0(x_1 = -0, x_2, \dots, x_N), \mathbf{u}_0(x_1 = +0, x_2, \dots, x_N)) = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Сформулированную постановку будем, следуя [1], называть обобщенной задачей Римана о распаде разрыва. Обобщенная задача Римана отличается от классической задачи Римана тем, что в классической задаче начальные данные предполагаются константами по обе стороны от гиперплоскости, в обобщенной задаче Римана начальные данные по обе стороны от гиперплоскости Γ могут быть произвольными функциями, а также на всех поверхностях разрыва должны соблюдаться заданные условия сопряжения.

3. Фундаментальное решение

В дальнейшем изложении будут использоваться понятия и утверждения теории обобщенных функций, изложение которой можно найти, например в [5], [6] или [7].

Определим пространство основных вектор-функций $\mathcal{S}(R^N)$. Элементами этого пространства будут M -мерные вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, компоненты которых $\varphi_1(\mathbf{y}), \dots, \varphi_M(\mathbf{y})$ принадлежат пространству $\mathcal{S}(R^N)$, которое состоит из функций класса $C^\infty(R^N)$, убывающих при $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|\mathbf{y}|^{-1}$.

Определение 1. *Обобщенными вектор-функциями $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_M) \in \mathcal{S}'(R^N)$ будем называть линейные непрерывные функционалы на векторном основном пространстве $\mathcal{S}(R^N)$. При этом функционал \mathbf{f} действует на основную вектор-функцию $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ по формуле $(\mathbf{f}, \varphi) = (f_1, \varphi_1) + \dots + (f_M, \varphi_M)$.*

Определение 2. *Обобщенным решением для системы уравнений*

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}'(R^{N+1})$, удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т.е. для произвольной основной функции $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}(R^{N+1})$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \varphi \right) + \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \varphi \right) = (\mathbf{f}, \varphi)$$

\mathbf{A}_i - матрицы коэффициентов системы уравнений (5), размера $(M \times M)$.

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц \mathbf{A}_i имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{\Omega}_i \quad (6)$$

Λ_i - диагональная матрица собственных чисел матрицы \mathbf{A}_i , упорядоченных по не убыванию,

Ω_i - матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы \mathbf{A}_i , соответствующие собственным числам Λ_i ,

$\mathbf{R}_i = \Omega_i^{-1}$ - матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы \mathbf{A}_i .

Определение 3. Фундаментальным решением оператора задачи (5) называется обобщенная матрица-функция, $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}'(R^{N+1})$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} = \mathbf{I} \delta(t, \mathbf{x}) \quad (7)$$

\mathbf{I} - единичная диагональная матрица $(M \times M)$.

Определение 4. Сверткой $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ обобщенной матрицы-функции $\mathbf{G} = G_{ij} \in \mathcal{S}'$ и обобщенной вектор-функции $\mathbf{f} = f_j \in \mathcal{S}'$ будем называть обобщенную вектор-функцию $\mathbf{u} = u_i \in \mathcal{S}'$, такую что $u_i = \sum_{j=1}^M G_{i,j} * f_j$, где $G_{i,j} * f_j$ - свертка $G_{i,j}$ и f_j , как обобщенных функций из \mathcal{S}' .

Приведем лемму из [8]:

Лемма 1. Пусть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}'$, таково, что свертка $\mathbf{G} * \mathbf{f}$ существует в \mathcal{S}' . Тогда решение уравнения (5) существует в \mathcal{S}' и дается формулой

$$\mathbf{u} = \mathbf{G} * \mathbf{f}. \quad (8)$$

Это решение единственно в классе тех функций из \mathcal{S}' , для которых существует свертка с \mathbf{G} .

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования свертки, получим

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial (\mathbf{G} * \mathbf{f})}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} \right) * \mathbf{f} = \delta(t, \mathbf{x}) * \mathbf{f} = \mathbf{f}.$$

Поэтому формула (8), действительно дает решение уравнения (5). Докажем единственность решения уравнения (5) в классе тех обобщенных функций из \mathcal{S}' , для которых свертка с \mathbf{G} существует в \mathcal{S}' . Для этого достаточно установить, что соответствующее однородное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}$$

имеет только нулевое решение в этом классе. Но это действительно так, поскольку, в силу (8) $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, если $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. \square

Построим фундаментальное решение оператора задачи (5). Обозначим через $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ - преобразование Фурье $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$ по пространственным переменным. Выполним преобразование Фурье уравнений (7) по пространственным переменным. Учитывая, что $F_{\mathbf{x}}\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_j}\right] = -i\xi_j F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi})$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j \mathbf{V} = \mathbf{I} \delta(t) \quad (9)$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}) = \theta(t) \exp\left(i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j t\right),$$

где $\theta(t)$ - функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0; \\ 0, & \text{если } t \leq 0 \end{cases}.$$

Следуя определению матричной экспоненты,

$$\exp \left(i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j t \right) = \prod_{j=1}^N \exp (i \xi_j \mathbf{A}_j t) + \sum_{|\alpha| \geq 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha \prod_{j=1}^N (-i \xi_j)^{\alpha_j}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ - целочисленный вектор с неотрицательными составляющими α_j (мультииндекс), $|\alpha| = (\alpha_1 + \dots + \alpha_N)$, \mathbf{B}_α - матрицы размера $M \times M$, являющиеся полиномами матриц \mathbf{A}_j степени $|\alpha|$.

Учтем (6), тогда

$$\exp (i \xi_j \mathbf{A}_j t) = \mathbf{R}_j \exp (i \xi_j \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j .$$

Следовательно

$$\exp \left(i \sum_{j=1}^N \xi_j \mathbf{A}_j t \right) = \prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \exp (i \xi_j \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j + \sum_{|\alpha| \geq 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha \prod_{j=1}^N (-i \xi_j)^{\alpha_j} .$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \left(\prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j + \sum_{|\alpha| \geq 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha D^\alpha \delta(\mathbf{x}) \right)$$

Здесь

$\delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t)$ - диагональные матрицы, в k -ой строке которых стоит обобщенная функция $\delta(x_j - \lambda_j^k t)$, λ_j^k - k -ое собственное число матрицы \mathbf{A}_j ,

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ - оператор дифференцирования по пространственным переменным.

Рассмотрим сомножитель $\mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j$. Обозначим через \mathbf{D}^k - квадратную матрицу размера $M \times M$, все элементы которой равны 0, кроме k -го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j = \sum_{k=1}^M \mathbf{R}_j \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}_j \delta(x_j - \lambda_j^k t) = \sum_{k=1}^M \mathbf{C}_j^k \delta(x_j - \lambda_j^k t) .$$

Следовательно,

$$\prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j = \sum_{k_1=1}^M \sum_{k_2=1}^M \dots \sum_{k_N=1}^M \mathbf{C}_1^{k_1} \mathbf{C}_2^{k_2} \dots \mathbf{C}_N^{k_N} \delta(x_1 - \lambda_1^{k_1} t) \delta(x_2 - \lambda_2^{k_2} t) \dots \delta(x_N - \lambda_N^{k_N} t)$$

Если определить:

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ - мультииндекс, целочисленный вектор с составляющими

$k_j = 1 : M$,

$\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}_1^{k_1} \mathbf{C}_2^{k_2} \dots \mathbf{C}_N^{k_N}$ - многоиндексный массив матриц,

$\lambda^{\mathbf{k}} = (\lambda_1^{k_1}, \lambda_2^{k_2}, \dots, \lambda_N^{k_N})$ - многоиндексный массив векторов, то

$$\prod_{j=1}^N \mathbf{R}_j \delta(\mathbf{I}x_j - \mathbf{\Lambda}_j t) \mathbf{\Omega}_j = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\mathbf{k}} t),$$

тогда

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \theta(t) \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\mathbf{k}} t) + \theta(t) \sum_{|\alpha| \geq 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_{\alpha} D^{\alpha} \delta(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Обратим внимание на следующий факт, который будет использован в дальнейшем. Поскольку $\mathbf{C}^{k_j} = \mathbf{R}_j \mathbf{D}^{k_j} \mathbf{\Omega}_j$, то

$$\sum_{k_j=1}^M \mathbf{C}^{k_j} = \mathbf{R}_j \left(\sum_{k_j=1}^M \mathbf{D}^{k_j} \right) \mathbf{\Omega}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{I} \mathbf{\Omega}_j = \mathbf{I}. \quad (11)$$

4. Задача Римана

В данном разделе приведены основные результаты из [8], которые в дальнейшем будут использоваться при построении вычислительного алгоритма для нахождения приближенного решения задачи Римана.

Пусть $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ - решение задачи Римана (1), (2), (3). Определим функции

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^-(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), & \text{если } t \geq 0, x_1 \leq 0 \\ \mathbf{0}, & \text{при остальных } t, \mathbf{x} \end{cases} & \mathbf{u}^+(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), & \text{если } t \geq 0, x_1 \geq 0 \\ \mathbf{0}, & \text{при остальных } t, \mathbf{x} \end{cases} \\ \mathbf{u}_0^-(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{если } x_1 \leq 0 \\ \mathbf{0}, & \text{при остальных } \mathbf{x} \end{cases} & \mathbf{u}_0^+(t, \mathbf{x}) &= \begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \text{если } x_1 \geq 0 \\ \mathbf{0}, & \text{при остальных } \mathbf{x} \end{cases} . \\ \mathbf{v}^-(t, \mathbf{x}) &= \theta(t)\mathbf{u}(t, x_1 = -0, x_2, \dots, x_N) & \mathbf{v}^+(t, \mathbf{x}) &= \theta(t)\mathbf{u}(t, x_1 = +0, x_2, \dots, x_N)\end{aligned}$$

Покажем, что $\mathbf{u}^-(t, \mathbf{x})$, рассматриваемая, как обобщенная функция из \mathcal{S}' , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^- \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0^- \cdot \delta_{t=0} - \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- \cdot \delta_{x_1=0} \quad (12)$$

Действительно, при всех $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}& \left(\frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^- \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i}, \varphi \right) = - \int \left(\left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial t}; \mathbf{u}^- \right) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \varphi^T}{\partial x_i}; \mathbf{A}_i^- \mathbf{u}^- \right) \right) dt d\mathbf{x} \dots \\&= \int \left(\varphi^T; \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^- \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_i} \right) dt d\mathbf{x} + \int (\varphi^T(0, \mathbf{x}); \mathbf{u}^-(0, \mathbf{x})) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\varphi^T; \mathbf{A}_1^- \mathbf{u}^-) dt d\Gamma \\&= \int (\varphi^T(0, \mathbf{x}); \mathbf{u}_0^-(\mathbf{x})) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} (\varphi^T; \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^-) dt d\Gamma\end{aligned}$$

откуда и вытекает равенство (12).

Аналогично, $\mathbf{u}^+(t, \mathbf{x})$, рассматриваемая, как обобщенная функция из \mathcal{S}' , удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial t} + \sum_i^N \mathbf{A}_i^+ \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_i} = \mathbf{u}_0^+ \cdot \delta_{t=0} + \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \cdot \delta_{x_1=0} \quad (13)$$

Приведем две Леммы из [8], которые будут существенны в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть $u(\mathbf{x})$ - локально интегрируемая функция в R^N . Тогда

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x}) \cdot \delta_{t=0} = \theta(t)u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Доказательство. Согласно определению свертки обобщенных функций [7], для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}(R^{N+1})$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \in \mathcal{S}(R^{2N+2})$, сходящейся к 1 в R^{2N+2} (стр.133 монографии [7]), справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * u(\mathbf{x}) \cdot \delta_{t=0}, \varphi(\mathbf{x}, t)) \dots \\ & \stackrel{def}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) \cdot u(\mathbf{y}) \cdot \delta_{\tau=0}, \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau)) \dots \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta(t) u(\mathbf{y}) \cdot \delta_{\tau=0}, \eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t + \tau)) \dots \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma: \tau=0} \theta(t) u(\mathbf{y}) \eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, 0) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t) d\Gamma \dots \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) u(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t) dy dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) \varphi(\mathbf{x}, t) dx dt \dots \\ & = (\theta(t) u(\mathbf{x} - \mathbf{a}t), \varphi(\mathbf{x}, t)). \end{aligned}$$

Тем самым утверждение Леммы доказано. \square

Лемма 3. Пусть $v(t, \mathbf{x})$ - локально интегрируемая функция в R^{N+1} и $v(t, \mathbf{x}) = 0$, при $t \leq 0$, тогда если $a_1 \neq 0$, то

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0} = \frac{1}{|a_1|} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1} \mathbf{a}\right),$$

если $a_1 = 0$, то

$$\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0} = 0.$$

Доказательство. Если $a_1 \neq 0$, для произвольной основной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{S}(R^{N+1})$ и произвольной последовательности функций $\eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \in \mathcal{S}(R^{2N+2})$, схо-

дящейся к 1 в R^{2N+2} , справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
& (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0}, \varphi(\mathbf{x}, t)) \dots \\
& \stackrel{def}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) \cdot v(\tau, \mathbf{y}) \cdot \delta_{\Gamma: y_1=0}, \eta_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + \tau)) \dots \\
& = \lim_{k \rightarrow \infty} (\theta(t) v(\tau, \mathbf{y}) \cdot \delta_{\Gamma: y_1=0}, \eta_k(\mathbf{a}t, \mathbf{y}, t, \tau) \varphi(\mathbf{a}t + \mathbf{y}, t + \tau)) \dots \\
& = \int_{\Gamma: y_1=0} \theta(t') v(\tau', \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{a}t' + \mathbf{y}, t' + \tau') dy_2, \dots, dy_N, dt' d\tau' \dots \\
& = \frac{1}{|a_1|} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1} \mathbf{a}\right) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \dots \\
& = \frac{1}{|a_1|} \left(\theta\left(\frac{x_1}{a_1}\right) v\left(t - \frac{x_1}{a_1}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{a_1} \mathbf{a}\right), \varphi(\mathbf{x}, t) \right).
\end{aligned}$$

Тем самым утверждение Леммы для $a_1 \neq 0$, доказано.

Пусть $v(t, \mathbf{x}) = 0$, при $t \leq 0$.

Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $a_1 > 0$, то $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0} = 0$.

Если $t > 0$, $x_1 < 0$ и $x_1/t \leq a_1 < 0$, то $\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0} = 0$.

В силу непрерывности свертки, для $t > 0$, $x_1 < 0$

$$\begin{aligned}
& \theta(t) \cdot \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - a_2 t) \dots \delta(x_N - a_N t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0} = \dots \\
& = \lim_{a_1 \rightarrow 0} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0}) = 0
\end{aligned}$$

Точно также, для $t > 0$, $x_1 > 0$

$$\begin{aligned}
& \theta(t) \cdot \delta(x_1) \cdot \delta(x_2 - a_2 t) \dots \delta(x_N - a_N t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0} = \dots \\
& = \lim_{a_1 \rightarrow 0} (\theta(t) \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}t) * v(t, \mathbf{x}) \cdot \delta_{\Gamma: x_1=0}) = 0
\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость утверждения Леммы для произвольных \mathbf{a} . \square

4.1. Задача Римана, одна пространственная переменная.

В случае одной пространственной переменной формула (10), задающая фундаментальное решение оператора задачи, принимает вид

$$\mathbf{G}(t, x) = \sum_{k=1}^M \mathbf{R} \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega} \delta(x - \lambda^k t)$$

Решение уравнения (12) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^-(t, x) = \sum_{k=1}^M \mathbf{R}^- \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^- \delta(x - \lambda_-^k t) * (\mathbf{u}_0^- \cdot \delta_{t=0} - \mathbf{A}^- \mathbf{v}^- \cdot \delta_{x=0}). \quad (14)$$

Используя обозначение $\mathbf{C}_-^k = \mathbf{R}^- \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^-$, и на основании Леммы 2 и Леммы 3, (14) можем записать

$$\mathbf{u}^-(t, x) = \sum_{k: x \leq \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- (x - \lambda_-^k t) + \sum_{k: x > \lambda_-^k t} \frac{1}{\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k \mathbf{A}^- \mathbf{v}^- (t - x/\lambda_-^k). \quad (15)$$

Поскольку $\mathbf{A}^- = \mathbf{R}^- \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{\Omega}^-$, то $\frac{1}{\lambda_-^k} \mathbf{C}_-^k \mathbf{A}^- = \mathbf{C}_-^k$, и (15) можно переписать

$$\mathbf{u}^-(t, x) = \sum_{k: x \leq \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- (x - \lambda_-^k t) + \sum_{k: x > \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{v}^- (t - x/\lambda_-^k). \quad (16)$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow -0$, получаем

$$\sum_{k: x \leq \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{v}^- (t) = \sum_{k: x \leq \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^- (x - \lambda_-^k t). \quad (17)$$

Пусть у матрицы \mathbf{A}^- , соответственно, N^- - отрицательных, Z^- - нулевых и P^- - положительных собственных чисел. Умножим равенство (16) на левые собственные вектора-строки матрицы \mathbf{A}^- , соответствующие неотрицательным собственным числам. Получим $Z^- + P^-$ равенств

$$\mathbf{l}_k^- \mathbf{u}^-(t, x) = \mathbf{l}_k^- \mathbf{u}_0^- (x - \lambda_-^k t); k, \lambda_-^k \geq 0 \quad (18)$$

\mathbf{l}_k^- - k -ая строка матрицы $\mathbf{\Omega}^-$. Равенства (18) отражают факт сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик, соответствующих собственным числам $\lambda_-^k \geq 0$.

Переходя в равенстве (18) к пределу $x \rightarrow -0$, получаем

$$\mathbf{l}_k^- \mathbf{v}^-(t) = \mathbf{l}_k^- \mathbf{u}_0^-(-\lambda_-^k t); k, \lambda_-^k \geq 0. \quad (19)$$

Аналогично (14), решение уравнения (13) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^+(t, x) = \sum_{k=1}^M \mathbf{R}^+ \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^+ \delta(x - \lambda_+^k t) * (\mathbf{u}_0^+ \cdot \delta_{t=0} + \mathbf{A}^+ \mathbf{v}^+ \cdot \delta_{x=0}).$$

Введя обозначение $\mathbf{C}_+^k = \mathbf{R}^+ \mathbf{D}^k \mathbf{\Omega}^+$, можем записать

$$\mathbf{u}^+(t, x) = \sum_{k: x \geq \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+(x - \lambda_+^k t) + \sum_{k: x < \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+(t - x/\lambda_+^k). \quad (20)$$

И переходя в этом равенстве к пределу при $x \rightarrow +0$, получаем

$$\sum_{k: x \geq \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+(t) = \sum_{k: x \geq \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+(x - \lambda_+^k t). \quad (21)$$

Пусть у матрицы \mathbf{A}^+ , соответственно, N^+ - отрицательных, Z^+ - нулевых и P^+ - положительных собственных чисел. Умножим равенство (20) на левые собственные вектора-строки матрицы \mathbf{A}^+ , соответствующие неположительным собственным числам. Получим $N^+ + Z^+$ равенств

$$\mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}^+(t, x) = \mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}_0^+(x - \lambda_+^k t); k, \lambda_+^k \leq 0 \quad (22)$$

\mathbf{l}_k^+ - k -ая строка матрицы $\mathbf{\Omega}^+$. Равенства (20) отражают факт сохранения инвариантов Римана вдоль характеристик, соответствующих собственным числам $\lambda_+^k \leq 0$.

Переходя в равенстве (20) к пределу $x \rightarrow +0$, получаем равенство

$$\mathbf{l}_k^+ \mathbf{v}^+(t) = \mathbf{l}_k^+ \mathbf{u}_0^+(-\lambda_+^k t); k, \lambda_+^k \leq 0. \quad (23)$$

Объединим равенства (17), (21) и добавим к ним условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять значения решения задачи обобщенной Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$.

$$\begin{cases} \sum_{k: x \leq \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{v}^-(t) = \sum_{k: x \leq \lambda_-^k t} \mathbf{C}_-^k \mathbf{u}_0^-(x - \lambda_-^k t) \\ \sum_{k: x \geq \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{v}^+(t) = \sum_{k: x \geq \lambda_+^k t} \mathbf{C}_+^k \mathbf{u}_0^+(x - \lambda_+^k t) \\ \mathbf{L}(\mathbf{v}^-(t), \mathbf{v}^+(t)) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (24)$$

Так, как начальные данные удовлетворяют условиям сопряжения на границе Γ , то необходимо, чтобы количество линейно независимых уравнений системы (24) было равно количеству неизвестных. Выделим линейно независимые уравнения системы (24). Решение полученной совместной СЛАУ и будет приближенным решением обобщенной задачи Римана.

Решим систему уравнений (24) и определим значение $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$ при $t > 0$ по обе стороны точки $x = 0$.

Формулы (16) и (20) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^-(t)$ и $\mathbf{v}^+(t)$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая одной пространственной переменной.

4.2. Задача Римана, несколько пространственных переменных.

Построим решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая произвольного количества пространственных переменных. Алгоритм решения в значительной степени аналогичен алгоритму, приведенному выше для

случая одной пространственной переменной.

Рассмотрим первое уравнение системы (12). Фундаментальное решение оператора задачи задается формулой (10) и представимо в виде

$$\mathbf{G}^{-}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{x} - \lambda_{-}^{\mathbf{k}} t) + \sum_{|\alpha| \geq 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_{\alpha}^{-} D^{\alpha} \delta(\mathbf{x}).$$

Решение уравнения (12) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^{-}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-}(t, \mathbf{x}) * (\mathbf{u}_0^{-} \delta_{t=0} - \mathbf{A}_1^{-} \mathbf{v}^{-} \delta_{x_1=0}).$$

На основании утверждений Леммы 2 и Леммы 3, а также, учитывая, что $D^{\alpha} \delta(\mathbf{x}) * \mathbf{u}_0^{-}(\mathbf{x}) \cdot \delta(t) = D^{\alpha} \mathbf{u}_0^{-}(\mathbf{x})$, можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{-}(t, \mathbf{x}) = & \sum_{\mathbf{k}: x_1 \leq \lambda_{-}^{k_1} t} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^{-}(\mathbf{x} - \lambda_{-}^{\mathbf{k}} t) + \sum_{|\alpha| \geq 2} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_{\alpha}^{-} D^{\alpha} \mathbf{u}_0^{-}(\mathbf{x}) \dots \\ & + \sum_{\mathbf{k}: x_1 > \lambda_{-}^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_{-}^{k_1}} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^{-} \mathbf{v}^{-} \left(t - \frac{x_1}{\lambda_{-}^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_{-}^{k_1}} \lambda_{-}^{\mathbf{k}} \right). \quad (25) \end{aligned}$$

Если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P , то в правой части формулы (25) останется только конечное число слагаемых

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{-}(t, \mathbf{x}) = & \sum_{\mathbf{k}: x_1 \leq \lambda_{-}^{k_1} t} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^{-}(\mathbf{x} - \lambda_{-}^{\mathbf{k}} t) + \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_{\alpha}^{-} D^{\alpha} \mathbf{u}_0^{-}(\mathbf{x}) \dots \\ & + \sum_{\mathbf{k}: x_1 > \lambda_{-}^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_{-}^{k_1}} \mathbf{C}_{-}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^{-} \mathbf{v}^{-} \left(t - \frac{x_1}{\lambda_{-}^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_{-}^{k_1}} \lambda_{-}^{\mathbf{k}} \right). \quad (26) \end{aligned}$$

Переходя в (26) к пределу $x_1 \rightarrow -0$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} < 0} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- &= \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \dots \\ &+ \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- (0, x_2, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Так, как $\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = \mathbf{C}^{k_1} \mathbf{C}^{k_2} \dots \mathbf{C}^{k_N}$ и учитывая (11), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\mathbf{v}^- - \sum_{k_1: \lambda_-^{k_1} < 0} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{A}_1^- \mathbf{v}^- &= \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \dots \\ &+ \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- (0, x_2, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{A}_1^- = \mathbf{R}_1^- \mathbf{\Lambda}_1^- \mathbf{\Omega}_1^-$, то $\frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{A}_1^- = \mathbf{C}_-^{k_1}$, следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{k_1: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^- &= \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \dots \\ &+ \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- (0, x_2, \dots, x_N). \quad (27) \end{aligned}$$

Пусть у матрицы \mathbf{A}_1^- , соответственно, N_1^- - отрицательных, Z_1^- - нулевых и P_1^- - положительных собственных чисел. Умножим равенство (27) на левые собственные вектора-строки матрицы \mathbf{A}_1^- , соответствующие неотрицательным собственным числам. Получим $Z_1^- + P_1^-$ равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{v}^- &= \sum_{\mathbf{k}, \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \dots \\ &+ \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- (0, x_2, \dots, x_N), \quad k_1, \lambda_-^{k_1} \geq 0. \quad (28) \end{aligned}$$

Аналогично, решение первого уравнения системы (13) можно выписать в виде свертки

$$\mathbf{u}^+(t, \mathbf{x}) = \mathbf{G}^+(t, \mathbf{x}) * (\mathbf{u}_0^+ \delta_{t=0} + \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \delta_{x_1=0}) .$$

На основании утверждений Леммы 2 и Леммы 3, если начальные данные по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ заданы полиномами степени P , можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+(t, \mathbf{x}) = & \sum_{\mathbf{k}: x_1 \geq \lambda_+^{k_1} t} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ (\mathbf{x} - \lambda_+^{\mathbf{k}} t) + \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (\mathbf{x}) \dots \\ & + \sum_{\mathbf{k}: x_1 < \lambda_+^{k_1} t} \frac{1}{\lambda_-^{k_1}} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{A}_1^+ \mathbf{v}^+ \left(t - \frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}}, \mathbf{x} - \frac{x_1}{\lambda_+^{k_1}} \lambda_+^{\mathbf{k}} \right) . \end{aligned} \quad (29)$$

Переходя в (29) к пределу $x_1 \rightarrow +0$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k_1: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = & \sum_{\mathbf{k}: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_+^{k_N} t \right) \dots \\ & + \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, \dots, x_N) . \end{aligned} \quad (30)$$

Пусть у матрицы \mathbf{A}_1^+ , соответственно, N_1^+ - отрицательных, Z_1^+ - нулевых и P_1^+ - положительных собственных чисел. Умножим равенство (30) на левые собственные вектора-строки матрицы \mathbf{A}_1^+ , соответствующие неположительным собственным числам. Получим $N_1^+ + Z_1^+$ равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{k_1}^+ \mathbf{v}^+ = & \sum_{\mathbf{k}: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{I}_{k_1}^+ \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_+^{k_N} t \right) \dots \\ & + \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{I}_{k_1}^+ \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, \dots, x_N) k_1, \lambda_+^{k_1} \leq 0 . \end{aligned} \quad (31)$$

Объединим равенства (27), (30) и добавим к ним условия сопряжения (3), получим систему линейных алгебраических уравнений, которым должны удо-

влетворять значения решения задачи Римана по обе стороны границы раздела областей для неизвестных $\mathbf{v}^-(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t, \mathbf{x})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k_1: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \dots \\ \quad + \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^- D^\alpha \mathbf{u}_0^- (0, x_2, \dots, x_N) \\ \sum_{k_1: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_+^{k_N} t \right) \dots \\ \quad + \sum_{|\alpha| \geq 2}^{P+1} t^{|\alpha|} \mathbf{B}_\alpha^+ D^\alpha \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, \dots, x_N) \\ \mathbf{L}(\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (32)$$

Так, как начальные данные удовлетворяют условиям сопряжения на границе Γ , то необходимо, чтобы количество линейно независимых уравнений системы (32) было равно количеству неизвестных. Выделим линейно независимые уравнения системы (32). Решение полученной совместной СЛАУ и будет приближенным решением обобщенной задачи Римана.

Решим систему уравнений (32) и определим значение $\mathbf{v}^-(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t, \mathbf{x})$ при $t > 0$ по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$.

Формулы (26) и (29) с полученными зависимостями $\mathbf{v}^-(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{v}^+(t, \mathbf{x})$ дают полное решение обобщенной задачи Римана о распаде разрыва для случая многих пространственных переменных.

Обратим внимание, что если начальные данные заданы линейными функциями по обе стороны гиперплоскости $x_1 = 0$ то система уравнений (32), дающая решение обобщенной задачи Римана, принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k_1: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- \left(-\lambda_-^{k_1} t, x_2 - \lambda_-^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_-^{k_N} t \right) \\ \sum_{k_1: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ \left(-\lambda_+^{k_1} t, x_2 - \lambda_+^{k_2} t, \dots, x_N - \lambda_+^{k_N} t \right) \end{array} \right. \quad (33)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+) = \mathbf{0}$$

При $t \rightarrow +0$ система уравнений (32) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k_1: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{k_1} \mathbf{v}^- = \sum_{\mathbf{k}: \lambda_-^{k_1} \geq 0} \mathbf{C}_-^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^- (0, x_2, \dots, x_N) \\ \sum_{k_1: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{k_1} \mathbf{v}^+ = \sum_{\mathbf{k}: \lambda_+^{k_1} \leq 0} \mathbf{C}_+^{\mathbf{k}} \mathbf{u}_0^+ (0, x_2, \dots, x_N) \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+) = \mathbf{0}$$

Именно такое (34) приближенное решение задачи Римана используется при построении алгоритмов решения гиперболических систем дифференциальных уравнений первого порядка [1], [2].

5. Вычислительный алгоритм

Построенное в [8] решение обобщенной задачи Римана позволяет сформулировать алгоритм численного решения начально краевых задач для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, обладающий рядом замечательных свойств. Полученные результаты продемонстрированы на примере системы уравнений, описывающей распространение упругих волн, которую для случая двух про-

пространственных переменных, следуя [2], можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{11} - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 - \lambda\frac{\partial}{\partial x_2}v_2 &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{22} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_1}v_1 - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}v_2 &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{12} - \mu\frac{\partial}{\partial x_1}v_2 - \mu\frac{\partial}{\partial x_2}v_1 &= 0, \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11} - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12} &= 0, \\
\rho\frac{\partial}{\partial t}v_2 - \frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{22} &= 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

где λ и μ коэффициенты Ламе, ρ массовая плотность среды, σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} компоненты тензора напряжений, v_1 , v_2 компоненты вектора скорости смещений.

Введя вектор переменных $\mathbf{u} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, v_1, v_2)^T$ и матрицы

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{36}$$

эту систему уравнений можно записать в виде (1).

Согласно (34) приближенное решение задачи Римана в точке \mathbf{x}^* в момент времени $t + dt$ можно в общем виде записать как следующую линейную комбинацию:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*, t + dt) = \sum_{k_1, k_2} \mathbf{C}^{k_1 k_2} \mathbf{u}_0(x_1^* - \lambda^{k_1} dt, x_2^* - \lambda^{k_2} dt), \quad (37)$$

где матрица $\mathbf{C}^{k_1 k_2}$ вычисляется согласно формулам из предыдущего раздела, а $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ - это решение задачи в предыдущий момент времени t .

Тогда схема алгоритма будет выглядеть следующим образом:

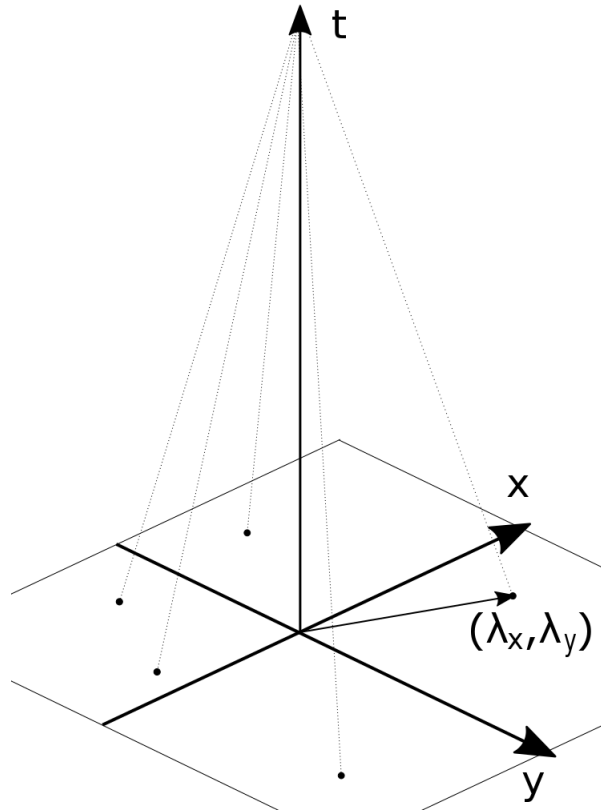


Рис. 1. Схема нахождения решения в следующий момент времени для случая внутренней точки

Пусть на области построена расчетная сетка. Будем искать приближенное решение в узлах построенной сетки. Для нахождения приближенного решения в момент времени $t + dt$ в точке \mathbf{x}^* следует опустить из этой точки на предыдущий

временной слой всевозможные прямые вида

$$\mathbf{x} - \lambda t,$$

где $\lambda = (\lambda^{k_1}, \lambda^{k_2})$ - это все пары комбинаций собственных чисел, соответствующих матрицам A_1 и A_2 .

Следует отметить, что шаг по времени dt выбирается таким образом, чтобы точки пересечений с временным слоем t лежали внутри **прилежающих** ячеек расчетной области, как изображено на рис. (1) (хотя в общем случае это требование необязательное).

Эти прямые (для простоты будем называть их также "характеристиками") пересекут временной слой t в точках

$$(x_1^* - \lambda^{k_1} dt, x_2^* - \lambda^{k_2} dt).$$

В этих точках приближенное решение в момент времени t уже известно, поэтому, подставив эти значения в (37), мы получим приближенное решение в момент времени $t + dt$.

В случае если "характеристики" выходят за пределы расчетной области (то есть точка, в которой рассчитывается приближенное решение лежит на внешней границе), то следует добавить граничные условия, которые дополняют систему (34), и снова можно будет выписать линейную комбинацию (37) (см. рис. (2)).

В случае если рассчитываемая точка лежит на внутренней границе, то следует искать приближенное решение слева и справа от этой границы. В таком случае выпускаются "характеристики" только в прилежащую к точке (слева или справа) полуплоскость (см. рис. (3)). Условия сопряжения на внутренней границе дополняют систему (34) и снова останется только решить полученную систему.

Получаем, что переход на следующий временной слой осуществляется в 2 этапа.

На первом этапе на новом временном слое решается задача Римана для всех узлов расчетной сетки. Для каждого такого узла решение задачи Римана зависит

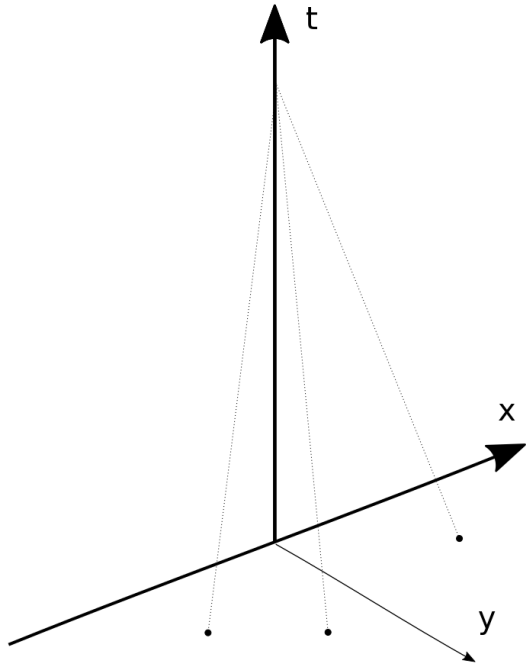


Рис. 2. Схема нахождения решения в следующий момент времени для случая точки на внешней границе

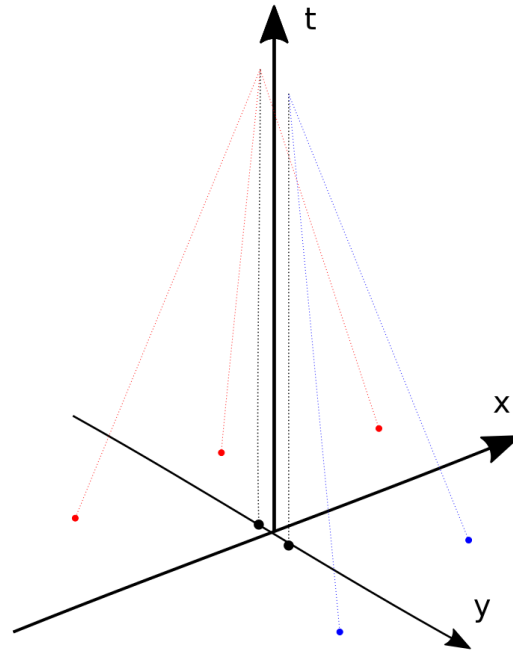


Рис. 3. Схема нахождения решения в следующий момент времени для случая точки на внутренней границе

от значений начальных данных в конечном количестве узлов. Следовательно, первый этап может быть реализован для каждого узла независимо и выполнен параллельно.

На втором этапе на новом временном слое для каждой ячейки следует по определенным на предыдущем этапе значениям решения в узлах построить интерполяционный полином. Коэффициенты этого полинома зависят от значений решения в узлах только этой ячейки и следовательно, могут быть вычислены для каждого интервала независимо и параллельно. В работе используются интерполяционные полиномы второго порядка

5.1. Верификация алгоритма

Верификация алгоритма была проведена в 2 этапа:

- было получено приближенное решение модельной задачи распада разры-

ва, которое затем сравнивалось с известным аналитическим решением

- была показана сеточная сходимость алгоритма на тестовой задаче

Ниже приведено описание модельной задачи:

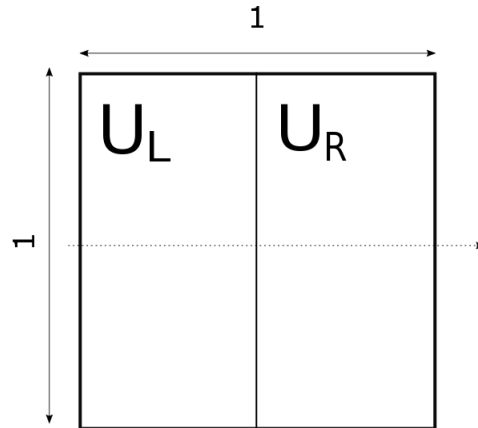


Рис. 4. Схема области для модельной задачи

Рассматривается квадратная область размера 1x1 (рис. (4)).

Параметры среды заданы следующими на всей расчетной области: $\rho = 1, \lambda = 2, \mu = 1$. При этом скорости распространения упругих волн получаются следующими: $c_p = 2, c_s = 1$.

Начальные данные: $\mathbf{U}_L = (-4, -3, 1, -2, 1)$ - слева от границы, проходящей посередине области, $\mathbf{U}_R = (-4, -2, 2, 2, -2)$ - справа.

Область разбивается на равномерную сетку размера 400x400 так, что граница раздела начальных данных совпадала с внутренней границей расчетной сетки. Полученное решение выводится вдоль оси, обозначенной на рисунке пунктирной прямой.

Результаты работы алгоритма и сравнение с аналитическим решением показаны на рисунках (5)–(6). По графикам видно, что приближенное решение, найденное с помощью построенного алгоритма, соотносится с соответствующим решением аналитической задачи.

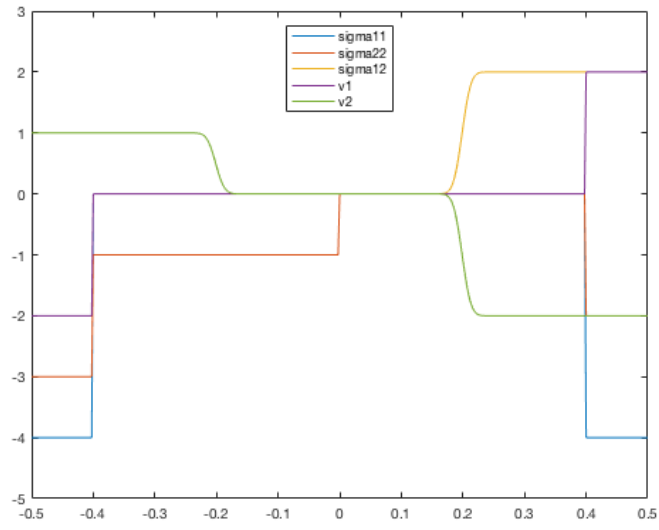


Рис. 5. Приближенное решение

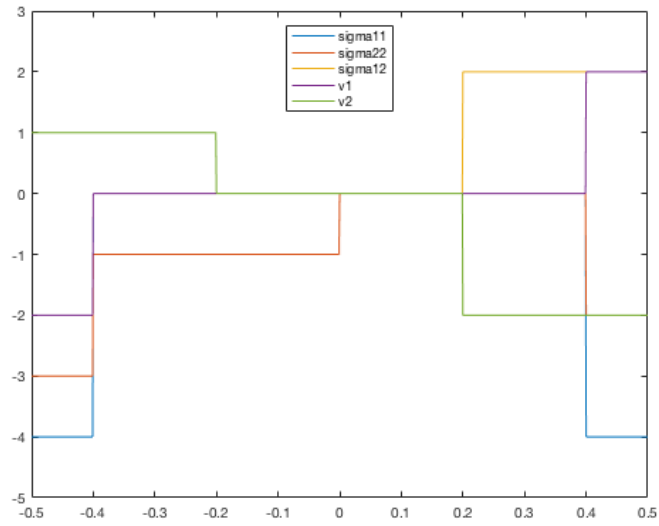


Рис. 6. Аналитическое решение

Для проверки сходимости алгоритма по сетке снова взята квадратная область размера 1 с постоянными параметрами среды. Начальные данные показаны на рис.(7) (показана кинетическая энергия $v_1^2 + v_2^2$).

Далее сетка дробится пополам и рассчитывается максимальный квадрат отклонения нового решения от первого на одних и тех же узлах расчетной сетки в один и тот же момент времени.

Результаты приведены на рис. (8), на котором изображена зависимость логарифма максимальной ошибки от логарифма степени очередного дробления сетки. Наклон получившейся примерно равен 2, из чего можно заключить, что численный метод имеет второй порядок аппроксимации по пространству, что совпадает со степенью интерполяции на каждой ячейке. Таким образом показана сеточная сходимость алгоритма.

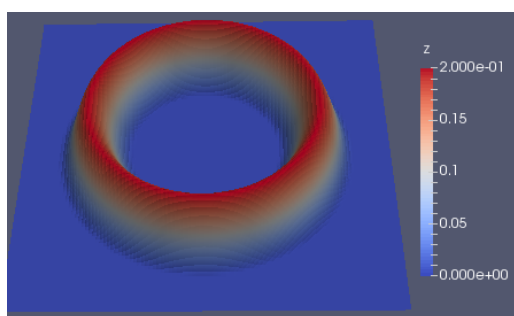


Рис. 7. Начальные данные тестовой задачи

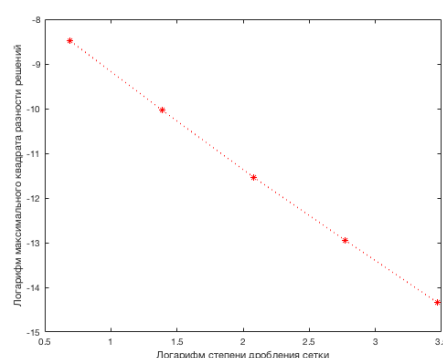


Рис. 8. График сеточной сходимости

5.2. Вычислительный эксперимент

В промышленных экспериментах на месторождениях достоверно зафиксирован эффект увеличения нефтеотдачи на уровне 10-40% в результате вибросейсмического воздействия на нефтесодержащие пласты. Для оптимизации технологии, основанной на вибросейсмическом воздействии необходимо понимать физические механизмы, по которым вибрационное воздействие влияет на пласт и приводит к увеличению его производительности. Здесь можно сформулировать две проблемы:

- каковы физические механизмы процесса распространения вибрационного воздействия от источника к пласту?

- какие процессы (физические, химические и т.д.), вызванные пришедшей упругой волной, происходят в нефтеносном пласте, приводя, в итоге, к увеличению нефтеотдачи пласта.

В данной работе затронута первая проблема - проблема доставки вибрационной энергии на глубину без существенного рассеивания.

Вибрационный источник находится, как правило, на поверхности. Произведенное им воздействие распространяется в геологической среде в виде упругой волны и достигает нефтеносного пласта на глубинах порядка нескольких километров. Поток энергии, излученной источником, в случае однородной среды, почти равномерно распределяется по поверхности полусферы, радиус которой увеличивается по мере распространения волны. И на глубинах порядка 1 км амплитуда и плотность потока упругой энергии, даже если пренебречь ослаблением из-за поглощения геологической средой, на шесть и более порядков ниже, чем амплитуда и плотность потока энергии у поверхности, вблизи источника. Нельзя ожидать, что столь незначительная упругая волна может провести значимое воздействие на нефтеносный пласт. Но эффект от вибросейсмического воздействия зафиксирован в промышленных экспериментах и даже используется в реальных скважинах. Следует предположить, что энергия вибрационного источника доставляется в нефтеносный пласт, избегая значительного рассеивания.

При длительной обработке месторождения вибросейсмическим воздействием зафиксировано появление в геологической среде высокочастотных шумов. Каковы механизмы, приводящие к появлению этих шумов? Как использовать информацию, получаемую при регистрации этих шумов для оптимизации эффекта вибросейсмической обработки месторождения, в частности для минимизации потерь при доставке энергии упругих волн, генерируемых виброисточником, в нефтесодержащий пласт.

Существует несколько гипотез, претендующих на объяснение эффективного переноса энергии от виброисточника к нефтесодержащему пласту. Одно из возможных объяснений основано на предположении о том, что геологическая среда не является сплошной и однородной, а состоит из трещин и блоков (рис.



Рис. 9. Глинистый известняк, разбитый горизонтальными и вертикальными трещинами на разномасштабные блоки, Египет, плато Гиза (фото А.М. Тюрина)

(9)), которые могут двигаться друг относительно друга с проскальзыванием. Математические модели распространения упругих волн в такой блочной упругой среде достаточно сложны. Сделать обоснованный вывод о возможности распространения упругих волн, вызванных вибрационным источником, действующим длительное время, без существенного рассеивания, можно только путем численного моделирования и сравнения с полевыми экспериментами

В качестве тестовой задачи для вычислительного эксперимента рассматривается задача распространения упругих вибраций в глубину породы к нефтеносному пласту.

Рассматривается прямоугольная область размера 600 метров на 60 метров (см. рис. (10)). Параметры среды соответствуют некоторым реальным типам геологических пород. Коэффициенты Ламе были взяты следующими: $\lambda = 1440 \text{ ГПа}$, $\mu = 720 \text{ ГПа}$, а плотность $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$.

Внутри прямоугольника параллельно вертикальной оси выделены внутренние границы (на рис. (10) выделены толстой линией). На поверхности установлен источник вибраций, который работает по закону $A \sin(\omega t)$, где A и ω - это заданные амплитуда и частота соответственно.

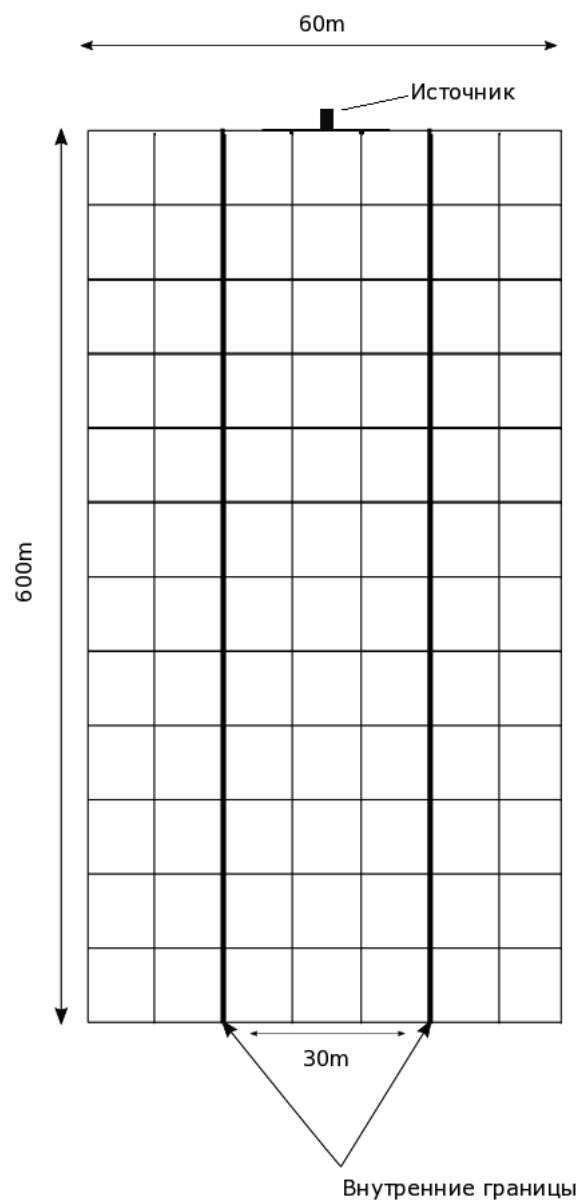


Рис. 10. Расчетная область экспериментальной задачи

На внутренних границах заданы условия сопряжения, которые отражают физические условия, необходимые на границе. В качестве примера таких соотношений, связывающих значения переменных $\mathbf{u}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-)$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+)$, можно рассмотреть «условия полного слипания», состоящие в том, что при переходе

через границу Γ непрерывны компоненты вектора смещений и выполнен третий закон Ньютона - силы действующие с разных сторон границы равны по величине и противоположно направлены:

$$\begin{aligned} v_1(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= v_1(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) \\ v_2(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= v_2(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) \\ \sigma_{11}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= \sigma_{11}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) \\ \sigma_{12}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= \sigma_{12}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) \end{aligned} \quad (38)$$

Или «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через границу Γ непрерывны нормальные к границе компоненты вектора смещений, нормальные к границе компоненты силы с разных сторон границы равны по величине и противоположно направлены, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны границы, равны 0:

$$\begin{aligned} v_1(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= v_1(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) \\ \sigma_{11}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= \sigma_{11}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) \\ \sigma_{12}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^-) &= 0 \\ \sigma_{12}(t, \mathbf{x} \in \Gamma^+) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

На поверхности (на верхней внешней границе) задаются условия «свободной границы», а на остальных внешних границах «прозрачные» граничные условия.

Область разбивается равномерной сеткой так, что внутренние границы области проходят по линиям расчетной сетки (как на рис. (10)).

Были получены приближенные решения задачи для различных значений частоты возмущений источника ω , а так же с различными типами условий сопряжения на внутренних границах на расчетной сетке размера 100x1000. Шаг по времени выбирался согласно алгоритму из раздела 5, приближенные решения считались до момента времени $t = 4\text{с}$.

На рисунке (11) приведены получившиеся решения в разные моменты вре-

мени для случая «проскальзывания без трения» и $\omega = 10\text{Гц}$. Показаны моменты накопления энергии, выплескивания энергии и установившегося процесса транспортировки энергии на глубину.

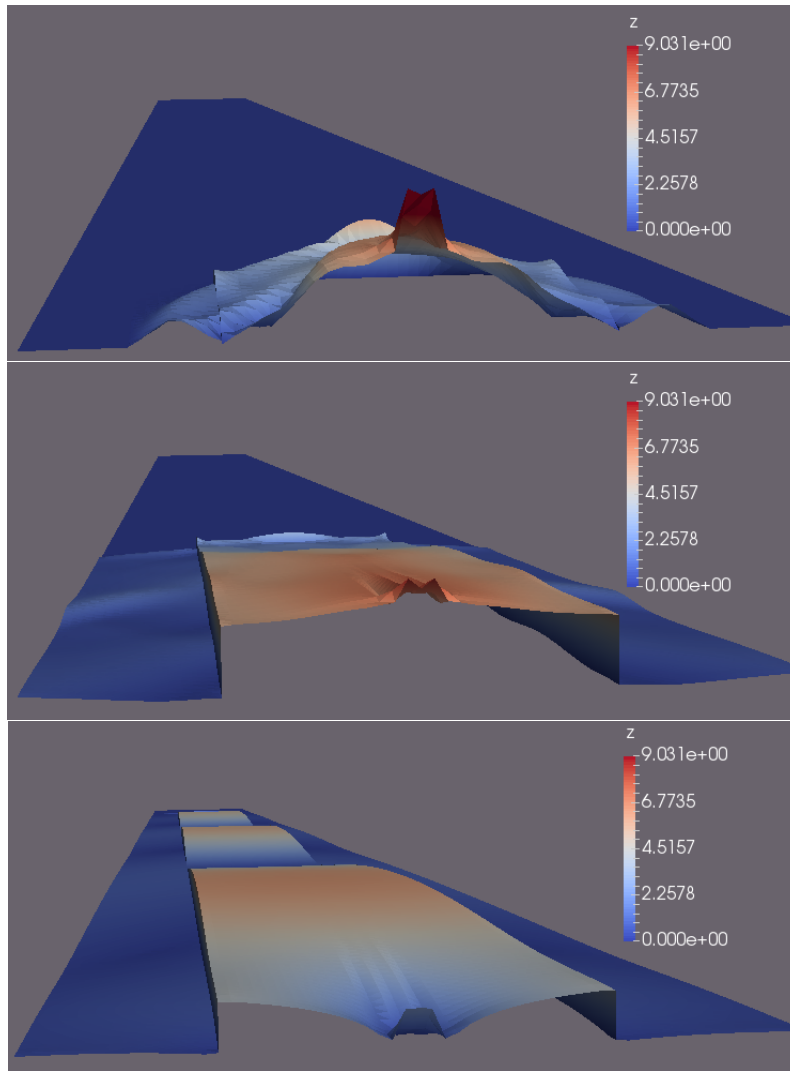


Рис. 11. Профиль распределения кинетической энергии в разные моменты времени в случае «проскальзывания без трения» для $\omega = 10\text{Гц}$

На рис. (12) – (13) показаны получившиеся распределения кинетической энергии $v_1^2 + v_2^2$ при $w = 10\text{ Гц}$ и условиях сопряжения, соответствующими условиям «проскальзывания без трения» и условиям «полного слипания».



Рис. 12. Условия «проскальзывания без трения» при $w = 10$ Гц (источник находится справа)



Рис. 13. Условия «полного сцепания» при $w = 10$ Гц (источник находится справа)

По характеру этих распределений видно, что в случае с условием «полного сцепания» на внутренних границах среда ведет себя как однородная и кинетическая энергия практически не достигает максимальной глубины.

Напротив, с условием «проскальзывания без трения» внутренние границы ведут себя как стенки волновода. Энергия в таком случае практически не проходит сквозь них, и возмущения источника достигают максимальной глубины.

Было высказано предположение, что при варьировании частоты внутренние границы могут терять свойство "фокусировки" энергии, поэтому были проведены численные эксперименты, в которых брались различные значения частоты источника ω . На серии рисунков (14) – (16) показаны распределения кинетической энергии при условиях сопряжения, соответствующих условиям «проскальзывания без трения» для различных значений частот w .



Рис. 14. Условия «проскальзывания без трения» при $w = 1$ Гц (источник находится справа)



Рис. 15. Условия «проскальзывания без трения» при $w = 10$ Гц (источник находится справа)



Рис. 16. Условия «проскальзывания без трения» при $w = 100$ Гц (источник находится справа)

По характеру этих распределений видно, что по мере увеличения частоты возмущений (т.е. уменьшения длины волны возмущений) внутренняя граница удерживает все меньше кинетической энергии, и при $w = 100$ среда ведет себя практически как однородная.

Этот факт можно наблюдать при условиях, когда расстояние между внутренними границами становится больше длины волны возмущения (при $w = 1$ длина волны порядка 1000м, при $w = 10$ длина волны порядка 100м, при $w = 100$ длина волны порядка 10м).

6. Заключение

В работе построен вычислительный алгоритм нахождения приближенного решения начально-краевой задачи любой размерности для гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка на основании приведенного в статье [8] решения.

Предложенный алгоритм сводит задачу нахождения значений переменных в момент времени $t > 0$ к решению системы алгебраических уравнений с правой частью, зависящей от значений переменных в начальный момент времени в конечном числе точек.

Алгоритм верифицирован на ряде тестовых задач, связанных с решением системы уравнений упругой динамики в случае двух пространственных переменных:

- приближенное решение модельной задачи количественно совпадает с точным решением задачи о распаде разрыва с кусочно-постоянными начальными данными
- на тестовой задаче показана сеточная сходимость алгоритма

Алгоритм показал хорошее быстроедействие еще до применения распараллеливания. Например, время расчета задачи с размером расчетной сетки порядка 10^6 заняло порядка 6 минут. К тому же данный алгоритм имеет большой потенциал к распараллеливанию в силу того, что

- приближенное решение в каждом узле сетки вычисляется независимо
- интерполяционный полином на каждой ячейке сетки строится независимо от других ячеек

В качестве эксперимента была рассмотрена задача распространения возмущений источника в среде с внутренними границами. Показано, что при определенных условиях на этих границах (а именно условия проскальзывания) они ведут себя как стенки волновода, и эти возмущения доставляются на глубину без существенного рассеивания.

Однако при увеличении частоты возмущений источника наблюдается факт того, что внутренние границы теряют это свойство и среда начинает вести себя почти как однородная.

Результаты данной работы изложены в статье, которая готовится к изданию.

Литература

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва: Физматлит, 2001.
2. *LeVeque R.L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
3. Скалько Ю.И. Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование — 2014 — Т. 6, №3 — С. 347-356.
4. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes - I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. // Geophys. J. Int. — 2006 — V. 166 — P. 855-877.
5. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
6. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — Москва: Наука, 1981.
8. Скалько Ю.И. Задача Римана о распаде разрыва в случае многих пространственных переменных // Труды МФТИ — 2016 — Т. 8., №4 — С. 169-182.