Умножение матриц

Каталин Дэвид

Чтобы можно было умножить две матрицы, количество столбцов первой матрицы должно быть равно количеству строк второй матрицы.

Алгоритм умножения матриц

Умножаем элементы в строках первой матрицы на элементы в столбцах второй матрицы.

1. Умножаем элементы первой строки на элементы первого столбца.
    - Умножаем первый элемент первой строки на первый элемент первого столбца.
    - Умножаем второй элемент первой строки на второй элемент первого столбца.
    - Делаем то же самое с каждым элементом, пока не дойдем до конца как первой строки первой матрицы, так и первого

⊞ Аналитическая геометрия
⊟ Сферический треугольник
⊟ Схема Горнера
⊟ Формула бинома Ньютона
⊞ Суммы степеней
⊟ Производные
⊞ Интегралы
⊟ Интегралы - формулы
⊟ Теория вероятностей
⊟ Гиперболические функции
⊟ Бета-функция
⊟ Дифференциальны уравнения

   столбца второй матрицы.
   - Складываем полученные произведения.
   - Полученный результат будет первым элементом первой строки произведения матриц.
2. Умножаем элементы первой строки первой матрицы на элементы второго столбца второй матрицы.
   - Умножаем первый элемент первой строки на первый элемент второго столбца.
   - Умножаем второй элемент первой строки на второй элемент второго столбца.
   - Делаем то же самое с каждым элементом, пока не дойдем до конца как первой строки первой матрицы, так и второго столбца второй матрицы.
   - Складываем полученные произведения.
   - Полученный результат будет вторым элементом первой строки произведения матриц.
3. Применяя тот же самый алгоритм, умножаем элементы первой строки первой матрицы на элементы остальных столбцов второй матрицы. Полученные числа составят первую строку вычисляемой матрицы.
4. Вторая строка вычисляемой матрицы находится аналогично умножением элементов второй строки первой матрицы на элементы каждого столбца второй матрицы: результаты записываются в новую матрицу после каждого суммирования.
5. Делаем это с каждой строкой первой матрицы, пока все строки новой матрицы не будут заполнены.

Пример 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрица A имеет 3 столбца, а матрица B имеет 3 строки, значит, их можно перемножить.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 16 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 6 & 7 & 7 \\ 16 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$

Пример 8

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 34 \\ 17 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 14 \\ 31 & 12 \end{pmatrix}$$

Опять-таки $A \cdot B \neq B \cdot A$**.**

Пример 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 17 & 24 \\ 24 & 12 & 29 \\ 25 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 24 & 26 \\ 16 & 23 & 29 \\ 19 & 19 & 16 \end{pmatrix}$$

Опять-таки $A \cdot B \neq B \cdot A$**.**

Пример 10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$**.**

Пример 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Опять-таки $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A$**.**

Примечание:

1. В общем случае умножение матриц некоммуникативно.

2. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ для любой матрицы A, имеющей n столбцов.

Матрицы

Определитель

Ранг матрицы

Обратные матрицы

Матричные уравнения

Системы уравнений

Калькуляторы для матриц

Электронная почта: math10@abv.bg

Об авторе