Sprawozdanie z zadania numerycznego 9

1. Instrukcja uruchomienia

- Aby uruchomić program należy użyć *python NUM9.py*

2. Cel ćwiczenia

Znalezienie numerycznie pierwiastków dwóch funkcji na przedziale $x\epsilon \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ metodą bisekcji, Falsi, siecznych i Newtona, a następnie porównanie użytych metod. Funkcje:

- f(x) = sin(x)-0.37
- g(x) = $(\sin(x)\text{-}0.37)^2$
- u(x) = $\frac{g(x)}{g'(x)}$

3. Opis ćwiczenia

1) Analiza problemu
2) Znalezienie pierwiastka czterema metodami dla obu funkcji
3) Usprawnienie szukania pierwiastków wielokrotnych
4) Wykreślenie błędu między wynikiem dokładnym a wyliczonym w każdej iteracji
5) Analiza wyników

4. Wstęp teoretyczny

Zacznijmy od zastanowienia się co oznacza rozwiązać równanie. Rozwiązanie równania to znalezienie takiego argumentu dla którego wartość funkcji będzie się równała 0. Jednak rozwiązanie możemy interpretować na swa sposoby, pierwszy to znalezienie wszystkich rozwiązań, a drugi to znalezienie dowolnego rozwiązania. W zadaniu rozważać będziemy szukanie tylko jednego dowolnego rozwiązania na danym przedziale.

Do szukania rozwiązań używamy następujących metod:

Metoda bisekcji

Metoda nazywana też metodą połowienia pozwala znaleźć pierwiastek dowolnej funkcji na zadanym przedziale, jednak muszą zajść następujące warunki:

1) Funkcja musi być ciągła na całym przedziale ponieważ algorytm bisekcji wybiera dowolne punkty przedziału więc nie możemy mieć miejsc gdzie funkcja wykonuje skoki bo spowodowało by to załamanie się algorytmu

2) Funkcja musi być określona na całym przedziale
3) Na krańcach przedziałów wartości funkcji muszą mieć przeciwne znaki. Dzięki takiemu warunkowi wiemy że funkcja na zadanym przedziale posiada pierwiastek

Działanie algorytmu bisekcji jest bardzo proste. Na początku wyliczamy punkt środkowy przedziału $\langle \mathrm{a}, \mathrm{b} \rangle$ c = $\frac{\mathrm{a+b}}{2}$, następnie sprawdzamy czy wystąpił warunek stopu. Jeśli nie dzielimy przedział na dwa równe podprzedziały i wybiera ten przedział na którego krańcach funkcja posiada przeciwne znaki:

jeśli $f(a)f(c) < 0$ to b=c

jeśli $f(\mathrm{c})f(\mathrm{b}) < 0$ to a=c

Z warunku mówiącego nam że funkcja musi mieć przeciwne znaki na krańcach przedziału wynika to że metoda bisekcji działa tylko dla miejsc zerowych o nieparzystej krotności.

Metoda Falsi

Metoda nazywana inaczej metodą fałszywej prostej, nazwa wywodzi się od tego co robi algorytm, czyli traktuje funkcję jako prostą na danym przedziale. Jednak żeby metoda Falsi działała i była zbieżna muszą zajść następujące warunki:

1) Funkcja musi być ciągła na całym przedziale
2) Funkcja musi być określona na całym przedziale
3) Na krańcach przedziałów wartości funkcji muszą mieć przeciwne znaki

Jako przybliżenie miejsca zerowego bierzemy punkt który jest przecięciem siecznej przechodzącej przez punkty na krańcach przedziału i osi odciętych. Możemy wyliczyć wzór ogólny takiej prostej, a następnie wyliczyć z niego wzór na przybliżony pierwiastek

$$\mathrm{g(x)} = \mathrm{f(a)} + (\mathrm{f(b)\text{-}f(a)})\frac{\mathrm{x\text{-}a}}{\mathrm{b\text{-}a}}$$

$$\mathrm{g(c)} \equiv 0$$

$$\mathrm{f(a)} + (\mathrm{f(b)\text{-}f(a)})\frac{\mathrm{c\text{-}a}}{\mathrm{b\text{-}a}} = 0$$

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{a} \cdot \mathrm{f(b)} - \mathrm{b} \cdot \mathrm{f(a)}}{\mathrm{f(b)} - \mathrm{f(a)}}$$

Jeśli nie zajdzie warunek stopu to algorytm ponawiamy wybierając jako nowy przedział ten w którym funkcja zmienia swój znak.

Metoda siecznych

Metoda jest często mylona z metodą Falsi. Jej działanie opiera się na założeniu że funkcja ciągła w dostatecznie małym odcinku zmienia się w sposób liniowy. Wtedy taką funkcję możemy zastąpić sieczną, a za przybliżony pierwiastek przyjmujemy punkt przecięcia siecznej z osią odciętych. Warunki jakie musi spełniać funkcja:

1) Funkcja musi być ciągła na całym przedziale
2) Funkcja musi być określona na całym przedziale

Punktem wyjścia są dowolne dwa punkty dla których wartości funkcji są różne, natomiast wzór jest identyczny do wzoru z metody Falsi

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Metoda ta może zbiegać szybciej niż metoda Fasi, ale w niektórych przypadkach zawodzi tzn. nie jest zbieżna do miejsca zerowego, dlatego oprócz warunku stopu określającego zbiegnięcie musimy jeszcze mieć określoną maksymalną ilość iteracji.

Metoda Newtona

Metoda nazywana jest również metodą stycznych od techniki wykorzystywanej do obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka, czyli wyznaczaniu przecięć stycznej do wykresu funkcji z osią odciętych.

Metoda Newtona opiera się na rozwinięciu Taylora $f(x_i + x^* - x_i)$, następnie żądamy aby lewa strona znikała co prowadzi do równania:

$$0 \approx f(x_i) + f'(x_i)(x^* - x_i)$$ gdzie x^* to szukane przybliżenie

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Z powodu możliwości wystąpienia rozbieżności metody Newtona oprócz określenia warunku stopu oznaczającego zbiegnięcie musimy jeszcze określić maksymalną ilość iteracji.

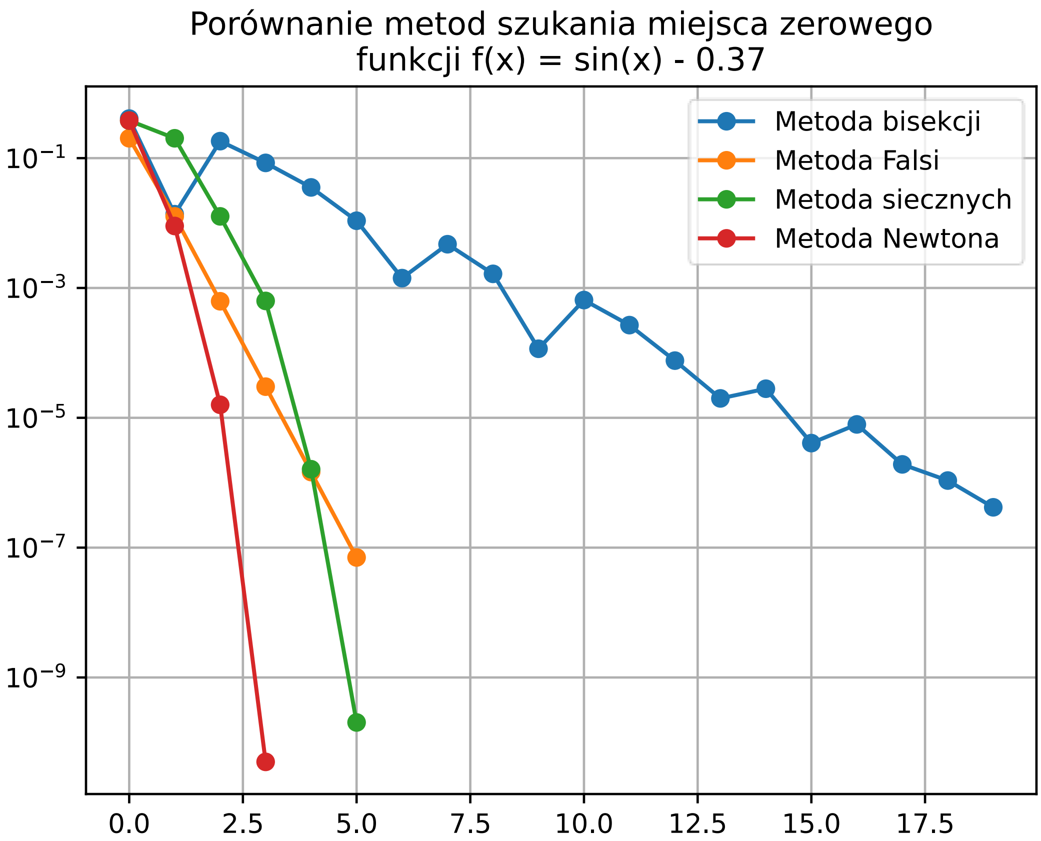
Podczas korzystania z metody Newtona istnieje szansa na powstanie cyklu.

Jak już wcześniej wspominałem należy używać kryterium stopu do zatrzymywania działania wyżej wymienionych metod iteracyjnych. Jest kilka różnych sposobów na dobranie warunku stopu:

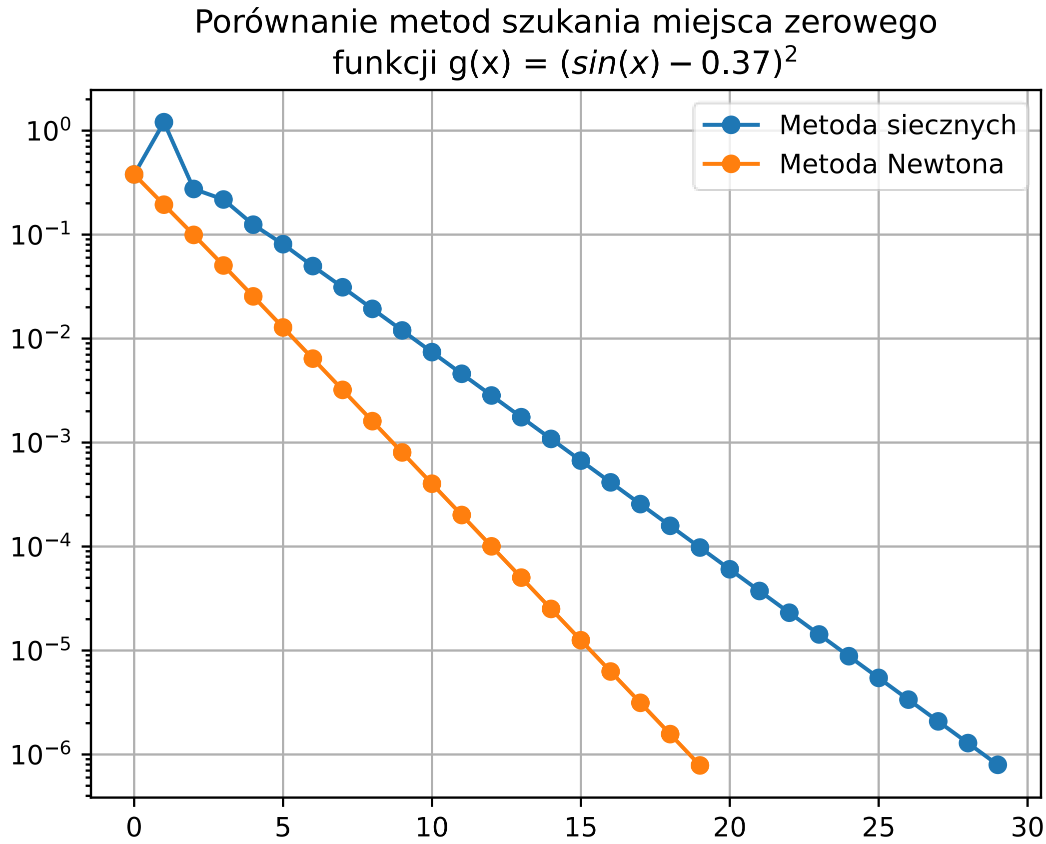
- Porównywanie ze znanym wynikiem
- Określenie czy przybliżenie miejsca zerowego jest dość dobre
- Zatrzymanie gdy przedział zawierający minimum stanie się dostatecznie mały

5. Wyniki

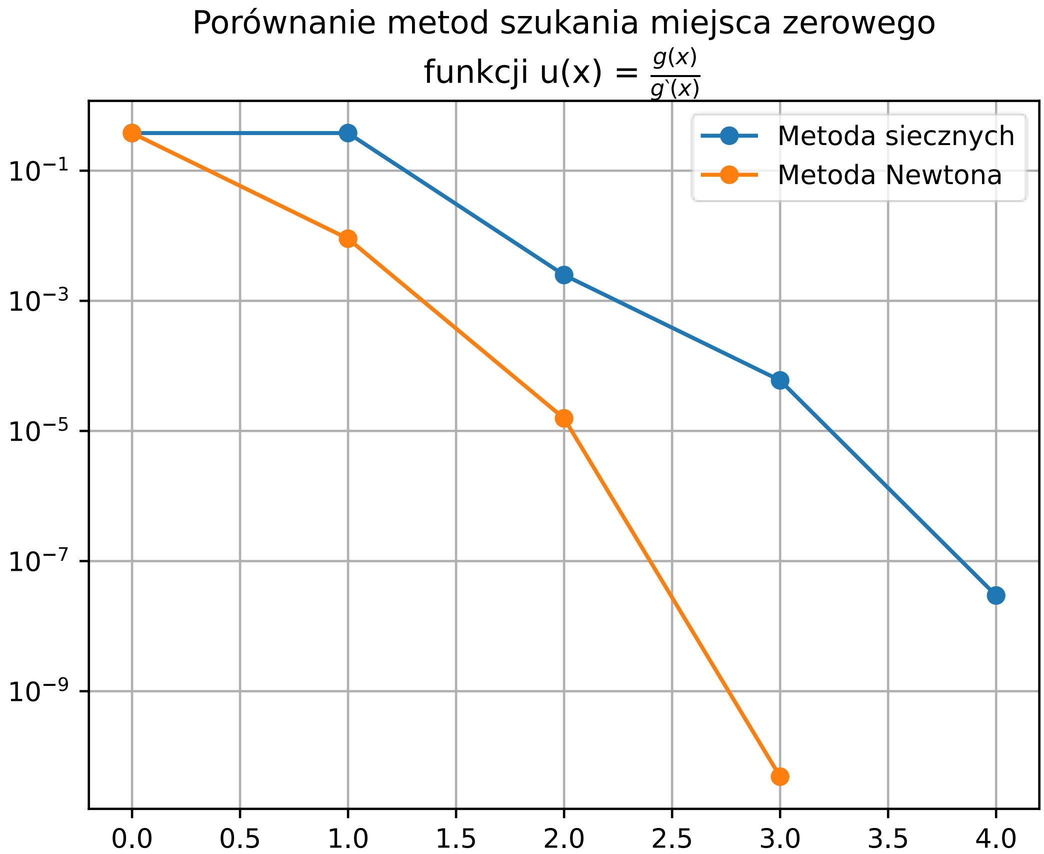
Pierwiastek funkcji f(x) metodą bisekcji = 4.1792348337565954e-07
Pierwiastek funkcji f(x) metodą Falsi = 7.054348211132933e-08
Pierwiastek funkcji f(x) metodą siecznych = 2.0272206135985016e-10
Pierwiastek funkcji f(x) metodą Newtona = 5.009886949736142e-11



Pierwiastek funkcji g(x) metodą siecznych = 7.951275819984005e-07
Pierwiastek funkcji g(x) metodą Newtona = 7.847752946932296e-07



Pierwiastek funkcji u(x) metodą siecznych = 2.9574226567685713e-08
Pierwiastek funkcji u(x) metodą Newtona = 4.857086954856982e-11



6. Wnioski

Pierwszą rzecz jaką możemy zauważyć porównując funkcje f(x) i g(x) jest brak możliwości użycia metody bisekcji i metody Falsi ponieważ funkcja nie zmienia znaku.

Dla metody bisekcji zbieżność jest liniowa to znaczy że dla ustalenia każdego kolejnego miejsca dziesiętnego potrzeba tej samem liczby iteracji.

Metoda Falsi i siecznych zdecydowanie szybciej odnajdują pierwiastek.

Metoda Newtona działa zdecydowanie najszybciej – liczba iteracji potrzebnych do ustalenia kolejnego miejsca dziesiętnego zmniejsza się dwukrotnie, ale przez swój wysoki koszt (potrzeba wyliczenia pochodnej) nie jest preferowanym rozwiązaniem. Jak widać przy porównaniu metod siecznych i Newtona dla funkcji g(x) i jej usprawnienia obie te metody przy pracy z pierwiastkami wielokrotnymi działały liniowo. Natomiast gdy używając usprawnienia posiadaliśmy pierwiastki jednokrotne metody zbiegły szybko.