Sprawozdanie z zadania numerycznego 7

1. Instrukcja uruchomienia

- Aby uruchomić program i wyświetlić wykres przedstawiający interpolację splajnami kubicznymi dla różnej ilości węzłów interpolacji należy użyć *make wykres*
- Aby uruchomić program i wyświetlić wykres przedstawiający błąd interpolacji należy użyć *make error*

2. Cel ćwiczenia

- Skonstruowanie i wykreślenie naturalnego splajnu kubicznego interpolacyjnego dla funkcji f(x) = $\frac{1}{1+25x^2}$ i jednorodnego wyboru węzłów interpolacji $x_i = -1 + 2\frac{i}{n}$ (i=0, …, n).

3. Opis ćwiczenia

1) Analiza problemu
2) Obliczenie układu równań i otrzymanie jako wyniku drugich pochodnych wyrażenia interpolacyjnego w węzłach
3) Przedstawienie na wykresie interpolacji metodą splajnów kubicznych dla kilku różnych n.

4. Wstęp teoretyczny

Zacznijmy od przedstawienia czym jest interpolacja. Jest to taka metoda numeryczna, która pozwala nam na budowanie funkcji interpolacyjnej. Wśród wartości funkcji interpolacyjnej znajdują się z góry zadane wartości w ustalonych punktach, czyli w węzłach interpolacji. W zadaniu będziemy przeprowadzać interpolację przy użyciu funkcji sklejanych, która pozwoli nam uniknąć oscylacji Rungego. Przez funkcję sklejaną stopnia m (splajn) będziemy rozumieć funkcję która:

- $S(x_i) = y_i$ x_i – węzeł interpolacji, y_i wartość w węźle interpolacji
- S(x) jest ciągła i posiada m-1 ciągłych pochodnych
- S(x) jest wielomianem stopnia $\leq$ m na każdym z przedziałów

Przy obliczaniu funkcji sklejanych dla n+1 punktów otrzymujemy n przedziałów. W każdym z tych przedziałów szukamy wielomianów co najwyżej stopnia m więc mamy do znalezienia m+1 parametrów. Z tego otrzymujemy n(m+1) parametrów do wyliczenia. Ale mamy tylko n+1 warunków wynikających z wartości funkcji w węzłach interpolacji i n-1 punktów sklejania, a w każdym z nich ma m pochodnych. Co daje nam łącznie (n+1) + (n-1)m warunków. Porównując liczbę parametrów i warunków otrzymujemy że parametry – warunki = n(m+1) - (n+1) + (n-1)m = m-1. Czyli zawsze będzie nam brakować m-1 warunków do obliczeń.

Funkcje sklejane stopnia trzeciego nazywamy splajnami kubicznym i kierując się powyższym rozważaniem otrzymujemy dwa brakujące warunki. Dla splajnów kubicznych jako dwa brakujące warunki przyjmuje się że wartość drugiej pochodnej na krańcu przedziału ma wynosić 0.

Przez naturalny splajn kubiczny będziemy rozumieć funkcję:

s(x) = $\xi_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + \xi_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i$ dla x∈ $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$

h – odległość między węzłami interpolacji

$$A_i = \frac{(y_i - y_{i-1})}{h} - \frac{h}{6}(\xi_i - \xi_{i-1})$$

$$B_i = y_{i-1} - \xi_{i-1}\frac{h^2}{6}$$

Funkcja ta jest ciągła na całym przedziale, ma ciągłą drugą pochodną, i jej druga pochodna w x_i równa jest ξ_i. Do obliczenia powyższego równania potrzebujemy znać drugie pochodne w punktach sklejania. Więc jeśli dodatkowo założymy ciągłość pierwszej pochodnej w punktach sklejania to otrzymamy równanie:

$$\xi_{i-1} + 4\xi_i + \xi_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2\,y_i + y_{i+1})$$

$$\xi_0 = \xi_n = 0$$

Powyższe równanie możemy zapiać w postacie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_{n-2} \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2}\begin{bmatrix} y_0 - 2\,y_1 + y_2 \\ y_1 - 2\,y_2 + y_3 \\ \cdots \\ y_{n-3} - 2\,y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2\,y_{n-1} + y_n \end{bmatrix}$$

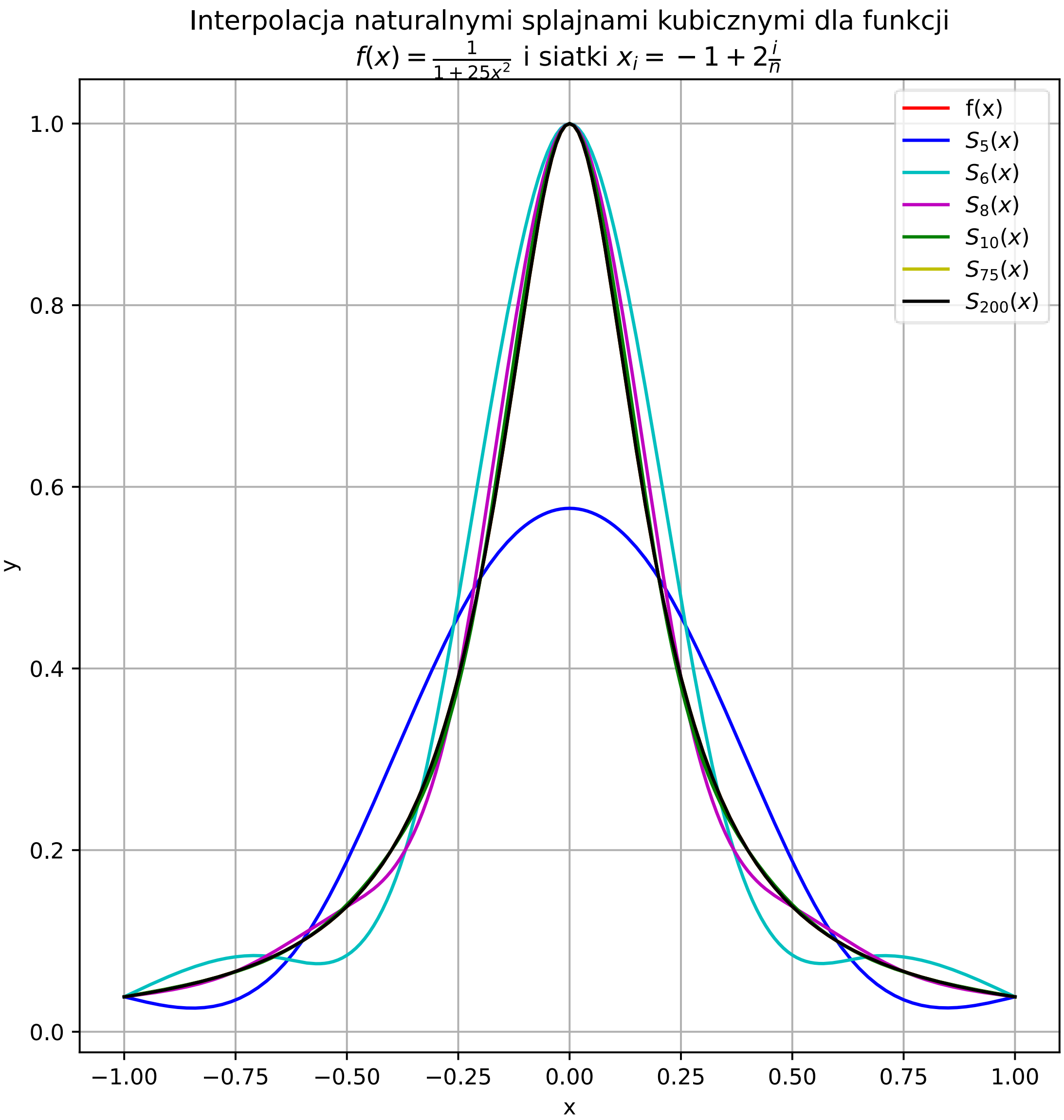
Do rozwiązania powyższego układu równań możemy zastosować faktoryzację Cholesky'ego, która dla macierzy symetrycznej ma postać LL^T=A. Wyliczając wzory dla naszego przypadku faktoryzację możemy wykonać w czasie liniowym.

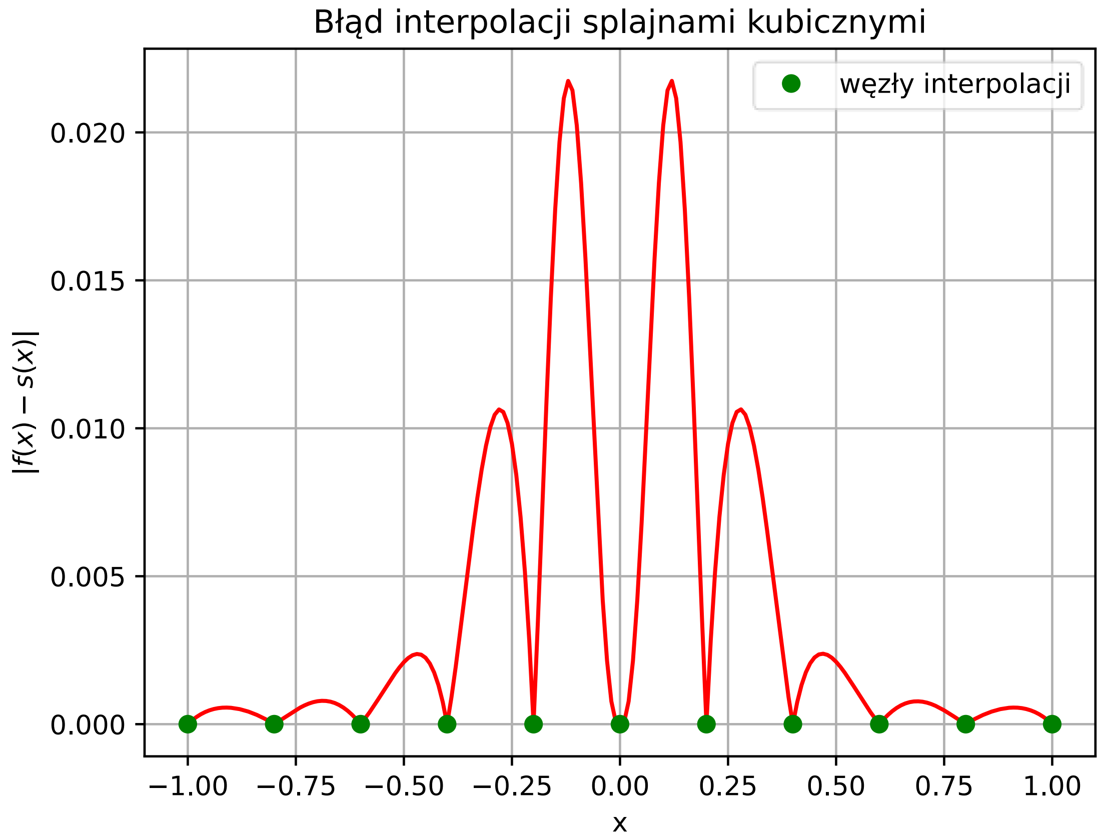
$$L_{ii} = \sqrt{4 - {L_{i,i-1}}^2}$$

$$L_{i+1,i} = \frac{1}{L_{ii}}$$

Po zastosowaniu forward i backward substitution otrzymujemy obliczone wartości drugich pochodnych. Układ ten rozwiązujemy tylko raz na początku całej procedury interpolacji metodą splajnów kubicznych. Następnie w celu znalezienia wartości pomiędzy węzłami używamy wzoru na funkcję s(x) tyle razy ile punktów chcemy znaleźć. Oczywiście za każdym razem musimy używać odpowiedniego przedziału podczas obliczania wartości.

5. Wyniki





6. Wnioski

W interpolacji splajnami kubicznymi nie występują oscylacje Rungego dla dużych n. Dla zadanej funkcji już dla obliczeń używających kilkunastu węzłów interpolacji szukana funkcja nakładała się na wykres oryginalnej funkcji. A dla coraz większej ilości węzłów interpolacji błąd malał.

Obserwując przykładowy błąd wyliczony dla jedenastu węzłów interpolacyjnych możemy zaobserwować że im dalej od węzła interpolacyjnego to błąd rośnie by znów zbliżając się do kolejnego maleć. Dzieje się tak ponieważ my na każdym przedziale między węzłami interpolacyjnymi obliczamy lokalnie wielomian stopnia co najwyżej trzeciego który przechodzi przez te węzły. Wraz z zagęszczaniem siatki wielomiany będą musiały przechodzić przez punkty coraz bardziej do siebie zbliżone co sprawi że interpolacja będzie dokładniejsza.