Sprawozdanie z zadania numerycznego 2

1. Instrukcja uruchomienia

- Aby uruchomić program należy użyć *python NUM2.py*

2. Cel ćwiczenia

Przedstawienie wrażliwości układów równań na zaburzenia danych.

3. Opis ćwiczenia

1) Obliczenie dwóch układów równań składających się z dwóch macierzy A (różniących się o niewielkie wartości) i wektor wyrazów wolnych b
2) Zmodyfikowanie jednego wyrazu wektora wyrazów wolnych o 10^{-5}
3) Powtórzenie punktu 1) ale z wykorzystaniem zmodyfikowanego wektora wyrazów wolnych
4) Wyznaczenie długości wektora różnicy między rozwiązaniami wykorzystującymi oryginalny wektor wyrazów wolnych a tymi ze zmodyfikowanym

4. Wstęp teoretyczny

Zacznijmy od wyjaśnienia czym jest wrażliwość układów równań na zaburzenia danych. Istnieją równania które są mało podatne na zaburzenia danych ale też istnieją takie w których drobne zaburzenia sprawiają że wyniki różnią się znacznie. Gdy niewielkie zmiany danych dają niewielkie zmiany rozwiązania mówimy że układ równań jest dobrze uwarunkowany, w przeciwnym razie nazywamy go źle uwarunkowanym.

Bardzo ważne jest to abyśmy potrafili stwierdzać które układy są dobrze uwarunkowane ponieważ będzie to wpływało na dokładność wyników naszych obliczeń w systemach które mają arytmetykę skończonej precyzji jak i na efektywność samych algorytmów używanych do rozwiązywania takich układów.

Narzędziem które pozwala nam na określenie uwarunkowania układu równań linowych jest $\boldsymbol{K}$ (kappa) i jest to współczynnik uwarunkowania układu równań. W zadaniu mamy dwie macierze symetryczne, a więc możemy wykorzystać współczynnik uwarunkowania dla macierzy symetrycznej który wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{K} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$\|A\|$ to norma macierzy symetrycznej równa jej największej pod względem modułu wartości własnej, czyli $\max_j |\lambda_j|$

$||A^{-1}||$ to norma macierzy odwrotnej do A, czyli $\max_j \left|\frac{1}{\lambda_j}\right| = \frac{1}{\min_j |\lambda_j|}$, dzieje się tak ponieważ macierz odwrotna do danej ma te same wektory własne ale jej wartości własne są odwrotnościami

Podstawiając otrzymujemy że

$$\boldsymbol{K} = \frac{\max_j |\lambda_j|}{\min_j |\lambda_j|}$$

Im mniejszy współczynnik uwarunkowania tym układ równań jest lepiej uwarunkowany i bardziej odporny na zaburzenia danych.

Podczas obliczania równań wykorzystana została funkcja biblioteki numerycznej NumPy o nazwie linalg.solve(). Funkcja ta przyjmuje macierz współczynników i wektor wyrazów wolnych, a zwraca wektor rozwiązań. Wewnątrz najpierw przeprowadza faktoryzację LU z częściowym pivotingiem, a następnie przy jej pomocy oblicza równania.

5. Wyniki

Rozwiązaniem równania $A_1y_1=b$ jest wektor:

$y_1= (3.28716602, 3.8029998, 0.25146854, -1.57875474, -0.50410395)^T$

Rozwiązaniem równania $A_2y_2=b$ jest wektor:

$y_2= (3.18374857, 3.94032033, 0.27419287, -1.47117406, -0.31318674)^T$

Rozwiązaniem równania $A_1y'_1=b'$ jest wektor:

$y'_1= (16.74173332, -14.06233583, -2.70495914, -15.57494944, -25.34234556)^T$

Rozwiązaniem równania $A_2y'_2=b'$ jest wektor:

$y'_2= (3.18375389, 3.94032237, 0.27419131, -1.47117514, -0.31318814)^T$

Wartość długości wektora różnicy między rozwiązaniami dla macierzy A_1:

$\Delta_1= 36.35612431941617$

Wartość długości wektora różnicy między rozwiązaniami dla macierzy A_2:

$\Delta_2= 0.000006166739465500 47$

6. Wnioski

Jak widać obie długości wektora nie są do siebie zbliżone mimo że poszczególne elementy macierzy różniły się tylko o kilka miejsc dziesiętnych. Widać to tak samo porównując wektory rozwiązań y i y'. Dla pierwszej macierzy mamy większe rozwiązania po zaburzeniu danych. Macierz pierwsza jest więc źle uwarunkowana. Możemy to też pokazać obliczając współczynnik ***K*** dla oby tych macierzy. W programie zawarte są dodatkowe instrukcje które to robią. Dla macierzy A_1 współczynnik uwarunkowania wynosi około 39295747, gdzie dla macierzy A_2 wynosi on około 4, co potwierdza nasze wnioski.