

DESENVOLVIMENTO DE UMA CALCULADORA FASORIAL

GABRIEL BARBOSA*

*12/0050935

Email: gabrielfbbarbosa@gmail.com

Resumo— 30 de Novembro de 2016 – Fasores trouxeram a solução para muitos problemas na área de eletromagnetismo. Entretanto, eles ainda exigem muitos cálculos quando temos que lidar com eles. Esse projeto foi desenvolvido com o objetivo de facilitar toda a matemática envolvida com fasores.

Palavras-chave— ferramenta, fasor, cálculo, visualização, operação

1 Introdução

O Professor Marco Terada, que ministra a aula de Eletromagnetismo 1, solicitou para a turma desenvolver apresentações e/ou projetos baseados na matéria ensinada e que pudessem de certa forma contribuir com a proposta sugerida. Enquanto alguns optaram por ir pelo lado científico e abordar fenômenos eletromagnéticos, peculiaridades, como podemos aproveitá-los e todo o raciocínio científico-matemático por trás deles, eu decidi ir por um caminho diferente. Eu optei pelo caminho de buscar algo prático que poderiam ajudar imediatamente estudantes e também profissionais da área que necessitam de uma solução mais pragmática para cálculos que envolvem fasores.

Quando se está lidando com circuitos elétricos e existe uma incitação senoidal, a presença de fasores é indispensável. Aprender como eles funcionam, o que representam e como trabalhar com eles é de extrema importância. Entretanto, quando já se tem essa teoria por trás, infelizmente a dificuldade de trabalhar com fasores continua existindo. Eles vieram como um auxílio para resolver circuitos elétricos de excitação senoidal mas continuam sendo difíceis de lidar. Porquê então não facilitar o uso deles? E é aí que habita a minha proposta.

O que sugiro e inicio a implementação nesse projeto é uma ferramenta que, inicialmente, foi concebida para operações e visualizações de fasores. Com essa ferramenta, você poderá operar fasores com facilidade, visualizá-los em um gráfico Real x Imaginário e convertê-los entre suas várias possíveis visualizações. O estado atual do projeto é um protótipo semi-funcional com a estrutura praticamente pronta mas precisando de uma limpeza de código para remoção de erros e também por uma melhoria na interface gráfica para se utilizar todos os recursos existentes em seu código por trás.

Um dos requisitos mais importantes que levei em consideração na hora de tomar minhas decisões foi o fato de que desejo que isso seja uma ferramenta utilizada sem dificuldades e não importando que se esteja sendo usada. Esse requisito guiou desde as decisões de quais ferramentas eu usaria até sobre funcionalidades que implementa-

ria. Essas decisões serão explicadas mais adiante com uma exposição não só das outras opções mas também o meu raciocínio por trás de cada decisão.

2 Os Fasores

O conceito de corrente alternada já existe a um bom tempo – o primeiro alternador data de 1832 – e teve vários avanços desde aquela época em diante, mas só foi no final daquele século que os fasores foram inventados e começaram a ser utilizados.

O nome fasor vem do inglês *phasor*, que é a junção de *phase* (fase) e *vector* (vetor), ou seja, um fasor significa também vetor de fase. Um fasor nada mais é do que uma representação usando números complexos de uma função senoidal mas com sua amplitude A , frequência angular ω e fase θ independentes uns dos outros e invariantes no tempo. A grande vantagem de usar fasores é que o uso deles transformam funções trigonométricas em funções algébricas, já que a frequência angular ω geralmente é um fator comum a todos os componentes num mesmo circuito.

2.1 Definição

O princípio básico no qual se baseia a existência dos fasores é uma representação vetorial bidimensional de um movimento harmônico simples. Esse tipo de movimento pode ser descrito pela equação

$$y(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

onde A é a amplitude, ω é a frequência angular e θ é a fase inicial. Se formos considerar uma representação no círculo geométrico do ponto $p(t)$, usando por base a equação 1, obteremos que

$$p(t) = A(\cos(\omega t + \theta) \vec{i} + \sin(\omega t + \theta) \vec{j}),$$

ou também

$$p(t) = (A \cos(\omega t + \theta), A \sin(\omega t + \theta)). \quad (2)$$

Vamos considerar também um vetor $\vec{v}(t)$ que simplesmente sai de $(0,0)$ e aponta para $p(t)$. De

acordo com as formulações de Euler, funções senoidais podem ser representadas por uma combinação de funções exponenciais complexas. No nosso caso, o que mais nos interessa é a representação demonstrada na equação 3 abaixo que é criada com base na equação 2.

$$\vec{v}(t) = (\text{Re}\{Ae^{i\theta}e^{i\omega t}\}, \text{Im}\{Ae^{i\theta}e^{i\omega t}\}) \quad (3)$$

Como já foi abordado mais acima, o termo que envolve a frequência angular ω é o mesmo para todos os fasores do mesmo sistema sendo, portanto, ignorado. O que significa que o termo interno aos operadores Re e Im, $Ae^{i\theta}e^{i\omega t}$, pode ser escrito da forma simplificada $Ae^{i\theta}$.

2.2 Representações

Um fasor, assim como um vetor tradicionalmente falando, possui várias formas de ser representado. Cada forma favorece, ou enfatiza, uma característica diferente mas sempre representa a mesma coisa. Cada situação pode ser mais fácil de se lidar usando uma representação diferente, e é nesse ponto que a vantagem se torna desvantagem, pois, o fato de haver várias representações força que está trabalhando com fasores a constantemente converter de uma para outra e com rapidez. E converter de uma forma para a outra nem sempre é uma tarefa trivial. As formas de representação estão descritas a seguir.

Representação senoidal Essa é a representação usada e demonstrada na equação 1. Ela é a mais fácil de se entender quais são os efeitos práticos de cada operação matemática mas, em contrapartida, uma das mais trabalhosas de se fazer (dependendo da operação, obviamente).

$$\vec{v}(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

Representação exponencial Como discutido ao final da seção 2.1, essa representação vem das fórmulas de Euler aplicadas para outras formas de demonstrar uma fórmula senoidal usando fórmulas exponenciais. Elas são as que ficam no meio termo entre facilidade de uso e facilidade de compreensão.

$$\vec{v}(t) = Ae^{i\theta}e^{i\omega t}$$

ou

$$\vec{v} = Ae^{i\theta}$$

Representação angular Essa representação é a única das quatro que ainda não apareceu em nenhum lugar neste relatório. Ela é a mais compacta e simples de usar, contudo, para um olho desacostumado, ela pode induzir muito ao erro na hora de se operar com ela. Cuidado nunca é demais. Essa representação é a que representa

maior facilidade de compreensão dentre as quatro, porém, como discutido, é a que pode causar maior confusão para quem não está acostumado.

$$\vec{v} = A \angle \theta$$

Representação complexa Essa forma também já apareceu anteriormente e ela aparenta ser mais complicada do que realmente é. A diferença é que ela usualmente só é usada quando o valor de t é dado. Ela pode ser usada sem essa condição mas geralmente é a mais difícil e é maior representação possível. Quando se tem um tempo t conhecido, ela pode se tornar bem pequena. Ela é de extrema utilidade no caso desse relatório pois uma representação complexa pode ser facilmente transformada em um vetor bidimensional para plotagem em um gráfico.

$$\vec{v}(t) = A(\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta))$$

2.3 Aritmética

O principal propósito da criação dos fasores é permitir uma facilidade em lidar com circuitos de excitação senoidal. Portanto, eles não são usados só para visualização de características do circuito mas para cálculos. O que significa que, a existência de uma aritmética de fasor é imprescindível. Pelas características do fasor, suas operações podem ocorrer entre escalares complexos, entre fasores de mesma frequência e entre fasores de frequências diferentes.

Todas as operações demonstradas a seguir serão para fasores de frequências diferentes mas podem ser extrapoladas para fasores com frequências iguais. Simplificações para esses casos serão demonstradas, caso existam. Quando temos que operar com escalares complexos, basta considerá-los como fasores com frequência angular igual ao outro operando.

Adição Para obtermos $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t)$, a operação descrita abaixo precisa ocorrer.

$$\vec{z}(t) = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x) + A_y \cos(\omega_y t + \theta_y)$$

Se $\omega_x = \omega_y$, podemos utilizarmos a visualização complexa para fazer a soma e depois retornar para a visualização senoidal, obtendo assim que

$$A_z = \sqrt{(A_x \cos \theta_x + A_y \cos \theta_y)^2 + (A_x \sin \theta_x + A_y \sin \theta_y)^2}$$

$$\theta_z = \arctan \left(\frac{A_x \sin \theta_x + A_y \sin \theta_y}{A_x \cos \theta_x + A_y \cos \theta_y} \right) \quad (4)$$

Subtração/Oposto A subtração não é nada além de uma soma com o oposto do segundo termo, $A - B = A + (-B)$, portanto, para se realizar uma subtração, basta calcularmos o oposto do segundo termo e realizar o mesmo procedimento

de uma soma. O oposto pode ser obtido de duas formas: invertendo o sinal da magnitude ou se somando 180° (ou π radianos) à fase. O que significa que se $\vec{z}(t) = -\vec{y}(t)$, obtemos que

$$\vec{z}(t) = -A_y \cos(\omega_y t + \theta_y) = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y + \pi),$$

ou seja,

$$A_z = -A_y$$

$$\theta_z = \theta_y$$

ou

$$A_z = A_y$$

$$\theta_z = \theta_y + \pi \quad (5)$$

Multiplicação Se desejarmos calcular a multiplicação $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{y}(t)$, o resultado é

$$\vec{z}(t) = A_x A_y \cos(\omega_x t + \theta_x) \cos(\omega_y t + \theta_y)$$

Se considerarmos $\omega_x = \omega_y$, a visualização exponencial será a melhor e mais fácil para se realizar a operação. Ao se transformar de volta para uma visualização senoidal, obtemos

$$A_z = A_x \times A_y$$

$$\theta_z = \theta_x + \theta_y \quad (6)$$

Divisão/Inversão A divisão, assim como a subtração, pode ser obtida de outras formas. No caso da divisão, é uma operação de multiplicação no qual o segundo elemento está invertido, ou seja, $\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B}$. Para se realizar a operação de inversão em um fasor, basta inverter a magnitude e inverter o sinal da fase, isto é, subtrair 360° (2π radianos) da fase atual. O que significa que se $\vec{z}(t) = \frac{1}{\vec{y}(t)}$, obtemos que

$$\vec{z}(t) = \frac{1}{A_y} \cos(\omega_y t + 2\pi - \theta_y),$$

ou seja,

$$A_z = \frac{1}{A_y}$$

$$\theta_z = 2\pi - \theta_y \quad (7)$$

Conjugação Complexa Essa operação é extremamente trivial de se fazer numa representação complexa e se traduz também de forma simples para as outras representações. Abaixo já está a representação senoidal da operação $\vec{z}(t) = \vec{y}^*(t)$.

$$\vec{z}(t) = A_y \cos(\omega_y t + 2\pi - \theta_y)$$

O que significa

$$A_z = A_y$$

$$\theta_z = 2\pi - \theta_y \quad (8)$$

Derivação A derivação é um procedimento mais complexo do que o abordado anteriormente mas pode ser realizado através da representação exponencial. Como $i\omega = \omega e^{i\frac{\pi}{2}}$, obtemos que, para $\vec{z}(t) = \frac{d(\vec{y}(t))}{dt}$,

$$\vec{z}(t) = \omega_y A_y \cos\left(\omega_y t + \theta_y + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ou seja,

$$A_z = A_y \omega_y$$

$$\theta_z = \theta_y + \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Integração A integração pode ser vista, nesse contexto, como a operação inversa da derivada, da mesma forma que a divisão é a operação inversa da multiplicação e a subtração é a operação inversa da adição. Se formos realizar o mesmo procedimento que o tópico anterior mas para a integração, chegamos que basta multiplicar por $\frac{1}{i\omega} = \frac{1}{\omega e^{i\frac{\pi}{2}}}$. Isso significa que a operação $\vec{z}(t) = \int \vec{y}(t) dt$ resulta em

$$\vec{z}(t) = \frac{A_y}{\omega_y} \cos\left(\omega_y t + \theta_y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ou seja,

$$A_z = \frac{A_y}{\omega_y}$$

$$\theta_z = \theta_y - \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

Quando se está lidando com fasores com frequências angulares ω diferentes, a aritmética pode ficar muito complexa e gerando sistemas com múltiplas oscilações. Dependendo de quantos fasores de frequências diferentes forem somados, o resultado pode ser inviável, computacionalmente falando. Entretanto, ainda assim é possível essas operações com facilidade por um computador. Para isso, basta o tempo t ser fornecido.