TFYA

Technická fyzika pro FEL
Příklady ze cvičení

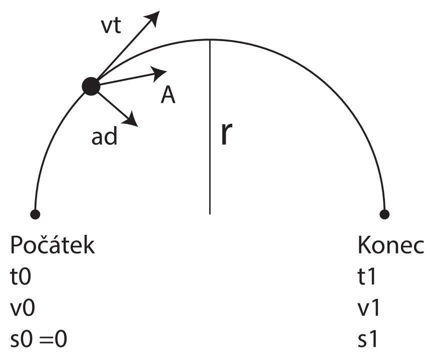
Vlak po kruhové dráze

Vlak se pohybuje po kruhové dráze o poloměru $\boldsymbol{r}$ v počátečním okamžiku má vlak rychlost $\boldsymbol{v_0}$ a v koncovém $\boldsymbol{v_1}$, mezi počátečním a koncovým bodem vlak urazil dráhu **s**.

- Určete dobu **T** potřebnou k uražení dráhy **s**.
- Určete vztah pro velikost celkového zrychlení **A** vlaku.

Potřebné vztahy

$$a = \tfrac{dv}{dt};\ a_n = \tfrac{v^2}{r};\ a = \tfrac{ds}{dt};\ c^2 = a^2 + b^2$$



Obrázek 1: Náčrt průběhu

Pohyb rovnoměrně zpomalený ⇒ a<0; konst.

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$dv = a \cdot dt$$
$$v = \int a\, dt$$
$$v = a \cdot \int 1\, dt$$
$$v = a \cdot t + C_1$$
$$\boldsymbol{v = at + v_0}$$

Vyjádříme dráhu

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$ds = v \cdot dt$$
$$s = \int v \, dt$$
$$s = \int (at + v_0) \, dt$$
$$\boldsymbol{s = \frac{a \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0}$$

Vyjádření $Konec - Počátek$

Počátek (t_0, v_0, s_0)

$$v_0 = at_0 + v_0$$
$$s_0 = \frac{1}{2} \cdot at_0^2 + v_0 \cdot t_0$$

Konec (t_1, v_1, s_1)

$$v_1 = at_1 + v_0$$
$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot at_1^2 + v_0 \cdot t_1$$

Konec-Počátek

$$v_1 - v_0 = at_1 + v_0 - (at_0 + v_0)$$
$$s_1 - s_0 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 - \left(\frac{1}{2}at_0^2 + v_0t_0\right)$$

Úprava na soustavu

$$
\begin{aligned}
v_1 - v_0 &= at_1 + v_0 - (at_0 + v_0) \\
s_1 - s_0 &= \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 - \left(\frac{1}{2}at_0^2 + v_0 t_0\right) \\
v_1 - v_0 &= at_1 - at_0 \\
\underbrace{s_1 - s_0}_{S} &= \frac{1}{2}a(\underbrace{t_1 - t_0}_{T})^2 + v_0(\underbrace{t_1 - t_0}_{T})
\end{aligned}
$$

Výsledná soustava

$$
\begin{aligned}
v_1 &= aT + v_0 \\
S &= \frac{1}{2}aT^2 + v_0 T
\end{aligned}
$$

Výsledný vztah soustavy

$$
\begin{aligned}
a_t &= \frac{v_1^2 - v_0^2}{2S} \\
T &= \frac{2S}{v_0 + v_1}
\end{aligned}
$$

Celkové zrychlení

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \\
A &= \sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2S}\right)^2}
\end{aligned}
$$

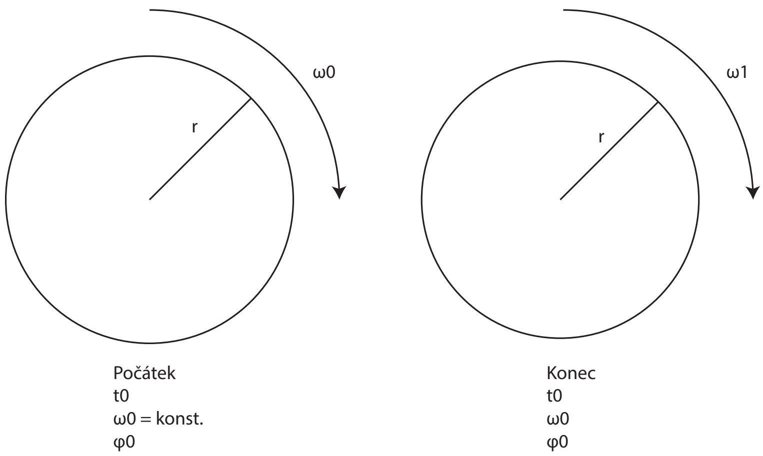
Rotor motoru

Rotor motoru o poloměru $\boldsymbol{r}$ zvýšil své otáčky z hodnoty $\boldsymbol{\omega_0}$ na hodnotu $\boldsymbol{\omega_1}$ za dobu $\boldsymbol{T}$

- Určete úhlové zrychlení rotoru $\boldsymbol{\epsilon}$ a počet otáček vykonaných za dobu $\boldsymbol{T}$

Potřebné vztahy

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt};\ \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$



Obrázek 1: Náčrt průběhu

Vyjádření

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$$
$$d\omega = \epsilon \cdot dt;$$
$$\omega = \int \epsilon \, dt$$
$$\omega = \epsilon t + C_1$$
$$\boldsymbol{\omega = \epsilon t + \omega_0}$$

$\omega_1 > \omega_0$, pohyb rovnoměrně zrychlený $\epsilon = \mathbf{C}$, $\epsilon > 0$

Počátek (ω_0, t_0)

$$\omega_0 = \epsilon t_0 + \omega_0$$

Konec (ω_1, t_1)

$$\omega_1 = \epsilon t_1 + \omega_0$$

Konec - Počtek

$$\begin{aligned}
\omega_1 - \omega_0 &= \epsilon t_1 + \omega_0 - (\epsilon t_0 + \omega_0) \\
\omega_1 &= \epsilon \cdot (\underbrace{t_1 - t_0}_{T}) + \omega_0 \\
\omega_1 &= \epsilon(T) + \omega_0 \\
\epsilon &= \frac{\omega_1 - \omega_0}{T}
\end{aligned}$$

Určení počtu otáček (*musíme znát celý opsaný úhel za dobu* $\boldsymbol{T}$)

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{d\varphi}{dt} \\
d\varphi &= \omega \cdot dt \\
\varphi &= \int \omega \, dt \\
\varphi &= \int (\epsilon t + \omega_0) \, dt \\
\varphi &= \frac{1}{2}\epsilon t^2 + \omega_0 t + (C = 0) \\
\varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \epsilon T^2 + \omega_0 T \\
\varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_0}{T} T^2 + \omega_0 T \\
\varphi_1 &= \frac{(\omega_1 - \omega_0)T + 2\omega_0 T}{2}
\end{aligned}$$

Nyní máme výsledný vztah ze kterého získáme počet otáček

$$N = \tfrac{\varphi_1}{2\pi} = \tfrac{(\omega_1 - \omega_0)T + 2\omega_0 T}{4\pi}$$

Hmotný bod

Hmotný bod, který je na počátku pohybu v klidu, je urychlován zrychlením rovnoměrně narůstajícím během $\boldsymbol{5s}$ z hodnoty $\boldsymbol{5m/s^2}$ na hodnotu $\boldsymbol{15m/s^2}$ a dále narůstá sejným způsobem.

- Určete zrychlení, rychlost a uraženou dráhu v době $\boldsymbol{10s}$ od počátku pohybu.

Potřebné vztahy

$$a = \frac{dv}{dt}; \, v = \frac{ds}{dt}$$

Vyjádření

Zrychlení narůstá rovnoměrně (linárně)

$$a(t) = a_0 + kt$$

Počátek (soustava rovnic)

$$\begin{aligned} 5 &= a_0 + k \cdot 0 \rightarrow a_0 = 5 \\ 15 &= a_0 + k \cdot 5 \rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Zrychlení

$$\begin{aligned} a(t) &= 5 + 2t \\ a(10) &= 25m/s^2 \end{aligned}$$

Výpočet rychlosti

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ dv &= a \cdot dt \\ v &= \int a \, dt \\ v &= \int 5 + 2t \, dt \\ v(t) &= 5t + t^2 \\ v(10) &= 150m/s^2 \end{aligned}$$

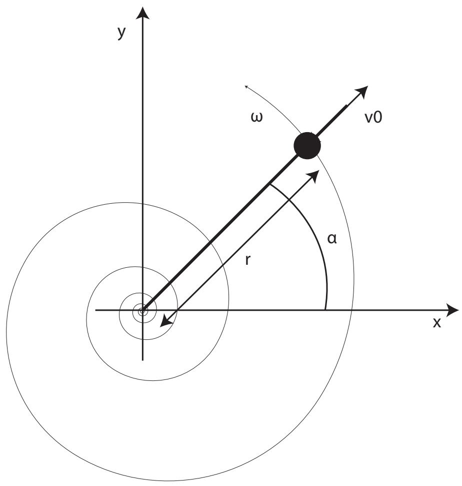
Výpočet dráhy

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} \\
s &= \int v\,dt \\
s &= \int 5t + t^2\,dt \\
s(t) &= \frac{5t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \\
s(10) &= 583m
\end{aligned}
$$

Kulička otáčející se podél tyče

Podél rovnoměrně se otáčející tyče se od jejího upevnění rovnoměrně pohybuje kulička.

- Určete parametrické rovnice dráhy kuličky a její celkové, tečné a normálové zrychlení.



Obrázek 1: Náčrt průběhu

Potřebné vztahy

$$v = \frac{ds}{dt};\ a = \frac{dv}{dt};\ \begin{matrix} cos(x)' = -sin(x) \\ sin(x)' = cos(x) \end{matrix}$$

Odvození souřadnic $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, úhel $\boldsymbol{\alpha}$ a velikost $\boldsymbol{r}$

$$sin(\alpha) = \frac{y}{r}$$
$$cos(\alpha) = \frac{x}{r}$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$
$$r = v_0 \cdot t$$

Vyjádření $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$

$$x = r \cdot cos(\alpha)$$
$$y = r \cdot sin(\alpha)$$

Dosazení do vyjádření za $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{\alpha}$

$$x = v_0 \cdot t \cdot cos(\omega t)$$
$$y = v_0 \cdot t \cdot sin(\omega t)$$

Určení rychlosti

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_x} = \boldsymbol{\frac{dx}{dt}} &\rightarrow (v_0 t \cdot cos(\omega t))' \\
&= (v_0 t)' cos(\omega t) + v_0 t (cos(\omega t))' \\
&= v_0 \cdot cos(\omega t) + v_0 t \cdot (\omega t)' \cdot (cos(\omega t))' \\
&\boldsymbol{= v_0 \cdot cos(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot (-sin(\omega t))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v_y} = \boldsymbol{\frac{dy}{dt}} &\rightarrow (v_0 t \cdot sin(\omega t))' \\
&= (v_0 t)' sin(\omega t) + v_0 t (sin(\omega t))' \\
&= v_0 \cdot sin(\omega t) + v_0 t \cdot (\omega t)' \cdot (sin(\omega t))' \\
&\boldsymbol{= v_0 \cdot sin(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot (cos(\omega t))}
\end{aligned}$$

Celková velikost rychlosti

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$
$v^2 = (v_0 \cdot cos(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot (-sin(\omega t)))^2 + (v_0 \cdot sin(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot (cos(\omega t)))^2$

$v^2 = v_0^2 cos^2(\omega t) \underline{-2v_0^2 sin(\omega t) \cdot cos(\omega t) \cdot t \cdot \omega} + v_0^2 t^2 sin^2(\omega t) \cdot \omega^2 + v_0^2 sin(\omega t)^2 + \underline{2v_0^2 sin(\omega t) \cdot cos(\omega t) \cdot t \cdot \omega} + v_0^2 t^2 \omega^2 cos(\omega t)^2$

$$\begin{aligned}
v_2 &= v_0^2 + cos(\omega t)^2 + v_0^2 sin(\omega t)^2 + v_0^2 t^2 \cdot sin(\omega t)^2 \cdot \omega^2 + v_0^2 t^2 \omega^2 cos(\omega t)^2 \\
&= v_0^2 (\underline{sin(\omega t)^2 + cos(\omega t)^2}) + v_0^2 t^2 \omega^2 \cdot (\underline{sin(\omega t)^2 + cos(\omega t)^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2 &= v_0^2 + v_0^2 t^2 \omega^2 \\
v_2 &= v_0^2 (1 + \omega^2 t^2) \\
v &= sqrt(v_0^2 (1 + \omega^2 t^2)) \\
\boldsymbol{v} &\boldsymbol{= v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}}
\end{aligned}$$

Určení zrychlení

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$= (v_0 \cdot cos(\omega t) - v_0 t \cdot \omega \cdot sin(\omega t))^{'}$$
$$= (v_0 \cdot cos(\omega t))^{'} - (v_0 t \cdot \omega \cdot sin(\omega t))^{'}$$
$$= (-v_0 \cdot \omega \cdot sin(\omega t)) - ((v_0 t \cdot \omega)^{'} \cdot sin(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot sin(\omega t)^{'})$$
$$= (-v_0 \cdot \omega \cdot sin(\omega t)) - (v_0 \cdot \omega \cdot sin(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot cos(\omega t) \cdot \omega)$$
$$\boldsymbol{a_x = -2v_0\omega \cdot sin(\omega t) - v_0 t \cdot \omega^2 \cdot cos(\omega t)}$$

$$a_x = \frac{dv_y}{dt}$$

$$= (v_0 \cdot sin(\omega t) - v_0 t \cdot \omega \cdot cos(\omega t))^{'}$$
$$= (v_0 \cdot sin(\omega t))^{'} - (v_0 t \cdot \omega \cdot cos(\omega t))^{'}$$
$$= (v_0 \cdot \omega \cdot cos(\omega t)) - ((v_0 t \cdot \omega)^{'} \cdot cos(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot cos(\omega t)^{'})$$
$$= (v_0 \cdot \omega \cdot cos(\omega t)) - (v_0 \cdot \omega \cdot cos(\omega t) + v_0 t \cdot \omega \cdot (-sin(\omega t) \cdot \omega))$$
$$\boldsymbol{a_y = 2v_0\omega \cdot cos(\omega t) - v_0 t \cdot \omega^2 \cdot (-sin(\omega t))}$$

Celkové zrychlení

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2$$
$$a^2 = (-2v_0\omega \cdot sin(\omega t) - v_0 t \cdot \omega^2 \cdot cos(\omega t))^2 + (2v_0\omega \cdot cos(\omega t) - v_0 t \cdot \omega^2 \cdot (-sin(\omega t))^2$$
$$= \text{o mnoho derivací později}$$
$$\boldsymbol{a = v_0 \cdot \omega \cdot \sqrt{4 + \omega^2 t^2}}$$

Tečné zrychlení určíme z derivace celkového rychlosti

$$a_t = (v_0 \cdot \sqrt{1 + \omega^2 t^2})^{'}$$
$$= v_0 \cdot 2\omega^2 t + \frac{1}{2\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}$$
$$\boldsymbol{a_t = \frac{v_0 \omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}}$$

Určení normálového zrychlení

$$a_2 = a_t^2 + a_n^2 \rightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2$$

$$a_n = v_0^2 \omega^2 (4 + \omega^2 t^2) - \frac{v_0^2 \omega^4 t^2}{1 + \omega^2 t^2}$$
$$\boldsymbol{a_n = \frac{v_0 \omega (2 + \omega^2 t^2)}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}}$$

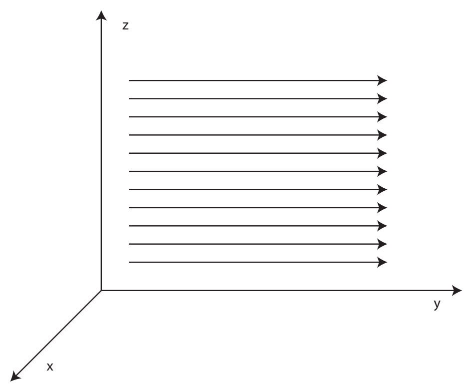
Těleso ve stacionárním a homogením poli

Zjistěte, jak se pohybuje bodové těleso ve stacionárním homogenním silovém poli (takovým polem může být gravitační nebo elektrostatické pole).

Potřebné vztahy

$$v = \frac{ds}{dt};\ a = \frac{dv}{dt};\ F = m \cdot a$$

Stacionární pole = neměné v čase t.
Homogenní pole = nezávislost vektoru síly na čase.



Obrázek 1: Náčrt průběhu

Souřadný systém zvolíme tak, aby vektor síly byl rovnoběžný s osou („**y**“)

$$\overrightarrow{F} = F_y (\text{ostatní složky vektoru síly budou 0})$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = m \cdot a_x \\ F_y = m \cdot a_y \\ F_z = m \cdot a_z \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Pohyb ve směru } \mathbf{x,y} \text{ bude rovnoměrný} \\ \text{a ve směru } \mathbf{y} \text{ rovnoměrně zrychlený} \end{array}$$

Určení rychlosti

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$dv_x = a_x \cdot dt$$

$$v_x = \int a_x \, dt$$

$$\boldsymbol{v_x = 0 + v_{x0}}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$
$$dv_y = a_y \cdot dt$$
$$v_y = \int \frac{F}{m}\,dt$$
$$\boldsymbol{v_y = \frac{F}{m}t + v_{y0}}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$
$$dv_z = a_z \cdot dt$$
$$v_z = \int az\,dt$$
$$\boldsymbol{v_z = 0 + v_{z0}}$$

Existuje takové natočení souřadného systému, kde bude např. $\boldsymbol{V_{z0} = 0}$ (Počáteční rychlost ve směru osy $\boldsymbol{z}$)

$$v_x = v_{x0}$$
$$v_y = \frac{F}{m}t + v_{y0} \rightarrow \text{jedná se o rovinný pohyb}$$
$$v_z = 0$$

Určení trajektorie

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$dx = v_{x0}dt$$
$$x = \int v_x\,dt$$
$$\boldsymbol{x = v_{x0}t + x_0}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$
$$dy = v_y dt$$
$$y = \int \frac{F}{m}t + v_{y0}\,dt$$
$$\boldsymbol{y = \frac{F}{2m}t^2 + v_{y0}t + y_0}$$

$$\begin{aligned} v_z &= \frac{dz}{dt} \\ dz &= v_z dt \\ z &= \int v_z \, dt \\ \boldsymbol{z} &\boldsymbol{= 0} \end{aligned}$$

Zvolený souřadnicový systém lze ještě posunout tak, aby v čase $\boldsymbol{t = 0}$ procházelo bodové těleso počátkem.

$$\begin{aligned} x &= v_{x0} t \\ y &= \frac{F}{2m} t^2 + v_{y0} t \\ z &= 0 \end{aligned}$$

- $v_{x0} \to y = y(t) \to$ posun po přímce
- $v_{x0} \neq 0$

Vyjádření parametru
$t = \frac{x}{v_0}$
$\frac{F}{2m} \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + v_{y0} \left(\frac{x}{v_0}\right)$
$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{2m} \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + v_{y0} \left(\frac{x}{v_0}\right)$

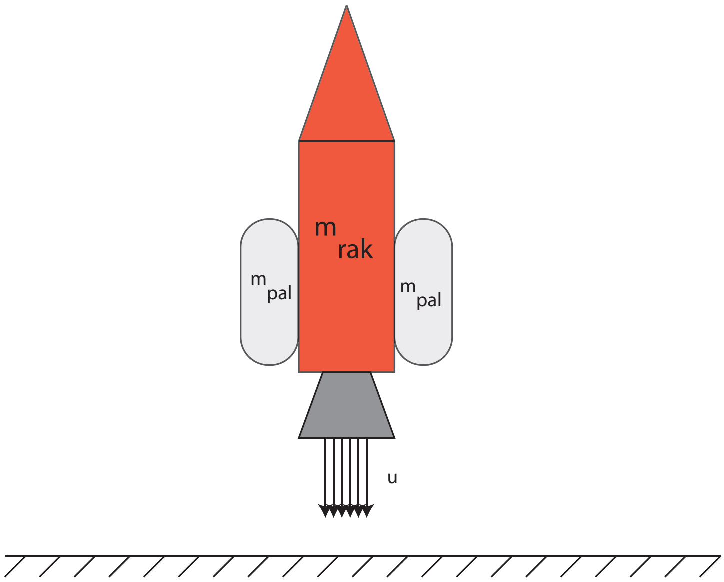
Raketa

Raketa o hmotnosti $\boldsymbol{m_{rak}}$ nese pohonné látky o hmotnosti $\boldsymbol{m_{pal}}$ a plyny tryskají z rakety rychlostí $\boldsymbol{u}$.

- Určete možné zvýšení rychlosti rakety v kosmickém prostoru (zanedbáváme odpor vzduchu a gravitační pole země).

Potřebné vztahy

$$p = m \cdot v$$



Obrázek 1: Náčrt průběhu

Plyny z rakety tvoří izolovaný systém → zákon zachování hybnosti
hybnost před zapálením motoru = hybnost systému po zapálení motoru

$$p(t) = m(t) \cdot v(t) \rightarrow \text{hybnost rakety}$$
$$p(t+dt) = m(t+dt) \cdot v(t+dt) + \underbrace{\boldsymbol{\mu}^*}_{\text{hybnost tryskajících plynů}} (v(t+dt) - u)$$

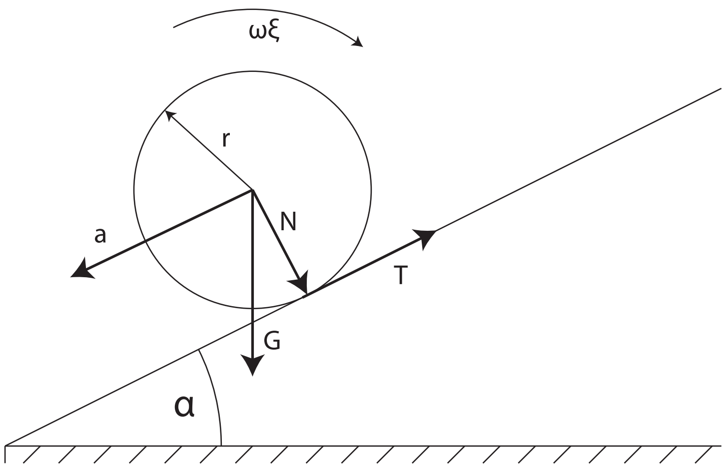
$$m(t+dt) = m(t) + dm$$
$$v(t+dt) = v(t) + dv$$
$$\mu = -dm$$
$$p(t) = p(t+dt)$$

$$m(t)\cdot v(t) = (m(t)+dm)\cdot(v(t)+dv) - dm(v(t)+dv-\mu)$$
$$m(t)\cdot v(t) = m(t)\cdot v(t) + m(t)dv + dmv(t) + dmdv - dmv(t) - dmdv + \mu dm$$

$$\begin{aligned}
m(t)dv &= -\mu dm \\
dv &= -\mu \cdot \frac{1}{m(t)}dm \\
\int_{v_0}^{v} dv &= -\mu \int_{m_{rak}+m_{pal}}^{mrak} \frac{1}{m(t)}\,dt \\
\underbrace{v-v_0}_{\delta-\text{možné zvýšení rychlosti}} &= -\mu\cdot(ln(m_{rak}) - ln(m_{rak}+m_{pal})) \\
\Delta v &= -\mu\left(ln\left(\frac{m_{rak}}{m_{rak}+m_{pal}}\right)\right) \\
\Delta v &= -\mu\left(-ln\left(\frac{m_{rak}+m_{pal}}{m_{rak}}\right)\right) \\
\Delta v &= \mu ln\left(\frac{m_{rak}}{m_{pal}} + \frac{m_{pal}}{m_{rak}}\right) \\
\boldsymbol{\Delta v} &\boldsymbol{= \mu ln\left(1+\frac{m_{pal}}{m_{rak}}\right)}
\end{aligned}$$

Nakloněná rovina

Vyšetřete pohyb kuličky na nakloněné rovině. Jak závisí rychlost, kterou kulička získá na výškovém rozdílu mezi počáteční a koncovou polohou. Koeficient smykového tření $\boldsymbol{j}$ je znám.



Obrázek 1: Náčrt průběhu

Potřebné vztahy

$$F = m \cdot a$$
$$I \cdot \epsilon = F \cdot r \rightarrow \text{II. impulzová věta}$$
$$\text{moment setrvačnosti} \cdot \text{úhlové zrychlení} = \text{moment síly}$$
$$T = j \cdot N \rightarrow \text{přítlačná síla}$$
$$E_{pot} = mgh$$
$$E_{kin} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

1. posuvný pohyb těžiště

$$m \cdot a = sin(\alpha) \cdot m \cdot g - T$$

2. valení kuličky

$$I \cdot \epsilon = T \cdot r$$

3. interakce kuličky a podložky

$$N = cos(\alpha) \cdot m \cdot g$$

My budeme řešit dva případy

a) Tření je menší než maximální možné $T < j \cdot N$ v tomto případě bude kulička konat valivý pohyb bez prokluzování tj.

$$a = \epsilon \cdot r;\ v = \omega \cdot r\ I = \tfrac{2}{5}mr^2$$

Dosadíme do rovnice z bodu 2)

$$\frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r} = T \cdot r$$
$$\boldsymbol{T = \frac{2}{5} m \cdot a} \rightarrow \text{dosadíme do rovnice z bodu 1)}$$
$$m \cdot a = sin(\alpha) \cdot m \cdot g - \boldsymbol{\frac{2}{5} m \cdot a}$$
$$a + \frac{2}{5} = g \cdot m \cdot sin(\alpha)$$
$$\frac{7}{5} \cdot a = g \cdot sin(\alpha)$$
$$\boldsymbol{a = \frac{5}{7} \cdot g \cdot sin(\alpha)}$$

Dosadíme do rovnice T...

$$T = \frac{2}{5}m \cdot \frac{5}{7}g \cdot sin(\alpha)$$
$$\boldsymbol{T = \frac{2}{7} m \cdot g \cdot sin(\alpha)}$$

Podmínka pro čistě valivý odpor

Určení rychlosti (nejsou ztráty třením)
Musí platit zákon zachování energie → potenciální energie kuličky se převede na pohybovou energii kuličky

$$E_{kin}^{poč} + E_{pot}^{poč} = E_{kin}^{konec} + E_{pot}^{konec}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}m\cancel{r^2}\frac{v^2}{\cancel{r^2}}$$
$$\cancel{m}gh = \frac{7}{10}\cancel{m}v^2$$

$v = \sqrt{\frac{7}{10}gh} \rightarrow$ rychlost pohybu při čistě valivém posuvu

b) Tření je maximální (prokluzování) Dosadíme do rovnice 1)

$$\cancel{m} \cdot a = sin(\alpha) \cdot \cancel{m} - f \cdot cos(\alpha) \cdot \cancel{m} \cdot g$$
$$a = g \cdot sin(\alpha) - f \cdot g \cdot cos(\alpha)$$
$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow v = \int a\,dt$$

Určení rychlosti

$$v = \int g \cdot sin(\alpha) - fg \cdot cos(\alpha)\,dt$$
$$v = g\int sin(\alpha) - f \cdot cos(\alpha)\,dt$$
$$\boldsymbol{v = gt(sin(\alpha) - f \cdot cos(\alpha))}$$

Určení dráhy

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow s = \int c\,dt$$
$$s = \int gt(sin(\alpha) - f \cdot cos(\alpha))\,dt$$
$$s = \frac{gt^2(sin(\alpha) - f \cdot cos(\alpha))}{2}$$

Porovnáním rovnic

$$s = \frac{1}{2}at^2 \cdot a \cdot v = at$$
$$t^2 = \frac{2s}{a}$$
$$v^2 = a^2 \cdot \frac{2s}{a} \rightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{2sa}}$$
$$v = \sqrt{\frac{2gh(sin(\alpha) - f \cdot cos(\alpha))}{sin(\alpha)}}$$
$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh(1 - f \cdot cotg(\alpha))}}$$

Toto je rychlost posuvného pohybu kuličky při otáčivém pohybu s prokluzováním v závislosti na výškovém rozdílu mezi počáteční a koncovou polohou na nakloněné rovině.

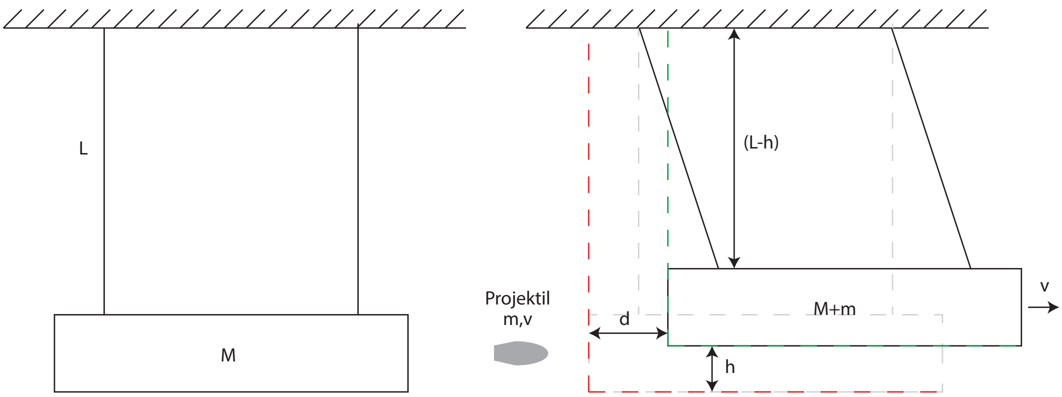
Balistické kyvadlo

Balistické kyvadlo tvořeno truhlíkem s pískem je zavěšeno na dlouhých drátech. Střelíme-li do truhlíku střelu, kyvadlo se vychýlí.

- Na základě výchylky určete rychlost střely

Potřebné vztahy

$$p = m \cdot v;\ E_{kin} = \tfrac{1}{2}mv^2;\ E_{pot} = mgh$$



Obrázek 1: Náčrt průběhu (před nárazem a po nárazu)

Kinetická energie se přemění na energii potenciální

Zákon zachování hybnosti (ZZH)

$$\underbrace{Mv}_{\text{truhlík}} + \underbrace{mv}_{\text{střela}} = \underbrace{(M+m)}_{\text{truhlík + střela}} \cdot v$$

$$v = \frac{m \cdot v}{M + m}$$

Zákon zachování energie (ZZE)

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$$

Výška „h“ bude v praxi velice malá (h≪d) a velice špatně měřitelná, proto použije pyth. větu.

$$
\begin{aligned}
L^2 &= (L-h)^2 + d^2 \\
\cancel{L^2} &= \cancel{L^2} - 2Lh + \cancel{h^2} + d^2 \\
d^2 &\approx 2Lh \\
\boldsymbol{h} &= \boldsymbol{\frac{d^2}{2L}}
\end{aligned}
$$

Dosazení

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{2g\frac{d^2}{2L}} \rightarrow v = d\sqrt{\frac{g}{L}} \\
d\sqrt{\frac{g}{L}} &= \frac{m \cdot v}{M+m} \\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\frac{M+m}{m} \cdot d\sqrt{\frac{g}{L}}}
\end{aligned}
$$

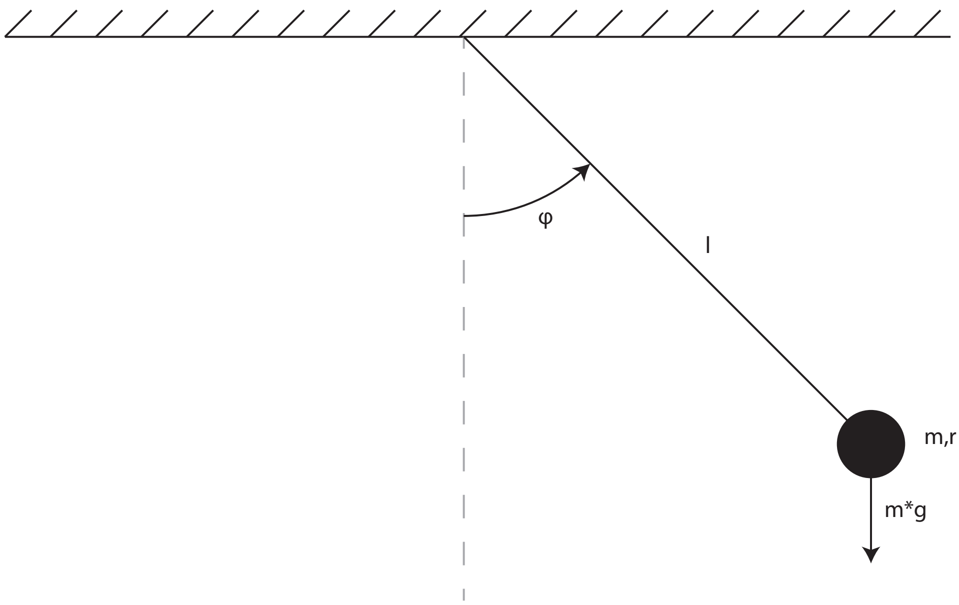
Koule na závěsu

Koule zadaného poloměru „$\boldsymbol{r}$“ se mírně kývá na závěsu délky „$\boldsymbol{l}$“.

- Spočtěte dobu kyvu kyvadla
- Jaké chyby se dopustíme, budeme-li považovat kouli za hmotný bod

Potřebné vztahy

$$I \cdot \epsilon = M;\ \vec{M} = \vec{F} \times \vec{l};\ \epsilon = \frac{d\omega}{dt};\ I = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \varphi \rightarrow \text{pohybová rovnice mat.kyvadla}$$



Obrázek 1: Náčrt situace

$$T_{kmit} = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T_{kyv} = \frac{1}{2}T_{kmit} \rightarrow \boldsymbol{T_{kyv} = \frac{\pi}{\omega}}$$

Doba kyvu

$$\vec{M} = \vec{F_g} \times \vec{l}$$
$$\vec{M} = \left|F_g\right| \cdot |l| \cdot sin(\varphi)$$
$$M = (-)mgl \cdot sin(\varphi)$$

$(-)$vyjadřuje skutečnost, že moment síly má opačný směr

Pokud $\varphi < 5°$platí $\varphi \approx sin(\varphi)$

$$I \cdot \epsilon = M$$

$$\left(\frac{2}{5}\cancel{m}r^2 + \cancel{m}l^2\right)\frac{d^2\varphi}{t^2} = -\cancel{m}gl\varphi$$

$$\left(\frac{2}{5}r^2 + l^2\right)\frac{d^2\varphi}{t^2} = -gl\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{t^2} = \underbrace{\left(-\frac{gl}{\frac{2}{5}r^2 + l^2}\right)}_{\omega} \cdot \varphi$$

Z rovnice výše vidíme že ω má význam pro matematické kyvadlo.

Vyjádříme ω

$$\omega = \sqrt{\frac{gl}{\frac{2}{5}r^2+l^2}}$$

Spočteme T_{kyv}

$$T_{kyv} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$T_{kyv} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2 + l^2}{gl}}$$

$$T_{kyv} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2}{gl} + \frac{l^2}{gl}}$$

$$T_{kyv} = \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{5}\frac{r^2}{gl} + \frac{l}{g}}$$

$$T_{kyv} = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{5}\frac{r^2}{gl}} + \sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

$$T_{kyv} = \underbrace{\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}_{\text{mat.kyvadlo}} + \underbrace{\pi \cdot \sqrt{\frac{2r^2}{5gl}}}_{\text{korekce na kouli}}$$

$$\boldsymbol{T_{kyv} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{r^2}{t}\right)}}$$

Miska s plastelínou

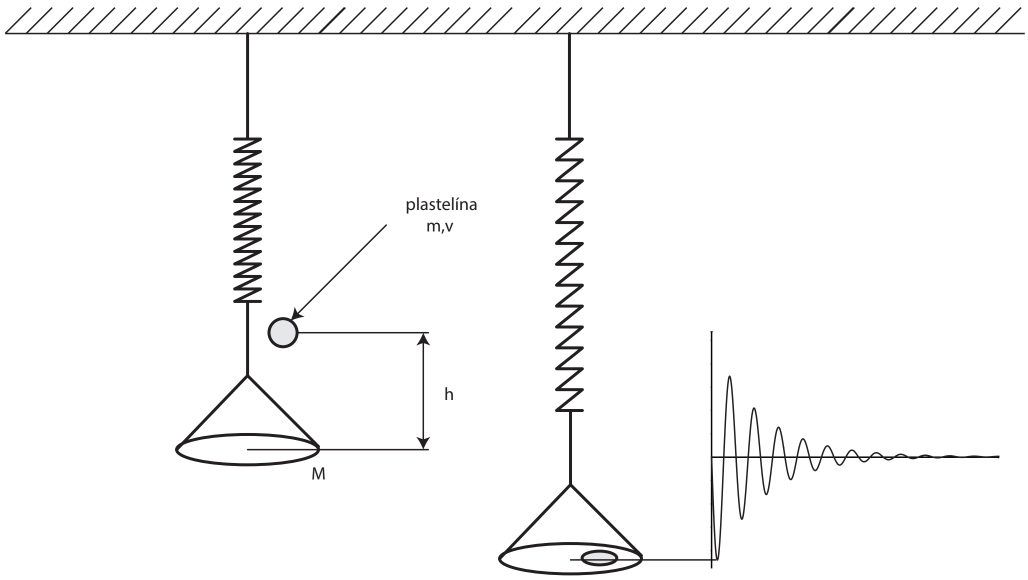
Na misku zavěšenou na pružině dopadne z výšky „$\boldsymbol{h}$“ kousek plastelíny a přilepí se. Miska s plastelínou začne kmitat.

- Určete počáteční amplitudu kmitů.

Známe hmotnost misky i plastelíny a tuhost pružiny.

Potřebné vztahy

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2;\ E_{pot} = mgh;$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow volná frekvence$$
$$p = m \cdot v$$
$$F = \underbrace{k}_{\text{tuhost pružiny}} \cdot \underbrace{x}_{\text{prodloužení}}$$
$$x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$$



Obrázek 1: Náčrt situace

1. Určení rychlosti při dopadu ZZH:

$$\text{před} = \text{po}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$$

2. Určení rychlosti misky s plastelínou těsně po dopadu

$$\text{před} = \text{po}$$
$$\underbrace{M \cdot \varnothing}_{\text{miska}} + \underbrace{m \cdot v}_{\text{plastelína}} = (m+M) \cdot V$$
$$V = \frac{mv}{M+m}$$
$$V = \frac{m \cdot \boldsymbol{\sqrt{2gh}}}{M+m}$$

3. Vyjádříme okamžitou rychlost

$$x = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = \frac{dx}{dt}$$
$$\boldsymbol{v = -A \cdot \omega \cdot sin(\omega t + \varphi)}$$

Určení počáteční amplitudy = musíme dosadit počáteční podmínky x(0).

4. Dosazení za $t = 0$

$$F = kx \rightarrow \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = x_0$$
$$v(0) = V$$
$$A \cdot cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = \frac{mg}{k}$$
$$-A \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = -\frac{m \cdot \sqrt{2gh}}{M+m}$$
$$A \cdot cos(\varphi) = \frac{mg}{k}$$
$$A \cdot sin(\varphi) = \frac{m\sqrt{2gh}}{\frac{M+m}{\omega}}$$
$$A \cdot cos(\varphi) = \frac{mg}{k}; \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$
$$A \cdot sin(\varphi) = \frac{\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}}{\sqrt{\frac{k}{M+m}}}$$

Oba dva výrazy umocníme na druhou a sečteme

$$A^2 \left(\underbrace{cos(\varphi)^2 + sin(\varphi)^2}_{1} \right) = \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{m^2 + 2gh}{\frac{(M+m)^2}{\frac{k}{M+m}}}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gh\cancel{(M+m)}}{(M+m)^{\cancel{2}} \cdot k}}$$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gh}{(M+m) \cdot k}}}$$

Spočtěte délku závěsu kyvadla

Spočtěte délku závěsu „$\boldsymbol{l}$“ matematického sekundového kyvadla, víte-li, že jeho výchylka klesne za **5 minut** na **jednu desetinu** počáteční výchylky

Potřebné vztahy

$$\text{frekvence tlumených kmitů } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \tfrac{1}{4\tau^2}}$$
$$\omega_0 = \tfrac{g}{l}$$
$$\omega = \tfrac{2\pi}{T_{kmit}} = \boldsymbol{\pi}$$
$$A_t = A_0 \cdot e^{-\frac{1}{2\tau}\cdot t}$$
$$\text{sekundové kyvadlo } T_{kyv} = 1s; T_{kmit} = 2s$$

Dosazení do rovnice

$$A_t = A_0 \cdot e^{-\frac{1}{2\tau}\cdot t}$$
$$\frac{A_t}{A_0} = e^{-\frac{1}{2\tau}\cdot t}$$
$$ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right) = -\frac{1}{2\tau}\cdot t$$
$$ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)^2 = \frac{1}{4\tau^2}\cdot t^2$$
$$\frac{1}{4\tau^2} = ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)\cdot\frac{1}{t^2}$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}$$
$$\pi^2 = \frac{g}{l} - \left(\frac{1}{t^2}ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)^2\right)$$
$$\frac{g}{l} = \pi^2 + \frac{1}{t^2}ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)^2$$
$$g = l\left(\pi^2 + \frac{1}{t^2}ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)^2\right)$$
$$\boldsymbol{l = \frac{g}{\pi^2 + \frac{1}{t^2}ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)^2}}$$

Množství dusíku které bylo ohřáto

Určete množství dusíku, které bylo izobaricky ohřáto z teploty $\boldsymbol{t_1 = 30°C}$ na teplotu $\boldsymbol{t_2 = 500°C}$ dodáním $\boldsymbol{30kJ}$ energie, dusík považujte za ideální plyn.

- Určete, jaká byla hmotnost „$\boldsymbol{m}$“ ohřátého plynu.
- Jaká práce se přitom vykonala.

Potřebné údaje

- univerzální plynová konstanta $\boldsymbol{R = 8,3JK^{-1}mol^{-1}}$
- molární tepelná kapacita dusíku při konstantním objemu $\boldsymbol{Cv = 20,8JK^{-1}mol^{-1}}$
- molární hmotnost dusíku $\boldsymbol{M = 28g.mol^{-1}}$

Potřebné vztahy

$$\text{rovnice ideálního plynu}$$
$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$
$$\text{tlak} \cdot \text{objem} = \text{látkové množství} \cdot \text{plynová konst} \cdot \text{termo.teplota}$$
$$\underbrace{d}_{\text{práce při izo.ději}} \qquad A = pdV$$
$$C_p = C_v + R; \text{moyerův vztah}$$
$$\underbrace{b}_{\text{teplo dodané látce}} \qquad = n \cdot Cp(t_2 - t_1)$$

Zadáno t_1, t_2, Q, T, C_v, M
Hledáme m, A
Dosadíme

$$Q = n \cdot C_p(t_2 - t_1)$$
$$n = \frac{m}{M}$$
$$C_p = C_v + R$$
$$Q = \frac{m}{M} \cdot (C_p + R) \cdot (t_2 - t_1)$$
$$\boldsymbol{m \frac{Q \cdot M}{(C_v + R)(t_2 - t_1)} = 61,4g}$$

Vykonaná práce

$$dA = pdV$$

$$A = \int_{V1}^{V2} p\,dV = \int_{V1}^{V2} 1\,dV$$

$$\boldsymbol{A = p(V_2 - V_1)}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{p(V_2 - V_1)}}_{\boldsymbol{A}} \cdot V = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$A = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$$

$$A = \frac{m}{M} \cdot R \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\boldsymbol{A = 8,56kJ}$$

Práce chladícího stroje

Spočtěte, jakou práci vykoná chladící stroj, jestliže v prostředí o teplotě $\mathbf{27°C}$ zmrazí $\mathbf{1kg}$ vody téže teploty na led o teplotě $\mathbf{0°C}$. Předpokládejte, že předávání tepla probíhá podle Cartonova cyklu.

Potřebné údaje

- Měrná tepelná kapacita vody: $\boldsymbol{C = 4,2\,kJK^{-1}kg^{-1}}$
- Měrné skupenské teplo tuhnutí vody: $\boldsymbol{L = 330\,kJkg^{-1}}$

Potřebné vztahy

pro Cartonův cyklus platí:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q}{T};\ A = Q_1 - Q$$
$$dQ = mc \cdot dT \rightarrow \text{teplo potřebné k ochlazení látky}$$
$$Q = m \cdot l \rightarrow \text{teplo potřebné k tavení látky}$$

Zadáno

$T_0 = 0°$...273K
$T_1 = 27°$...300K ...(teplota prostředí)
m, c, L

Hledáme

$$A = A_{\text{chlazení}} + A_{\text{mražení}}$$

1. Zchlazení vody na 0°C

$$A = Q_1 - Q$$
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q}{T}$$
$$Q_1 = \frac{T_1}{T} \cdot Q$$
$$A = \frac{T_1}{T} \cdot Q - Q$$
$$A = Q\left(\frac{T_1}{T} - 1\right)$$

$$dA = dQ\left(\frac{T_1}{T} - 1\right)$$
$$dA = -mc\left(\frac{T_1}{T} - 1\right)dT$$
$$dA = mc\left(\frac{T_1}{T} - 1\right)dt$$

$$A = \int_{T_1}^{T_0} mc\,dt + \int_{T_1}^{T_0} \frac{T_1}{T} mc\,dt$$
$$A = mc(T_0 - T_1) - mc(ln(T_0) - ln(T_1))$$
$$A = mc(T_0 - T_1) - mc \cdot T_1 \cdot ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$
$$\boldsymbol{A = 5,4\,kJ};\text{chlazení}$$

2. Práce potřebná na zmražení jednoho **1kg vody o teplotě 0° C na led**
   Z předchozího výpočtu

$$A = Q\left(\frac{T_1}{T} - 1\right)$$
$$A_{mraž} = m \cdot L\left(\frac{T_1}{T} - 1\right) = \textbf{32,6 kJ}$$

   Celková energie

$$A = A_{\text{chlazení}} + A_{\text{mražení}} \textbf{=5,4 + 32,6 kJ}$$