

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Действительный анализ»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Тюленев Александр Иванович

Автор конспекта: [Цыбулин Егор](#), студент 208 группы

Москва, 23 февраля 2026 г.

Содержание

1	Абстрактная теория меры	2
1.1	Тензорное произведение полуколец	9
2	Меры на полукольцах	11

1 Абстрактная теория меры

Определение. Пусть I — индексное множество произвольной мощности. $\forall \alpha \in I$ задано множество A_α . Тогда говорят, что задана *система множеств* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Лемма. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система множеств. Тогда

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha); \\ A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha); \\ A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

Доказательство.

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in A \text{ и } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит ни одному из множеств A_α , то есть $\forall \alpha \in I$ верно $x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\forall \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in A \text{ и } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит хотя бы одному множеству A_α , то есть $\exists \alpha \in I : x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Третье равенство:

$$\begin{aligned} x \in A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) &\iff x \in A \text{ и } x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff \\ &\iff x \in A \text{ и } \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha \iff \exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \in A_\alpha) \iff \\ &\iff \exists \alpha \in I (x \in A \cap A_\alpha) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

□

Определение. $A \triangle B$ — симметрическая разность:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение. Пусть X — абстрактное множество. $\{A_n\}$ — последовательность подмножеств множества X .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n \iff \forall x \in \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \exists N(x) \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n \geq N(x)} A_n$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит всем A_n , начиная с некоторого номера.

Определение.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n \iff \forall x \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_n\}$.

Лемма.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n; \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{K \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq K} A_n. \end{aligned}$$

Замечание. Говоря о системах множеств, всюду далее считаем, что все они являются подмножествами некоторого множества X .

Определение. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$. Тогда $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ — *дизъюнктивное объединение*.

Определение. Пусть $E \subset X$. Система множеств $\{E_{\beta}\}_{\beta \in J}$ называется *разбиением множества E* , если $E_{\beta} \cap E_{\beta'} = \emptyset$ при $\beta \neq \beta'$ и $E = \bigsqcup_{\beta \in J} E_{\beta}$.

Лемма (О дизъюнктивном объединении). Пусть X — множество. $\{A_n\} \subseteq 2^X$, $A_0 = \emptyset$. Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

Доказательство. Включение \supset очевидно, потому что

$$A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'} \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть, наоборот, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $m(x) \in \mathbb{N}$ — наименьший из тех $n \in \mathbb{N}$, что $x \in A_n$, тогда $x \notin A_{n'}$ при $n' < m(x)$, тогда

$$x \in A_{m(x)} \setminus \bigcup_{n'=0}^{m(x)-1} A_{n'} \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

□

Определение. Система $\mathcal{R} \subset 2^X$ называется *кольцом (множеств)*, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$,
2. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$,
3. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Определение. Говорят, что \mathcal{R} — *кольцо с единицей*, если $X \in \mathcal{R}$.

Определение. Кольцо с единицей называется *алгеброй* \mathcal{A} .

Определение. Алгебра \mathcal{A} называется *σ -алгеброй*, если $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ для всякой последовательности множеств $\{A_n\} \in \mathcal{A}$

Замечание. Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ является алгеброй тогда и только тогда, когда:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;
2. $A \triangle B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$;
3. $A \cap B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Пример. 1. $\{\emptyset, X\}$ — алгебра и σ -алгебра.

2. 2^X — алгебра и σ -алгебра.

3. $X = \mathbb{N}$, тогда \mathcal{A} — все такие подмножества \mathbb{N} , которые либо сами не более чем конечны, либо не более чем конечны их дополнения — это алгебра.

4. $X = \mathbb{R}$, тогда \mathcal{A} — все такие подмножества \mathbb{R} , которые либо сами не более чем счётны, либо их дополнения не более чем счётны — это σ -алгебра.

Определение. Система $\mathcal{P} \subset 2^X$ — *полукольцо*, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$;

2. $A \cap B \in \mathcal{P} \forall A, B \in \mathcal{P}$;

3. Если $A, B \in \mathcal{P}$ и $A \subset B$, то $\exists \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P} : B \setminus A = \bigcup_{i=1}^N P_i$.

Замечание. Если $\exists E \subset X : \mathcal{P} \subset 2^E$ и $E \in \mathcal{P}$, то говорят, что *полукольцо имеет единицу*.

Пример. Пусть $X = [a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда

$$\mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) \mid a \leq \alpha \leq \beta \leq b\}$$

- полукольцо, не являющееся кольцом.

Определение. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$ — система подмножеств. $M(\mathcal{E})$ — *наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathcal{E}* .

Лемма. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система σ -алгебр, $\mathcal{A}_\alpha \subset 2^X \forall \alpha \in I$. Тогда $\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ — σ -алгебра.

Доказательство.

$$\emptyset \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \implies \emptyset \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A, B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I.$$

Так как \mathcal{A}_α — алгебра, то $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ принадлежат \mathcal{A}_α для любого $\alpha \in I$, поэтому объединение, пересечение и разность принадлежат \mathcal{A} .

Если $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, то $\{A_n\} \subset \mathcal{A}_\alpha$ для любого $\alpha \in I$. Так как каждая \mathcal{A}_α является σ -алгеброй, имеем

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

□

Теорема. Минимальная σ -алгебра существует и единственна.

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — всевозможные σ -алгебры, содержащие данную систему \mathcal{E} . Эта система непуста, потому что $\mathcal{E} \subset 2^X$.

$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ — σ -алгебра по лемме. Она содержит \mathcal{E} .

Пусть \mathcal{A}' — произвольная σ -алгебра, содержащая \mathcal{E} . Тогда

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}'.$$

Следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ для любой σ -алгебры \mathcal{A}' , содержащей $\mathcal{E} \implies \mathcal{A} = M(\mathcal{E})$.

Единственность. Пусть \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^2 — две наименьшие σ -алгебры, содержащие \mathcal{E} . Так как они наименьшие, то

$$(\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2 \wedge \mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}^1) \implies \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2.$$

□

Определение. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. $\mathcal{B}(X)$ — борелевская σ -алгебра пространства X — наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые множества.

Замечание. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — континуальное семейство, $2^{\mathbb{R}}$ — мощность более чем континуальная. Факт оставим без доказательства.

Теорема (Дизъюнктное представление в полукольце).

Пусть дано $X, \mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо.

1. Тогда $\forall P \in \mathcal{P}$ и $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}, N \in \mathbb{N}$ существует набор $\{S_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{P}$:

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

2. Тогда $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}, N \in \mathbb{N}$ существует дизъюнктный конечный набор $\{Q_j\}_{j=1}^L, L \in \mathbb{N}: \bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^L Q_j$, при этом $\forall j \in \{1, \dots, L\} \forall i \in \{1, \dots, N\}$ верно

$$\begin{cases} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \emptyset. \end{cases}$$

Доказательство. 1. Докажем по индукции.

База индукции ($N = 1$). Из определения полукольца:

$$P \setminus P_1 = P \setminus (P \cap P_1) = \bigsqcup_{j=1}^{N_1} S_j, \quad S_j \in \mathcal{P}, \quad P \cap P_1 \in \mathcal{P}.$$

Предположим, что утверждение доказано при $N' \in \mathbb{N}$. Докажем, что верно при $N' + 1$.

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'+1} P_i = P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \cup P_{N'+1} = \left(P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \right) \cap (P \setminus P_{N'+1}),$$

где $P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J'} S_j$ по предположению индукции, а $P \setminus P_{N'+1} = \bigsqcup_{l=1}^{L'} Q_l$, $Q_l \in \mathcal{P}$ по базе индукции.

Возьмём $R_{j,l} = S_j \cap Q_l \in \mathcal{P}$ — попарно непересекающиеся множества. $\{R_{j,l}\}_{j,l}$ перенумеруем единым индексом.

2. Тоже докажем по индукции.

База индукции ($N = 2$). Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$.

$$P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$$

— по определению.

$$P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^M Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{P}$$

— по первому свойству.

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{l=1}^L R_l, \quad R_l \in \mathcal{P}$$

— по первому свойству.

Заметим, что $P_1 \cap P_2$, $\bigsqcup_{j=1}^M Q_j$ и $\bigsqcup_{l=1}^L R_l$ попарно не пересекаются. Тогда

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \cap P_2) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^M Q_j \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^L R_l \right)$$

осталось перенумеровать единым индексом.

Пусть утверждение доказано при $M \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно верно при $M + 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \left(\bigcup_{i=1}^M P_i \right) \cup P_{M+1}$$

Рассмотрим попарно непересекающиеся множества:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^M P_i, \quad P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^M P_i \quad \text{и} \quad \left(\bigcup_{i=1}^M P_i \right) \setminus P_{M+1}$$

Первое:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^M P_i = \bigsqcup_{j=1}^J Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{P} \tag{1}$$

— по первому свойству.

Второе:

$$\bigcup_{i=1}^M P_i = \bigsqcup_{l=1}^L S_l, \quad S_l \in \mathcal{P}$$

— по предположению индукции. Тогда

$$P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^M P_i = P_{M+1} \cap \bigsqcup_{l=1}^L S_l = \bigsqcup_{l=1}^L (P_{M+1} \cap S_l), \quad P_{M+1} \cap S_l \in \mathcal{P}. \quad (2)$$

Третье аналогично второму с использованием индукционного предположения:

$$\left(\bigcup_{i=1}^M P_i \right) \setminus P_{M+1} = \left(\bigsqcup_{l=1}^L S_l \right) \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{l=1}^L (S_l \setminus P_{M+1}), \quad (3)$$

$$S_l \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}, \quad R_{l,k} \in \mathcal{P} \quad (4)$$

— по первому свойству.

Объединим (1), (2), (3), (4):

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \bigsqcup_{j=1}^J Q_j \cup \bigsqcup_{l=1}^L (P_{M+1} \cap S_l) \cup \bigsqcup_{l=1}^L \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}.$$

Осталось отметить, что объединения построенных выше дизъюнктивных объединений дизъюнктивны. Перенумеруем единым индексом и получим утверждение теоремы.

Условие

$$\begin{cases} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \emptyset. \end{cases}$$

выполнено по построению.

□

Лемма. Пусть \mathcal{P} — полукольцо. $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}$ — счётный набор. Тогда существует набор

$$\{\{Q_{n,j}\}_{j=1}^{m_n}\}_{n=1}^\infty : \bigcup_{n=1}^\infty P_n = \bigsqcup_{n=1}^\infty \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{n,j} : \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_{n,j} \subset P_n \quad \forall j \in \{1, \dots, m_n\}.$$

Доказательство.

$$P_1 = Q_{1,1},$$

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{j=2}^{m_2} Q_{2,j},$$

и так далее по индукции. А почему можно сделать индукционный переход?

$$P_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k = \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{n,j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Следствие. Любое непустое открытое множество Ω в \mathbb{R}^n можно реализовать в виде не более чем счётного объединения ячеек вида

$$[a, b) = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i), \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q}^n.$$

Более того, можно считать, что такие ячейки содержатся в Ω вместе с замыканием.

Доказательство. $\forall x \exists P(x)$ — ячейка с рациональными вершинами, содержащая точку x . Тогда $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ (заметим, что P_n могут пересекаться).

Применим аналогичное рассуждение из леммы, которая была выше:

$$\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{n,j}, \quad Q_{n,j} \subset P_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \{1, \dots, m_n\}.$$

□

1.1 Тензорное произведение полуколец

Определение. Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — полукольца. Тогда

$$\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 := \{A \times B \mid A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_2\}.$$

Отметим, что \mathcal{P}_1 — подмножество некоторого более общего множества X , а \mathcal{P}_2 — подмножество некоторого более общего множества Y . Тогда $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ — это подмножество $X \times Y$.

Теорема. $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ — полукольцо.

Доказательство. Проверим свойства полукольца:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}_1, \emptyset \in \mathcal{P}_2$ — по определению.

$$\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$$

2. $A_1 \times A_2 \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_\infty, B_1 \times B_2 \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_\infty$

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2,$$

т.к. $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{P}_1, A_2 \cap B_2 \in \mathcal{P}_2$.

3. Пусть $A \times B \in \mathcal{P}_\infty \otimes \mathcal{P}_\infty, C \times D \in \mathcal{P}_\infty \otimes \mathcal{P}_\infty$.

$$A = C \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{N_1} C_j$$

$$B = D \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{N_2} D_i$$

Определим $C_0 := A \cap C, D_0 := A \cap D$. Тогда

$$\begin{aligned} A \times B &:= \left(\bigsqcup_{j=0}^{N_1} C_j \right) \times \left(\bigsqcup_{i=0}^{N_2} D_i \right) = \bigsqcup_{j=0}^{N_1} \bigsqcup_{i=0}^{N_2} (C_j \times D_i) = \\ &= (C_0 \times D_0) \sqcup \bigsqcup_{(i,j) \neq (0,0)} (C_j \times D_i) \end{aligned}$$

Отметим, что $C_j \times D_i \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

Итого:

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \times B) \setminus (C_0 \times D_0) = \bigsqcup_{i=0}^{N_2} \bigsqcup_{\substack{j=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^{N_1} (C_j \times D_i)$$

□

Следствие. Зададим $[a, b), a, b \in \mathbb{R}^n, a < b$ (неравенство покомпонентное, то есть $a_i < b_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$). Тогда

$$\mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) \mid a \leq \alpha < \beta \leq b\}$$

— полукольцо.

2 Меры на полукольцах

Определение. Пусть \mathcal{P} — полукольцо и $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$. Будем говорить, что μ — *конечно-аддитивная мера* на \mathcal{P} , если:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $A \in \mathcal{P}$, $A = \bigsqcup_{i=1}^N A_i$, $\{A_i\} \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i)$.

Если же выполнено условие

$$2'. A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i, A, \{A_i\} \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

то говорят, что μ — *счётно-аддитивная мера* (или просто *мера*) на \mathcal{P} .

Лемма (Свойства конечно-аддитивной меры на полукольце). Пусть \mathcal{P} — полукольцо, μ — конечно-аддитивная мера на \mathcal{P} . Тогда справедливы следующие свойства:

1. *Монотонность:* если $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. *Усиленная монотонность:* если $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\{A_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{i=1}^N A_i \subset B$, то $\sum_{i=1}^N \mu(A_i) \leq \mu(B)$.
3. *Конечная полуаддитивность:* если $B \in \mathcal{P}$ и $\{C_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{P}$, $B \subset \bigcup_{j=1}^M C_j$, то
$$\mu(B) \leq \sum_{j=1}^M \mu(C_j).$$

Доказательство. 1. Первое — это следствие второго утверждения, если $\{A_i\}$ состоит из одного элемента A .

2. Из теоремы о дизъюнктом представлении в полукольце существует дизъюнктивный набор $\{Q_l\}_{l=1}^L \subset \mathcal{P}$:

$$B = \bigsqcup_{i=1}^N A_i \sqcup \bigsqcup_{l=1}^L Q_l = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{l=1}^L (A_i \sqcup Q_l)$$

По определению меры на полукольце

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i) + \sum_{l=1}^L \mu(Q_l) \geq \sum_{i=1}^N \mu(A_i),$$

$$\text{т.к. } \sum_{l=1}^L \mu(Q_l) \geq 0.$$

3. $C_j \cap B =: B_j$, где $C_j \cap B \in \mathcal{P} \forall j \in \{1, \dots, M\}$. Тогда

$$B = \bigcup_{j=1}^M = \bigsqcup_{l=1}^L B'_l,$$

где для любого l и j либо $B'_l \subset B_j$, либо не пересекаются.

В силу конечной аддитивности μ :

$$\mu(B) = \sum_{l=1}^L \mu(B'_l) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ B'_l \subset B_j}}^L \mu(B'_l)}_{\leq \mu(B_j) \text{ по св.2}} \leq \sum_{j=1}^M \underbrace{\mu(B_j)}_{\leq \mu(C_j) \text{ по св.1}} \leq \sum_{j=1}^M \mu(C_j).$$

□

Определение. μ_1 — конечно-аддитивная мера на \mathcal{P}_1 , μ_2 — конечно-аддитивная мера на \mathcal{P}_2 . Тогда

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) := \mu_1(A) \cdot \mu_2(B),$$

где $A \in \mathcal{P}_1$, $B \in \mathcal{P}_2$.

Лемма. Если μ_i — конечно-аддитивная мера на \mathcal{P}_i , $i = 1, 2$, то $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

Доказательство. Нужно доказать, что если $A \times B = C \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ и $C = \bigsqcup_{k=1}^N C_k$,

то $\mu(C) = \sum_{k=1}^N \mu(C_k)$.

Рассмотрим простой случай

$$A \times B = \bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{j=1}^M (P_i \times Q_j),$$

где $\bigsqcup_{i=1}^N P_i = A$, $\bigsqcup_{j=1}^M Q_j = B$ — сеточные представления.

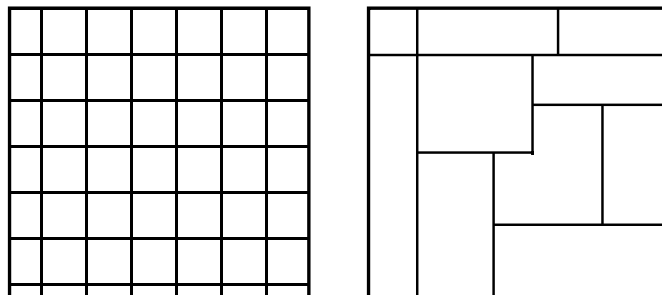


Рис. 1: Сеточное и произвольное представления

$$\begin{aligned}\mu(A \times B) &:= \mu_1(A) \cdot \mu_2(B) = \left(\sum_{i=1}^N \mu_1(P_i) \right) \left(\sum_{j=1}^M \mu_2(Q_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \mu_1(P_i) \mu_2(Q_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \mu(P_i \times Q_j).\end{aligned}$$

В общем случае:

$$C = A \times B = \bigsqcup_{k=1}^L (A_k \times B_k) \implies A = \bigcup_{k=1}^L A_k \text{ и } B = \bigcup_{k=1}^L B_k.$$

В силу теоремы о дизъюнктном представлении в полукольце $A = \bigsqcup_{s=1}^{L'} A'_s$, $B = \bigsqcup_{m=1}^{M'} B'_m$. $A \times B = \bigsqcup_{s=1}^{L'} \bigsqcup_{m=1}^{M'} (A'_s \times B'_m)$ — сеточное разбиение, для которого всё доказано.

$$\begin{aligned}\mu(A \times B) &= \sum_{s=1}^{L'} \sum_{m=1}^{M'} \mu_1(A'_s) \mu_2(B'_m) = \\ &= \sum_{k=1}^L \underbrace{\sum_{(s,m): A'_s \times B'_m \subset A_k \times B_k} \mu_1(A'_s) \mu_2(B'_m)}_{= \mu_1(A_k) \mu_2(B_k)} = \sum_{k=1}^L \mu(A_k \times B_k).\end{aligned}$$

□

Теорема. Пусть \mathcal{P} — полукольцо, μ — конечно-аддитивная мера на \mathcal{P} . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. μ — счётно-аддитивная мера на \mathcal{P} ;
2. μ — счётно-полуаддитивная мера на \mathcal{P} , то есть если $A \in \mathcal{P}$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Доказательство. 2 \implies 1.

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j, \{A_j\} \subset \mathcal{P}, A \in \mathcal{P}.$$

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

— в силу счётной полуаддитивности.

Поскольку μ — конечно-аддитивна, в силу продвинутой монотонности $\forall N \in \mathbb{N}$ $\mu(A) \geq \sum_{j=1}^N \mu(A_j)$, то возьмём супремум по N и получим $\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.
1 \implies 2.

$$\{A_i\} \subset \mathcal{P}, \quad A'_i = A \cap A_i$$

В силу теоремы о дизъюнктном представлении:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

и

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{N_i} Q_{i,j}, \quad Q_{i,j} \in \mathcal{P}$$

в силу счётной аддитивности. При этом

$$\bigsqcup_{j=1}^{N_i} Q_{i,j} \subset A'_i \subset A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Поскольку μ — счётно-аддитивна, то:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_i} \mu(Q_{i,j}) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)}_{\text{продв. монот.}}$$

□

Замечание. Мера на полукольце называется *конечной*, если она принимает только конечные значения.

Пусть $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — строго возрастающая и непрерывная слева в каждой точке функция.

$$\mu_g([a, b)) := g(b) - g(a) > 0.$$

Доказать, что μ_g — конечно-аддитивна — упражнение.

Также определим

$$\mathcal{P} := \{[\alpha, \beta) \mid \alpha < \beta\}.$$

Лемма. μ_g — счётно-аддитивна на \mathcal{P} .

Доказательство.

$$[a, b) \supset [c, d) = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{[c_j, d_j)}_{\subset [a, b)}.$$

Поскольку g непрерывна слева, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t \in (c, d) : |g(t) - g(d)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists c'_j < c_j : |g(c'_j) - g(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Рассмотрим $[c, t] \subset \bigsqcup_{j=1}^{\infty} [c_j, d_j] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (c'_j, d_j)$, тогда по лемме Гейне-Бореля

$$\underbrace{[c, t]}_{[c, t] \subset} \subset \bigcup_{j=1}^N (c'_j, d_j) \subset \bigcup_{j=1}^N [c'_j, d_j]$$

Тогда

$$\mu_g([c, t)) \leq \sum_{j=1}^N \mu_g([c'_j, d_j)) \leq \sum_{j=1}^N \mu_g([c_j, d_j)) + \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g([c_j, d_j)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $|\mu_g([c, t)) - \mu_g([c, d))| < \frac{\varepsilon}{2}$, то $\mu_g([c, d)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g([c_j, d_j)) + \varepsilon$, но ε был выбран произвольно, поэтому можно сказать, что *счётная полуаддитивность с конечной аддитивностью дают счётную аддитивность*. \square