

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Действительный анализ»

**Автор курса:** профессор, д.ф.-м.н. Тюленев Александр Иванович

**Автор конспекта:** [Цыбулин Егор](#), студент 208 группы

Москва, 17 февраля 2026 г.

# Содержание

1	Абстрактная теория меры	2
---	-------------------------	---

# 1 Абстрактная теория меры

**Определение.** Пусть  $I$  — индексное множество произвольной мощности.  $\forall \alpha \in I$  задано множество  $A_\alpha$ . Тогда говорят, что задана *система множеств*  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ .

**Лемма.** Пусть  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — система множеств. Тогда

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha); \\ A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha); \\ A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

*Доказательство.*

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in A \text{ и } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

$x$  не принадлежит ни одному из множеств  $A_\alpha$ , то есть  $\forall \alpha \in I$  верно  $x \notin A_\alpha$ . Тогда

$$\forall \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in A \text{ и } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

$x$  не принадлежит хотя бы одному множеству  $A_\alpha$ , то есть  $\exists \alpha \in I : x \notin A_\alpha$ . Тогда

$$\exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Третье равенство:

$$\begin{aligned} x \in A \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) &\iff x \in A \text{ и } x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff \\ &\iff x \in A \text{ и } \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha \iff \exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \in A_\alpha) \iff \\ &\iff \exists \alpha \in I (x \in A \cap A_\alpha) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

□

**Определение.**  $A \triangle B$  — симметрическая разность:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

**Определение.** Пусть  $X$  — абстрактное множество.  $\{A_n\}$  — последовательность подмножеств множества  $X$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \iff \forall x \in \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \exists N(x) \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n \geq N(x)} A_n$$

— все такие  $x \in X$ , что  $x$  принадлежит всем  $A_n$ , начиная с некоторого номера.

**Определение.**

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \iff \forall x \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$$

— все такие  $x \in X$ , что  $x$  принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности  $\{A_n\}$ .

**Лемма.**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n; \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{K \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq K} A_n. \end{aligned}$$

*Замечание.* Говоря о системах множеств, всюду далее считаем, что все они являются подмножествами некоторого множества  $X$ .

**Определение.**  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность попарно непересекающихся множеств, то есть  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ . Тогда  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$  — *дизъюнктивное объединение*.

**Определение.** Пусть  $E \subset X$ . Система множеств  $\{E_{\beta}\}_{\beta \in J}$  называется *разбиением множества  $E$* , если  $E_{\beta} \cap E_{\beta'} = \emptyset$  при  $\beta \neq \beta'$  и  $E = \bigsqcup_{\beta \in J} E_{\beta}$ .

**Лемма** (О дизъюнктивном объединении). Пусть  $X$  — множество.  $\{A_n\} \subseteq 2^X$ ,  $A_0 = \emptyset$ . Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

*Доказательство.* Включение  $\supset$  очевидно, потому что

$$A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'} \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть, наоборот,  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Пусть  $m(x) \in \mathbb{N}$  — наименьший из тех  $n \in \mathbb{N}$ , что  $x \in A_n$ , тогда  $x \notin A_{n'}$  при  $n' < m(x)$ , тогда

$$x \in A_{m(x)} \setminus \bigcup_{n'=0}^{m(x)-1} A_{n'} \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

□

**Определение.** Система  $\mathcal{R} \subset 2^X$  называется *кольцом (множеств)*, если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{R}$ ,
2.  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$ ,
3.  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$ .

**Определение.** Говорят, что  $\mathcal{R}$  — *кольцо с единицей*, если  $X \in \mathcal{R}$ .

**Определение.** Кольцо с единицей называется *алгеброй*  $\mathcal{A}$ .

**Определение.** Алгебра  $\mathcal{A}$  называется  *$\sigma$ -алгеброй*, если  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  для всякой последовательности множеств  $\{A_n\} \in \mathcal{A}$

*Замечание.* Система множеств  $\mathcal{A} \subset 2^X$  является алгеброй тогда и только тогда, когда:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \triangle B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$ ;
3.  $A \cap B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$ .

**Пример.** 1.  $\{\emptyset, X\}$  — алгебра и  $\sigma$ -алгебра.

2.  $2^X$  — алгебра и  $\sigma$ -алгебра.

3.  $X = \mathbb{N}$ , тогда  $\mathcal{A}$  — все такие подмножества  $\mathbb{N}$ , которые либо сами не более чем конечны, либо не более чем конечны их дополнения — это алгебра.

4.  $X = \mathbb{R}$ , тогда  $\mathcal{A}$  — все такие подмножества  $\mathbb{R}$ , которые либо сами не более чем счётны, либо их дополнения не более чем счётны — это  $\sigma$ -алгебра.

**Определение.** Система  $\mathcal{P} \subset 2^X$  — *полукольцо*, если:

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$ ;

2.  $A \cap B \in \mathcal{P} \forall A, B \in \mathcal{P}$ ;

3. Если  $A, B \in \mathcal{P}$  и  $A \subset B$ , то  $\exists \{P_i\}_{i=1}^{N'} \subset \mathcal{P} : B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{N'} P_i$ .

*Замечание.* Если  $\exists E \subset X : \mathcal{P} \subset 2^E$  и  $E \in \mathcal{P}$ , то говорят, что *полукольцо имеет единицу*.

**Пример.** Определим полуинтервалы  $[a, b)$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ . Тогда

$$\mathcal{P} = \{[a, b) \mid a \leq \alpha \leq \beta \leq b\}.$$

**Определение.** Пусть  $\mathcal{E} \subset 2^X$  — система подмножеств.  $M(\mathcal{E})$  — *наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$* .

**Лемма.** Пусть  $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — система  $\sigma$ -алгебр.  $\mathcal{A}_\alpha \subset 2^X \forall \alpha \in I$ . Тогда  $\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  —  $\sigma$ -алгебра.

*Доказательство.*

$$\emptyset \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \implies \emptyset \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A, B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I.$$

Так как  $\mathcal{A}_\alpha$  — алгебра, то  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  принадлежат  $\mathcal{A}_\alpha$  для любого  $\alpha \in I$ , поэтому объединение, пересечение и разность принадлежат  $\mathcal{A}$ .

Если  $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ , то  $\{A_n\} \subset \mathcal{A}_\alpha$  для любого  $\alpha \in I$ . Тогда каждый  $\mathcal{A}_\alpha$  является  $\sigma$ -алгеброй, а следовательно

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

□

**Теорема.** Минимальная  $\sigma$ -алгебра существует и единственна.

*Доказательство. Существование.* Пусть  $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — всевозможные  $\sigma$ -алгебры, содержащие данную систему  $\mathcal{E}$ . Эта система непуста, потому что  $\mathcal{E} \subset 2^X$ .

$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  —  $\sigma$ -алгебра по лемме. Она содержит  $\mathcal{E}$ .

Пусть  $\mathcal{A}'$  — произвольная  $\sigma$ -алгебра, содержащая  $\mathcal{E}$ , тогда

$$M(\mathcal{E}) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}'.$$

Следовательно,  $M(\mathcal{E}) \in \mathcal{A}'$  для любой  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}'$ , содержащей  $\mathcal{E}$ .

*Единственность.* Пусть  $\mathcal{A}^1$  и  $\mathcal{A}^2$  — две наименьшие  $\sigma$ -алгебры, содержащие  $\mathcal{E}$ . Так как они наименьшие, то

$$(\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2 \wedge \mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}^1) \implies \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2.$$

□

**Определение.** Пусть  $(X, \tau)$  — топологическое пространство.  $\mathcal{B}(X)$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра пространства  $X$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества.

*Замечание.*  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  — континуальное семейство,  $2^{\mathbb{R}}$  — мощность более чем континуальная. Факт оставим без доказательства.

**Теорема** (Дизъюнктное представление в полукольце). Пусть дано  $X$ ,  $\mathcal{P} \subset 2^X$  — полукольцо.

1. Тогда  $\forall P \in \mathcal{P}$  и  $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  существует набор  $\{S_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{P}$  :

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

2. Тогда  $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  существует дизъюнктный конечный набор  $\{Q_j\}_{j=1}^L$ ,  $L \in \mathbb{N}$ :  $\bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^L Q_j$ , при этом  $\forall j \in \{1, \dots, L\}$   $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  верно

$$\begin{cases} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \emptyset. \end{cases}$$

*Доказательство.* 1. Докажем по индукции.

База индукции ( $N = 1$ ). Из определения полукольца:

$$P \setminus P_1 = P \setminus (P \cap P_1) = \bigsqcup_{j=1}^{N_1} S_j, \quad S_j \in \mathcal{P}, \quad P \cap P_1 \in \mathcal{P}.$$

Предположим, что утверждение доказано при  $N' \in \mathbb{N}$ . Докажем, что верно при  $N' + 1$ .

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'+1} P_i = P \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \cup P_{N'+1} \right) = \left( P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \right) \cap (P \setminus P_{N'+1}),$$

где  $P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J'} S_j$  по предположению индукции, а  $P \setminus P_{N'+1} = \bigsqcup_{l=1}^{L'} Q_l$ ,  $Q_l \in \mathcal{P}$  по базе индукции.

Возьмём  $R_{j,l} = S_j \cap Q_l \in \mathcal{P}$  — попарно непересекающиеся множества.  $\{R_{j,l}\}_{j,l}$  перенумеруем единым индексом.

2. Тоже докажем по индукции.

База индукции ( $N = 2$ ). Пусть  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ .

$$P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$$

— по определению.

$$P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^M Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{P}$$

— по первому свойству.

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{l=1}^L R_l, \quad R_l \in \mathcal{P}$$

— по первому свойству.

Заметим, что  $P_1 \cap P_2$ ,  $\bigsqcup_{j=1}^M Q_j$  и  $\bigsqcup_{l=1}^L R_l$  попарно не пересекаются. Тогда

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \cap P_2) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^M Q_j \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{l=1}^L R_l \right)$$

осталось перенумеровать единым индексом.

Пусть утверждение доказано при  $M \in \mathbb{N}$ . Покажем, что оно верно при  $M + 1$ :

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \left( \bigcup_{i=1}^M P_i \right) \cup P_{M+1}$$

Рассмотрим попарно непересекающиеся множества:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^M P_i, \quad P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^M P_i \quad \text{и} \quad \left( \bigcup_{i=1}^M P_i \right) \setminus P_{M+1}$$

Первое:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^M P_i = \bigsqcup_{j=1}^J Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{P} \tag{1}$$

— по первому свойству.

Второе:

$$\bigcup_{i=1}^M P_i = \bigsqcup_{l=1}^L S_l, \quad S_l \in \mathcal{P}$$

— по предположению индукции. Тогда

$$P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^M P_i = P_{M+1} \cap \bigsqcup_{l=1}^L S_l = \bigsqcup_{l=1}^L (P_{M+1} \cap S_l), \quad P_{M+1} \cap S_l \in \mathcal{P}. \quad (2)$$

Третье аналогично второму с использованием индукционного предположения:

$$\left( \bigcup_{i=1}^M P_i \right) \setminus P_{M+1} = \left( \bigsqcup_{l=1}^L S_l \right) \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{l=1}^L (S_l \setminus P_{M+1}), \quad (3)$$

$$S_l \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}, \quad R_{l,k} \in \mathcal{P} \quad (4)$$

— по первому свойству.

Объединим (1), (2), (3), (4):

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \bigsqcup_{j=1}^J Q_j \cup \bigsqcup_{l=1}^L (P_{M+1} \cap S_l) \cup \bigsqcup_{l=1}^L \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}.$$

Осталось отметить, что объединения построенных выше дизъюнктивных объединений дизъюнктивны. Перенумеруем единым индексом и получим утверждение теоремы.

Условие

$$\begin{cases} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \emptyset. \end{cases}$$

выполнено по построению.

□