Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Действительный анализ»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Тюленев Александр Иванович
Автор конспекта: Цыбулин Егор, студент 208 группы

Москва, 23 февраля 2026 г.

Содержание

1 Абстрактная теория меры

Определение. Пусть I — индексное множество произвольной мощности. $\forall \alpha \in I$ задано множество A_α. Тогда говорят, что задана *система множеств* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Лемма. *Пусть* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *— система множеств. Тогда*

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha);$$

$$A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha);$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha).$$

Доказательство.

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит ни одному из множеств A_α, то есть $\forall \alpha \in I$ верно $x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\forall \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит хотя бы одному множеству A_α, то есть $\exists \alpha \in I : x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Третье равенство:

$$x \in A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \text{ и } \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha \Longleftrightarrow \exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \in A_\alpha) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha \in I (x \in A \cap A_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha).$$

□

Определение. $A \triangle B$ — симметрическая разность:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение. Пусть X — абстрактное множество. $\{A_n\}$ — последовательность подмножеств множества X.

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \Longleftrightarrow \forall x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n \ \exists N(x) \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n \geqslant N(x)} A_n$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит всем A_n, начиная с некоторого номера.

Определение.

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \Longleftrightarrow \forall x \in \varlimsup_{n\to\infty} A_n \ \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_n\}$.

Лемма.

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} A_n;$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant K} A_n.$$

Замечание. Говоря о системах множеств, всюду далее считаем, что все они являются подмножествами некоторого множества X.

Определение. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, то есть $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$. Тогда $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — *дизъюнктное объединение.*

Определение. Пусть $E \subset X$. Система множеств $\{E_\beta\}_{\beta\in J}$ называется *разбиением множества* E, если $E_\beta \cap E_{\beta'} = \varnothing$ при $\beta \neq \beta'$ и $E = \bigsqcup\limits_{\beta\in J} E_\beta$.

Лемма (О дизъюнктном объединении)**.** *Пусть* X *— множество.* $\{A_n\} \subseteq 2^X$, $A_0 = \varnothing$. *Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

Доказательство. Включение $\supset$ очевидно, потому что

$$A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть, наоборот, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $m(x) \in \mathbb{N}$ — наименьший из тех $n \in \mathbb{N}$, что $x \in A_n$, тогда $x \notin A_{n'}$ при $n' < m(x)$, тогда

$$x \in A_{m(x)} \setminus \bigcup_{n'=0}^{m(x)-1} A_{n'} \Longrightarrow x \in \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

□

Определение. Система $\mathcal{R} \subset 2^X$ называется *кольцом (множеств)*, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{R}$,
2. $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$,
3. $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Определение. Говорят, что $\mathcal{R}$ — *кольцо с единицей*, если $X \in \mathcal{R}$.

Определение. Кольцо с единицей называется *алгеброй* $\mathcal{A}$.

Определение. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй*, если $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ для всякой последовательности множеств $\{A_n\} \in \mathcal{A}$

Замечание. Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ является алгеброй тогда и только тогда, когда:

1. $\varnothing \in \mathcal{A},\ X \in \mathcal{A}$;
2. $A \bigtriangleup B \in \mathcal{A}\ \forall A, B \in \mathcal{A}$;
3. $A \cap B \in \mathcal{A}\ \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Пример. 1. $\{\varnothing, X\}$ — алгебра и σ-алгебра.

2. 2^X — алгебра и σ-алгебра.
3. $X = \mathbb{N}$, тогда $\mathcal{A}$ — все такие подмножества $\mathbb{N}$, которые либо сами не более чем конечны, либо не более чем конечны их дополнения — это алгебра.
4. $X = \mathbb{R}$, тогда $\mathcal{A}$ — все такие подмножества $\mathbb{R}$, которые либо сами не более чем счётны, либо их дополнения не более чем счётны — это σ-алгебра.

Определение. Система $\mathcal{P} \subset 2^X$ — *полукольцо*, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$;

2. $A \cap B \in \mathcal{P}\ \forall A, B \in \mathcal{P}$;

3. Если $A, B \in \mathcal{P}$ и $A \subset B$, то $\exists \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P} : B \setminus A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N'} P_i$.

Замечание. Если $\exists E \subset X : \mathcal{P} \subset 2^E$ и $E \in \mathcal{P}$, то говорят, что *полукольцо имеет единицу.*

Пример. Пусть $X = [a, b),\ -\infty < a < b < +\infty$. Тогда

$$\mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) \mid a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}$$

- полукольцо, не являющееся кольцом.

Определение. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$ — система подмножеств. $M(\mathcal{E})$ — *наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.*

Лемма. *Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система σ-алгебр, $\mathcal{A}_\alpha \subset 2^X\ \forall \alpha \in I$. Тогда $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ — σ-алгебра.*

Доказательство.

$$\varnothing \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I \Longrightarrow \varnothing \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A, B \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I.$$

Так как $\mathcal{A}_\alpha$ — алгебра, то $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}_\alpha$ для любого $\alpha \in I$, поэтому объединение, пересечение и разность принадлежат $\mathcal{A}_\alpha$.

Если $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, то $\{A_n\} \subset \mathcal{A}_\alpha$ для любого $\alpha \in I$. Так как каждая A_α является σ-алгеброй, имеем

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

□

Теорема. *Минимальная σ-алгебра существует и единственна.*

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — всевозможные σ-алгебры, содержащие данную систему $\mathcal{E}$. Эта система непуста, потому что $\mathcal{E} \subset 2^X$.

$\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ — σ-алгебра по лемме. Она содержит $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{A}'$ — произвольная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Тогда

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}'.$$

Следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ для любой σ-алгебры $\mathcal{A}'$, содержащей $\mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{A} = M(\mathcal{E})$.

Единственность. Пусть $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^2$ — две наименьшие σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$. Так как они наименьшие, то

$$(\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2 \wedge \mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}^1) \Longrightarrow \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2.$$

□

Определение. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. $\mathcal{B}(X)$ — *борелевская σ-алгебра пространства X* — наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества.

Замечание. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — континуальное семейство, $2^{\mathbb{R}}$ — мощность более чем континуальная. Факт оставим без доказательства.

Теорема (Дизъюнктное представление в полукольце)**.**
Пусть дано X, $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо.

1. *Тогда $\forall P \in \mathcal{P}$ и $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$ существует набор $\{S_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{P}$:*

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{M} S_j$$

2. *Тогда $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$ существует дизъюнктный конечный набор $\{Q_j\}_{j=1}^L$, $L \in \mathbb{N}$: $\bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^L Q_j$, при этом $\forall j \in \{1, \ldots, L\}$ $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$ верно*

$$\left[\begin{aligned} &Q_j \subset P_i, \\ &Q_j \cap P_i = \varnothing. \end{aligned}\right.$$

Доказательство. 1. Докажем по индукции.

База индукции ($N = 1$). Из определения полукольца:

$$P \setminus P_1 = P \setminus (P \cap P_1) = \bigsqcup_{j=1}^{N_1} S_j, \ S_j \in \mathcal{P}, \ P \cap P_1 \in \mathcal{P}.$$

Предположим, что утверждение доказано при $N' \in \mathbb{N}$. Докажем, что верно при $N' + 1$.

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'+1} P_i = P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \cup P_{N'+1} = \left(P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i\right) \cap (P \setminus P_{N'+1}),$$

где $P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J'} S_j$ по предположению индукции, а $P \setminus P_{N'+1} = \bigsqcup_{l=1}^{L'} Q_l,\ Q_l \in \mathcal{P}$ по базе индукции.

Возьмём $R_{j,l} = S_j \cap Q_l \in \mathcal{P}$ — попарно непересекающиеся множества. $\{R_{j,l}\}_{j,l}$ перенумеруем единым индексом.

2. Тоже докажем по индукции.

   База индукции ($N = 2$). Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$.

$$P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$$

   — по определению.

$$P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j,\ Q_j \in \mathcal{P}$$

   — по первому свойству.

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{l=1}^{L} R_l,\ R_l \in \mathcal{P}$$

   — по первому свойству.

   Заметим, что $P_1 \cap P_2$, $\bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j$ и $\bigsqcup_{l=1}^{L} R_l$ попарно не пересекаются. Тогда

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \cap P_2) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^{L} R_l\right)$$

   осталось перенумеровать единым индексом.

   Пусть утверждение доказано при $M \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно верно при $M + 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \left(\bigcup_{i=1}^{M} P_i\right) \cup P_{M+1}$$

   Рассмотрим попарно непересекающиеся множества:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{M} P_i,\ P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^{M} P_i \text{ и } \left(\bigcup_{i=1}^{M} P_i\right) \setminus P_{M+1}$$

   Первое:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{M} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J} Q_j,\ Q_j \in \mathcal{P} \tag{1}$$

— по первому свойству.

Второе:

$$\bigcup_{i=1}^{M} P_i = \bigsqcup_{l=1}^{L} S_l,\ S_l \in \mathcal{P}$$

— по предположению индукции. Тогда

$$P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^{M} P_i = P_{M+1} \cap \bigsqcup_{l=1}^{L} S_l = \bigsqcup_{l=1}^{L} (P_{M+1} \cap S_l),\ P_{M+1} \cap S_l \in \mathcal{P}. \tag{2}$$

Третье аналогично второму с использованием индукционного предположения:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{M} P_i\right) \setminus P_{M+1} = \left(\bigsqcup_{l=1}^{L} S_l\right) \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{l=1}^{L} (S_l \setminus P_{M+1}), \tag{3}$$

$$S_l \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k},\ R_{l,k} \in \mathcal{P} \tag{4}$$

— по первому свойству.

Объединим (1), (2), (3), (4):

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J} Q_j \cup \bigsqcup_{l=1}^{L} (P_{M+1} \cap S_l) \cup \bigsqcup_{l=1}^{L} \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}.$$

Осталось отметить, что объединения построенных выше дизъюнктных объединений дизъюнктны. Перенумеруем единым индексом и получим утверждение теоремы.

Условие

$$\left[\begin{array}{l} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \varnothing. \end{array}\right.$$

выполнено по построению.

□

Лемма. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо. $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ — счётный набор. Тогда существует набор*

$$\{\{Q_{n,j}\}_{j=1}^{m_n}\}_{n=1}^{\infty} :\ \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{n,j} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ Q_{n,j} \subset P_n\ \forall j \in \{1, \ldots, m_n\}.$$

Доказательство. База индукции:

$$P_1 = Q_{1,1},$$

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{j=2}^{m_2} Q_{2,j},$$

Пусть для $n-1$ существует заданное представление.
Шаг индукции: Выделим из P_n часть, которая не пересекается с предыдущими $\{P_i\}_{i=1}^{n-1}$:

$$P_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k = \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{n,j},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

— по теореме о дизъюнктном представлении. Все $Q_{n,j}$ не пересекаются с ранее построенными в предположении множествами, поскольку они лежат в дополнении, следовательно, получаем необходимое дизъюнктное объединение. $\square$

Следствие. *Любое непустое открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$ можно реализовать в виде не более чем счётного объединения ячеек вида*

$$[a,b) = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i),\ a_i, b_i \in \mathbb{Q}^n.$$

Более того, можно считать, что такие ячейки содержатся в Ω вместе с замыканием.

Доказательство. $\forall x \exists P(x)$ — ячейка с рациональными вершинами, содержащая точку x. Тогда $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ (заметим, что P_n могут пересекаться).

Применим аналогичное рассуждение из леммы, которая была выше:

$$\Omega = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{n,j},\ Q_{n,j} \subset P_n\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall j \in \{1, \ldots, m_n\}.$$

$\square$

1.1 Тензорное произведение полуколец

Определение. Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — полукольца. Тогда

$$\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 := \{A \times B \mid A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_2\}.$$

Отметим, что $\mathcal{P}_1$ — подмножество некоторого более общего множества X, а $\mathcal{P}_2$ — подмножество некоторого более общего множества Y. Тогда $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ — это подмножество $X \times Y$.

Теорема. $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ *— полукольцо.*

Доказательство. Проверим свойства полукольца:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}_1$, $\varnothing \in \mathcal{P}_2$ — по определению.
$$\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$$
2. $A_1 \times A_2 \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, $B_1 \times B_2 \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$
$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2,$$
т.к. $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{P}_1,\ A_2 \cap B_2 \in \mathcal{P}_2$.
3. Пусть $A \times B \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$, $C \times D \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.
$$A = C \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{N_1} C_j$$
$$B = D \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{N_2} D_i$$
Определим $C_0 := A \cap C$, $D_0 := A \cap D$. Тогда
$$A \times B := \left(\bigsqcup_{j=0}^{N_1} C_j\right) \times \left(\bigsqcup_{i=0}^{N_2} D_i\right) = \bigsqcup_{j=0}^{N_1}\bigsqcup_{i=0}^{N_2}(C_j \times D_i) =$$
$$= (C_0 \times D_0) \sqcup \bigsqcup \bigsqcup_{(i,j)\neq(0,0)} (C_j \times D_i)$$
Отметим, что $C_j \times D_i \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.

Итого:
$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \times B) \setminus (C_0 \times D_0) = \bigsqcup_{i=0}^{N_2} \bigsqcup_{\substack{j=0 \\ (i,j)\neq(0,0)}}^{N_1} (C_j \times D_i)$$

$\square$

Следствие. *Зададим* $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$ *(неравенство покомпонентное, то есть* $a_i < b_i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$*). Тогда*
$$\mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) \mid a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b\}$$
— полукольцо.

2 Меры на полукольцах

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо и $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. Будем говорить, что μ — *конечно-аддитивная мера* на $\mathcal{P}$, если:

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. $A \in \mathcal{P}$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i$, $\{A_i\} \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu(A_i)$.

Если же выполнено условие

2′. $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A, \{A_i\} \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$,

то говорят, что μ — *счётно-аддитивная мера* (или просто *мера*) на $\mathcal{P}$.

Лемма (Свойства конечно-аддитивной меры на полукольце)**.** *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, μ — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Тогда справедливы следующие свойства:*

1. *Монотонность: если $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{P}$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*
2. *Усиленная монотонность: если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\{A_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i \subset B$, то $\sum\limits_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(B)$.*
3. *Конечная полуаддитивность: если $B \in \mathcal{P}$ и $\{C_j\}_{j=1}^{M} \subset \mathcal{P}$, $B \subset \bigcup\limits_{j=1}^{M} C_j$, то $\mu(B) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{M} \mu(C_j)$.*

Доказательство.

1. Первое — это следствие второго утверждения, если $\{A_i\}$ состоит из одного элемента A.
2. Из теоремы о дизъюнктом представлении в полукольце существует дизъюнктный набор $\{Q_l\}_{l=1}^{L} \subset \mathcal{P}$:
$$B = \bigsqcup_{i=1}^{N} A_i \sqcup \bigsqcup_{l=1}^{L} Q_l = \bigsqcup_{i=1}^{N} \bigsqcup_{l=1}^{L} (A_i \sqcup Q_l)$$
По определению меры на полукольце
$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) + \sum_{l=1}^{L} \mu(Q_l) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i),$$
т.к. $\sum\limits_{l=1}^{L} \mu(Q_l) \geqslant 0$.

3. $C_j \cap B =: B_j$, где $C_j \cap B \in \mathcal{P}$ $\forall j \in \{1, \ldots, M\}$. Тогда

$$B = \bigcup_{j=1}^{M} = \bigsqcup_{l=1}^{L} B_l',$$

где для любого l и j либо $B_l' \subset B_j$, либо не пересекаются.

В силу конечной аддитивности μ:

$$\mu(B) = \sum_{l=1}^{L} \mu(B_l') \leqslant \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\sum_{\substack{l=1 \\ B_l' \subset B_j}}^{L} \mu(B_l')}_{\leqslant \mu(B_j) \text{ по св.2}} \leqslant \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\mu(B_j)}_{\leqslant \mu(C_j) \text{ по св.1}} \leqslant \sum_{j=1}^{M} \mu(C_j).$$

$\square$

Определение. μ_1 — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}_1$, μ_2 — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}_2$. Тогда

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) := \mu_1(A) \cdot \mu_2(B),$$

где $A \in \mathcal{P}_1$, $B \in \mathcal{P}_2$.

Лемма. *Если μ_i — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$, то $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$.*

Доказательство. Нужно доказать, что если $A \times B = C \in \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ и $C = \bigsqcup_{k=1}^{N} C_k$, то $\mu(C) = \sum_{k=1}^{N} \mu(C_k)$.

Рассмотрим простой случай

$$A \times B = \bigsqcup_{i=1}^{N} \bigsqcup_{j=1}^{M} (P_i \times Q_j),$$

где $\bigsqcup_{i=1}^{N} P_i = A$, $\bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j = B$ — *сеточные представления.*

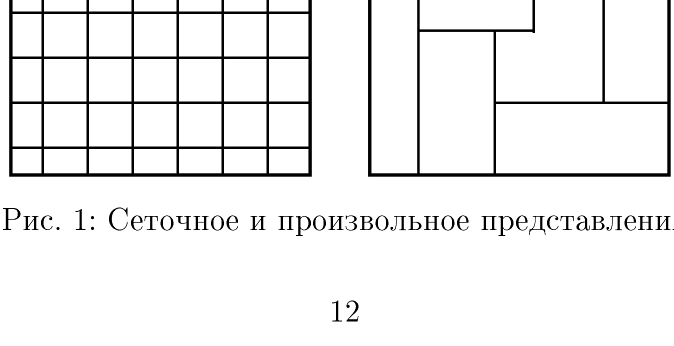

Рис. 1: Сеточное и произвольное представления

$$\mu(A\times B) := \mu_1(A)\cdot\mu_2(B) = \left(\sum_{i=1}^{N}\mu_1(P_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{M}\mu_2(Q_j)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\mu_1(P_i)\mu_2(Q_j) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\mu(P_i\times Q_j).$$

В общем случае:

$$C = A\times B = \bigsqcup_{k=1}^{L}(A_k\times B_k) \Longrightarrow A = \bigcup_{k=1}^{L}A_k \text{ и } B = \bigcup_{k=1}^{L}B_k.$$

В силу теоремы о дизъюнктном представлении в полукольце $A = \bigsqcup\limits_{s=1}^{L'}A'_s$, $B = \bigsqcup\limits_{m=1}^{M'}B'_m$.

$A\times B = \bigsqcup\limits_{s=1}^{L'}\bigsqcup\limits_{m=1}^{M'}(A'_s\times B'_m)$ — сеточное разбиение, для которого всё доказано.

$$\mu(A\times B) = \sum_{s=1}^{L'}\sum_{m=1}^{M'}\mu_1(A'_s)\mu_2(B'_m) =$$

$$= \sum_{k=1}^{L}\underbrace{\sum_{(s,m):A'_s\times B'_m\subset A_k\times B_k}\mu_1(A'_s)\mu_2(B'_m)}_{=\mu_1(A_k)\mu_2(B_k)} = \sum_{k=1}^{L}\mu(A_k\times B_k).$$

$\square$

Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, μ — конечно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *μ — счётно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$;*
2. *μ — счётно-полуаддитивная мера на $\mathcal{P}$, то есть если $A\in\mathcal{P}$ и $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, то $\mu(A)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.*

Доказательство. $\underline{2\Longrightarrow 1}$.

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}A_j,\ \{A_j\}\subset\mathcal{P},\ A\in\mathcal{P}.$$

$$\mu(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

— в силу счётной полуаддитивности.
Поскольку μ конечно-аддитивна, в силу продвинутой монотонности $\forall N \in \mathbb{N}$ $\mu(A) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{N} \mu(A_j)$, то возьмём супремум по N и получим $\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.
<u>$1 \Longrightarrow 2$</u>.

$$\{A_i\} \subset \mathcal{P},\ A_i' = A \cap A_i$$

В силу теоремы о дизъюнктном представлении:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

и

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i' = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{N_i} Q_{i,j},\ Q_{i,j} \in \mathcal{P}$$

в силу счётной аддитивности. При этом

$$\bigsqcup_{j=1}^{N_i} Q_{i,j} \subset A_i' \subset A_i\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Поскольку μ счётно-аддитивна, то:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_i} \mu(Q_{i,j}) \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)}_{\text{продв. монот.}}.$$

$\square$

Замечание. Мера на полукольце называется *конечной*, если она принимает только конечные значения.

Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая и непрерывная слева в каждой точке функция.

$$\mu_g([a, b)) := g(b) - g(a) > 0.$$

Доказать, что μ_g конечно-аддитивна — упражнение.
Также определим

$$\mathcal{P} := \{[\alpha, \beta) \mid \alpha < \beta\}.$$

Лемма. *μ_g — счётно-аддитивная мера на $\mathcal{P}$.*

Доказательство.

$$[a,b) \supset [c,d) = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{[c_j, d_j)}_{\subset [a,b)}.$$

Поскольку g непрерывна слева, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists t \in (c,d): \ |g(t) - g(d)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \ \exists c'_j < c_j: \ |g(c'_j) - g(c_j)| < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Рассмотрим $[c,t] \subset \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} [c_j, d_j) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} (c'_j, d_j)$, тогда по лемме Гейне-Бореля

$$\underbrace{[c,t]}_{[c,t)\subset} \subset \bigcup_{j=1}^{N} (c'_j, d_j) \subset \bigcup_{j=1}^{N} [c'_j, d_j)$$

Тогда

$$\mu_g([c,t)) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu_g([c'_j, d_j)) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu_g([c_j, d_j)) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g([c_j, d_j)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку $|\mu_g([c,t)) - \mu_g([c,d))| < \frac{\varepsilon}{2}$, то $\mu_g([c,d)) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_g([c_j, d_j)) + \varepsilon$, но ε был выбран произвольно, поэтому можно сказать, что *счётная полуаддитивность с конечной аддитивностью дают счётную аддитивность.* $\square$