

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Действительный анализ»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Тюленев Александр Иванович

Автор конспекта: [Цыбулин Егор](#), студент 208 группы

Москва, 19 февраля 2026 г.

Содержание

1	Абстрактная теория меры	2
---	-------------------------	---

1 Абстрактная теория меры

Определение. Пусть I — индексное множество произвольной мощности. $\forall \alpha \in I$ задано множество A_α . Тогда говорят, что задана *система множеств* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Лемма. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система множеств. Тогда

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha); \\ A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha); \\ A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

Доказательство.

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in A \text{ и } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит ни одному из множеств A_α , то есть $\forall \alpha \in I$ верно $x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\forall \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \iff x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \iff x \in A \text{ и } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит хотя бы одному множеству A_α , то есть $\exists \alpha \in I : x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Третье равенство:

$$\begin{aligned} x \in A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) &\iff x \in A \text{ и } x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \iff \\ &\iff x \in A \text{ и } \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha \iff \exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \in A_\alpha) \iff \\ &\iff \exists \alpha \in I (x \in A \cap A_\alpha) \iff x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha). \end{aligned}$$

□

Определение. $A \triangle B$ — симметрическая разность:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение. Пусть X — абстрактное множество. $\{A_n\}$ — последовательность подмножеств множества X .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \iff \forall x \in \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \exists N(x) \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n \geq N(x)} A_n$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит всем A_n , начиная с некоторого номера.

Определение.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \iff \forall x \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_n\}$.

Лемма.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n; \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{K \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq K} A_n. \end{aligned}$$

Замечание. Говоря о системах множеств, всюду далее считаем, что все они являются подмножествами некоторого множества X .

Определение. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, то есть $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$. Тогда $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ — *дизъюнктивное объединение*.

Определение. Пусть $E \subset X$. Система множеств $\{E_{\beta}\}_{\beta \in J}$ называется *разбиением множества E* , если $E_{\beta} \cap E_{\beta'} = \emptyset$ при $\beta \neq \beta'$ и $E = \bigsqcup_{\beta \in J} E_{\beta}$.

Лемма (О дизъюнктивном объединении). Пусть X — множество. $\{A_n\} \subseteq 2^X$, $A_0 = \emptyset$. Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

Доказательство. Включение \supset очевидно, потому что

$$A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'} \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть, наоборот, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $m(x) \in \mathbb{N}$ — наименьший из тех $n \in \mathbb{N}$, что $x \in A_n$, тогда $x \notin A_{n'}$ при $n' < m(x)$, тогда

$$x \in A_{m(x)} \setminus \bigcup_{n'=0}^{m(x)-1} A_{n'} \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

□

Определение. Система $\mathcal{R} \subset 2^X$ называется *кольцом (множеств)*, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$,
2. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$,
3. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Определение. Говорят, что \mathcal{R} — *кольцо с единицей*, если $X \in \mathcal{R}$.

Определение. Кольцо с единицей называется *алгеброй* \mathcal{A} .

Определение. Алгебра \mathcal{A} называется *σ -алгеброй*, если $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ для всякой последовательности множеств $\{A_n\} \in \mathcal{A}$

Замечание. Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ является алгеброй тогда и только тогда, когда:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$;
2. $A \triangle B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$;
3. $A \cap B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Пример. 1. $\{\emptyset, X\}$ — алгебра и σ -алгебра.

2. 2^X — алгебра и σ -алгебра.

3. $X = \mathbb{N}$, тогда \mathcal{A} — все такие подмножества \mathbb{N} , которые либо сами не более чем конечны, либо не более чем конечны их дополнения — это алгебра.

4. $X = \mathbb{R}$, тогда \mathcal{A} — все такие подмножества \mathbb{R} , которые либо сами не более чем счётны, либо их дополнения не более чем счётны — это σ -алгебра.

Определение. Система $\mathcal{P} \subset 2^X$ — *полукольцо*, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$;

2. $A \cap B \in \mathcal{P} \forall A, B \in \mathcal{P}$;

3. Если $A, B \in \mathcal{P}$ и $A \subset B$, то $\exists \{P_i\}_{i=1}^{N'} \subset \mathcal{P} : B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{N'} P_i$.

Замечание. Если $\exists E \subset X : \mathcal{P} \subset 2^E$ и $E \in \mathcal{P}$, то говорят, что *полукольцо имеет единицу*.

Пример. Определим полуинтервалы $[a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда

$$\mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) \mid a \leq \alpha \leq \beta \leq b\}.$$

Определение. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$ — система подмножеств. $M(\mathcal{E})$ — *наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathcal{E}* .

Лемма. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система σ -алгебр. $\mathcal{A}_\alpha \subset 2^X \forall \alpha \in I$. Тогда $\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ — σ -алгебра.

Доказательство.

$$\emptyset \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \implies \emptyset \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

$$A, B \in \mathcal{A} \implies A, B \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I.$$

Так как \mathcal{A}_α — алгебра, то $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ принадлежат \mathcal{A}_α для любого $\alpha \in I$, поэтому объединение, пересечение и разность принадлежат \mathcal{A} .

Если $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, то $\{A_n\} \subset \mathcal{A}_\alpha$ для любого $\alpha \in I$. Тогда каждый \mathcal{A}_α является σ -алгеброй, а следовательно

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

□

Теорема. Минимальная σ -алгебра существует и единственна.

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — всевозможные σ -алгебры, содержащие данную систему \mathcal{E} . Эта система непуста, потому что $\mathcal{E} \subset 2^X$.

$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ — σ -алгебра по лемме. Она содержит \mathcal{E} .

Пусть \mathcal{A}' — произвольная σ -алгебра, содержащая \mathcal{E} , тогда

$$M(\mathcal{E}) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}'.$$

Следовательно, $M(\mathcal{E}) \in \mathcal{A}'$ для любой σ -алгебры \mathcal{A}' , содержащей \mathcal{E} .

Единственность. Пусть \mathcal{A}^1 и \mathcal{A}^2 — две наименьшие σ -алгебры, содержащие \mathcal{E} . Так как они наименьшие, то

$$(\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2 \wedge \mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}^1) \implies \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2.$$

□

Определение. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. $\mathcal{B}(X)$ — борелевская σ -алгебра пространства X — наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые множества.

Замечание. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — континуальное семейство, $2^{\mathbb{R}}$ — мощность более чем континуальная. Факт оставим без доказательства.

Теорема (Дизъюнктное представление в полукольце). Пусть дано X , $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо.

1. Тогда $\forall P \in \mathcal{P}$ и $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$ существует набор $\{S_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{P}$:

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^M S_j$$

2. Тогда $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$ существует дизъюнктный конечный набор $\{Q_j\}_{j=1}^L$, $L \in \mathbb{N}$: $\bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^L Q_j$, при этом $\forall j \in \{1, \dots, L\}$ $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ верно

$$\begin{cases} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \emptyset. \end{cases}$$

Доказательство. 1. Докажем по индукции.

База индукции ($N = 1$). Из определения полукольца:

$$P \setminus P_1 = P \setminus (P \cap P_1) = \bigsqcup_{j=1}^{N_1} S_j, \quad S_j \in \mathcal{P}, \quad P \cap P_1 \in \mathcal{P}.$$

Предположим, что утверждение доказано при $N' \in \mathbb{N}$. Докажем, что верно при $N' + 1$.

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'+1} P_i = P \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{N'} P_i \cup P_{N'+1} \right) = \left(P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \right) \cap (P \setminus P_{N'+1}),$$

где $P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J'} S_j$ по предположению индукции, а $P \setminus P_{N'+1} = \bigsqcup_{l=1}^{L'} Q_l$, $Q_l \in \mathcal{P}$ по базе индукции.

Возьмём $R_{j,l} = S_j \cap Q_l \in \mathcal{P}$ — попарно непересекающиеся множества. $\{R_{j,l}\}_{j,l}$ перенумеруем единым индексом.

2. Тоже докажем по индукции.

База индукции ($N = 2$). Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$.

$$P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$$

— по определению.

$$P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^M Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{P}$$

— по первому свойству.

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{l=1}^L R_l, \quad R_l \in \mathcal{P}$$

— по первому свойству.

Заметим, что $P_1 \cap P_2$, $\bigsqcup_{j=1}^M Q_j$ и $\bigsqcup_{l=1}^L R_l$ попарно не пересекаются. Тогда

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \cap P_2) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^M Q_j \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^L R_l \right)$$

осталось перенумеровать единым индексом.

Пусть утверждение доказано при $M \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно верно при $M + 1$:

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \left(\bigcup_{i=1}^M P_i \right) \cup P_{M+1}$$

Рассмотрим попарно непересекающиеся множества:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^M P_i, \quad P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^M P_i \quad \text{и} \quad \left(\bigcup_{i=1}^M P_i \right) \setminus P_{M+1}$$

Первое:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^M P_i = \bigsqcup_{j=1}^J Q_j, \quad Q_j \in \mathcal{P} \tag{1}$$

— по первому свойству.

Второе:

$$\bigcup_{i=1}^M P_i = \bigsqcup_{l=1}^L S_l, \quad S_l \in \mathcal{P}$$

— по предположению индукции. Тогда

$$P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^M P_i = P_{M+1} \cap \bigsqcup_{l=1}^L S_l = \bigsqcup_{l=1}^L (P_{M+1} \cap S_l), \quad P_{M+1} \cap S_l \in \mathcal{P}. \quad (2)$$

Третье аналогично второму с использованием индукционного предположения:

$$\left(\bigcup_{i=1}^M P_i \right) \setminus P_{M+1} = \left(\bigsqcup_{l=1}^L S_l \right) \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{l=1}^L (S_l \setminus P_{M+1}), \quad (3)$$

$$S_l \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}, \quad R_{l,k} \in \mathcal{P} \quad (4)$$

— по первому свойству.

Объединим (1), (2), (3), (4):

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \bigsqcup_{j=1}^J Q_j \cup \bigsqcup_{l=1}^L (P_{M+1} \cap S_l) \cup \bigsqcup_{l=1}^L \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}.$$

Осталось отметить, что объединения построенных выше дизъюнктивных объединений дизъюнктивны. Перенумеруем единым индексом и получим утверждение теоремы.

Условие

$$\begin{cases} Q_j \subset P_i, \\ Q_j \cap P_i = \emptyset. \end{cases}$$

выполнено по построению.

□