Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Действительный анализ»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Тюленев Александр Иванович
Автор конспекта: Цыбулин Егор, студент 208 группы

Москва, 19 февраля 2026 г.

Содержание

1 Абстрактная теория меры

Определение. Пусть I — индексное множество произвольной мощности. $\forall \alpha \in I$ задано множество A_α. Тогда говорят, что задана *система множеств* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Лемма. *Пусть* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *— система множеств. Тогда*

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha);$$

$$A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha);$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha).$$

Доказательство.

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит ни одному из множеств A_α, то есть $\forall \alpha \in I$ верно $x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\forall \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Второе равенство доказывается аналогично:

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \notin \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

x не принадлежит хотя бы одному множеству A_α, то есть $\exists \alpha \in I : x \notin A_\alpha$. Тогда

$$\exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \notin A_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus A_\alpha).$$

Третье равенство:

$$x \in A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \Longleftrightarrow x \in A \text{ и } x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in A \text{ и } \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha \Longleftrightarrow \exists \alpha \in I (x \in A \text{ и } x \in A_\alpha) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists \alpha \in I (x \in A \cap A_\alpha) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_\alpha).$$

$\square$

Определение. $A \triangle B$ — симметрическая разность:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Определение. Пусть X — абстрактное множество. $\{A_n\}$ — последовательность подмножеств множества X.

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \iff \forall x \in \varliminf_{n\to\infty} A_n \ \exists N(x) \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n \geqslant N(x)} A_n$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит всем A_n, начиная с некоторого номера.

Определение.

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \iff \forall x \in \varlimsup_{n\to\infty} A_n \ \exists \{n_k\} \subset \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$$

— все такие $x \in X$, что x принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности $\{A_n\}$.

Лемма.

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant N} A_n;$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant K} A_n.$$

Замечание. Говоря о системах множеств, всюду далее считаем, что все они являются подмножествами некоторого множества X.

Определение. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, то есть $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$. Тогда $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — *дизъюнктное объединение.*

Определение. Пусть $E \subset X$. Система множеств $\{E_\beta\}_{\beta\in J}$ называется *разбиением множества* E, если $E_\beta \cap E_{\beta'} = \varnothing$ при $\beta \neq \beta'$ и $E = \bigsqcup\limits_{\beta\in J} E_\beta$.

Лемма (О дизъюнктном объединении)**.** *Пусть X — множество. $\{A_n\} \subseteq 2^X$, $A_0 = \varnothing$. Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

Доказательство. Включение $\supset$ очевидно, потому что

$$A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пусть, наоборот, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $m(x) \in \mathbb{N}$ — наименьший из тех $n \in \mathbb{N}$, что $x \in A_n$, тогда $x \notin A_{n'}$ при $n' < m(x)$, тогда

$$x \in A_{m(x)} \setminus \bigcup_{n'=0}^{m(x)-1} A_{n'} \Longrightarrow x \in \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n'=0}^{n-1} A_{n'}.$$

□

Определение. Система $\mathcal{R} \subset 2^X$ называется *кольцом (множеств)*, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{R}$,
2. $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$,
3. $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Определение. Говорят, что $\mathcal{R}$ — *кольцо с единицей*, если $X \in \mathcal{R}$.

Определение. Кольцо с единицей называется *алгеброй* $\mathcal{A}$.

Определение. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *σ-алгеброй*, если $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ для всякой последовательности множеств $\{A_n\} \in \mathcal{A}$

Замечание. Система множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$ является алгеброй тогда и только тогда, когда:

1. $\varnothing \in \mathcal{A},\ X \in \mathcal{A}$;
2. $A \triangle B \in \mathcal{A}\ \forall A, B \in \mathcal{A}$;
3. $A \cap B \in \mathcal{A}\ \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Пример.

1. $\{\varnothing, X\}$ — алгебра и σ-алгебра.
2. 2^X — алгебра и σ-алгебра.
3. $X = \mathbb{N}$, тогда $\mathcal{A}$ — все такие подмножества $\mathbb{N}$, которые либо сами не более чем конечны, либо не более чем конечны их дополнения — это алгебра.
4. $X = \mathbb{R}$, тогда $\mathcal{A}$ — все такие подмножества $\mathbb{R}$, которые либо сами не более чем счётны, либо их дополнения не более чем счётны — это σ-алгебра.

Определение. Система $\mathcal{P} \subset 2^X$ — *полукольцо*, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$;

2. $A \cap B \in \mathcal{P}\ \forall A, B \in \mathcal{P}$;

3. Если $A, B \in \mathcal{P}$ и $A \subset B$, то $\exists \{P_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathcal{P} : B \setminus A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{N'} P_i$.

Замечание. Если $\exists E \subset X : \mathcal{P} \subset 2^E$ и $E \in \mathcal{P}$, то говорят, что *полукольцо имеет единицу.*

Пример. Пусть $X = [a, b),\ -\infty < a < b < +\infty$. Тогда

$$\mathcal{P} = \{[\alpha, \beta) \mid a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b\}$$

- полукольцо, не являющееся кольцом.

Определение. Пусть $\mathcal{E} \subset 2^X$ — система подмножеств. $M(\mathcal{E})$ — *наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.*

Лемма. *Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система σ-алгебр, $\mathcal{A}_\alpha \subset 2^X\ \forall \alpha \in I$. Тогда $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ — σ-алгебра.*

Доказательство.

$$\varnothing \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I \Longrightarrow \varnothing \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A, B \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I.$$

Так как $\mathcal{A}_\alpha$ — алгебра, то $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}_\alpha$ для любого $\alpha \in I$, поэтому объединение, пересечение и разность принадлежат $\mathcal{A}_\alpha$.

Если $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$, то $\{A_n\} \subset \mathcal{A}_\alpha$ для любого $\alpha \in I$. Так как каждая A_α является σ-алгеброй, имеем

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\alpha\ \forall \alpha \in I \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha.$$

□

Теорема. *Минимальная σ-алгебра существует и единственна.*

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — всевозможные σ-алгебры, содержащие данную систему $\mathcal{E}$. Эта система непуста, потому что $\mathcal{E} \subset 2^X$.

$\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ — σ-алгебра по лемме. Она содержит $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{A}'$ — произвольная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Тогда

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}'.$$

Следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ для любой σ-алгебры $\mathcal{A}'$, содержащей $\mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{A} = M(\mathcal{E})$.

Единственность. Пусть $\mathcal{A}^1$ и $\mathcal{A}^2$ — две наименьшие σ-алгебры, содержащие $\mathcal{E}$. Так как они наименьшие, то

$$(\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^2 \wedge \mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}^1) \Longrightarrow \mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2.$$

$\square$

Определение. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. $\mathcal{B}(X)$ — *борелевская σ-алгебра пространства X* — наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества.

Замечание. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — континуальное семейство, $2^{\mathbb{R}}$ — мощность более чем континуальная. Факт оставим без доказательства.

Теорема (Дизъюнктное представление в полукольце)**.**
Пусть дано X, $\mathcal{P} \subset 2^X$ — полукольцо.

1. *Тогда $\forall P \in \mathcal{P}$ и $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$ существует набор $\{S_j\}_{j=1}^M \subset \mathcal{P}$:*

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{M} S_j$$

2. *Тогда $\forall \{P_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{P}$, $N \in \mathbb{N}$ существует дизъюнктный конечный набор $\{Q_j\}_{j=1}^L$, $L \in \mathbb{N}$: $\bigcup_{i=1}^N P_i = \bigsqcup_{j=1}^L Q_j$, при этом $\forall j \in \{1, \ldots, L\}$ $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$ верно*

$$\left[\begin{aligned} &Q_j \subset P_i, \\ &Q_j \cap P_i = \varnothing. \end{aligned}\right.$$

Доказательство. 1. Докажем по индукции.

База индукции ($N = 1$). Из определения полукольца:

$$P \setminus P_1 = P \setminus (P \cap P_1) = \bigsqcup_{j=1}^{N_1} S_j,\ S_j \in \mathcal{P},\ P \cap P_1 \in \mathcal{P}.$$

Предположим, что утверждение доказано при $N' \in \mathbb{N}$. Докажем, что верно при $N' + 1$.

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'+1} P_i = P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i \cup P_{N'+1} = \left(P \setminus \bigcup_{i=1}^{N'} P_i\right) \cap (P \setminus P_{N'+1}),$$

где $P \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N'} P_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{J'} S_j$ по предположению индукции, а $P \setminus P_{N'+1} = \bigsqcup\limits_{l=1}^{L'} Q_l,\ Q_l \in \mathcal{P}$ по базе индукции.

Возьмём $R_{j,l} = S_j \cap Q_l \in \mathcal{P}$ — попарно непересекающиеся множества. $\{R_{j,l}\}_{j,l}$ перенумеруем единым индексом.

2. Тоже докажем по индукции.

   База индукции ($N = 2$). Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$.

$$P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$$

   — по определению.

$$P_1 \setminus P_2 = \bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j,\ Q_j \in \mathcal{P}$$

   — по первому свойству.

$$P_2 \setminus P_1 = \bigsqcup_{l=1}^{L} R_l,\ R_l \in \mathcal{P}$$

   — по первому свойству.

   Заметим, что $P_1 \cap P_2$, $\bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j$ и $\bigsqcup_{l=1}^{L} R_l$ попарно не пересекаются. Тогда

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \cap P_2) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{M} Q_j\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{l=1}^{L} R_l\right)$$

   осталось перенумеровать единым индексом.

   Пусть утверждение доказано при $M \in \mathbb{N}$. Покажем, что оно верно при $M+1$:

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \left(\bigcup_{i=1}^{M} P_i\right) \cup P_{M+1}$$

   Рассмотрим попарно непересекающиеся множества:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{M} P_i,\ P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^{M} P_i \text{ и } \left(\bigcup_{i=1}^{M} P_i\right) \setminus P_{M+1}$$

   Первое:

$$P_{M+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{M} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J} Q_j,\ Q_j \in \mathcal{P} \tag{1}$$

— по первому свойству.

Второе:

$$\bigcup_{i=1}^{M} P_i = \bigsqcup_{l=1}^{L} S_l,\ S_l \in \mathcal{P}$$

— по предположению индукции. Тогда

$$P_{M+1} \cap \bigcup_{i=1}^{M} P_i = P_{M+1} \cap \bigsqcup_{l=1}^{L} S_l = \bigsqcup_{l=1}^{L} (P_{M+1} \cap S_l),\ P_{M+1} \cap S_l \in \mathcal{P}. \tag{2}$$

Третье аналогично второму с использованием индукционного предположения:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{M} P_i\right) \setminus P_{M+1} = \left(\bigsqcup_{l=1}^{L} S_l\right) \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{l=1}^{L} (S_l \setminus P_{M+1}), \tag{3}$$

$$S_l \setminus P_{M+1} = \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k},\ R_{l,k} \in \mathcal{P} \tag{4}$$

— по первому свойству.

Объединим (1), (2), (3), (4):

$$\bigcup_{i=1}^{M+1} P_i = \bigsqcup_{j=1}^{J} Q_j \cup \bigsqcup_{l=1}^{L} (P_{M+1} \cap S_l) \cup \bigsqcup_{l=1}^{L} \bigsqcup_{k=1}^{K_l} R_{l,k}.$$

Осталось отметить, что объединения построенных выше дизъюнктных объединений дизъюнктны. Перенумеруем единым индексом и получим утверждение теоремы.

Условие

$$\left[\begin{aligned} & Q_j \subset P_i, \\ & Q_j \cap P_i = \varnothing. \end{aligned}\right.$$

выполнено по построению.

$\square$