

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

**Автор курса:** профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна

**Автор конспекта:** [Цыбулин Егор](#), студент 108 группы

Москва, 10 февраля 2025 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Топология</b>	<b>3</b>
1.1	Топологические пространства . . . . .	3

# Глава 1

## Топология

### 1.1 Топологические пространства

**Определение.** *Метрика* — это функция  $\rho(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ , которая обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
3.  $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика  $\rho(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.**  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  — это множество всех точек  $x \in X$  :  $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ .

Из курса математического анализа. Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество  $X$  открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

**Определение.** Семейство  $\tau$  подмножеств некоторого множества  $X$ , удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией*.

**Определение.** Пусть  $X$  — произвольное множество и  $\tau = \{U_\alpha\}$  — некоторое семейство подмножеств множества  $X$ . Семейство подмножеств  $\tau$  называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество  $X$  принадлежат  $\tau$ ;

2. Объединение любого семейства множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
3. Пересечение любого конечного семейства множеств из  $\tau$  также принадлежит  $\tau$ .

**Определение.** Множество  $X$  с фиксированной топологией  $\tau$  называется *топологическим пространством* и обозначается через  $(X, \tau)$ .

Если  $X$  — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым  $\varepsilon$ -шаром (некоторой окрестностью).

Примеры:

1.  $\emptyset, X$ , других нет — *тривиальная топология*.
2. Семейство  $\tau$  состоит из всех подмножеств множества  $X$  — *дискретная топология*.

**Определение.** Пусть  $X$  — топологическое множество,  $x_0 \in X$ . *Окрестностью точки  $x_0$*  назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

**Утверждение.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  открыто  $\Leftrightarrow \forall x_0 \in A \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \in U_{x_0} \subset A$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $A$  открыто,  $x_0$  — точка  $A$ , тогда  $U_{x_0} = A$ .

$\Leftarrow$  Возьмём  $x \in U_x \subset A$ , где  $U_x$  открыты ( $\in \tau$ ). Рассмотрим  $\cup_{x \in A} U_x = U$ , где  $U$  открыто, т.к. все  $U_x$  открыты. При этом  $A \subset U$  и  $U \subset A \Rightarrow U = A \Rightarrow A$  открыто.  $\square$

**Определение.** Обратимся к курсу математического анализа. Пусть  $D_f$  — область определения  $f(x)$ ,  $x_0 \in D_f$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ .

$$f : X \rightarrow Y \forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— в терминах окрестностей.

**Определение.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  топологии пространств  $X$  и  $Y$  *непрерывно*, если  $\forall x_0 \in X$  и для любой окрестности  $\delta$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность точки  $x_0$  такая, что  $B_\delta(f(x_0)) \subset f(B(x_0))$ .

**Утверждение.** *Отображение  $f$  двух топологических пространств непрерывно  $\Leftrightarrow$  прообраз любого открытого множества открыт.*

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Пусть  $A \subset Y$  открыто. Рассмотрим  $f^{-1}(A)$ . Пусть  $x_0 \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists U$  — открытое:  $f(U) \subset A \Rightarrow U \subset f^{-1}(A)$ .  
 $\Leftarrow$  Пусть прообраз любого множества открыт. Пусть  $x_0 \in X \Rightarrow f(x_0) \in Y$ . Возьмём  $V \subset Y$ , которое будет открыто.  $f(x_0) \in V \Rightarrow f^{-1}(V)$  — открытое множество и  $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow U := f^{-1}(V)$ .  $\square$

Другие способы задания топологии:

1. Топология на подмножестве:

Пусть  $X$  — топологическое пространство.  $X_0 \subset X$ .  $U \in \tau(X) \Rightarrow U \cap X_0 \in \tau(X_0)$ .

2.  $f : X \rightarrow Y$  — топологическое пространство,  $f$  — произвольное отображение. Тогда открытые множества на  $X$  — прообразы открытых на  $Y$ .

**Определение.** Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция  $f : X \rightarrow Y$ , которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение  $f^{-1}$  также непрерывно.

**Определение.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $X \setminus A$  открыто.

**Определение.** Топологическое пространство  $X$  называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  таких, что  $X = A \cup B$ .

**Утверждение.** *Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии связен.*

*Доказательство.* От противного. Пусть отрезок несвязен.  $\exists A, B \subset \mathbb{R} : [a, b] = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , где  $A, B$  — открытые множества. Пусть  $\alpha \in A$ , тогда  $[a, \alpha) \subset A$  (т.к.  $A$  открыто). Рассмотрим  $\alpha_0 = \sup \alpha : [a, \alpha) \subset A$ .

Пусть  $\alpha_0 \in A$ , тогда:

1.  $\alpha_0 = b \Rightarrow B = \emptyset$  — противоречие.

2.  $\alpha_0 < b \Rightarrow \alpha_0$  входит в  $A$  с окрестностью  $\Rightarrow$  существует  $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \Rightarrow \alpha_0$  — не супремум — противоречие.

$\square$