

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

**Автор курса:** профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна

**Автор конспекта:** [Цыбулин Егор](#), студент 108 группы

Москва, 19 февраля 2025 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Топологические пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	2
1.2	Непрерывность . . . . .	3
1.3	Способы задания топологии . . . . .	4
1.4	Гомеоморфизм . . . . .	4
1.5	Связность . . . . .	4
1.6	Линейная связность . . . . .	5
1.7	Компактность . . . . .	5
1.8	Хаусдорфовость . . . . .	6
1.9	Фактор-топология . . . . .	6

# 1 Топологические пространства

## 1.1 Основные понятия

**Определение 1.1.** *Метрика* — это функция  $\rho(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ , которая обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
3.  $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$ .

**Определение 1.2.** Множество  $X$  называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика  $\rho(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.3.**  $\varepsilon$ -*окрестность точки*  $x_0$  — это множество всех точек  $x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon$ .

Из курса математического анализа.

**Определение 1.4.** Точка  $x \in X \subset A$  называется *внутренней точкой* множества  $X$ , если  $\exists B_\varepsilon(x) \subset X$ .

**Определение 1.5.** Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние.

**Определение 1.6.** Множество  $A$  называется *закрытым*, если его дополнение  $A \setminus X$  открыто.

Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество  $X$  открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

**Определение 1.7.** Семейство  $\tau$  подмножеств некоторого множества  $X$ , удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией*.

**Определение 1.8.** Пусть  $X$  — произвольное множество и  $\tau = \{U_\alpha\}$  — некоторое семейство подмножеств множества  $X$ . Семейство подмножеств  $\tau$  называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество  $X$  принадлежат  $\tau$ ;
2. Объединение любого семейства множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
3. Пересечение любого конечного семейства множеств из  $\tau$  также принадлежит  $\tau$ .

**Определение 1.9.** Множество  $X$  с фиксированной топологией  $\tau$  называется *топологическим пространством* и обозначается через  $(X, \tau)$ . Элементы множества  $X$  называются *точками*. Множества из  $\tau$  называются *открытыми* в  $(X, \tau)$ .

Если  $X$  — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым  $\varepsilon$ -шаром (некоторой окрестностью).

[Дополнение вне лекций] Топология, индуцированная метрикой — это топология, в которой открытые множества определяются через  $\varepsilon$ -шары. Таким образом, топология  $\tau$  на множестве  $X$  задаётся как:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists r > 0 : B_r(x) \subset U\}$$

**Пример 1.1.** 1.  $\emptyset, X$ , других нет — *тривиальная топология*.

2. Семейство  $\tau$  состоит из всех подмножеств множества  $X$  — *дискретная топология*.

**Определение 1.10.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $X \setminus A$  открыто.

**Определение 1.11.** Пусть  $X$  — топологическое множество,  $x_0 \in X$ . *Окрестностью точки*  $x_0$  назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

**Утверждение 1.1.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  открыто  $\Leftrightarrow \forall x_0 \in A \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \in U_{x_0} \subset A$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $A$  открыто,  $x_0$  — точка  $A$ , тогда  $U_{x_0} = A$ .

$\Leftarrow$  Возьмём  $x \in U_x \subset A$ , где  $U_x$  открыты ( $\in \tau$ ). Рассмотрим  $\cup_{x \in A} U_x = U$ , где  $U$  открыто, т.к. все  $U_x$  открыты. При этом  $A \subset U$  и  $U \subset A \Rightarrow U = A \Rightarrow A$  открыто.  $\square$

## 1.2 Непрерывность

**Определение 1.12.** Обратимся к курсу математического анализа. Пусть  $D_f$  — область определения  $f(x)$ ,  $x_0 \in D_f$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ .

$$f : X \rightarrow Y \quad \forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— в терминах окрестностей.

**Определение 1.13.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  топологии пространств  $X$  и  $Y$  *непрерывно*, если  $\forall x_0 \in X$  и для любой окрестности  $\delta$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность точки  $x_0$  такая, что  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0))$ .

**Утверждение 1.2.** Отображение  $f$  двух топологических пространств непрерывно  $\Leftrightarrow$  прообраз любого открытого множества открыт.

*Доказательство.*  $\Rightarrow$   $f : X \rightarrow Y$ . Пусть  $A \subset Y$  открыто. Рассмотрим  $f^{-1}(A)$ . Пусть  $x_0 \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists U$  — открытое:  $f(U) \subset A \Rightarrow U \subset f^{-1}(A)$ .

$\Leftarrow$  Пусть прообраз любого множества открыт. Пусть  $x_0 \in X \Rightarrow f(x_0) \in Y$ . Возьмём  $V \subset Y$ , которое будет открыто.  $f(x_0) \in V \Rightarrow f^{-1}(V)$  — открытое множество и  $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow U := f^{-1}(V)$ .  $\square$

## 1.3 Способы задания топологии

1. Топология на подмножестве:

Пусть  $X$  — топологическое пространство.

$$X_0 \subset X, U \in \tau(X) \Rightarrow U \cap X_0 \in \tau(X_0).$$

2.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — топологическое пространство,  $f$  — произвольное отображение. Тогда открытые множества на  $X$  — прообразы открытых на  $Y$ , то есть:

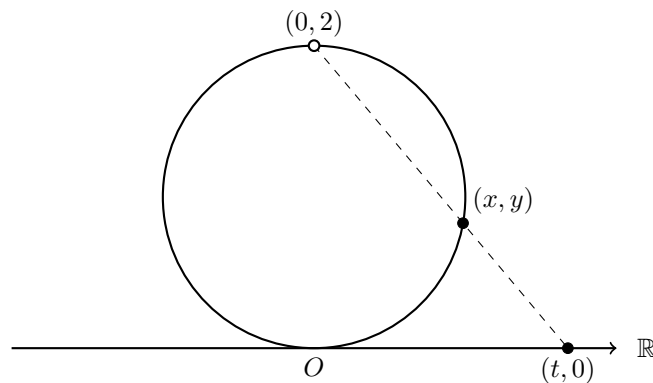
$$\tau_X = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y\}$$

*Замечание 1.1* (Дополнение с лекции №2). Топология на  $Y$  порождается отображением  $f$ : множество открыто, если его прообраз открыт.

## 1.4 Гомеоморфизм

**Определение 1.14.** Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция  $f : X \rightarrow Y$ , которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение  $f^{-1}$  также непрерывно.

**Пример 1.2.** Окружность с выколотым полюсом и прямая гомеоморфны.



## 1.5 Связность

**Определение 1.15.** Топологическое пространство  $X$  называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  таких, что  $X = A \cup B$ .

**Утверждение 1.3.** Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии связан.

*Доказательство.* От противного. Пусть отрезок несвязен.  $\exists A, B \subset \mathbb{R} : [a, b] = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ , где  $A, B$  — открытые множества. Пусть  $\alpha \in A$ , тогда  $[a, \alpha) \subset A$  (т.к.  $A$  открыто). Рассмотрим  $\alpha_0 = \sup \alpha : [a, \alpha) \subset A$ .

Пусть  $\alpha_0 \in A$ , тогда:

1.  $\alpha_0 = b \Rightarrow B = \emptyset$  — противоречие.
2.  $\alpha_0 < b \Rightarrow \alpha_0$  входит в  $A$  с окрестностью  $\Rightarrow$  существует  $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \Rightarrow \alpha_0$  — не супремум — противоречие.

□

**Утверждение 1.4.** *Непрерывный образ связного пространства связан.*

*Доказательство.*  $f : X \rightarrow Y$ . От противного. Пусть образ несвязен. Тогда  $Im f = A \cup B$ , где  $A, B$  — открытые и непустые множества,  $A \cap B = \emptyset$ .  $f^{-1}(A)$  открыто,  $f^{-1}(B)$  открыто. Если множества не пересекаются, то и их образы не пересекаются. Так как множества не пусты, то и их образы не пусты.  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X \Rightarrow X$  не связно — противоречие. □

*Замечание 1.2.* Связность является топологическим инвариантом.

## 1.6 Линейная связность

**Определение 1.16.** *Непрерывная кривая (параметрическая) — непрерывное отображение ненулевого отрезка в топологическое пространство.  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , где  $\gamma$  непрерывна.*

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

**Определение 1.17.** Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить кривой.

$$x, y — \text{точки } X, \text{ тогда } \exists \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X : \gamma(\alpha) = x, \gamma(\beta) = y$$

**Утверждение 1.5.** *Образ линейно связного пространства линейно связан.*

*Доказательство.* Композиция непрерывных отображений непрерывна:

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X, f : X \rightarrow Y.$$

□

**Утверждение 1.6.** *Если топологическое пространство линейно связно, то оно связно. (Наоборот, вообще говоря, неверно — как задачу можно попросить привести контрпример).*

*Доказательство.* Пусть топологическое пространство линейно связно, но не связно. Тогда  $X = A \cup B$ . Возьмём  $x \in A, y \in B$ . Пользуемся линейной связностью:  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\gamma$  непрерывна,  $\gamma(0) = A, \gamma(1) = B$ ,  $Im \gamma$  в  $X$  — связно.  $Im \gamma \cap A$  — открыто в топологии образа  $Im \gamma$ , индуцированного топологии на  $X$  (пользуемся топологией на подмножестве),  $Im \gamma \cap B$  — открыто в топологии образа  $Im \gamma$ , индуцированного топологии на  $X$  — получили противоречие с тем, что отрезок несвязен. □

## 1.7 Компактность

**Определение 1.18.** Топологическое пространство *компактно*, если из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение 1.7.** *Непрерывный образ компакта является компактом.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Покрываем образ:  $Im f \subseteq \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  — покрытие.  $X \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}(U_{\alpha})$  — открытое покрытие  $X$  (т.к.  $f$  непрерывно).  $X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$  — конечное подпокрытие. Пользуемся компактностью  $X$ :  $Im f \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$  □

*Замечание 1.3.* Компактность является топологическим инвариантом.

**Утверждение 1.8.** *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

*Доказательство.*  $M \subset X \subset Y$ ,  $M$  замкнуто,  $X$  компактно,  $Y$  — топологическое пространство.  $M \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  открытое покрытие  $M$ .  $(Y \setminus M) \cup \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  — открытое покрытие. Выберем в нём конечное подпокрытие:  $X \subset (Y \setminus M) \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$  — конечное подпокрытие.  $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ .  $\square$

## 1.8 Хаусдорфовость

**Определение 1.19.** Топологическое пространство  $X$  называется *хаусдорфовым*, если у любых двух его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

$\tau = X, \emptyset \Rightarrow X$  не хаусдорфово.

**Лемма 1.1.** *Компакт в хаусдорфовом пространстве является замкнутым множеством.*

*Доказательство.*  $M \subset X$ ,  $M$  — компакт.  $x_0 \in X \setminus M$ ,  $y \in M$ . Пользуемся хаусдорфовостью:  $x_0 \in U_{x_0}^y$ ,  $y \in V_y$ ,  $U_{x_0}^y \cap V_y = \emptyset$ .  $\bigcup_{y \in M} V_y$  — открытое покрытие всего множества  $M$ . Пользуемся компактностью: выберем конечное подпокрытие  $M \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ ,  $y_i \in M$ .  $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0}^{y_i} = U$ ,  $x_0 \in U$ ,  $U \cap V_{y_i} = \emptyset$ ,  $U$  открытое  $\Rightarrow X \setminus M$  открыто.  $\square$

**Утверждение 1.9.**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  — непрерывная биекция,  $X$  — компакт,  $Y$  — хаусдорфово топологическое пространство  $\Rightarrow f$  — гомеоморфизм.

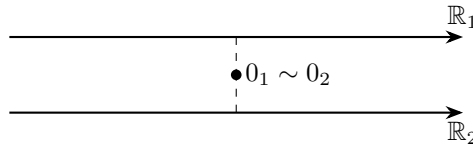
*Доказательство.*  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  замкнуто,  $M \subset X$ ,  $M$  замкнуто  $\Rightarrow M$  компактно  $\Rightarrow f(M) \subset Y$ , где  $f(M)$  тоже компактно (т.к.  $f$  непрерывно)  $\Rightarrow f(M)$  замкнуто в  $Y$ .  $\square$

## 1.9 Фактор-топология

**Определение 1.20.** Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $X$ . *Фактор-пространство*  $X/\sim$  — это множество классов эквивалентности  $[x]$  для всех  $x \in X$ . Топология на  $X/\sim$  называется *фактор-топологией*.

Множество  $U \subset X/\sim$  открыто в фактор-топологии тогда и только тогда, когда его прообраз  $f^{-1}(U)$  открыт в  $X$ , где  $f : X \rightarrow X/\sim$ .

**Пример 1.3** (нехаусдорфова пространства). Рассмотрим две числовые прямые  $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$  и отождествим все их точки, кроме одной:  $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ ,  $x \neq 0, x \in \mathbb{R}_1$ ,  $y \in \mathbb{R}_2$ . Получили фактор-пространство  $\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2 / \sim$ . Оно не является хаусдорфовым, так как у нулей числовых прямых нет непересекающихся окрестностей.



# Список литературы

- [1] А.А. Ошемков. [Наглядная геометрия и топология. Лекции](#). Москва: teach in, электронное издание. 185 с.
- [2] Учебные материалы по наглядной геометрии и топологии от кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. URL: <http://dfgm.math.msu.su/ngit.php> (дата обращения: 19.02.2025).