Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Лононосова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна
Автор конспекта: Цыбулин Егор, студент 108 группы

Москва, 8 февраля 2025 г.

Оглавление

Глава 1

Тест

1.1 (50 билет) Поверхности второго порядка

1.1.1 Общее уравнение

Определение 1.1.1. Поверхностью второго порядка называется множество точек трёхмерного аффинного или точечно-евклидова пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0$$

причём хотя бы одно из чисел $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$ отлично от нуля. Выражение $F(x, y, z)$ - *многочлен второй степени* от переменных x, y, z. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется *общим уравнением* поверхности второго порядка.

Замечание 1.1.1. Точно так же определяются повехности второго порядка в аффинном или точечно-евклидовом пространстве произвольной конечной размерности n; они задаются многочленами второй степени от n переменных.

Теория поверхностей второго порядка аналогична теории кривых второго порядка.

1.1.2 Квадратичная часть и матрицы

С каждым многочленом $F(x, y, z)$ связано *квадратичное отображение* пространства (с данной системой координат) $f : A^3 \to \mathbb{R}$, которое каждой точке X с координатами (x, y, z) ставит в соответствие число $F(x, y, z)$. Говорят, что это отображение представлено многочленом F в данной системе координат. В другой системе координат многочлен, представляющий ту же функцию, станет другим.

Как и в случае линий второго порядка:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + a_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

– большая матрица,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– малая матрица (квадратичной части).

Определение 1.1.2.

$$F_1(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

называется *квадратичной частью* многочлена F.

1.1.3 Закон изменения матриц при переходе к новой аффинной системе координат

Дословно так же, как в случае линий, доказывается, что при переходе к новой системе координат матрицы A и A_1 многочлена F, представляющие всё ту же функцию $f : A^3 \to \mathbb{R}$, меняются по закону $A_1^{'} = C^T A_1 C$ и $A^{'} = D^T A D$, где $A_1^{'}$ и $A^{'}$ – матрицы в новых координатах, C – матрица перехода от старого базиса к новому (её столбцы – координаты новых базисных векторов в старом базисе), $D = \begin{pmatrix} & C & & x_0 \\ & & & y_0 \\ & & & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где x_0, y_0, z_0 - координата нового начала координат в старой системе координат.

В новой системе координат:

$$F^{'}(x^{'}, y^{'}, z^{'}) = \begin{pmatrix} x^{'} & y^{'} & z^{'} & 1 \end{pmatrix} A^{'} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x^{'} & y^{'} & z^{'} \end{pmatrix} A_1^{'} \begin{pmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{pmatrix} + a_0,$$

где буквы со штрихами – координаты, многочлен и матрицы в новой системе координат,

$$\begin{pmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$