Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Лононосова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна
Автор конспекта: Цыбулин Егор, студент 108 группы

Москва, 25 февраля 2025 г.

Содержание

1 Топологические пространства

1.1 Основные понятия

Определение. *Метрика* — это функция $\rho(x, y) \to \mathbb{R}$, которая обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$.

Определение. Множество X называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика $\rho(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение. *ε-окрестность точки x_0* — это множество всех точек $x \in X$: $\rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Из курса математического анализа.

Определение. Точка $x \in X \subset A$ называется внутренней точкой множества X, если $\exists B_\varepsilon(x) \subset X$.

Определение. Множество называется открытым, если все его точки — внутренние.

Определение. Множество A называется закрытым, если его дополнение $A \backslash X$ открыто.

Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество X открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

Определение. Семейство τ подмножеств некоторого множества X, удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией*.

Определение. Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Семейство подмножеств τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество X принадлежат τ;

2. Объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ;

3. Пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ.

Определение. Множество X с фиксированной топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ). Элементы множества X называются *точками*. Множества из τ называются *открытыми* в (X, τ).

Если X — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым ε-шаром (некоторой окрестностью).

[Дополнение вне лекций] Топология, индуцированная метрикой — это топология, в которой открытые множества определяются через ε-шары. Таким образом, топология τ на множестве X задаётся как:

$$\tau = \{U \subset X | \ \forall x \in U \ \exists r > 0 : B_r(x) \subset U\}$$

Пример. 1. $\varnothing, X$, других нет — *тривиальная топология.*

2. Семейство τ состоит из всех подмножеств множества X — *дискретная топология.*

Определение. Множество A топологического пространства X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Определение. Пусть X — топологическое множество, $x_0 \in X$. *Окрестностью точки* x_0 назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

Утверждение. *Множество A топологического пространства X открыто* $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in A \ \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \ \in U_{x_0} \subset A$

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть A открыто, x_0 — точка A, тогда $U_{x_0} = A$.
$\Longleftarrow$ Возьмём $x \in U_x \subset A$, где U_x открыты ($\in \tau$). Рассмотрим $\cup_{x \in A} U_x = U$, где U открыто, т.к. все U_x открыты. При этом $A \subset U$ и $U \subset A \Rightarrow U = A \Rightarrow A$ открыто. □

1.2 Непрерывность

Определение. Обратимся к курсу математического анализа. Пусть D_f — область определения $f(x), \ x_0 \in D_f$. Если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta_\varepsilon > 0, \ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0.

$$f : X \to Y \ \forall B_\varepsilon(f(x_0)) \ \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— в терминах окрестностей.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологии пространств X и Y *непрерывно*, если $\forall x_0 \in X$ и для любой окрестности δ точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $f(B(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0))$.

Утверждение. *Отображение f двух топологических пространств непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз любого открытого множества открыт.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ $f : X \to Y$. Пусть $A \subset Y$ открыто. Рассмотрим $f^{-1}(A)$. Пусть $x_0 \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists U$ — открытое: $f(U) \subset A \Rightarrow U \subset f^{-1}(A)$.
$\Longleftarrow$ Пусть прообраз любого множества открыт. Пусть $x_0 \in X \Rightarrow f(x_0) \in Y$. Возьмём $V \subset Y$, которое будет открыто. $f(x_0) \in V \Rightarrow f^{-1}(V)$ — открытое множество и $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow U := f^{-1}(V)$. □

1.3 Способы задания топологии

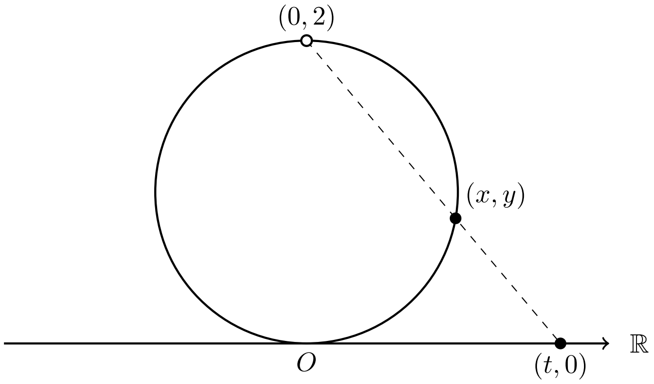
1. Топология на подмножестве:
   Пусть X — топологическое пространство.
   $$X_0 \subset X,\ U \in \tau(X) \Rightarrow\ U \cap X_0 \in \tau(X_0).$$
2. $f : X \to Y$, Y — топологическое пространство, f — произвольное отображение. Тогда открытые множества на X — прообразы открытых на Y, то есть:
   $$\tau_X = \left\{ f^{-1}(U) |\ U \in \tau_Y \right\}$$

Замечание (Дополнение с лекции №2)*.* Топология на Y порождается отображением f: множество открыто, если его прообраз открыт.

1.4 Гомеоморфизм

Определение. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция $f : X \to Y$, которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение f^{-1} также непрерывно.

Пример. Окружность с выколотым полюсом и прямая гомеоморфны.



1.5 Связность

Определение. Топологическое пространство X называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств A и B таких, что $X = A \cup B$.

Утверждение. *Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии связен.*

Доказательство. От противного. Пусть отрезок несвязен. $\exists A, B \subset \mathbb{R} : \ [a, b] = A \cup B, \ A \cap B = \varnothing$, где A, B — открытые множества. Пусть $\alpha \in A$, тогда $[a, \alpha) \subset A$ (т.к. A открыто). Рассмотрим $\alpha_0 = \sup \alpha : [a, \alpha) \subset A$.
Пусть $\alpha_0 \in A$, тогда:

1. $\alpha_0 = b \Rightarrow B = \varnothing$ — противоречие.

2. $\alpha_0 < b \Rightarrow \alpha_0$ входит в A с окрестностью $\Rightarrow$ существует $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \Rightarrow \alpha_0$ — не супремум — противоречие.

$\square$

Утверждение. *Непрерывный образ связного пространства связен.*

Доказательство. $f : X \to Y$. От противного. Пусть образ несвязен. Тогда $Imf = A \cup B$, где A, B — открытые и непустые множества, $A \cap B = \varnothing$. $f^{-1}(A)$ открыто, $f^{-1}(B)$ открыто. Если множества не пересекаются, то и их образы не пересекаются. Так как множества не пусты, то и их образы не пусты. $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X \Rightarrow X$ не связно — противоречие. $\square$

Замечание. Связность является топологическим инвариантом.

1.6 Линейная связность

Определение. *Непрерывная кривая (параметрическая)* — непрерывное отображение ненулевого отрезка в топологическое пространство. $\gamma : [a, b] \to X$, где γ непрерывна.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Определение. Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить кривой.

$$x, y \text{ — точки } X, \text{ тогда } \exists \gamma : [\alpha, \beta] \to X : \ \gamma(\alpha) = x, \ \gamma(\beta) = y$$

Утверждение. *Образ линейно связного пространства линейно связен.*

Доказательство. Композиция непрерывных отображений непрерывна:

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to X, \ f : X \to Y.$$

□

Утверждение. *Если топологическое пространство линейно связно, то оно связно. (Наоборот, вообще говоря, неверно — как задачу можно попросить привести контрпример).*

Доказательство. Пусть топологическое пространство линейно связно, но не связно. Тогда $X = A \cup B$. Возьмём $x \in A, \ y \in B$. Пользуемся линейной связностью: $\gamma : [0, 1] \to X$, γ непрерывна, $\gamma(0) = A, \ \gamma(1) = B, \ Im\gamma$ в X — связно. $Im\gamma \cap A$ — открыто в топологии образа $Im\gamma$, индуцированного топологии на X (пользуемся топологией на подмножестве), $Im\gamma \cap B$ — открыто в топологии образа $Im\gamma$, индуцированного топологии на X — получили противоречие с тем, что отрезок несвязен. □

1.7 Компактность

Определение. Топологическое пространство *компактно*, если из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение. *Непрерывный образ компакта является компактом.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$. Покрываем образ: $Imf \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$ — покрытие. $X \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$ — открытое покрытие X (т.к. f непрерывно). $X \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$ — конечное подпокрытие. Пользуемся компактностью X: $Imf \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$ □

Замечание. Компактность является топологическим инвариантом.

Утверждение. *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

Доказательство. $M \subset X \subset Y$, M замкнуто, X компактно, Y — топологическое пространство. $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ открытое покрытие M. $(Y \setminus M) \cup \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие. Выберем в нём конечное подпокрытие: $X \subset (Y \setminus M) \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$ — конечное подпокрытие. $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. □

1.8 Хаусдорфовость

Определение. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если у любых двух его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

$\tau = X, \varnothing \Rightarrow X$ не хаусдорфово.

Лемма. *Компакт в хаусдоровом пространстве является замкнутым множеством.*

Доказательство. $M \subset X$, M — компакт. $x_0 \in X \setminus M$, $y \in M$. Пользуемся хаусдорфовостью: $x_0 \in U_{x_0}^y$, $y \in V_y$, $U_{x_0}^y \cap V_y = \varnothing$. $\bigcup_{y \in M} V_y$ — открытое покрытие всего множества M. Пользуемся компактностью: выберем конечное подпокрытие $M \subset \bigcup_{i=1}^n v_{y_i}$, $y_i \in M$. $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0}^{y_i} = U$, $x_0 \in U$, $U \cap V_{y_i} = \varnothing$, U открытое $\Rightarrow X \setminus M$ открыто. □

Утверждение. *$f : X \to Y$, f — непрерывная биекция, X — компакт, Y — хаусдорфово топологическое пространство $\Longrightarrow f$ — гомеоморфизм.*

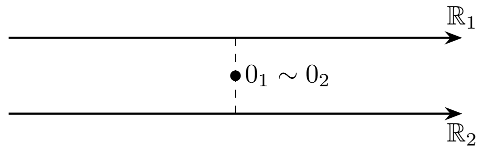
Доказательство. $f : X \to Y$, X замкнуто, $M \subset X$, M замкнуто $\Rightarrow M$ компактно $\Rightarrow f(M) \subset Y$, где $f(M)$ тоже компактно (т.к. f непрерывно) $\Rightarrow f(M)$ замкнуто в Y. □

1.9 Фактор-топология

Определение. Пусть X — топологическое пространство, а $\sim$ — отношение эквивалентности на X. *Фактор-пространство* $X/\sim$ — это множество классов эквивалентности $[x]$ для всех $x \in X$. Топология на $X/\sim$ называется *фактор-топологией.*

Множество $U \subset X/\sim$ открыто в фактор-топологии тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в X, где $f: X \to X/\sim$.

Пример (нехаусдорфова пространства)**.** Рассмотрим две числовые прямые $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ и отождествим все их точки, кроме одной: $x \sim y \Leftrightarrow x = y,\ x \neq 0, x \in \mathbb{R}_1,\ y \in \mathbb{R}_2$. Получили фактор-пространство $\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2/\sim$. Оно не является хаусдорфовым, так как у нулей числовых прямых нет непересекающихся окрестностей.



2 Графы

Будьте внимательны и осторожны! Всё, что написано ниже, никакую проверку ещё не проходило.

2.1 Комбинаторное описание графа

Определение (Комбинаторное определение графа)**.** V — множество вершин (конечное), E — множество рёбер, отношение инцидентности — любому ребру соответствует начало и конец, принадлежащие множеству вершин V.

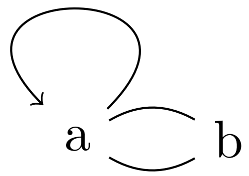


Рис. 1: Граф с одной петлёй и двумя кратными рёбрами.

Определение. Два графа называются *изоморфными*, если существует биекция между их множествами вершин и рёбер, уважающая отношение инцидентности.

$v_1, v_2 \in V_1,\ e_1 \in E_1,\ f(v_1), f(v_2) \in V_2$ если вершины v_1 и v_2 были соединены ребром e_1, то их образы $f(v_1)$ и $f(v_2)$ соединены ребром $f(e_1)$.

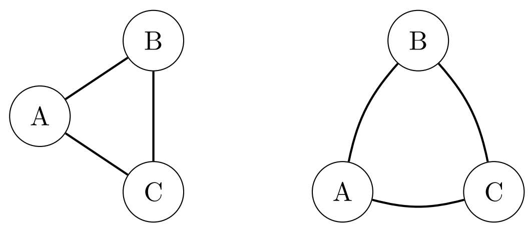


Рис. 2: Изоморфные графы.

2.2 Топологическое описание графа

Определение (Топологическое определение графа)**.** Пусть дано множество (конечное) точек V, (конечное) множество отрезков E и отображение ∂: (множество концов отрезков) $\to V$. *Графом*, определённым этими данными, назовём топологическое пространство, состоящее из множества точек V, называемых вершинами графа, множества внутренних точек отрезков E, называемых внутренними точками рёбер графа, на котором задана фактор-топология. Отношение эквивалентности: вершина v лежит в том же классе эквивалентности, что и концы рёбер, которые в неё переходят.

[3]: В теории графов принята следующая терминология:

1. если $v \in \partial(e)$, то говорят, что вершина v и ребро e *инцидентны*;
2. если $\partial(e) = \{v, w\}$, то говорят, что вершины v и w *смежны*, или же, что они соединены ребром e;
3. рёбра e, e' называются *смежными*, если $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \varnothing$;
4. ребро, иницидентное ровно одной вершине, называется *петлёй*;
5. если некоторой паре вершин инцидентно несколько рёбер, то все эти рёбра называются *кратными*;
6. если некоторой вершине инцидентно несколько петель, то все эти петли также называются *кратными*. [Конец цитирования]

$v \in V,\ \partial^{-1}(v) : A \sim B \Leftrightarrow A, B \in \partial^{-1}(v),\ A \sim B \sim v.$

Определение. Графы называются *гомеоморфными*, если они гомеоморфны как топологические пространства.

$$\begin{array}{ccccc} a & — & b & & \\ c & — & d & — & e \end{array}$$

Рис. 3: Гомеорморфные, но не изоморфные графы.

Определение. Непрерывное отображение графа Γ в топологическое пространство X называется *вложением*, если при этом отображение Γ и его образ гомеоморфны (никакие две различные точки не переходят в одну).

Определение (Вне лекций)**.** Граф без петель и кратных рёбер называется *простым*.

Определение. Граф, для которого существует его вложение в плоскость, называется *планарным*.

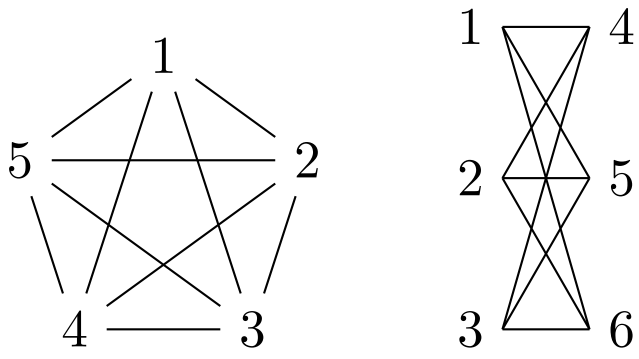


Рис. 4: K_5 и $K_{2,3}$.

Определение. Планарный граф вместе с вложением в плоскость называется *плоским.*

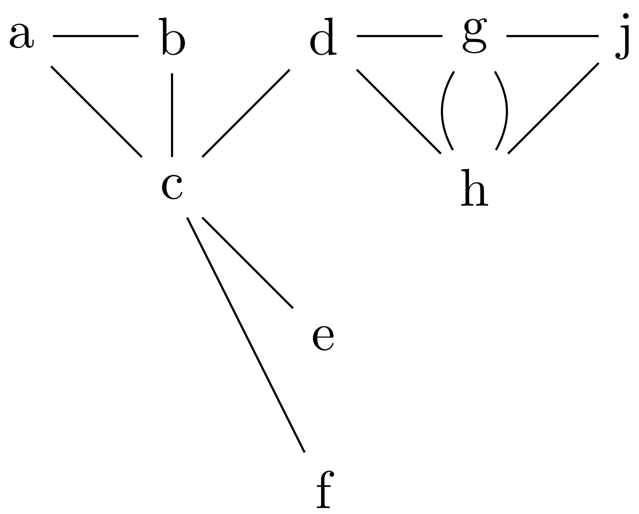


Рис. 5: Имеется пять областей, на которые разбивается плоскость.

Теорема. *Для связного плоского графа* $В - Р + Г = 2$*, где* $Г$ *— количество областей, на которые граф разбивает плоскость.*

Теорема (★). *Для любого планарного графа существует его вложение в плоскость такое, что образ любого ребра является ломаной с конечным числом звеньев.*

Свойства непрырывных кривых:

Лемма. *Образ* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *непрерывной кривой — замкнутое подмножество плоскости.*

Доказательство. $[a, b]$ — компакт $\Rightarrow$ образ его — компакт. $\mathbb{R}^2$ — хаусдорфово $\Rightarrow$ компакт замкнут в хаусдорфовом пространстве.
Адаптированное доказательство из [1]: Возьмём точку P, которая не принадлежит образу кривой γ. Докажем, что существует такая окрестность U этой точки P, что U не пересекается с образом γ.

Рассмотрим вспомогательную функцию f на $[a, b]$, которая будет обозначать расстояние от точки P до образа кривой. f непрерывна $\Rightarrow$ достигает минимума $c > 0$ (т.к. P не лежит в γ). Рассмотрим тогда круг радиуса $c/2$ с центром в P. Получим окрестность $U_{P,c/2}$, которая не пересекается с образом γ. □

Сюда рисунок №6

Лемма. Ω — *замкнутое подмножество* $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)$ — *непрерывная кривая,* $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(0) = A \notin \Omega,\ \gamma(1) = B \in \Omega \Rightarrow \exists t_0 \in [0, 1] :\ \gamma(t_0) \in \Omega,\ \forall t < t_0\ \gamma(t) \notin \Omega.$

Доказательство. Рассмотрим $T : \{\tau \in [0, 1] :\ \forall t \in [0, \tau) :\ \gamma(t) \notin \Omega\}$ — не пусто (так как $0 \in T$) и ограничено.

Так как множество T не пусто и ограничено, то можно сказать, что существует $\sup T = c$, более того, $c \neq 1$, т.к. $\gamma(1) = B \in \Omega$ по условию.

Если $\gamma(c) = C \notin \Omega$, то существует окрестность U точки C такая, что $U \cap A = \varnothing$ (воспользовались замкнутостью множества Ω).

Так как γ — непрерывная кривая, то существует окрестность $V = (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ такая, что $\gamma(V) \in U$, то есть $\forall t \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) : \gamma(t) \notin \Omega \Rightarrow c \neq \sup T$ — противоречие, значит, $C \in \Omega$.

В качестве t_0 возьмём c.

(В исходнике есть наброски прямо с лекции) □

Доказательство ★. Шаг 1. Удалим из графа петли.

Шаг 2. Сюда рисунок №7. Для каждой вершины рассмотрим окрестность такую, что она не пересекается с рёбрами графа, НЕ инцидентными данной вершине, и другими вершинами. Рассмотрим замкнутые окрестности вершин в два раза меньшего радиуса.

Шаг 3. Исправляем вложение в окрестности вершины и добавим обратно петли. Сюда рисунок №8

Шаг 4. Сюда рисунок №9. □

Список литературы

[1] А.А. Ошемков. Нагядная геометрия и топология. Лекции. Москва: teach in, электронное издание. 185 с.

[2] Учебные материалы по наглядной геометрии и топологии от кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. URL: http://dfgm.math.msu.su/ngit.php (дата обращения: 19.02.2025).

[3] А.А. Ошемков и др. Курс наглядной геометрии и топологии. Москва: ЛЕНАНД, 2015. 360 с.