Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Лононосова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна
Автор конспекта: Цыбулин Егор, студент 108 группы

Москва, 10 февраля 2025 г.

Оглавление

Глава 1

Топология

1.1 Топологические пространства

Определение 1.1.1. *Метрика* — это функция $\rho(x, y) \to \mathbb{R}$, которая обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0, \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$.

Определение 1.1.2. Множество X называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика $\rho(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение 1.1.3. *ε-окрестность точки* x_0 — это множество всех точек $x \in X : \ \rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Из курса математического анализа. Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество X открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

Определение 1.1.4. Семейство τ подмножеств некоторого множества X, удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией.*

Определение 1.1.5. Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Семейство подмножеств τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество X принадлежат τ;
2. Объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ;
3. Пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ.

Определение 1.1.6. Множество X с фиксированной топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ).

Если X — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым ε-шаром (некоторой окрестностью).

Примеры:

1. $\varnothing, X$, других нет — *тривиальная топология.*

2. Семейство τ состоит из всех подмножеств множества X — *дискретная топология.*

Определение 1.1.7. Пусть X — топологическое множество, $x_0 \in X$. *Окрестностью точки* x_0 назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

Утверждение 1.1.1. *Множество A топологического пространства X открыто* $\Leftrightarrow \forall x_0 \in A\ \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \ \in U_{x_0} \subset A$

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть A открыто, x_0 — точка A, тогда $U_{x_0} = A$.
$\Longleftarrow$ Возьмём $x \in U_x \subset A$, где U_x открыты ($\in \tau$). Рассмотрим $\cup_{x\in A} U_x = U$, где U открыто, т.к. все U_x открыты. При этом $A \subset U$ и $U \subset A \Rightarrow U = A \Rightarrow A$ открыто. □

Определение 1.1.8. Обратимся к курсу математического анализа. Пусть D_f — область определения $f(x),\ x_0 \in D_f$. Если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0.

$$f : X \to Y\ \forall B_\varepsilon(f(x_0))\ \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— в терминах окрестностей.

Определение 1.1.9. Отображение $f : X \to Y$ топологии пространств X и Y *непрерывно*, если $\forall x_0 \in X$ и для любой окрестности δ точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $B_\delta(f(x_0)) \subset f(B(x_0))$.

Утверждение 1.1.2. *Отображение f двух топологических пространств непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз любого открытого множества открыт.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ $f : X \to Y$. Пусть $A \subset Y$ открыто. Рассмотрим $f^{-1}(A)$. Пусть $x_0 \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists U$ — открытое: $f(U) \subset A \Rightarrow U \subset f^{-1}(A)$.
$\Longleftarrow$ Пусть прообраз любого множества открыт. Пусть $x_0 \in X \Rightarrow f(x_0) \in Y$ Возьмём $V \subset Y$, которое будет открыто. $f(x_0) \in V \Rightarrow f^{-1}(V)$ — открытое множество и $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow U := f^{-1}(V)$. □

Другие способы задания топологии:

1. Топология на подмножестве:
   Пусть X — топологическое пространство. $X_0 \subset X$. $U \in \tau(X) \Rightarrow U \cap X_0 \in \tau(X_0)$.

2. $f : X \to Y$ Y — топологическое пространство, f — произвольное отображение. Тогда открытые множества на X — прообразы открытых на Y.

Определение 1.1.10. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция $f : X \to Y$, которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение f^{-1} также непрерывно.

Определение 1.1.11. Множество A топологического пространства X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Определение 1.1.12. Топологическое пространство X называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств A и B таких, что $X = A \cup B$.

Утверждение 1.1.3. *Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии связен.*

Доказательство. От противного. Пусть отрезок несвязен. $\exists A, B \subset \mathbb{R}: \ [a, b] = A \cup B, \ A \cap B = \varnothing$, где A, B — открытые множества. Пусть $\alpha \in A$, тогда $[a, \alpha) \subset A$ (т.к. A открыто). Рассмотрим $\alpha_0 = \sup \alpha : [a, \alpha) \subset A$.
Пусть $\alpha_0 \in A$, тогда:

1. $\alpha_0 = b \Rightarrow B = \varnothing$ — противоречие.

2. $\alpha_0 < b \Rightarrow \alpha_0$ входит в A с окрестностью $\Rightarrow$ существует $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \Rightarrow \alpha_0$ — не супремум — противоречие.

$\square$