Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Лононосова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна
Автор конспекта: Цыбулин Егор, студент 108 группы

Москва, 17 февраля 2025 г.

Содержание

1 Топологические пространства

Определение. *Метрика* — это функция $\rho(x, y) \to \mathbb{R}$, которая обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$.

Определение. Множество X называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика $\rho(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}$.

Определение. *ε-окрестность точки x_0* — это множество всех точек $x \in X$: $\rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Из курса математического анализа. Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество X открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

Определение. Семейство τ подмножеств некоторого множества X, удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией.*

Определение. Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Семейство подмножеств τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество X принадлежат τ;
2. Объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ;
3. Пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ.

Определение. Множество X с фиксированной топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ).

Если X — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым ε-шаром (некоторой окрестностью).

Примеры:

1. $\varnothing, X$, других нет — *тривиальная топология.*
2. Семейство τ состоит из всех подмножеств множества X — *дискретная топология.*

Определение. Пусть X — топологическое множество, $x_0 \in X$. *Окрестностью точки* x_0 назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

Утверждение. *Множество A топологического пространства X открыто* $\Leftrightarrow$ $\forall x_0 \in A\ \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \ \in U_{x_0} \subset A$

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть A открыто, x_0 — точка A, тогда $U_{x_0} = A$.
$\Longleftarrow$ Возьмём $x \in U_x \subset A$, где U_x открыты ($\in \tau$). Рассмотрим $\cup_{x\in A} U_x = U$, где U открыто, т.к. все U_x открыты. При этом $A \subset U$ и $U \subset A \Rightarrow U = A \Rightarrow A$ открыто. $\square$

Определение. Обратимся к курсу математического анализа. Пусть D_f — область определения $f(x),\ x_0 \in D_f$. Если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0.

$$f : X \to Y\ \forall B_\varepsilon(f(x_0))\ \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— в терминах окрестностей.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ топологии пространств X и Y *непрерывно*, если $\forall x_0 \in X$ и для любой окрестности δ точки $f(x_0)$ существует окрестность точки x_0 такая, что $f(B(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0))$.

Утверждение. *Отображение f двух топологических пространств непрерывно* $\Leftrightarrow$ *прообраз любого открытого множества открыт.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ $f : X \to Y$. Пусть $A \subset Y$ открыто. Рассмотрим $f^{-1}(A)$. Пусть $x_0 \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists U$ — открытое: $f(U) \subset A \Rightarrow U \subset f^{-1}(A)$.
$\Longleftarrow$ Пусть прообраз любого множества открыт. Пусть $x_0 \in X \Rightarrow f(x_0) \in Y$. Возьмём $V \subset Y$, которое будет открыто. $f(x_0) \in V \Rightarrow f^{-1}(V)$ — открытое множество и $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow U := f^{-1}(V)$. $\square$

Другие способы задания топологии:

1. Топология на подмножестве:
   Пусть X — топологическое пространство. $X_0 \subset X$. $U \in \tau(X) \Rightarrow U \cap X_0 \in \tau(X_0)$.

2. $f : X \to Y$, Y — топологическое пространство, f — произвольное отображение. Тогда открытые множества на X — прообразы открытых на Y.

Замечание (Дополнение с лекции №2). Топология на Y порождается отображением f: множество открыто, если его прообраз открыт.

Определение. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция $f : X \to Y$, которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение f^{-1} также непрерывно.

Определение. Множество A топологического пространства X называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Определение. Топологическое пространство X называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств A и B таких, что $X = A \cup B$.

Утверждение. *Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии связен.*

Доказательство. От противного. Пусть отрезок несвязен. $\exists A, B \subset \mathbb{R} : \ [a, b] = A \cup B, \ A \cap B = \varnothing$, где A, B — открытые множества. Пусть $\alpha \in A$, тогда $[a, \alpha) \subset A$ (т.к. A открыто). Рассмотрим $\alpha_0 = \sup \alpha : [a, \alpha) \subset A$.
Пусть $\alpha_0 \in A$, тогда:

1. $\alpha_0 = b \Rightarrow B = \varnothing$ — противоречие.

2. $\alpha_0 < b \Rightarrow \alpha_0$ входит в A с окрестностью $\Rightarrow$ существует $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \Rightarrow \alpha_0$ — не супремум — противоречие.

$\square$

Возвращаемся к гомеоморфизму.

Пример. Интервал гомеоморфен вещественной прямой $\mathbb{R}$. (Сюда рисунок с окружностью с выколотой точкой и прямой (стереографическая проекция), тогда можно задать гомеоморфизм между окружностью и прямой. Гомеоморфизм между отрезком и прямой строится "растягиванием окружности").

Утверждение. *Непрерывный образ связного пространства связен.*

Доказательство. $f : X \to Y$. От противного. Пусть образ несвязен. Тогда $Imf = A \cup B$, где A, B — открытые и непустые множества, $A \cap B = \varnothing$. $f^{-1}(A)$ открыто, $f^{-1}(B)$ открыто. Если множества не пересекаются, то и их образы не пересекаются. Так как множества не пусты, то и их образы не пусты. $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X \Rightarrow X$ не связно — противоречие. $\square$

Добавь сюда что-нибудь про топологические инварианты (связность, компактность).

Определение. *Непрерывная кривая (параметрическая)* — непрерывное отображение ненулевого отрезка в топологическое пространство. $\gamma : [a, b] \to X$, где γ непрерывна.

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Определение. Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить кривой.

x, y — точки X, тогда $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \to X : \ \gamma(\alpha) = x, \ \gamma(\beta) = y$

Утверждение. *Образ линейно связного пространства линейно связен.*

Доказательство. Композиция непрерывных отображений непрерывно: $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$, $f : X \to Y$. □

Утверждение. *Если топологическое пространство линейно связно, то оно связно. (Наоборот, вообще говоря, неверно — как задачу можно дать приведение контрпримера).*

Доказательство. Пусть топологическое пространство линейно связно, но не связно. Тогда $X = A \cup B$. Возьмём $x \in A, \ y \in B$. Пользуемся линейной связностью: $\gamma : [0, 1] \to X$, γ непрерывна, $\gamma(0) = A, \ \gamma(1) = B, \ Im\gamma$ в X — связно. $Im\gamma \cap A$ — открыто в топологии образа $Im\gamma$, индуцированного топологии на X (пользуемся топологией на подмножестве), $Im\gamma \cap B$ — открыто в топологии образа $Im\gamma$, индуцированного топологии на X — получили противоречие с тем, что отрезок несвязен. □

Определение. Топологическое пространство *компактно*, если из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Утверждение. *Непрерывный образ компакта является компактом.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$. Покрываем образ: $Imf \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$ — покрытие. $X \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$ — открытое покрытие X (т.к. f непрерывно). $X \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$ — конечное подпокрытие. Пользуемся компактностью X: $Imf \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$ □

Утверждение. *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

Доказательство. $M \subset X \subset Y$, M замкнуто, X компактно, Y — топологическое пространство. $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ открытое покрытие M. $(Y \setminus M) \cup \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие. Выберем в нём конечное подпокрытие: $X \subset (Y \setminus M) \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$ — конечное подпокрытие. $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. □

Определение. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если у любых двух его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

$\tau = X, \varnothing \Rightarrow X$ не хаусдорфово.

Лемма. *Компакт в хаусдоровом пространстве является замкнутым множеством.*

Доказательство. $M \subset X$, M — компакт. $x_0 \in X \setminus M$, $y \in M$. Пользуемся хаусдорфовостью: $x_0 \in U_{x_0}^y$, $y \in V_y$, $U_{x_0}^y \cap V_y = \varnothing$. $\bigcup_{y \in M} V_y$ — открытое покрытие всего множества M. Пользуемся компактностью: выберем конечное подпокрытие $M \subset \bigcup_{i=1}^n v_{y_i}$, $y_i \in M$. $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0}^{y_i} = U$, $x_0 \in U$, $U \cap V_{y_i} = \varnothing$, U открытое $\Rightarrow X \setminus M$ открыто. □

Утверждение. *$f : X \to Y$, f — непрерывная биекция, X — компакт, Y — хаусдорфово топологическое пространство $\Longrightarrow f$ — гомеоморфизм.*

Доказательство. $f : X \to Y$, X замкнуто, $M \subset X$, M замкнуто $\Rightarrow M$ компактно $\Rightarrow f(M) \subset Y$, где $f(M)$ тоже компактно (т.к. f непрерывно) $\Rightarrow f(M)$ замкнуто в Y. □

Фактор-топология: дано топологическое пространство X, и на нём задано отношение эквивалентности: $f : X \to X \setminus \sim$. f сопоставляет каждой точке из X её класс эквивалентности. Топология $X \setminus \sim$ задаётся отображением f.

Важный пример не забудь добавить.