

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

Автор курса: профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна

Автор конспекта: [Цыбулин Егор](#), студент 108 группы

Москва, 8 февраля 2025 г.

Оглавление

1	Тест	3
1.1	(50 билетов) Поверхности второго порядка	3
1.1.1	Общее уравнение	3
1.1.2	Квадратичная часть и матрицы	3
1.1.3	Закон изменения матриц при переходе к новой аффинной системе координат	4

Глава 1

Тест

1.1 (50 билетов) Поверхности второго порядка

1.1.1 Общее уравнение

Определение 1.1.1. Поверхностью второго порядка называется множество точек трёхмерного аффинного или точечно-евклидова пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0$$

причём хотя бы одно из чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ отлично от нуля. Выражение $F(x, y, z)$ - *многочлен второй степени* от переменных x, y, z . Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется *общим уравнением* поверхности второго порядка.

Замечание 1.1.1. Точно так же определяются поверхности второго порядка в аффинном или точечно-евклидовом пространстве произвольной конечной размерности n ; они задаются многочленами второй степени от n переменных.

Теория поверхностей второго порядка аналогична теории кривых второго порядка.

1.1.2 Квадратичная часть и матрицы

С каждым многочленом $F(x, y, z)$ связано *квадратичное отображение* пространства (с данной системой координат) $f : A^3 \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой точке X с координатами (x, y, z) ставит в соответствие число $F(x, y, z)$. Говорят, что это отображение представлено многочленом F в данной системе координат. В другой системе координат многочлен, представляющий ту же функцию, станет другим.

Как и в случае линий второго порядка:

$$F(x, y, z) = (x \ y \ z \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = (x \ y \ z) A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + a_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

– большая матрица,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– малая матрица (квадратичной части).

Определение 1.1.2.

$$F_1(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

называется *квадратичной частью* многочлена F .

1.1.3 Закон изменения матриц при переходе к новой аффинной системе координат

Дословно так же, как в случае линий, доказываем, что при переходе к новой системе координат матрицы A и A_1 многочлена F , представляющие всё ту же функцию $f : A^3 \rightarrow \mathbb{R}$, меняются по закону $A'_1 = C^T A_1 C$ и $A' = D^T A D$, где A'_1 и A' – матрицы в новых координатах, C – матрица перехода от старого базиса к новому (её столбцы – координаты новых базисных

векторов в старом базисе), $D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ & y_0 \\ & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где x_0, y_0, z_0 – координата нового начала

координат в старой системе координат.

В новой системе координат:

$$F'(x', y', z') = \begin{pmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} A'_1 \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} + a_0,$$

где буквы со штрихами – координаты, многочлен и матрицы в новой системе координат,

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$