

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

**Автор курса:** профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна

**Автор конспекта:** [Цыбулин Егор](#), студент 108 группы

Москва, 18 июня 2025 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Топологические пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия	2
1.2	Непрерывность	4
1.3	Способы задания топологии	4
1.4	Гомеоморфизм	5
1.5	Связность	5
1.6	Линейная связность	6
1.7	Компактность	8
1.8	Хаусдорфовость	9
1.9	Фактор-топология	10
<b>2</b>	<b>Графы</b>	<b>11</b>
2.1	Комбинаторное и топологическое описание графа	11
2.2	Теорема о вложении планарного графа в плоскость	13
2.3	Теорема Жордана	17
2.4	Теорема Эйлера	27
<b>3</b>	<b>Многогранники</b>	<b>31</b>
3.1	Основные определения	31
3.2	Формула Эйлера	34
3.3	Правильные многогранники	36
3.4	Теоремы Сабитова и Минковского	38
3.5	Равносоставленность	41
3.6	Третья проблема Гильберта	51
<b>4</b>	<b>Многообразия</b>	<b>54</b>
4.1	Классификация двумерных связных компактных многообразий	54
4.1.1	Эйлерова характеристика многообразий	62
4.1.2	Ориентируемость многообразий	65
4.1.3	Связные суммы и продолжение классификации	66
<b>5</b>	<b>Кривые</b>	<b>71</b>
5.1	Классификация замкнутых регулярных кривых на плоскости с точностью до регулярной гомотопии	71
5.2	Регулярные замкнутые кривые на двумерной сфере	80
5.3	Классификация гладких замкнутых регулярных кривых на цилиндре с точностью до регулярной гомотопии	82
5.4	Классификация гладких замкнутых регулярных кривых на торе с точностью до регулярной гомотопии	84
<b>6</b>	<b>Прочие сюжеты</b>	<b>86</b>
6.1	Гомотопическая эквивалентность	86
6.2	Трёхмерные многообразия	87
6.3	Математический бильярд	90
<b>7</b>	<b>Программа экзамена (2025 год)</b>	<b>95</b>
<b>8</b>	<b>Заключение</b>	<b>97</b>

# 1 Топологические пространства

## 1.1 Основные понятия

**Определение.** *Метрика* — это функция  $\rho(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ , которая обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
3.  $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$ .

**Определение.** Множество  $X$  называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика  $\rho(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.**  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  — это множество всех точек  $x \in X$  :  $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ .

**Определение.** Точка  $x \in X \subset A$  называется *внутренней точкой* множества  $X$ , если  $\exists B_\varepsilon(x) \subset X$ .

**Определение.** Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние.

**Определение.** Множество  $X \subset A$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $A \setminus X$  открыто.

Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество  $X$  открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

**Определение.** Семейство  $\tau$  подмножеств некоторого множества  $X$ , удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией*.

**Определение.** Пусть  $X$  — произвольное множество и  $\tau = \{U_\alpha\}$  — некоторое семейство подмножеств множества  $X$ . Семейство подмножеств  $\tau$  называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество  $X$  принадлежат  $\tau$ ;
2. Объединение любого семейства множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;

3. Пересечение любого конечного семейства множеств из  $\tau$  также принадлежит  $\tau$ .

**Определение.** Множество  $X$  с фиксированной топологией  $\tau$  называется *топологическим пространством* и обозначается через  $(X, \tau)$ . Элементы множества  $X$  называются *точками*. Множества из  $\tau$  называются *открытыми* в  $(X, \tau)$ .

Если  $X$  — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым  $\varepsilon$ -шаром (некоторой окрестностью).

Топология, индуцированная метрикой — это топология, в которой открытые множества определяются через  $\varepsilon$ -шары. Таким образом, топология  $\tau$  на множестве  $X$  задаётся как:

$$\tau = \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists r > 0 : B_r(x) \subset U\}$$

**Пример.**

1.  $\emptyset, X$ , других нет — *тривиальная топология*.
2. Семейство  $\tau$  состоит из всех подмножеств множества  $X$  — *дискретная топология*.

**Пример.**

1.  $|X| = 0$ :  $\tau = \{\emptyset\}$ ;
2.  $|X| = 1$ :  $\tau = \{\emptyset, X\}$ ;
3.  $|X| = 2$ :  $\tau = \{\emptyset, X\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

**Определение.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $X \setminus A$  открыто.

**Определение.** Пусть  $X$  — множество,  $x_0 \in X$ . *Окрестностью точки  $x_0$*  назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

**Утверждение.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  открыто  $\iff \forall x_0 \in A \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \in U_{x_0} \subset A$ .

*Доказательство.*  $\implies$  Пусть  $A$  открыто,  $x_0$  — точка  $A$ , тогда  $U_{x_0} = A$ .

$\impliedby$  Возьмём  $x \in U_x \subset A$ , где  $U_x$  открыты ( $\in \tau$ ). Рассмотрим  $\cup_{x \in A} U_x = U$ , где  $U$  открыто, т.к. все  $U_x$  открыты. При этом  $A \subset U$  и  $U \subset A \implies U = A \implies A$  открыто.  $\square$

## 1.2 Непрерывность

**Определение.** Обратимся к курсу математического анализа. Пусть  $D_f$  — область определения  $f(x)$ ,  $x_0 \in D_f$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ .

$$f : X \rightarrow Y, \forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— определение в терминах окрестностей.

**Определение.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  топологии пространств  $X$  и  $Y$  *непрерывно*, если  $\forall x_0 \in X$  и для любой окрестности  $\delta$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность точки  $x_0$  такая, что  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0))$ .

**Утверждение.** *Отображение  $f$  двух топологических пространств непрерывно  $\iff$  прообраз любого открытого множества открыт.*

*Доказательство.*  $\implies$  Пусть  $f : X \rightarrow Y$  и пусть  $A \subset Y$  открыто. Рассмотрим  $f^{-1}(A)$ . Докажем, что  $f^{-1}(A)$  открыто в  $X$ . Пусть  $x_0 \in f^{-1}(A)$ , тогда  $f(x_0) \in A \implies \exists U$  — открытая окрестность  $x_0$  (по определению непрерывности):  $f(U) \subset A \implies U \subset f^{-1}(A) \implies x_0$  — внутренняя точка  $f^{-1}(A)$ . В силу произвольности  $x_0$  получаем, что  $f^{-1}(A)$  открыто.

$\impliedby$  Пусть прообраз любого открытого множества открыт. Пусть  $x_0 \in X \implies f(x_0) \in Y$ . Возьмём  $V \subset Y$ , которое будет открыто:  $f(x_0) \in V \implies f^{-1}(V)$  — открытое множество и  $x_0 \in f^{-1}(V) \implies U := f^{-1}(V)$ . Тогда  $U$  — открытая окрестность  $x_0$  и  $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$ . Получается, для любой окрестности  $V$  точки  $f(x_0)$  найдена окрестность  $U$  точки  $x_0$  такая, что  $f(U) \subset V$  — это и есть определение непрерывности  $f$  в точке  $x_0$ . Так как  $x_0$  произвольна, то  $f$  непрерывна на всём  $X$ .  $\square$

## 1.3 Способы задания топологии

1. Топология на подмножестве:

Пусть  $X$  — топологическое пространство.

$$X_0 \subset X, U \in \tau(X) \implies U \cap X_0 \in \tau(X_0).$$

2.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — топологическое пространство,  $f$  — произвольное отображение. Тогда открытые множества на  $X$  — прообразы открытых на  $Y$ , то есть:

$$\tau_X = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_Y\}$$

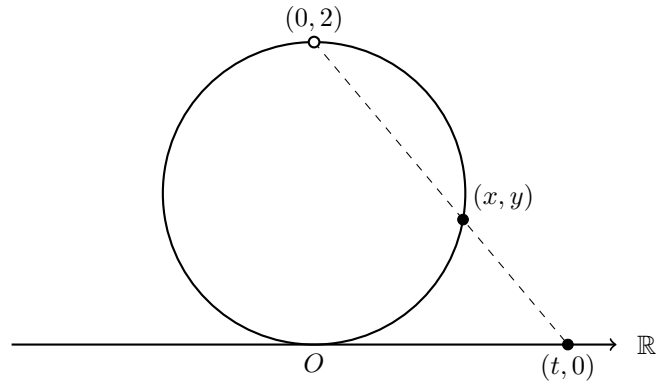


Рис. 1: Окружность с выколотым полюсом и прямая гомеоморфны.

*Замечание.* Топология на  $Y$  порождается отображением  $f$ : множество открыто, если его прообраз открыт.

## 1.4 Гомеоморфизм

**Определение.** Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция  $f : X \rightarrow Y$ , которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение  $f^{-1}$  также непрерывно.

**Пример.** Окружность с выколотым полюсом и прямая гомеоморфны (см.рис. 1).

## 1.5 Связность

**Определение.** Топологическое пространство  $X$  называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  таких, что  $X = A \cup B$ .

**Утверждение.** Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии *связен*.

*Доказательство.* От противного. Пусть отрезок несвязен.  $\exists A, B \subset \mathbb{R} : [a, b] = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , где  $A, B$  — открытые множества. Пусть  $\alpha \in A$ , тогда  $[a, \alpha) \subset A$  (т.к.  $A$  открыто). Рассмотрим  $\alpha_0 = \sup\{\alpha : [a, \alpha) \subset A\}$ .

Пусть  $\alpha_0 \in A$ , тогда:

1.  $\alpha_0 = b \implies B = \emptyset$  — противоречие.
2.  $\alpha_0 < b \implies \alpha_0$  входит в  $A$  с окрестностью  $\implies$  существует  $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \implies \alpha_0$  — не супремум — противоречие.

□

**Утверждение.** *Непрерывный образ связного пространства связан.*

*Доказательство.*  $f : X \rightarrow Y$ . От противного. Пусть образ несвязен. Тогда  $Imf := f(X) = A \cup B$ , где  $A, B$  — открытые и непустые множества,  $A \cap B = \emptyset$ . Рассмотрим прообразы  $f^{-1}(A)$  и  $f^{-1}(B)$ , которые открыты в силу непрерывности отображения. Если множества не пересекаются, то и их образы не пересекаются (иначе существовала бы точка  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \implies f(x) \in A \cap B$ , но  $A \cap B = \emptyset$ ). Так как множества не пусты, то и их образы не пусты.  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X \implies X$  не связно — противоречие. □

*Замечание.* Связность является топологическим инвариантом.

## 1.6 Линейная связность

**Определение.** *Непрерывная кривая (параметрическая)* — непрерывное отображение ненулевого отрезка в топологическое пространство.  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , где  $\gamma$  непрерывна.

**Пример.**  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

**Определение.** Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить кривой.

**Пример.**  $x, y$  — точки  $X$ , тогда  $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X : \gamma(\alpha) = x, \gamma(\beta) = y$

**Утверждение.** *Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связан.*

*Доказательство.* Пусть  $y_1, y_2 \in f(X)$  — произвольные точки в образе пространства  $X$ . Тогда

$$\exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2.$$

Так как  $X$  линейно связно, то существует непрерывный путь

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X,$$

соединяющий  $x_1, x_2$ , то есть  $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ . Рассмотрим композицию

$$f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow Y.$$

Эта композиция непрерывна как композиция непрерывных отображений и соединяет  $y_1, y_2$ , потому что

$$(f \circ \gamma)(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) = y_1,$$

$$(f \circ \gamma)(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2) = y_2.$$

Получаем, что для любых двух точек  $y_1, y_2 \in f(X)$  мы нашли непрерывный путь в  $f(X)$ , их соединяющий. Следовательно,  $f(X)$  линейно связно.  $\square$

**Утверждение.** Если топологическое пространство линейно связно, то оно связно. (Обратное, вообще говоря, неверно).

*Доказательство.* Пусть топологическое пространство линейно связно, но не связно. Тогда  $X = A \cup B$  (данные открытые множества не пусты и не пересекаются). Возьмём  $x \in A$ ,  $y \in B$ . Пользуемся линейной связностью:  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\gamma$  непрерывна,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$ . Заметим, что

$$Im\gamma \cap A \neq \emptyset,$$

$$Im\gamma \cap B \neq \emptyset,$$

$$(Im\gamma \cap A) \cap (Im\gamma \cap B) = \emptyset,$$

$$(Im\gamma \cap A) \cup (Im\gamma \cap B) = Im\gamma.$$

Рассмотрим  $Im\gamma$  как подпространство  $X$  с индуцированной топологией. Тогда множества  $Im\gamma \cap A$ ,  $Im\gamma \cap B$  открыты в  $Im\gamma$  и они образуют разделение  $Im\gamma$  на два непустых непересекающихся открытых множества.

Однако  $Im\gamma$  — непрерывный образ отрезка  $[0, 1]$ , а отрезок связан. Мы получили, что  $Im\gamma$  несвязен, что противоречит теореме о том, что непрерывный образ связного пространства связан.  $\square$

**Пример.** В качестве контрпримера рассмотрим «топологическую синусоиду» (см.рис.2) с индуцированной из  $\mathbb{R}^2$  топологией:

$$X = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in (0, 1] \right\} \cup \{ (0, y) \mid y \in [-1, 1] \} \subset \mathbb{R}^2.$$

Допустим,  $X$  не связан. Тогда  $X = A \cup B$ , где  $A, B$  — открытые непустые непересекающиеся подмножества. Обозначим отрезок буквой  $M$ , а график синусоиды —  $N$ .  $M, N$  — линейно связные множества, поэтому каждое из этих множеств должно целиком содержаться либо в  $A$ , либо в  $B$ . Так как  $A, B$  не пусты, то для определённости можно сказать, что  $A = M$ ,  $B = N$ . Однако  $M$  — это отрезок, то есть замкнутое множество.



Возьмём любую точку отрезка. Любое открытое подмножество, которое содержит данную точку должно быть пересечением открытого подмножества плоскости с отрезком (по определению индуцированной топологии), но пересечение любого диска с отрезком всегда будет содержать точки синусоиды. Таким образом,  $X$  нельзя представить в виде двух открытых непустых непересекающихся подмножеств.

Теперь допустим, что существует непрерывная кривая  $\gamma$ , соединяющая произвольную точку  $P$  на синусоиде с  $Q$  на отрезке:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \gamma(a) = P, \quad \gamma(b) = Q.$$

Рассмотрим на этой кривой первую точку, принадлежащую отрезку:

$$t_0 = \min\{t \mid \gamma(t) \in M\}.$$

Тогда

$$x(t_0) = 0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Так как  $\gamma$  непрерывна, то и  $x(t)$ ,  $y(t)$  непрерывны, поэтому:

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} x(t) = x(t_0) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0-0} y(t) = y(t_0) = y_0.$$

Однако при  $t < t_0$   $y(t) = \sin \frac{1}{x(t)}$  — предел не существует — противоречие —  $X$  не является линейно связным.

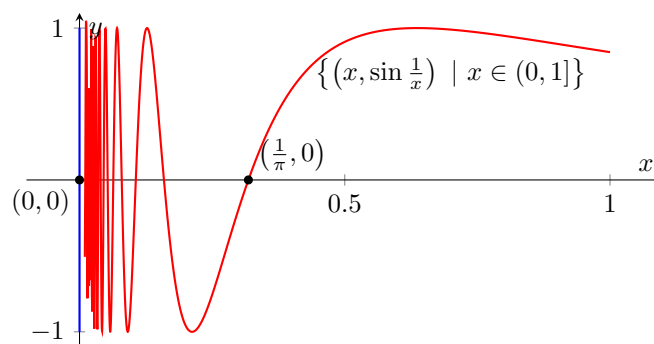


Рис. 2: «Топологическая синусоида».

## 1.7 Компактность

**Определение.** Топологическое пространство *компактно*, если из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение.** *Непрерывный образ компакта является компактом.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Покрываем образ открытыми множествами  $\{U_\alpha\}$ :  $Imf \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$  — покрытие.

$X \subset \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$  — открытое покрытие  $X$  (т.к.  $f$  непрерывно).

$X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$  — конечное подпокрытие (поскольку  $X$  — компакт по условию).

Тогда  $Imf \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Действительно, для любого  $y \in f(X)$  существует  $x \in X$  такой, что  $f(x) = y$ . Этот  $x$  принадлежит некоторому  $f^{-1}(U_{\alpha_i}) \implies y \in U_{\alpha_i}$ .  $\square$

*Замечание.* Компактность является топологическим инвариантом.

**Утверждение.** *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

*Доказательство.*  $M \subset X \subset Y$ ,  $M$  замкнуто,  $X$  компактно,  $Y$  — топологическое пространство.

$M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$  — открытое покрытие  $M$ .  $(Y \setminus M) \cup \bigcup_\alpha U_\alpha$  — тоже открытое покрытие.

Выберем в нём конечное подпокрытие:  $X \subset (Y \setminus M) \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$  — конечное подпокрытие.

Тогда  $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ .  $\square$

## 1.8 Хаусдорфовость

**Определение.** Топологическое пространство  $X$  называется *хаусдорфовым*, если у любых двух его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

$\tau = \{X, \emptyset\} \implies X$  не хаусдорфово.

**Лемма.** *Компакт  $M$  в хаусдорфовом пространстве  $X$  является замкнутым множеством.*

*Доказательство.* Пусть  $M \subset X$ ,  $M$  — компакт;  $x_0 \in X \setminus M$ ,  $y \in M$ .

Пользуемся хаусдорфовостью:  $x_0 \in U_{x_0}^y$ ,  $y \in V_y$ ,  $U_{x_0}^y \cap V_y = \emptyset$ , где  $U_{x_0}^y$  — открытая окрестность точки  $x_0$ , а  $V_y$  — открытая окрестность точки  $y$ .

$\bigcup_{y \in M} V_y$  — открытое покрытие всего множества  $M$ .

Пользуемся компактностью: выберем конечное подпокрытие  $M \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ ,  $y_i \in M$ .  $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0}^{y_i} = U$ ,  $x_0 \in U$ ,  $U \cap V_{y_i} = \emptyset$ ,  $U$  открытое (конечное пересечение открытых — открыто)  $\implies X \setminus M$  открыто  $\implies M$  замкнуто.  $\square$

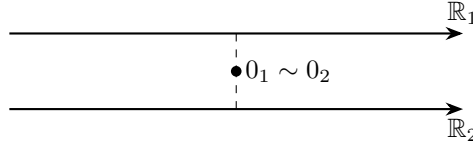


Рис. 3: Пример нехаусдорфова пространства

**Утверждение.**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  — непрерывная биекция,  $X$  — компакт,  $Y$  — хаусдорфово топологическое пространство  $\implies f$  — гомеоморфизм.

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  замкнуто,  $M \subset X$ ,  $M$  замкнуто  $\implies M$  компактно (по теореме о том, что замкнутое подмножество компакта есть компакт)  $\implies f(M) \subset Y$ , где  $f(M)$  тоже компактно (т.к.  $f$  непрерывно)  $\implies f(M)$  замкнуто в  $Y$  (по лемме, которая была выше).  $\square$

## 1.9 Фактор-топология

**Определение.** Пусть  $X$  — топологическое пространство, а  $\sim$  — отношение эквивалентности на  $X$ . *Фактор-пространство*  $X/\sim$  — это множество классов эквивалентности  $[x]$  для всех  $x \in X$ . Топология на  $X/\sim$  называется *фактор-топологией*.

Множество  $U \subset X/\sim$  открыто в фактор-топологии тогда и только тогда, когда его прообраз  $f^{-1}(U)$  открыт в  $X$ , где  $f : X \rightarrow X/\sim$ .

**Пример** (нехаусдорфова пространства). Рассмотрим две числовые прямые  $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$  и отождествим все их точки, кроме одной:  $x \sim y \iff x = y, x \neq 0, x \in \mathbb{R}_1, y \in \mathbb{R}_2$ . Получили фактор-пространство  $\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2 / \sim$ . Оно не является хаусдорфовым, так как у нулей числовых прямых нет непересекающихся окрестностей (см.рис.3).

## 2 Графы

### 2.1 Комбинаторное и топологическое описания графа

**Определение** (Комбинаторное определение графа).  $V$  — множество вершин (конечное),  $E$  — множество рёбер, отношение инцидентности — любому ребру соответствует начало и конец, принадлежащие множеству вершин  $V$ .

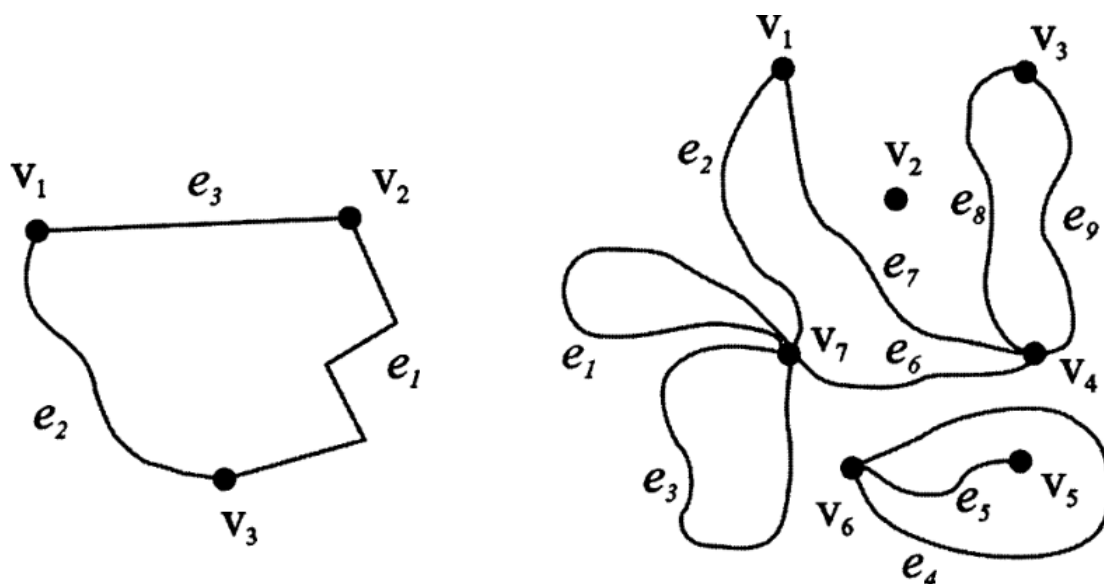


Рис. 4: Примеры графов

Рассмотрим рис.4 (граф справа):

1. Вершина  $v_1$  инцидентна  $e_2, e_7$ ;
2. Ребро  $e_1$  инцидентно только  $v_7$ ;
3. Вершина  $v_1$  смежна только с  $v_4, v_7$ ;
4. Ребро  $e_2$  смежно только с  $e_1, e_3, e_6, e_7$ ;
5. Имеется ровно 3 петли:  $e_1, e_3, e_4$ ;
6. Кратными являются петли  $e_1, e_3$  и рёбра  $e_8, e_9$  (кратность равна двум);
7. Граф справа — не простой, граф слева — простой.

**Определение.** Два графа называются *изоморфными*, если существует биекция между их множествами вершин и рёбер, уважающая отношение инцидентности.

$v_1, v_2 \in V_1$ ,  $e_1 \in E_1$ ,  $f(v_1), f(v_2) \in V_2$  если вершины  $v_1$  и  $v_2$  были соединены ребром  $e_1$ , то их образы  $f(v_1)$  и  $f(v_2)$  соединены ребром  $f(e_1)$ .

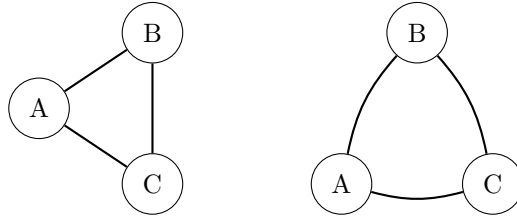


Рис. 5: Изоморфные графы.

**Определение** (Топологическое определение графа). Пусть дано множество (конечное) точек  $V$ , (конечное) множество отрезков  $E$  и отображение  $\partial$ : (множество концов отрезков)  $\rightarrow V$ . *Графом*, определённым этими данными, назовём топологическое пространство, состоящее из множества точек  $V$ , называемых вершинами графа, множества внутренних точек отрезков  $E$ , называемых внутренними точками рёбер графа, на котором задана фактор-топология. Отношение эквивалентности: вершина  $v$  лежит в том же классе эквивалентности, что и концы рёбер, которые в неё переходят.

В теории графов принята следующая терминология:

1. если  $v \in \partial(e)$ , то говорят, что вершина  $v$  и ребро  $e$  *инцидентны*;
2. если  $\partial(e) = \{v, w\}$ , то говорят, что вершины  $v$  и  $w$  *смежны*, или же, что они соединены ребром  $e$ ;
3. рёбра  $e, e'$  называются *смежными*, если  $\partial(e) \cap \partial(e') \neq \emptyset$ ;
4. ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлёй*;
5. если некоторой паре вершин инцидентно несколько рёбер, то все эти рёбра называются *кратными*;
6. если некоторой вершине инцидентно несколько петель, то все эти петли также называются *кратными*;
7. вершина, которая инцидентна ровно одному ребру, называется *висячей*.

$$v \in V, \partial^{-1}(v) : A \sim B \iff A, B \in \partial^{-1}(v), A \sim B \sim v.$$

**Определение.** Графы называются *гомеоморфными*, если они гомеоморфны как топологические пространства.

**Определение.** Непрерывное отображение графа  $\Gamma$  в топологическое пространство  $X$  называется *вложением*, если при этом отображение  $\Gamma$  и его образ гомеоморфны (никакие две различные точки не переходят в одну).

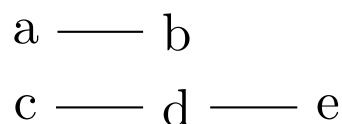


Рис. 6: Гомеоморфные, но не изоморфные графы.

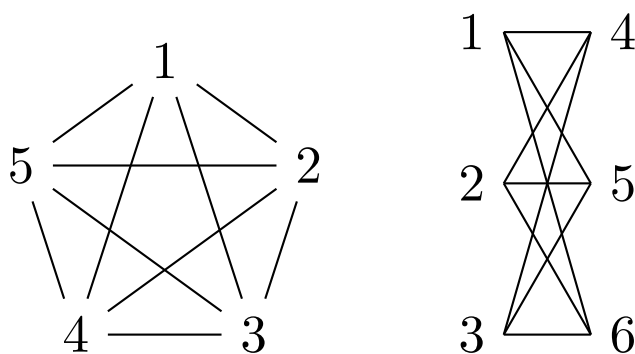


Рис. 7:  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не являются планарными.

**Определение.** Граф без петель и кратных рёбер называется *простым*.

**Определение.** Граф, для которого существует его вложение в плоскость, называется *планарным*.

**Определение.** Планарный граф вместе с вложением в плоскость называется *плоским*.

**Определение.**  $K_n$  — полный граф на  $n$  вершинах, то есть граф, каждые две вершины которого соединены ребром.

$K_{m,n}$  — двудольный граф, то есть граф, все вершины которого можно разбить на две группы так, что каждое ребро графа соединяет вершину из первой группы с вершиной из второй группы, при этом вершины из одной группы не имеют общих рёбер.

## 2.2 Теорема о вложении планарного графа в плоскость

**Теорема.** Для связного плоского графа  $V - P + G = 2$ , где  $G$  — количество областей, на которые граф разбивает плоскость.

**Теорема (★).** Для любого планарного графа существует его вложение в плоскость такое, что образ любого ребра является ломаной с конечным числом звеньев.

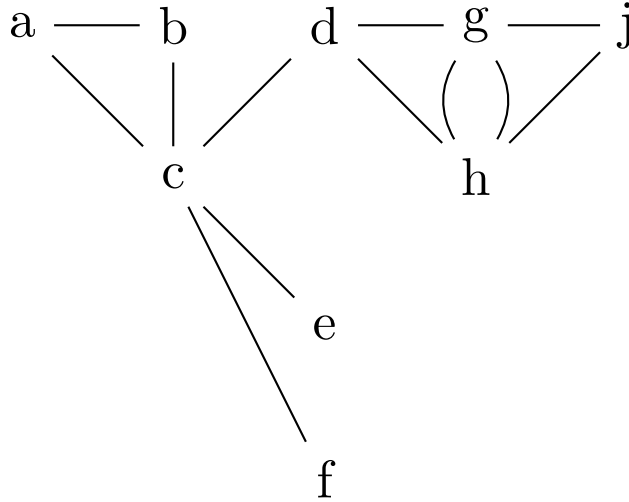


Рис. 8: Имеется пять областей, на которые разбивается плоскость.

Свойства непрерывных кривых:

**Лемма.** Образ  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывной кривой — замкнутое подмножество плоскости.

*Доказательство.*  $[a, b]$  — компакт  $\implies$  образ его — компакт.

$\mathbb{R}^2$  — хаусдорфово  $\implies$  компакт замкнут в хаусдорфовом пространстве.

*Адаптированное доказательство из [4]:* Возьмём точку  $P$ , которая не принадлежит образу кривой  $\gamma$ . Докажем, что существует такая окрестность  $U$  этой точки  $P$ , что  $U$  не пересекается с образом  $\gamma$ .

Рассмотрим вспомогательную функцию  $f$  на  $[a, b]$ , которая будет обозначать расстояние от точки  $P$  до образа кривой.  $f$  непрерывна  $\implies$  достигает минимума  $c > 0$  (т.к.  $P$  не лежит в  $\gamma$ ). Рассмотрим тогда круг радиуса  $c/2$  с центром в  $P$ . Получим окрестность  $U_{P, c/2}$ , которая не пересекается с образом  $\gamma$ .  $\square$

**Лемма** (о первой точке).  $\Omega$  — замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t)$  — непрерывная кривая,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(0) = A \notin \Omega$ ,  $\gamma(1) = B \in \Omega \implies \exists t_0 \in [0, 1] : \gamma(t_0) \in \Omega, \forall t < t_0 \gamma(t) \notin \Omega$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $T : \{\tau \in [0, 1] : \forall t \in [0, \tau) : \gamma(t) \notin \Omega\}$  — не пусто (так как  $0 \in T$ ) и ограничено.

Так как множество  $T$  не пусто и ограничено, то можно сказать, что существует  $\sup T = c$ , более того,  $c \neq 1$ , т.к.  $\gamma(1) = B \in \Omega$  по условию.

Если  $\gamma(c) = C \notin \Omega$ , то существует окрестность  $U$  точки  $C$  такая, что  $U \cap \Omega = \emptyset$  (воспользовались замкнутостью множества  $\Omega$ ).

Так как  $\gamma$  — непрерывная кривая, то существует окрестность  $V = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  такая, что  $\gamma(V) \in U$ , то есть  $\forall t \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) : \gamma(t) \notin \Omega \implies c \neq \sup T$  — противоречие, значит,  $C \in \Omega$ .

В качестве  $t_0$  возьмём  $c$ .

□

*Доказательство ★.* Пусть заданный граф не имеет петель. Если они есть, то удалим их, а потом вернём.

Для каждой вершины рассмотрим окрестность такую, что она не пересекается с рёбрами графа, НЕ инцидентными данной вершине  $v$ , и другими вершинами. Рассмотрим замкнутые окрестности вершин в два раза меньшего радиуса  $D_v$ .

Так как ребро, выходящее из вершины  $v$  — непрерывная кривая, то по лемме о первой точке на этой кривой будет первая точка, которая принадлежит замкнутому кругу  $D_v$ . Изменим вложение для этого ребра на отрезке между  $v$  и первой точкой на радиус (см.рис.9). Сделаем так для всех рёбер. На этом моменте можно вернуть петли, изображённые ломаными.

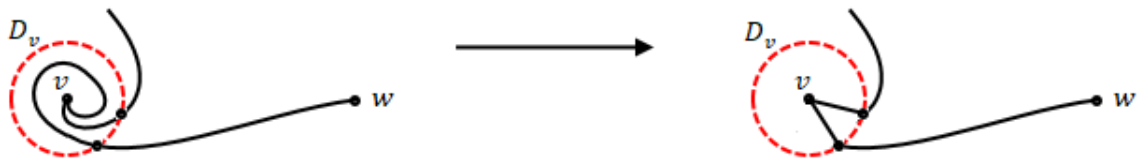


Рис. 9: Изменение вложения в окрестности вершины

Теперь надо поменять вложение на остальных частях рёбер (та, которая лежит между нашими замкнутыми окружностями). Если мы для каждого отдельного ребра докажем, что можем поменять вложение, которое было, на ломаную, не трогая остальных рёбер, то докажем теорему (см.рис.10).

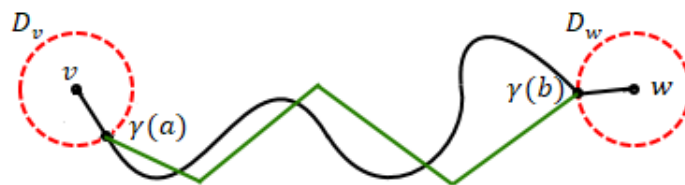


Рис. 10: Изменение вложения на остальных частях рёбер

Рассмотрим ребро, соединяющее вершины  $v, w$ . Средняя часть — непрерывная кривая  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ <sup>1</sup>. Рассмотрим множество:  $T = \{t \in [a, b]\}$ , где  $t$

<sup>1</sup>Здесь и далее в лекциях дан отрезок  $[0, 1]$ , но, очевидно, это ни на что не повлияет, просто мне пока что лень рисовать свои рисунки, поэтому я их просто позаимствовал в [4]



такие, что  $\gamma(a)$  можно соединить ломаной с  $\gamma(t)$  так, что эта ломаная не имеет самопересечений и не пересекает другие рёбра.  $T$  не пусто хотя бы потому, что  $t = a$  условие выполняется. Докажем, что и  $b$  принадлежит  $T$ . Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы отступать от левого конца отрезка, чтобы потом добраться до правого конца.

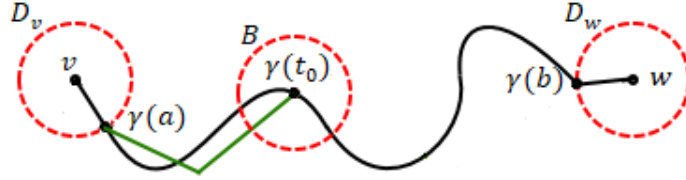


Рис. 11: Изменение вложения на остальных частях рёбер

Сначала докажем, что если  $t_0 \in T$ , то и  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset T$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  (иными словами, докажем, что множество  $T$  — открытое подмножество  $[0, 1]$ ).

Рассмотрим на кривой  $\gamma$  точку  $\gamma(t_0)$  и замкнутый круг  $B$  с центром в этой точке, который не пересекает другие рёбра и круги  $D_v$  (это возможно, так как образы других рёбер — замкнутые подмножества плоскости).

По предположению  $t_0 \in T$ , тогда существует ломаная, которая идёт от  $a$  до  $t_0$ . Тогда мы можем соединить  $\gamma(a)$  с любой точкой круга  $B$  хорошей ломаной (не имеющей самопересечений и пересечений с другими рёбрами) по ломаной из  $\gamma(a)$  в  $\gamma(t_0)$  до первой её точки в круге  $B$  и далее по отрезку.

С другой стороны (по определению непрерывности кривой), для круга  $B$  существует интервал  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  такой, что его образ содержится в этом круге — стало быть, доказали, что если  $t_0 \in T$ , то  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset T$ , то есть,  $T$  — открытое подмножество на  $[a, b]$ .

Далее докажем (аналогично), что если  $t_0 \notin T$ , то для некоторого  $\varepsilon > 0$  выполнено  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap T = \emptyset$ , то есть, что дополнение  $[a, b] \setminus T$  тоже открыто в  $[a, b]$ . Предположим, что  $\gamma(t_0)$  не принадлежит множеству  $T$ . Рассмотрим круг с центром в точке  $\gamma(t_0)$ , который не пересекается с остальными рёбрами, и рассмотрим интервал  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ , который при отображении  $\gamma$  целиком попадает в этот круг.

Мы не можем соединить  $\gamma(a)$  хорошей ломаной с точками из этого интервала, если не можем соединить  $\gamma(a)$  с точкой  $\gamma(t_0)$  — действительно, иначе дойдём до первой точки круга с центром в точке  $\gamma(t_0)$ , и далее дойдём до точки  $\gamma(t_0)$ . Таким образом, если  $t_0 \notin T$ , то и  $t \notin T$ , где  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

Тем самым мы доказали, что множества  $T$  и  $[a, b] \setminus T$  открыты в  $[a, b]$ . Теперь

докажем, что если  $T \subset [a, b]$  и  $([a, b] \setminus T) \subset [a, b]$  — открытые множества в  $[a, b]$ , то одно из них пусто.

Действительно, рассмотрим

$$\sup\{t \in [a, b] : [a, t] \in T\} = c.$$

Иными словами, рассмотрим отрезок  $[a, b]$  и, поскольку мы знаем, что  $a \in T$ , будем идти по отрезку, пока мы находимся в множестве  $T$ .

Если  $c \in T$  и  $c \neq b$ , то как мы доказали,  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset T$  для  $\varepsilon > 0$ , а значит,  $c$  не является верхней гранью для этого множества. Значит, если  $c < b$ , то  $c$  не может принадлежать  $T$ .

Аналогично, если  $c \notin T$ , то есть  $c \in [a, b] \setminus T$ , то  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset [a, b] \setminus T$ , то есть  $c$  — не точная верхняя грань, поскольку, например,  $c - \varepsilon$  — верхняя грань. Поэтому  $c = b$ , так как  $[a, b] \setminus T$  открыто и не может состоять только из одной точки — правого конца отрезка.

□

## 2.3 Теорема Жордана

**Определение.** Для любого подмножества  $A$  плоскости отношение: «точки  $P, Q \in A$  можно соединить непрерывной кривой, лежащей в  $A$ » является отношением эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *компонентами линейной связности множества  $A$* .

**Теорема** (Жордана (для ломаных)). *Замкнутая вложенная ломаная разбивает плоскость на две компоненты связности.*

*Доказательство.* Шаг 1. Число компонент  $\leq 2$ .

Чтобы доказать, что число компонент, на которые замкнутая вложенная ломаная разбивает плоскость, не больше двух, достаточно выбрать нужным образом две точки и доказать, что любую точку плоскости можно соединить с одной из них непрерывной кривой, не пересекающей ломаную.

Выберем на произвольном ребре ломаной точку и рассмотрим круг с центром в этой точке (достаточно малый, чтобы он пересекался только с внутренними точками ребра, и не пересекался с другими рёбрами ломаной). Ребро разбивает круг на две части, в каждой из частей выберем по точке (обозначим их  $A$  и  $B$ ).

Теперь определим понятие «идти вдоль кривой». Произвольные кривые могут быть устроены достаточно сложно, и для них определить это понятие довольно затруднительно. Для ломаной с конечным количеством звеньев это не вызывает проблем.

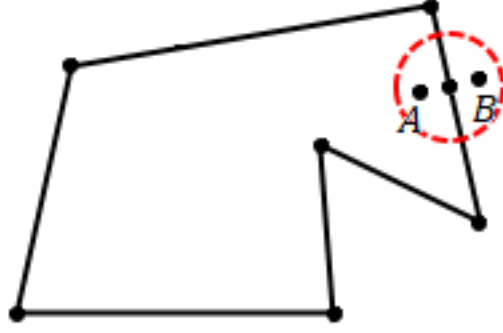


Рис. 12: Круг с центром в точке ломаной.

Для произвольной точки  $Q$  на ломаной выберем достаточно маленький круг  $D_Q$  (т.е. если  $Q$  — точка на ребре, то  $D_Q$  пересекается только с внутренними точками ребра, если  $Q$  — вершина, то  $D_Q$  не пересекается с другими рёбрами, кроме двух, выходящих из неё). В каждом таком круге выберем пару точек, лежащих в разных компонентах относительно пары радиусов, на которые они этот круг разбивают. Здесь пользуемся следующей леммой:

**Лемма.** *Два радиуса разбивают круг на две компоненты.*

*Доказательство.* Пусть  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  — замкнутый круг радиуса  $R$ , и пусть  $r_1, r_2$  — два различных радиуса этого круга, исходящие из центра  $O$ . Обозначим  $D^* = D \setminus (r_1 \cup r_2)$ . Требуется доказать, что  $D^*$  имеет ровно две компоненты линейной связности.

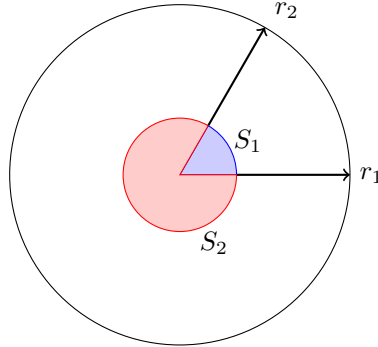


Рис. 13: К лемме о разбиении круга на две компоненты.

Пусть радиусы заданы углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  ( $\theta_1 \neq \theta_2$ ). Они делят круг на два открытых сектора:

$$S_1 = \{(r, \theta) \mid 0 < r \leq R, \theta_1 < \theta < \theta_2\},$$

$$S_2 = \{(r, \theta) \mid 0 < r \leq R, \theta_2 < \theta < \theta_1 + 2\pi\}.$$

Каждый сектор  $S_i$  линейно связан. Любое связное множество, содержащее  $S_i$ , должно пересекать  $r_1$  или  $r_2$ , но  $r_1, r_2 \notin D^*$ . Следовательно,  $S_1$  и  $S_2$  — максимальные связные подмножества в  $D^*$ .

Все точки  $D^*$  принадлежат либо  $S_1$ , либо  $S_2$ , а центр  $O$  удалён. Таким образом,  $D^* = S_1 \sqcup S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — две компоненты линейной связности.  $\square$

Рассмотрим круг, соответствующий вершине, и круг, соответствующий внутренней точке ребра. Несложно понять, что можно выбрать в каждом из кругов пару точек, лежащих в разных частях круга, таким образом, что их можно попарно соединить друг с другом, не пересекая ломаную (выбираем точки достаточно близко к ребру и идём вдоль этого ребра — см.рис.14).

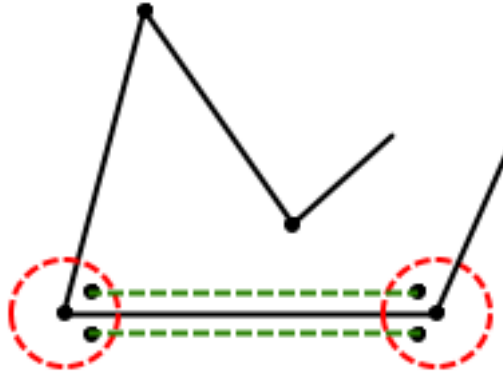


Рис. 14: Проход вдоль ребра.

Это означает, что если мы сможем соединить произвольную точку  $P$  плоскости с одной из точек любого из кругов, соответствующих точкам ломаной, то мы сможем дальше пройти вдоль ломаной (не пересекая её), и соединить полученную точку либо с точкой  $A$ , либо с точкой  $B$  — см.рис.15.

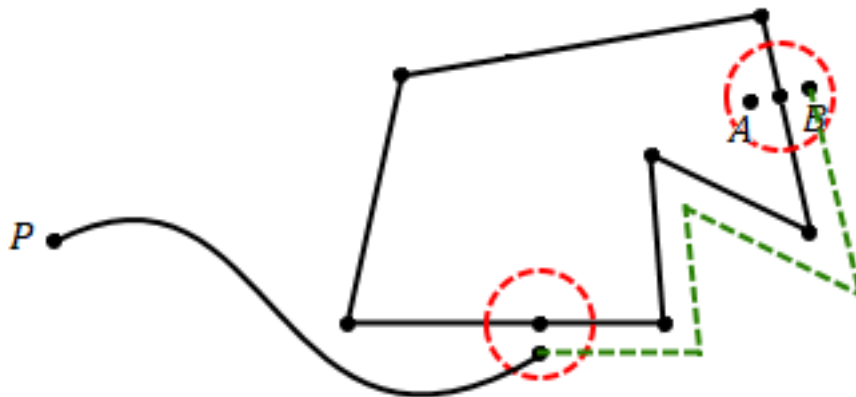


Рис. 15: Проход вдоль ломаной.

Осталось понять, что точку  $P$  можно соединить с какой-то точкой из какого-то круга с центром на ломаной. Выберем произвольную точку  $R$  на ломаной и соединим её с точкой  $P$  отрезком.  $PR$  — непрерывная кривая, значит, существует первая точка  $R'$  пересечения этой кривой с ломаной (по лемме о первой

точке). Рассмотрим круг  $D_{R'}$  и на отрезке  $PR'$  отступим от точки  $R'$  на расстояние  $\varepsilon$ , меньшее радиуса круга. Из получившейся точки мы можем пойти вдоль ломаной и прийти либо в точку  $A$ , либо в точку  $B$  — см.рис.16.

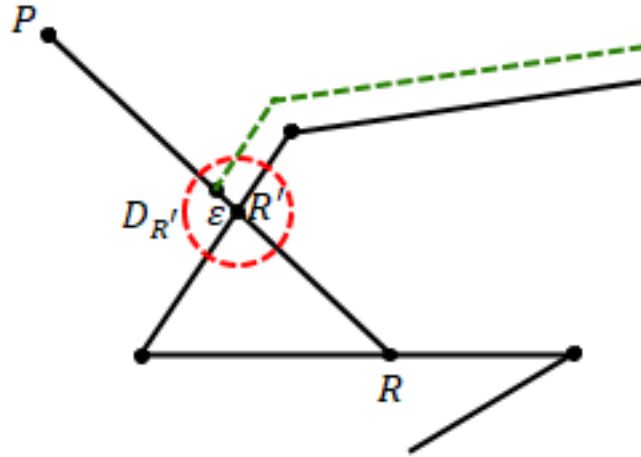


Рис. 16: Соединение произвольной точки плоскости с точкой из круга с центром на ломаной.

Таким образом, мы доказали, что количество частей, на которые замкнутая ломаная разбивает плоскость, не может быть больше двух. Чтобы доказать, что таких компонент ровно две, осталось понять, что точки  $A$  и  $B$ , которые мы выбрали, лежат действительно в разных компонентах, то есть, не существует кривой, которая, не пересекая ломаную, соединяет точки  $A$  и  $B$ .

Шаг 2. Докажем, что число компонент  $\geq 2$  (есть точки, лежащие в разных компонентах).

Рассмотрим ломаную  $L$  и точку  $P \notin L$ . Возможные варианты пересечения (маленькая окрестность точки пересечения) луча  $l_P$  с началом в точке  $P$  с ломаной  $L$  указаны на рисунке 17.

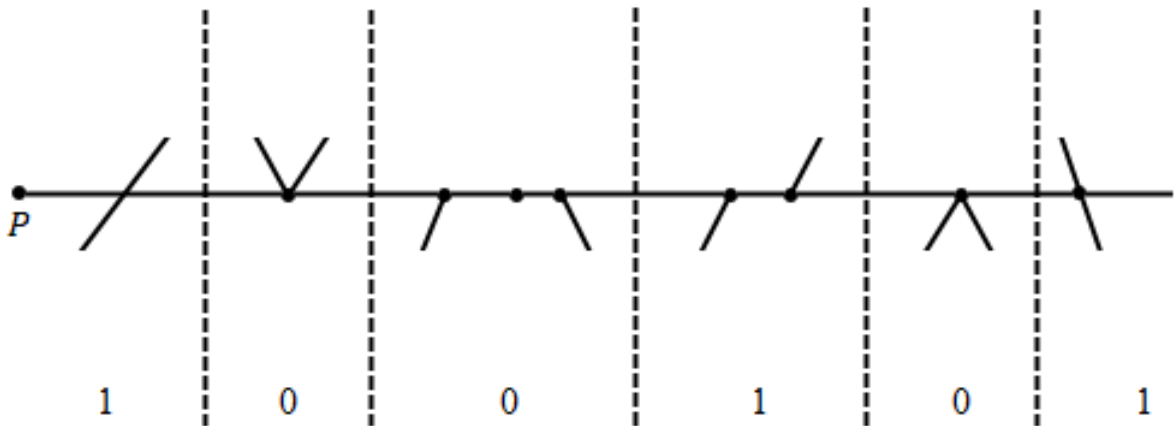


Рис. 17: Возможные варианты пересечения  $l_P$  с ломаной  $L$ .

Построим инвариант (грубо говоря, посчитаем чётность количества пересечений луча  $l_P$  с ломаной  $L$ , но в случае, когда  $l_P$  идёт по ребру  $L$ , мы получим

бесконечное множество точек пересечения, поэтому лучше сказать, что каждому типу пересечения поставим в соответствие 0 или 1, как показано на рисунке 17).

Лучу  $l_P$  поставим в соответствие число, которое равно сумме по модулю 2 чисел, соответствующих вариантам пересечения этого луча с ломаной  $L$ :  $\sigma(l_P)$  — сумма чисел, приписанных пересечением по модулю 2.

**Утверждение.**  $\sigma(l_P)$  не зависит от луча  $l_P$ , а только от точки  $P$ .

*Доказательство.* При повороте на малый угол  $\varphi$  вокруг точки  $P$  число  $\sigma(l_P)$  не меняется (см.рис.18), поэтому функция  $\sigma(l_P)$  локально постоянна (если рассматривать её как функцию от  $\varphi$ ).

Однако любая локально постоянная функция на отрезке постоянна.

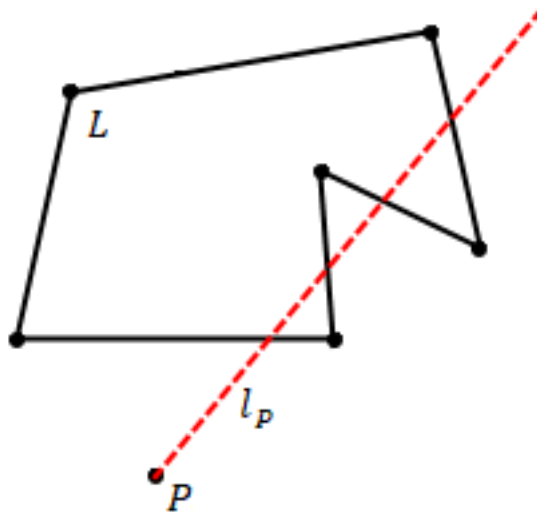


Рис. 18: Подсчёт пересечений луча  $l_P$  с ломаной  $L$ .

□

Таким образом, мы построили функцию  $\sigma(P)$  на  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ . Эта функция  $\sigma(P)$  тоже локально постоянна, то есть, для любой точки  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  существует её окрестность  $U$  такая, что  $\sigma|_U \equiv \text{const}$ . Значит, функция  $\sigma$  постоянна на каждой компоненте множества  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

Действительно, пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus L$  — произвольная непрерывная кривая, не пересекающая ломаную  $L$ . Покажем, что значения функции  $\sigma$  в точках  $\gamma(a), \gamma(b)$  совпадают (это и будет означать, что функция  $\sigma$  постоянна на каждой компоненте множества  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ ).

Поскольку кривая  $\gamma$  непрерывна, то (по определению непрерывности) для любого  $t \in [a, b]$  верно следующее: какую бы окрестность  $W$  точки  $\gamma(t)$  мы ни

выбрали, существует интервал  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  такой, что при отображении  $\gamma$  этот интервал целиком попадает в эту окрестность (см.рис.19).

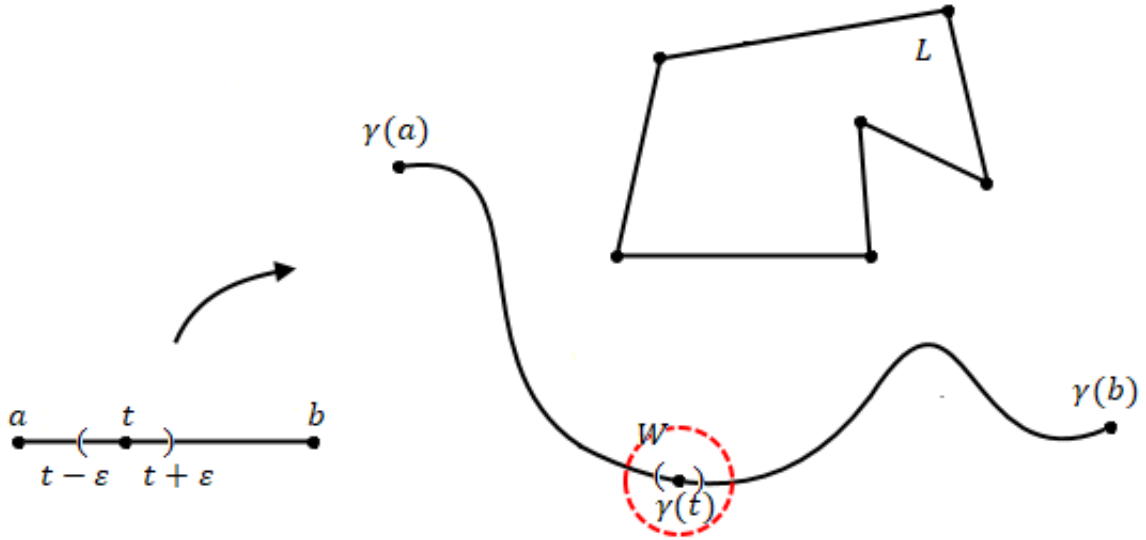


Рис. 19: Значения функции  $\sigma$  в точках  $\gamma(a), \gamma(b)$  совпадают.

Рассмотрим  $f(t)$  — функцию на отрезке  $[a, b]$ , определяемую равенством

$$f(t) = \sigma(\gamma(t)).$$

$f(t)$  локально постоянна (так как значение функции  $\sigma$  в некоторой окрестности точки  $P$  постоянно — мы можем вращать луч  $l_P$ , а также можем начало луча  $l_P$  сдвигать вдоль прямой, содержащей луч — при обеих этих операциях функция  $\sigma(P)$  не меняется — действуя таким образом, мы заметём некоторую окрестность точки  $P$  на плоскости), поэтому  $f(t)$  постоянна на  $[a, b]$ .

Это означает, что  $f(a) = f(b)$ , то есть,  $\sigma(\gamma(a)) = \sigma(\gamma(b))$ .

Итак, мы построили некоторую функцию  $\sigma$ , которая постоянна на каждой компоненте линейной связности. Чтобы доказать, что число компонент, на которые ломаная делит плоскость, не меньше двух, достаточно предъявить две точки, в которых значения этой функции будут разными.

Рассмотрим маленький отрезок  $P_1P_2$ , перпендикулярный ребру ломаной, и не пересекающий другие рёбра. Луч с началом в точке  $P_1$  пересекает ломаную ровно на один раз больше, чем луч с началом в точке  $P_2$ , поэтому  $\sigma(P_1) \neq \sigma(P_2)$ . Отсюда следует, что число компонент, на которые замкнутая ломаная разбивает плоскость, не меньше двух.  $\square$

**Лемма** (о четырёх точках).  $L$  — замкнутая вложенная ломаная.  $P, Q, R, S$  — точки ломаной (расположенные именно в таком порядке).  $L_1$  — ломаная между  $P$  и  $R$ ;  $L_2$  — ломаная между  $Q$  и  $S$ ;  $L_1, L_2$  расположены в одной ком-

поэлементно связности от  $L$ ;  $L_1 \cap L = \{P, R\}, L_2 \cap L = \{S, Q\}$ . Тогда  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются.

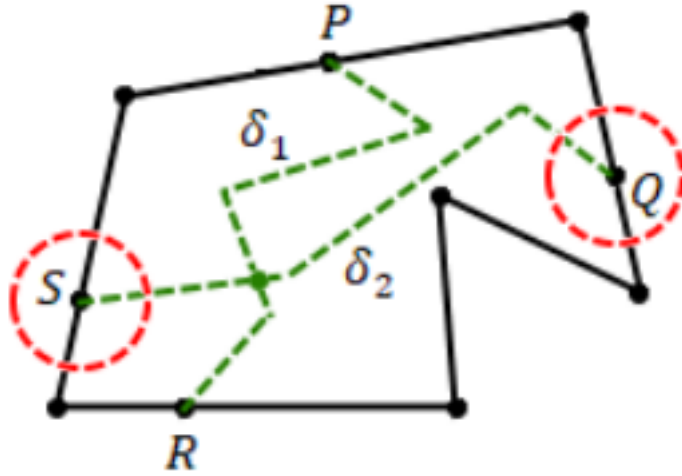


Рис. 20: К лемме о четырёх точках.

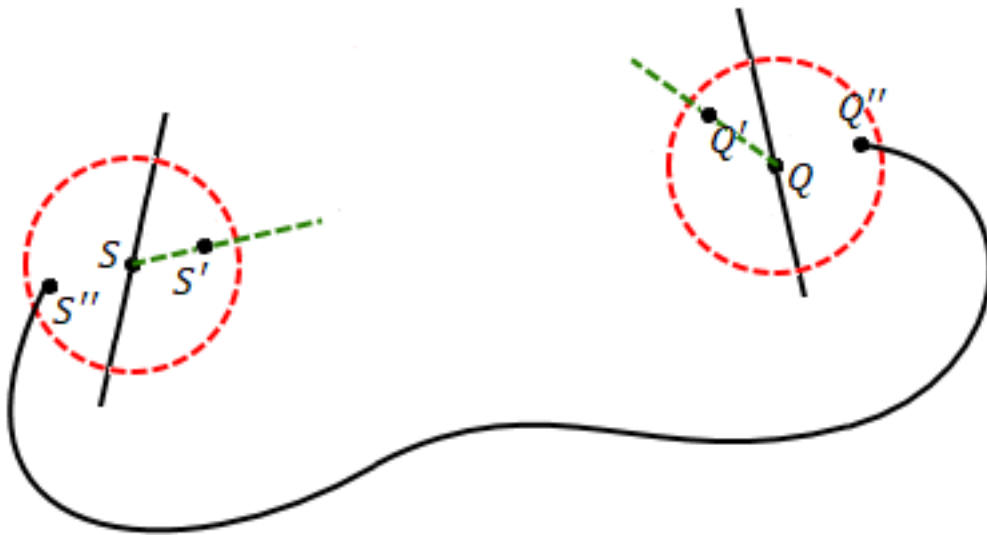


Рис. 21: Выбор точек  $S', S'', Q', Q''$ .

*Доказательство.*  $\tilde{L} = L_1 \cup$  часть ломаной  $L$  между  $P$  и  $R$ , содержащая  $Q$ . Рассмотрим точки  $S', S'', Q', Q''$  в малых кругах с центрами в  $S$  и  $Q$  так, как показано на рис. 21 (то есть в разных компонентах, на которые эти круги разбиваются рёбрами ломаной). Можно считать, что  $S'$  и  $Q'$  лежат на  $L_2$ . Пусть  $S'', Q''$  расположены в одной компоненте относительно  $L$ , которая не содержит  $L_1, L_2$ .

Тогда  $S'', Q''$  расположены в одной компоненте относительно  $\tilde{L}$  (действительно, так как  $S'', Q''$  расположены в одной компоненте относительно  $L$ , значит, их можно соединить какой-то непрерывной кривой, не пересекающей ломаную  $L$ , причём эта кривая не пересекает и ломаные  $L_1, L_2$ , поскольку они расположены



в другой компоненте. Эта же кривая не пересекает и ломаную  $\tilde{L}$ , значит,  $S'', Q''$  расположены в одной компоненте относительно  $\tilde{L}$ ).

$Q', Q''$  расположены в разных компонентах относительно  $\tilde{L}$  (точки, расположенные по разные стороны от ребра ломаной, лежат в разных компонентах, на которые эта ломаная делит плоскость).

$S', S''$  расположены в одной компоненте относительно  $\tilde{L}$  (очевидно, их можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей  $\tilde{L}$ ).

Суммируя эти утверждения, получаем, что  $S', Q'$  расположены в разных компонентах относительно  $\tilde{L}$ .

Итак,  $S', Q'$  расположены в разных компонентах относительно  $\tilde{L}$  и соединены ломаной  $\tilde{L}_2$  (полученной из ломаной  $L_2$  выбрасыванием маленьких отрезков  $SS'$  и  $QQ'$ , то есть, ломаная  $\tilde{L}_2$  не пересекается с ломаной  $L$ ).

Значит,  $\tilde{L}_2$  пересекает ломаную  $\tilde{L}$ , откуда следует, что  $\tilde{L}_2$  пересекает ломаную  $L_1$ .

Но если ломаные  $\tilde{L}_2, L_1$  пересекаются, то ломаные  $L_2$  и  $L_1$  тоже пересекаются, т.к.  $\tilde{L}_2 \in L_2$ . Лемма доказана.  $\square$

**Утверждение.** Граф  $K_{3,3}$  не планарен.

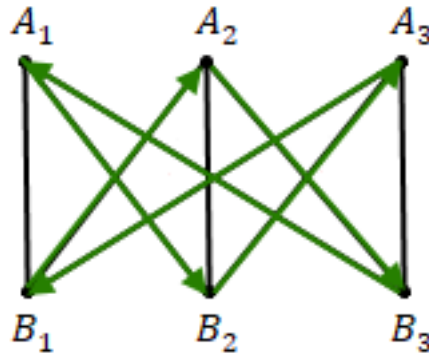


Рис. 22: Граф  $K_{3,3}$ .

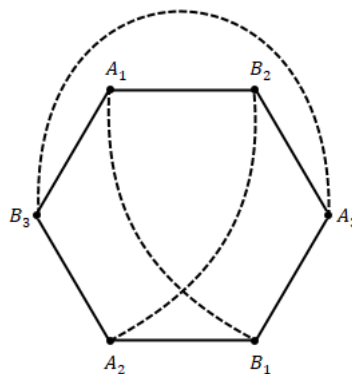


Рис. 23: Попытка вложения графа  $K_{3,3}$  в плоскость.

*Доказательство.* Предположим, что нам удалось вложить этот граф в плоскость без самопересечений. Рассмотрим цикл в графе  $A_1B_2A_3B_1A_2B_3A_1$ . Пусть  $K_{3,3}$  вложен в плоскость так, что его рёбра являются ломаными. Тогда этот цикл образует замкнутую ломаную, которая делит плоскость на две компоненты.

Из оставшихся трёх рёбер  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  по крайней мере два расположены в одной компоненте, причём концы этих рёбер расположены на цикле в нужном порядке (как в лемме о четырёх точках), поэтому они должны пересекаться, откуда следует, что граф  $K_{3,3}$  нельзя вложить в плоскость.  $\square$

**Утверждение** (Теорема Жордана для замкнутой непрерывной кривой). Пусть  $L$  — замкнутая вложенная в плоскость кривая. Тогда она разбивает плоскость не менее чем на 2 компоненты.

*Доказательство.* Сведём утверждение теоремы к непланарности графа  $K_{3,3}$ . Будем считать, что на плоскости введены декартовы координаты. Рассмотрим

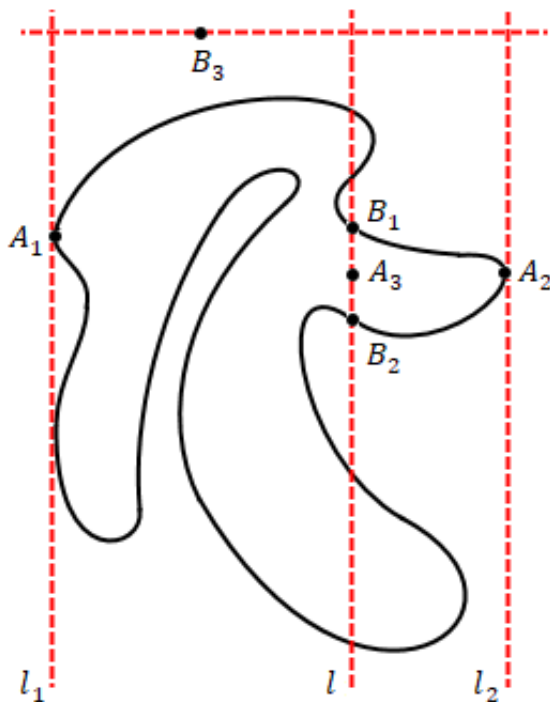


Рис. 24: К теореме Жордана.

замкнутую вложенную непрерывную кривую  $\gamma$  на плоскости. Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — вертикальные прямые, между которыми расположена кривая  $\gamma$  (то есть,  $l_1$  и  $l_2$  содержат точки кривой, а слева от  $l_1$  и справа от  $l_2$  точек кривой нет — см.рис.24).

Существование таких прямых следует из свойств непрерывной функции на

отрезке: функция  $x(t)$  достигает своего минимума и максимума, где

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Рассмотрим на прямых  $l_1, l_2$  «самые верхние» точки, принадлежащие кривой  $\gamma$  (обозначим их  $A_1, A_2$ , соответственно). Существование таких точек следует из того, что образ кривой  $\gamma$  и прямые  $l_1, l_2$  — это замкнутые подмножества плоскости, значит, их пересечение тоже будет замкнутым подмножеством плоскости (то есть, супремум этого множества ему принадлежит, поэтому «самые верхние» точки принадлежат прямым  $l_1, l_2$ ).

Точки  $A_1, A_2$  разбивают кривую на две части (условно назовём их верхней и нижней). Проведём ещё одну вертикальную прямую  $l$  между прямыми  $l_1, l_2$ . Из теоремы о промежуточном значении (для функции  $x(t)$ ) следует, что прямая  $l$  пересекает кривую  $\gamma$ . Найдём отрезок  $B_1B_2$  на прямой  $l$  такой, что:

- $B_1$  лежит на верхней части кривой;
- $B_2$  лежит на нижней части кривой;
- Между  $B_1$  и  $B_2$  нет точек кривой.

Это можно сделать: действительно, из всех точек пересечения  $l$  с верхней частью кривой выберем самую нижнюю точку  $B_1$ , а из всех точек пересечения  $l$  с нижней частью кривой, расположенных ниже  $B_1$ , выберем самую верхнюю точку  $B_2$ .

Выберем на отрезке  $B_1B_2$  произвольную точку  $A_3$  и рассмотрим горизонтальную прямую, расположенную выше, чем кривая  $\gamma$  (существование такой прямой следует из того, что функция  $y(t)$  ограничена, как непрерывная на отрезке). На этой прямой выберем произвольную точку  $B_3$ .

Мы почти получили вложение графа  $K_{3,3}$  — точки  $A_i$  соединены с  $B_j$  (кроме  $A_3B_3$ ), но не соединены между собой. Так как граф  $K_{3,3}$  не планарен, то нельзя провести непрерывную кривую, соединяющую  $B_3$  и  $A_3$ , не пересекая уже нарисованных рёбер.

Рёбра графа  $K_{3,3}$ , не лежащие на кривой  $\gamma$  — это  $A_1B_3$  и  $B_3A_2$ , а также  $B_1A_3$  и  $A_3B_2$  (составляющие отрезок  $B_1B_2$ ). Допустим, что можно нарисовать кривую  $A_3B_3$ , не пересекая кривую  $\gamma$ , тогда она пересекает какую-то из ломаных  $A_1B_3A_2$  или  $B_1B_2$ .

В этом случае рассмотрим последнюю точку кривой  $B_3A_3$ , пересекающуюся с  $A_1B_3A_2$  и выберем её в качестве  $B_3$ . Аналогично рассмотрим первую точку пересечения кривой  $B_3A_3$  с отрезком  $B_1B_2$  и выберем её в качестве  $A_3$ .

Тогда кривая, соединяющая новые точки  $A_3$  и  $B_3$ , не будет пересекать ломаные  $A_1B_3A_2$ ,  $B_1B_2$  и кривую  $\gamma$ , что противоречит утверждению о том, что граф  $K_{3,3}$  не планарен.

Значит,  $A_3$  и  $B_3$  лежат в разных компонентах относительно кривой  $\gamma$ .  $\square$

## 2.4 Теорема Эйлера

**Теорема (Эйлер).** Пусть дан плоский связный граф  $B$ ,  $P$ ,  $G$  — количество вершин, рёбер и частей плоскости, на которые граф разбивает плоскость. Тогда

$$B - P + G = 2. \quad (1)$$

*Доказательство.* Начав с произвольной вершины, пройдем по рёбрам графа, не проходя ни по какому ребру дважды. Мы не сможем сделать следующий шаг только в двух случаях: либо мы вернёмся в вершину, где уже были (это будет означать, что в графе есть цикл), либо вернёмся в вершину степени 1.

Определим две операции:

1. Если в графе есть вершина степени 1, то удалим её вместе с ребром, которому она принадлежит.
2. Если в графе есть цикл, то удалим любое ребро из этого цикла, не удаляя вершин, которым принадлежит это ребро.

Мы можем выполнять эти операции, пока у графа есть рёбра. Значит, процесс остановится только тогда, когда граф состоит из одной вершины и не имеет рёбер (а для этого графа соотношение (1) выполнено).

Осталось понять, что при выполнении вышеуказанных операций число  $B - P + G$  не меняется.

Первая операция:

$$B \rightarrow B - 1$$

$$P \rightarrow P - 1$$

Вторая операция:

$$B \rightarrow B$$

$$P \rightarrow P - 1$$

Отметим, что при выполнении обеих операций число  $G$  не увеличивается (очевидно, что если некоторые точки можно было соединить непрерывной кривой, не пересекая рёбра графа, то после удаления ребра их можно будет соединить той же кривой).

Осталось доказать, что для операции 1 число компонент не меняется, а для операции 2 число компонент уменьшается ровно на 1. Доказательство проводится примерно так же, как и доказательство теоремы Жордана для ломаных (см. шаг 1, где мы описывали процесс хождения вдоль рёбер замкнутой ломаной).

Для операции 1: надо проверить, что если для точек  $P, Q \notin G$  существует непрерывная кривая  $\gamma$ , соединяющая  $P$  с  $Q$  и не пересекающая рёбра, отличные от  $e$  (т.е. ребро, которое мы удаляем), то существует другая непрерывная кривая  $\tilde{\gamma}$ , соединяющая  $P$  с  $Q$  и не пересекающая рёбра.

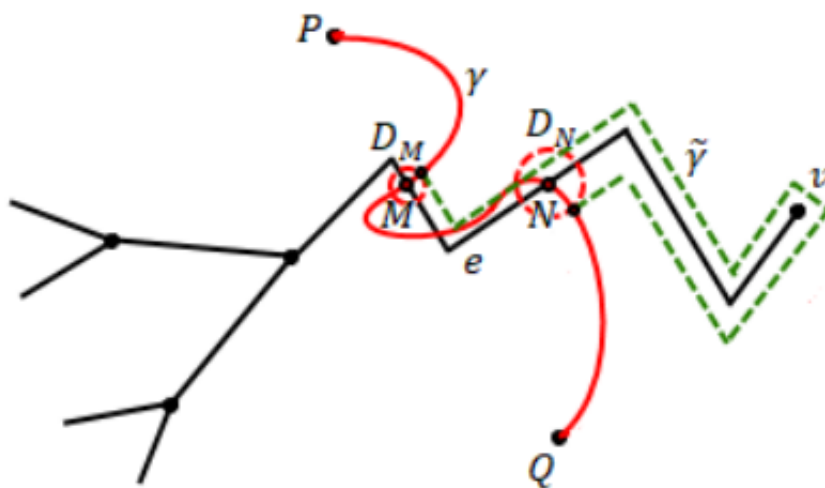


Рис. 25: Существование кривой  $\tilde{\gamma}$ .

Рассмотрим  $M$  — первую точку на кривой  $\gamma$ , принадлежащую ребру  $e$  и  $N$  — последнюю точку на кривой  $\gamma$ , пересекающую ребро  $e$  (они существуют, так как образ ребра  $e$  — замкнутое подмножество плоскости).

Рассмотрим замкнутый круг  $D_M$  с центром в точке  $M$ , не пересекающий другие рёбра и пересекающийся с ребром  $e$  по двум радиусам (аналогично для точки  $N$  рассмотрим круг  $D_N$ ). Из точки  $P$  пройдем по кривой  $\gamma$  до первой точки, принадлежащей кругу  $D_M$ , затем пройдем вдоль ломаной до последней точки на кривой  $\gamma$ , принадлежащей кругу  $D_N$ , а из неё по кривой  $\gamma$  пройдем до точки  $Q$  — получим непрерывную кривую  $\gamma$ , соединяющую точки  $P$  и  $Q$ , и не пересекающую рёбра, отличные от  $e$ .

Для операции 2: поскольку цикл не самопересекающийся, его образ при вложении графа в плоскость можно рассматривать как замкнутую не самопересекающуюся ломаную. По теореме Жордана для ломаных, этот цикл разбивает плоскость на две компоненты.

Рассмотрим замкнутый круг с центром в точке, лежащей на ребре ломаной. Если точки  $A$  и  $B$  лежат в разных компонентах, на которые рёбра ломаной

разбивают круг, тогда точки  $A$  и  $B$  лежат в разных компонентах относительно этой замкнутой ломаной (это следует из доказательства теоремы Жордана для ломаных). Тогда тем более точки  $A$  и  $B$  лежат в разных компонентах относительно графа  $G$ .

После удаления ребра  $e$  очевидно, что эти точки можно соединить непрерывной кривой (например, отрезком), см.рис.26.

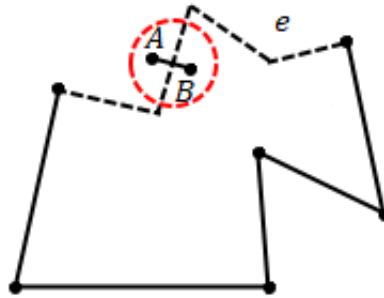


Рис. 26: Соединение точек  $A$  и  $B$ , лежащих в разных компонентах.

Таким образом, мы доказали, что после операции 2 число компонент уменьшится. Осталось показать, что оно уменьшится ровно на 1.

Поймём, какие точки, которые были в разных компонентах до удаления ребра, могут оказаться в одной компоненте после удаления ребра. Рассмотрим точки  $P$  и  $Q$ , такие что до удаления ребра их нельзя было соединить непрерывной кривой, не пересекая рёбра графа, а после удаления — можно. Это означает, в частности, что кривая  $\gamma$ , соединяющая  $P$  и  $Q$ , пересекает только ребро  $e$ .

На кривой  $\gamma$  рассмотрим первую и последнюю точки ( $M$  и  $N$ , соответственно) пересечения этой кривой с ребром  $e$ . Рассмотрим замкнутые круги  $D_M$  и  $D_N$  с центрами в этих точках и докажем, что точки  $P$  и  $Q$  можно соединить с одной из точек  $A$  или  $B$  непрерывной кривой, не пересекая рёбер графа.

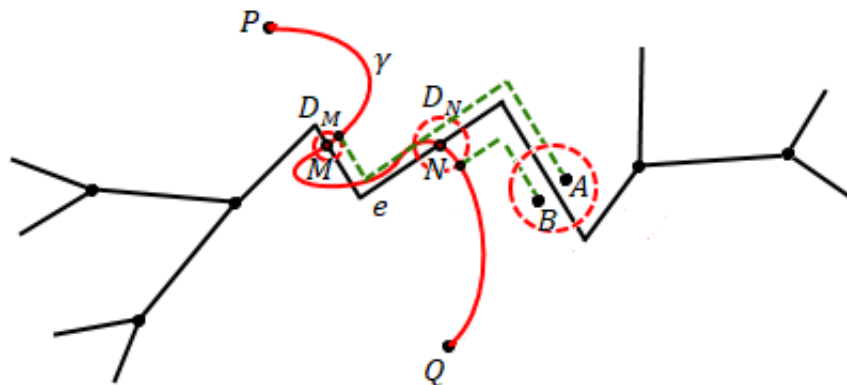


Рис. 27: Точки  $P$  и  $Q$  можно соединить с одной из точек  $A$  или  $B$ .

Из точки  $P$  пойдём по кривой  $\gamma$  до первой точки пересечения с кругом  $D_M$ ,

затем пойдём вдоль ребра  $e$  и соединим эту точку либо с точкой  $A$ , либо с точкой  $B$ , состоит из части кривой  $\gamma$  и некоторого пути вдоль ломаной.

Аналогично для точки  $Q$  — пойдём по кривой  $\gamma$  до первой точки пересечения с кругом  $D_N$ , затем пойдём вдоль ребра  $e$  до точки  $A$  или  $B$  (см. рис.27).

Мы доказали, что точка  $P$  до удаления ребра  $e$  лежит в одной из компонент, которой принадлежат либо точка  $A$ , либо точка  $B$ , а точка  $Q$  лежит во второй из этих компонент (так как точки  $A$  и  $B$  находятся в разных компонентах). Это и означает, что при удалении ребра  $e$  сливаются (становятся одной компонентой) только те компоненты, которые задаются выбранными нами точками  $A$  и  $B$ . Значит, число компонент уменьшится ровно на 1.

Таким образом, при указанных операциях число  $B - P + \Gamma$  не меняется, и если в конце процесса (для графа, состоящего из одной точки), оно равно 2, то и для начального графа выполняется соотношение

$$B - P + \Gamma = 2.$$

□

**Теорема** (Критерий Понтрягина-Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .*

*Доказательство.* Без доказательства.

□

## 3 Многогранники

### 3.1 Основные определения

**Определение.** *Многоугольник (на плоскости)* — множество точек, ограниченное замкнутой вложенной конечнозвенной ломаной (вместе с этой ломаной).

**Определение.** Два многоугольника, расположенных в пространстве, называются *смежными по ребру  $a$* , если  $a$  — их общее ребро.

**Определение.** *Многогранная поверхность* — это конечный набор многоугольников в  $\mathbb{R}^3$  такой, что для любого ребра любого многоугольника существует единственный другой многоугольник, смежный с ним по данному ребру (причём это отношение симметрично).

**Определение.** Многогранная поверхность называется *вложенной*, если выполнены следующие условия:

1. Внутренние точки граней принадлежат только этим граням.
2. Внутренние точки рёбер принадлежат только тем двум граням, которые смежны по данному ребру.
3. У любой вершины существует «обход»: все грани, соответствующие данной вершине (как точке в  $\mathbb{R}^3$ ) таковы, что для любых двух граней существует цепочка граней, их соединяющая. Причём все они смежные по рёбрам, инцидентных данной вершине.

То есть, у любой точки существует окрестность, гомеоморфная двумерному диску.

**Определение.** Многогранная поверхность *связна*, если для любых двух граней существует цепочка граней, смежных по ребрам, их соединяющая.

*Замечание.* Мы будем рассматривать только связные и вложенные многогранные поверхности.

**Определение.** Пусть дана вложенная связная многогранная поверхность  $L$ . Компактная часть пространства, ограниченная  $L$  вместе с поверхностью  $L$ , называется *многогранником*.

**Определение.** Множество в  $\mathbb{R}^n$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек в нём, оно содержит весь отрезок между ними (отрезок, их соединяющий).



**Определение (1).** Многогранник *выпуклый*, если его множество точек выпукло.

**Определение (2).** Многогранник *выпуклый*, если он лежит в одном полупространстве, образованном плоскостью, содержащей любую его грань.

**Определение (3).** Многогранник *выпуклый*, если он совпадает (как множество в  $\mathbb{R}^3$ ) с выпуклой оболочкой его вершин (выпуклая оболочка множества — это минимальное выпуклое множество, его содержащее).

**Теорема.** Определения (1)-(3) эквивалентны.

*Доказательство.* (1)  $\implies$  (2). Рассмотрим некоторую грань многогранника и плоскость  $\alpha$ , содержащую эту грань. Предположим, что многогранник  $M$  не содержится целиком в одном из полупространств, на которые плоскость  $\alpha$  разбивает пространство, т.е. существуют две точки  $P \in M$ ,  $Q \in M$ , расположенные по разные стороны от плоскости  $\alpha$ . Рассмотрим  $S$  — произвольную внутреннюю

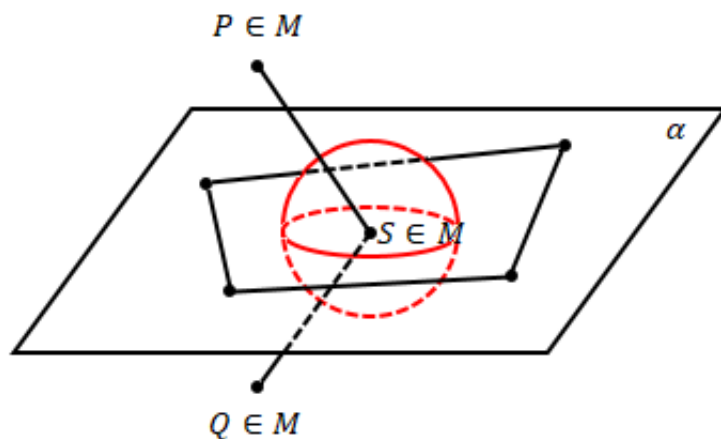


Рис. 28: Точки  $P \in M$ ,  $Q \in M$ , расположенные по разные стороны от плоскости  $\alpha$ .

точку грани, лежащей в плоскости  $\alpha$ , и соединим её с точками  $P$  и  $Q$ . Так как многогранник  $M$  выпуклый, то отрезки  $PS$  и  $QS$  также принадлежат  $M$ .

Рассмотрим маленький шар с центром в точке  $S$ . Его пересечение с гранью, в которой лежит точка  $S$  — круг, который делит шар на два полушара, причём точки одного полушара не принадлежат  $M$ , а точки другого полушара принадлежат  $M$  (т.к.  $S$  — внутренняя точка грани).

Тем самым получаем противоречие — отрезки  $PS$  и  $QS$  целиком принадлежат многограннику, но часть одного из этих отрезков неминуемо попадёт в полушарие, точки которого не принадлежат многограннику  $M$ .

(2)  $\implies$  (1). Рассмотрим  $W$  — пересечение всех полупространств, о которых идёт речь в определении (2). Многогранник  $M$  лежит в этом пересечении,

потому что он лежит по одну сторону от каждой грани в каждом из этих полупространств:  $M \subset W$ .

$W$  — выпуклое подмножество (как пересечение выпуклых подмножеств пространства). Докажем, что  $M = W$ , т.е. любая точка пересечения полупространств является точкой многогранника.

Предположим, что это не так, то есть существуют точки  $P \in W$ ,  $Q \in W$  такие, что  $P \in M$ ,  $Q \notin M$ . Тогда отрезок  $PQ$  пересечёт одну из граней многогранника, а значит, пересечёт и плоскость, содержащую эту грань, но мы выбирали точки  $P$  и  $Q$  так, чтобы они лежали в одном полупространстве для любой плоскости, содержащей одну из граней многогранника — противоречие, значит,  $M = W$ .

(3)  $\implies$  (1). Очевидно, так как выпуклая оболочка множества — это некоторое выпуклое подмножество.

(1)  $\implies$  (3). Пусть многогранник  $M$  является выпуклым в смысле определения (1). Рассмотрим множество  $W$  — выпуклую оболочку его вершин. Очевидно, что  $W \subset M$ . Докажем, что  $M \subset W$ , т.е. что все точки многогранника будут принадлежать выпуклой оболочке вершин. У многогранника есть 4 типа точек: вершины, внутренние точки рёбер, внутренние точки граней, внутренние точки многогранника.

Вершины (по определению) принадлежат выпуклой оболочке вершин. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку ребра. Поскольку его концы (как вершины) принадлежат множеству  $W$ , то и весь отрезок с концами в этих точках тоже принадлежит  $W$ , поэтому все внутренние точки рёбер также принадлежат  $W$ .

Рассмотрим внутреннюю точку грани. Проведём в плоскости, содержащей эту грань, прямую — она пересечёт стороны многоугольника, про которые мы уже знаем (поскольку это вершины или внутренние точки рёбер), что они принадлежат  $W$ , поэтому и весь отрезок с концами в этих точках также принадлежит  $W$ . Стало быть, внутренние точки граней также принадлежат  $W$ .

Рассмотрим внутреннюю точку многогранника. Проведём через неё прямую, которая пересечёт грани многогранника в точках, про которые мы уже знаем, что они принадлежат  $W$ . Стало быть, внутренние точки многогранника также принадлежат  $W$ .  $\square$

## 3.2 Формула Эйлера

**Теорема.** Для любого выпуклого многогранника выполнено

$$B - P + \Gamma = 2.$$

*Доказательство.* Сведём доказательство формулы Эйлера для выпуклых многогранников к доказательству формулы Эйлера для плоских графов.

Нужно так спроектировать многогранник, чтобы граф, получившийся в результате проекции, был плоским. Эту идею можно довести до аккуратного доказательства, если рассматривать строго выпуклый многогранник, но мы будем делать иначе.

Рассмотрим две проекции. Пусть  $L$  — многогранная поверхность, задающая многогранник  $M$ .

1)  $\pi : L \rightarrow S^2$ .

Спроектируем поверхность многогранника из некоторой внутренней точки многогранника  $O$  на сферу с центром в этой точке (выберем сферу достаточно большого радиуса, чтобы многогранник в ней полностью содержался).

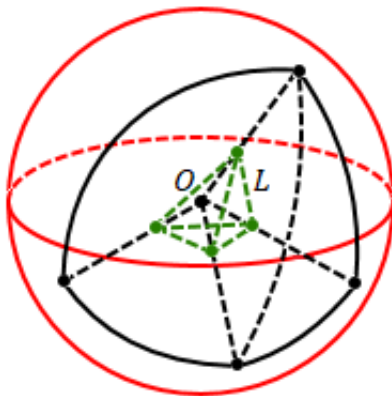


Рис. 29: Проекция многогранника на сферу.

Докажем, что отображение  $\pi$  будет взаимно-однозначным (для этого нужно понять, что луч с началом в точке  $O$  ровно один раз пересечёт поверхность многогранника).

Докажем, что луч с началом в точке  $O$  пересечёт поверхность многогранника. Так как  $O$  — внутренняя точка многогранника, то существует шар с центром в точке  $O$  (окрестность точки  $O$ ), целиком лежащий в многограннике, поэтому начало и некоторая окрестность луча принадлежат многограннику. Также на этом луче будут точки, не принадлежащие многограннику, поэтому существует точка на границе многогранника, принадлежащая лучу (супремум множества точек, принадлежащих многограннику).

Докажем, что луч пересечёт ровно один раз: допустим, луч пересекает поверхность многогранника в двух точках  $A$  и  $B$ . Как отмечалось выше, существует шар с центром в точке  $O$ , целиком лежащий внутри многогранника. Рассмотрим конус над этим шаром с вершиной в точке  $B$ . Очевидно, что  $A$  — внутренняя точка этого конуса, т.е. существует шар с центром в точке  $A$ , целиком лежащий внутри этого конуса (если  $A$  лежит вне конуса, то рассмотрим конус с вершиной в точке  $A$  — в этом случае  $B$  будет внутренней точкой конуса).



Рис. 30:  $A$  — внутренняя точка конуса.

Так как многогранник выпуклый, то весь конус принадлежит многограннику, поэтому шар с центром в точке  $A$  — это окрестность точки  $A$ , целиком состоящая из точек, принадлежащих многограннику, откуда следует, что  $A$  — внутренняя точка многогранника — противоречие.

Итак, в результате проекции  $\pi : L \rightarrow S^2$  получаем граф на сфере — каждой вершине многогранника будет соответствовать точка на сфере, каждому ребру многогранника — дуга окружности, являющаяся пересечением плоскости, проходящей через точку  $O$ , со сферой.

$$2) p : S^2 \setminus C \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

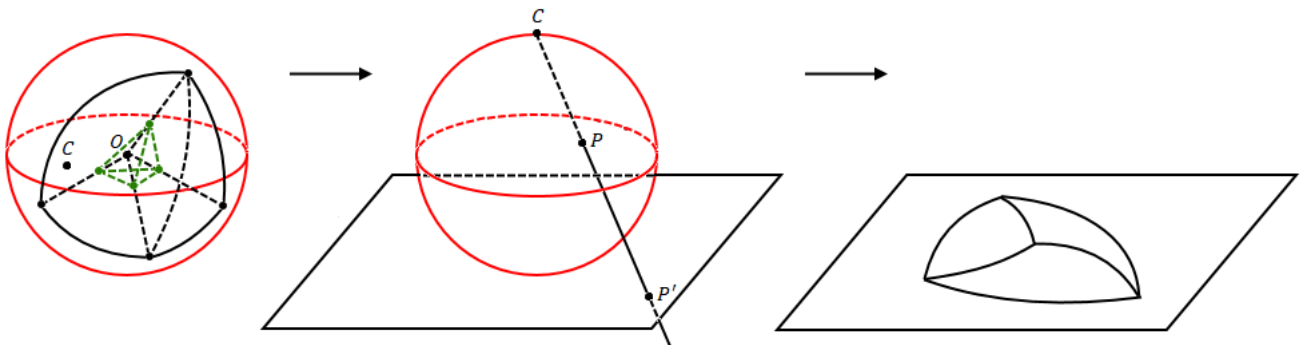


Рис. 31: Стереографическая проекция.

Теперь рассмотрим проекцию сферы на плоскость. Выберем точку  $C$  на сфере, не принадлежащую ни одному из рёбер, и рассмотрим стереографическую проекцию из этой точки — получим некоторый плоский граф, причём каждой

вершине графа на сфере будет соответствовать вершина графа на плоскости, каждому ребру — ребро, каждой области на сфере, на которые граф разбивал сферу, будет соответствовать область на плоскости, причём области, содержащей точку  $C$ , будет соответствовать неограниченная область на плоскости.

Итак, мы получили взаимно-однозначное соответствие между вершинами и рёбрами исходного многогранника и вершинами и рёбрами полученного графа, поэтому формула Эйлера для плоских графов верна и для выпуклых многогранников.

Как делать не надо: если мы спроектируем многогранник на плоскость, то получим некоторый граф. При проекции вершины многогранника перейдут в вершины графа, рёбра — в рёбра, каждой грани многогранника будет соответствовать компонента связности на плоскости, поэтому формула Эйлера для многогранника будет верна, поскольку она верна для плоского графа.

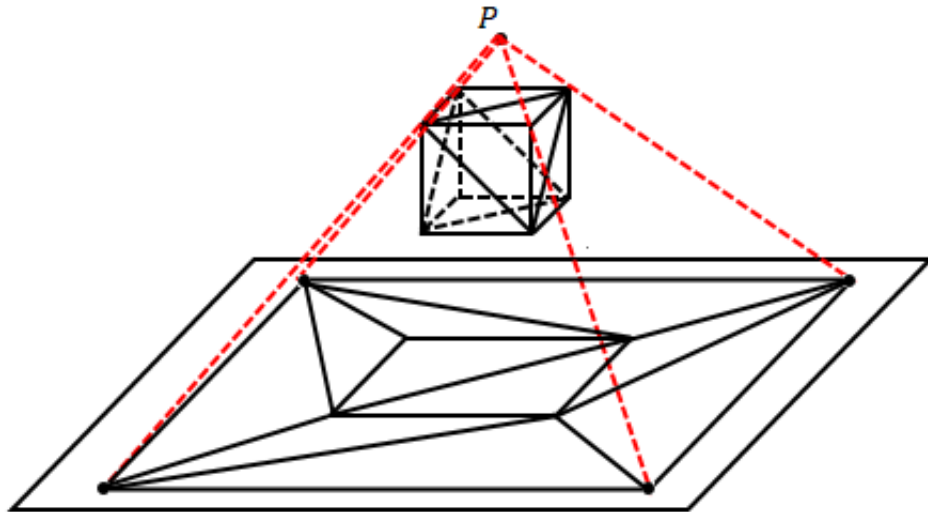


Рис. 32: Проекция куба с фиктивными рёбрами.

Это рассуждение проходит не для всех выпуклых многогранников — например, если подразбить все грани куба на треугольники, как показано на рис.32, то граф, полученный в результате проекции, не будет вложенным.  $\square$

### 3.3 Правильные многогранники

**Определение.** Правильный многогранник — это выпуклый многогранник, грани которого — это равные правильные многоугольники, все двугранные углы которого равны.

*Замечание.* Все двугранные углы равны  $\iff$  в любой вершине сходится одинаковое число рёбер.

Почему можно заменить? Потому что верна следующая теорема:

**Теорема (Коши).** *Два выпуклых многогранника с одинаковым комбинаторным строением, имеющие равные соответствующие грани, совмещаются движением пространства (т.е. конгруэнтны).*

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Теорема.** *В пространстве существует ровно пять правильных многогранников (платоновы тела): тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр.*

*Доказательство.* Будем рассматривать множество вершин и рёбер многогранника как некоторый граф, для которого верно соотношение

$$B - P + G = 2.$$

Теперь используем условие правильности многогранника. Пусть  $n$  — количество сторон в каждой грани,  $k$  — количество рёбер, сходящихся в вершине. Тогда можно двумя способами подсчитать количество рёбер. Действительно, в каждую вершину входит  $k$  рёбер, тогда  $B \cdot k$  — удвоенное количество рёбер (каждое ребро посчитали дважды), поэтому

$$2P = B \cdot k.$$

С другой стороны, у каждой грани  $n$  рёбер, тогда  $G \cdot n$  — удвоенное количество рёбер (каждое ребро принадлежит ровно двум граням), поэтому

$$2P = G \cdot n.$$

Выражая из полученных соотношений число вершин  $B$  и число граней  $G$  и подставляя в формулу Эйлера, получим:

$$\frac{2P}{k} - P + \frac{2P}{n} = 2 \iff \frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{P}.$$

Так как  $P, n, k$  — целые числа, а из геометрических соображений понятно, что  $n \geq 3$ ,  $k \geq 3$ , то левая часть равенства при больших  $k$ ,  $n$  меньше 1, а правая часть больше 1. (Нет, ну это уже) перебор:

$$n = 3 \implies \frac{2}{k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{P} \implies k \leq 5 \implies k = 3, 4, 5$$

$$n = 4 \implies \frac{2}{k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{P} \implies k \leq 3 \implies k = 3$$

$$n = 5 \implies \frac{2}{k} = \frac{3}{5} + \frac{2}{P} \implies k \leq 3 \implies k = 3$$

$$n \geq 6 \implies \frac{2}{k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{P} \implies k \leq 2 \implies \text{решений нет.}$$

Всего получили 5 вариантов: тетраэдр ( $n = 3, k = 3$ ), октаэдр ( $n = 3, k = 4$ ), икосаэдр ( $n = 3, k = 5$ ), куб ( $n = 4, k = 3$ ), додекаэдр ( $n = 5, k = 3$ ).

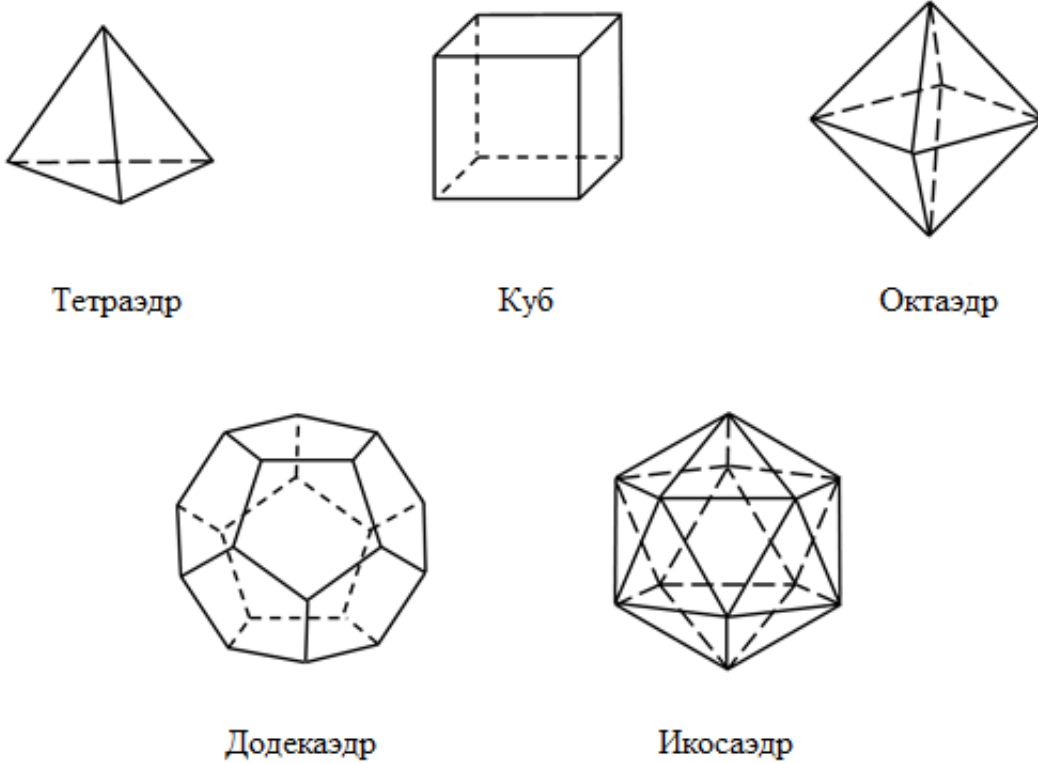


Рис. 33: Правильные многогранники.

□

### 3.4 Теоремы Сабитова и Минковского

**Определение.** *Деформация многогранника* — это непрерывное отображение из одного многогранника в другой, которое сохраняет комбинаторную структуру многогранника.

**Определение.** *Изгибание многогранника* — это непрерывная деформация, которая сохраняет длины всех рёбер многогранника.

**Пример.** Деформация куба в прямоугольный параллелепипед — деформация, но не изгибание. Гомотетия многогранника — изгибание.

**Теорема (Сабитов).** *При изгибании невыпуклого многогранника его объём сохраняется.*

*Доказательство.* Временно идея доказательства: Формула Герона:

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Если рассматривать правую часть данной формулы как многочлен, коэффициенты которого зависят от длин сторон, то корень этого многочлена является квадратом площади треугольника.

Аналогичная формула существует и для тетраэдра: если задать длины всех сторон тетраэдра, то можно предъявить многочлен, коэффициенты которого зависят только от длин сторон, а корнем этого многочлена является объём тетраэдра.

Оказывается, для любого многогранника существует многочлен, коэффициенты которого зависят только от длин сторон многогранника, корнем которого является объём многогранника. Отсюда следует, что при изгибании многогранника его объём будет сохраняться, так как длины всех рёбер сохраняются при изгибании.  $\square$

Рассмотрим произвольный многогранник. Пусть  $S_i$  — площадь его  $i$ -й грани,  $\vec{n}_i$ ,  $|\vec{n}_i| = 1$  — внешняя единичная нормаль к  $i$ -й грани.

**Утверждение.** Для любого строго выпуклого многогранника набор  $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$ ,  $S_1, \dots$  где  $\vec{n}_i$  — единичные нормали, а  $S_i$  — площади граней, удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$  не лежат в одном замкнутом полупространстве;
- 2.

$$\sum_{i=1}^k S_i \vec{n}_i = 0.$$

Набор, который удовлетворяет данным условиям, называется *ежом*.

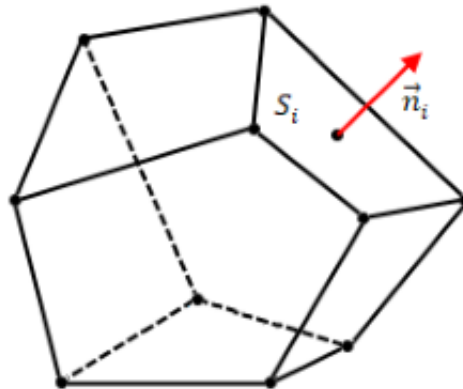


Рис. 34: Ёж.

*Доказательство.* Докажем сначала второе утверждение. Рассмотрим некоторую внутреннюю точку многогранника  $O$ , и в каждой грани выберем внутреннюю точку грани  $p_i$ . Разобьём многогранник на пирамиды с вершиной в точке



$O$ , основаниями которых являются грани многогранника. Если многогранник выпуклый, то эти пирамиды не пересекаются, а их объединение дает весь многогранник.

Объем пирамиды с вершиной  $O$ , и основанием которой является  $i$ -ая грань, равен

$$V_{\Pi} = \frac{1}{3} S_i \left( \overrightarrow{OP_i}, \vec{n_i} \right)$$

Действительно,  $\left( \overrightarrow{OP_i}, \vec{n_i} \right)$  — это длина проекции отрезка  $\overrightarrow{OP_i}$  на нормаль к грани, то есть, высота пирамиды. Тогда объем многогранника равен

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{1}{3} S_i \left( \overrightarrow{OP_i}, \vec{n_i} \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \left( \overrightarrow{OP_i}, S_i \vec{n_i} \right)$$

Для другой точки  $O'$  мы получим аналогичную формулу:

$$V = \sum_{i=1}^k \frac{1}{3} S_i \left( \overrightarrow{O'P_i}, \vec{n_i} \right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^k \left( \overrightarrow{O'P_i}, S_i \vec{n_i} \right)$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^k \left( \overrightarrow{OP_i}, S_i \vec{n_i} \right) = \sum_{i=1}^k \left( \overrightarrow{O'P_i}, S_i \vec{n_i} \right)$$

откуда

$$\sum_{i=1}^k \left( \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{O'P_i}, S_i \vec{n_i} \right) = 0 \iff \sum_{i=1}^k \left( \overrightarrow{OO'}, S_i \vec{n_i} \right) = 0$$

Вынося вектор  $\overrightarrow{OO'}$  за скобки, получаем

$$\left( \overrightarrow{OO'}, \sum_{i=1}^k S_i \vec{n_i} \right) = 0$$

Так как это верно для любых внутренних точек многогранника  $O$  и  $O'$ , то

$$\sum_{i=1}^k S_i \vec{n_i} = 0.$$

Теперь докажем первое утверждение. Допустим, векторы  $S_i \vec{n_i}$  лежат в одном замкнутом полупространстве. Тогда, поскольку их сумма равна нулю, они должны лежать в одной плоскости: действительно, так как они лежат в замкнутом полупространстве, то их проекции на ось  $x$  будут неотрицательными. С другой стороны, их сумма равна нулю, поэтому их проекции на ось  $x$  равны

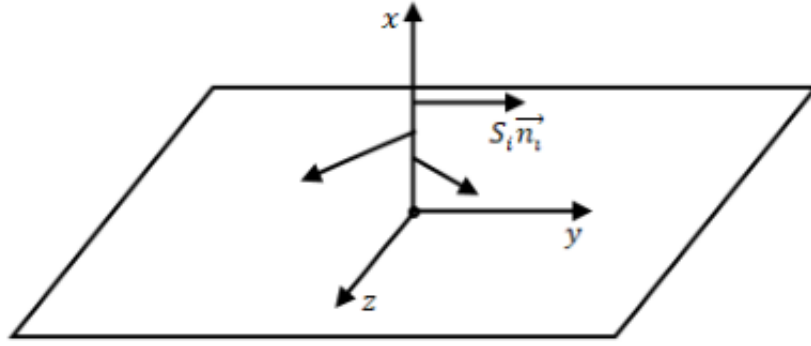


Рис. 35: Вектора  $S_i \vec{n}_i$  лежат в одной плоскости.

нулю, то есть, они лежат в одной плоскости. Иными словами, все они перпендикулярны некоторой прямой.

Но это невозможно, потому что это означает, что все грани параллельны некоторой прямой, откуда следует, что все рёбра перпендикулярны некоторой прямой, тогда в любой вершине могут сходиться максимум два ребра.  $\square$

Мы доказали, что по многограннику можно построить некоторого ежа. Оказывается, обратное утверждение тоже верно:

**Теорема (Минковский).** Пусть дан набор векторов  $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_k$ , никакие два из которых не сонаправлены и не лежат в одном полупространстве, и набор чисел  $s_1, \dots, s_k$ , что  $\sum s_i \vec{n}_i = 0$ . Тогда существует ровно один строго выпуклый многогранник, для которого вектора  $s_i \vec{n}_i$  являются его ежом.

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

### 3.5 Равносоставленность

**Определение.** Два многоугольника  $W_1, W_2$  *равносоставлены*, если существуют многоугольники  $M_1, \dots, M_n$  такие, что:

1.  $\forall i, j \ M_i \cap M_j = \emptyset$ ;
2.  $\bigcup_{i=1}^n M_i = W_1, \bigcup_{j=1}^n M_j = W_2$ .

**Теорема (Бойяи-Гервин).** Два многоугольника на плоскости *равносоставлены* тогда и только тогда, когда они равновеликие.

*Доказательство.*  $\implies$  Если два многоугольника  $P$  и  $Q$  равносоставлены, то существует разбиение каждого из них на конечное количество многоугольников  $P_1, \dots, P_n$  и  $Q_1, \dots, Q_n$ , причём  $\forall i \ P_i$  конгруэнтен  $Q_i$ . Поскольку конгруэнтные фигуры имеют равную площадь, то получаем, что и площади  $P$  и  $Q$  равны.

$\Leftarrow$  Пусть  $P$  и  $Q$  — два многоугольника с равными площадями. Покажем, что их можно разбить на конгруэнтные части. Воспользуемся тем фактом, что любой многоугольник можно разбить на треугольники (сам факт проверяется индукцией по числу вершин). Также воспользуемся тем, что отношение равносоставленности является отношением эквивалентности (проверяется по определению: рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Разрежем теперь многоугольник на треугольники. Любой треугольник равносоставлен с параллелограммом (см.рис.36) (делим треугольник по средней линии).

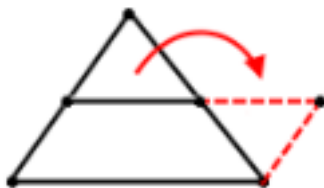


Рис. 36: Равносоставленность треугольника и параллелограмма.

Любой параллелограмм равносоставлен с прямоугольником (см.рис.37), поэтому любые два параллелограмма равной площади и с равным основанием равносоставлены.

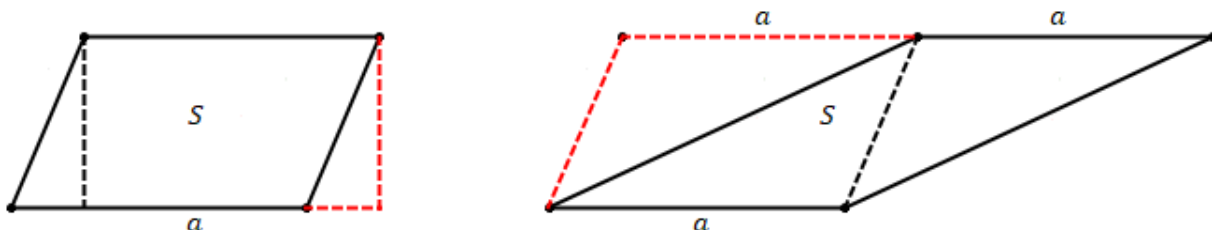


Рис. 37: Равносоставленность параллелограмма и прямоугольника.

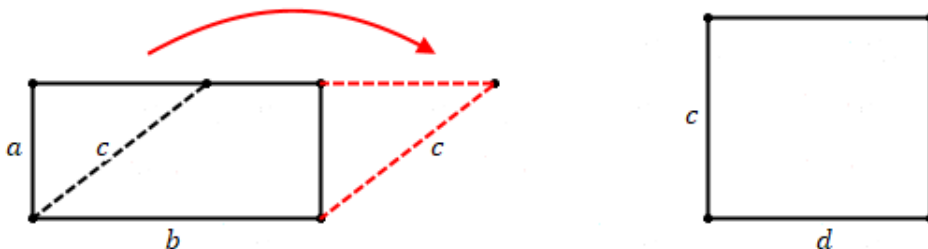


Рис. 38: Равносоставленность прямоугольников равной площади.

Два любые прямоугольника равной площади равносоставлены (см.рис.38) — доказывается сведением к предыдущему шагу. Следовательно, прямоугольник площади  $S$  равносоставлен прямоугольнику со сторонами 1 и  $S$ . Тогда и произвольный многоугольник площади  $S$  равносоставлен прямоугольнику со сторо-

нами 1 и  $S$ . Пользуясь свойством транзитивности, получаем, что равновеликие многоугольники равноставлены.  $\square$

**Теорема (Ден).** *Куб и правильный тетраэдр равного объёма не равноставлены.*

**Определение.** Функция  $f$ , определённая на множестве  $M \subset \mathbb{R}$ , называется *аддитивной*, если  $\forall n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0, n_i \in \mathbb{Z}, x_i \in M$  выполнено

$$n_1f(x_1) + \dots + n_kf(x_k) = 0.$$

**Определение.** Пусть дан  $W$  — многогранник.  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  — величины его двугранных углов. Пусть дана аддитивная функция  $f$ , определённая на множестве  $M : \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \pi\} \in M$ , причём  $f(\pi) = 0$ . Тогда *инвариантом Дена* многогранника  $W$  назовём число  $f(W) = \sum a_i f(\alpha_i)$  — сумма по всем рёбрам.

**Утверждение.** *Любой инвариант Дена для куба равен нулю.*

*Доказательство.*

$$f(\text{куб}) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12a \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Воспользуемся аддитивностью:

$$4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \implies 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(2\pi) = f(\pi + \pi) = f(\pi) + f(\pi) = 0 + 0 = 0$$

Поэтому

$$f(\text{куб}) = 12a \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, любой инвариант Дена для куба равен нулю.  $\square$

**Утверждение.** *Инвариант Дена для призмы равен нулю.*

*Доказательство.* Ребро может быть либо боковым (длины  $l$ ), либо ребром основания (длины  $a_i$ ). Рассмотрим рёбра основания длины  $a_1$  и двугранные углы при этих рёбрах  $\alpha_1, \alpha_2$ . Так как основания призмы параллельны, то  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ . Тогда

$$a_1f(\alpha_1) + a_1f(\alpha_2) = a_1f(\alpha_1 + \alpha_2) = a_1f(\pi) = 0.$$

Рассмотрим боковые рёбра: пусть  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — двугранные углы при боковых рёбрах. Тогда

$$lf(\beta_1) + \dots + lf(\beta_n) = lf(\beta_1 + \dots + \beta_n).$$

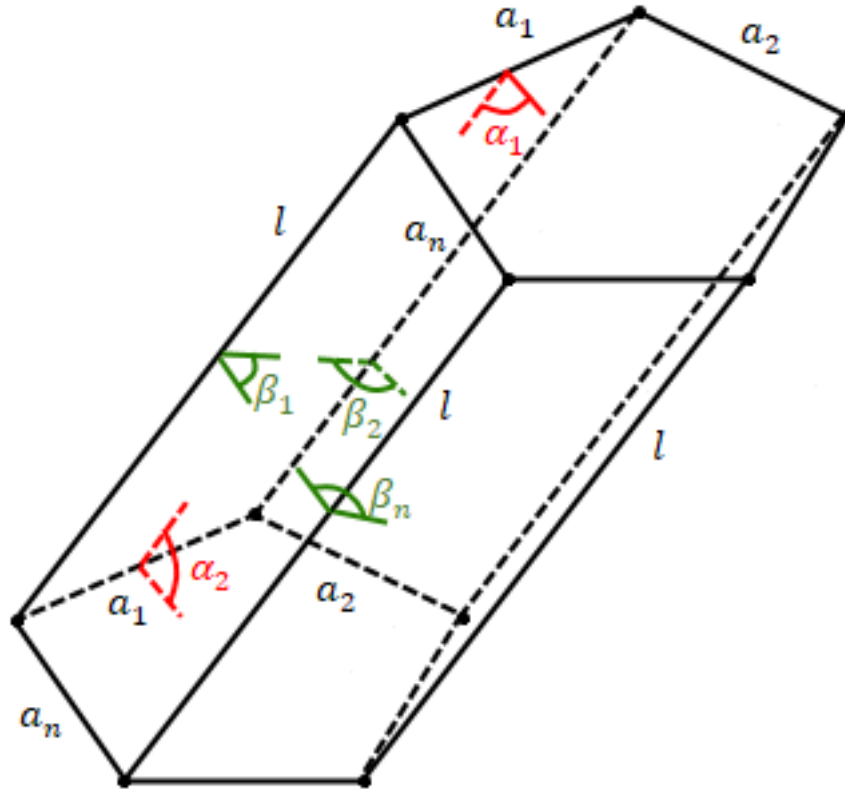


Рис. 39: Призма.

Сумма углов  $n$ -угольника равна  $\pi(n - 2)$ , поэтому

$$lf(\beta_1 + \dots + \beta_n) = lf(\pi(n - 2)) = l(n - 2)f(\pi) = 0.$$

Следовательно, для любой аддитивной функции инвариант Дена равен нулю.  $\square$

**Теорема** (Хадвигер). Пусть  $W_1, W_2$  — два многогранника,  $f$  — аддитивная функция, область определения которой включает число  $\pi$  и величины всех двугранных углов  $W_1, W_2$ . Пусть  $f(W_1) \neq f(W_2)$ . Тогда  $W_1, W_2$  не равносоставлены.

*Замечание.* Через эту теорему будем доказывать теорему Дена.

*Доказательство теоремы Дена.* Зададим некоторую аддитивную функцию, содержащую величины всех двугранных углов куба  $(\frac{\pi}{2})$  и правильного тетраэдра  $(\varphi = \arccos \frac{1}{3})$ , т.е. зададим функцию на множестве  $M = \{\frac{\pi}{2}, \pi, \arccos \frac{1}{3}\}$ . Так как по условию  $f(\pi) = 0$ , то и  $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Примем  $f(\varphi) = 1$ . Посчитаем значение инварианта Дена для этой аддитивной функции для куба и правильного тетраэдра:

$$f(\text{куб}) = 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$f(\text{тетраэдр}) = 6bf(\varphi) = 6b \neq 0.$$

Осталось проверить, что функция, которую мы задали, действительно будет аддитивной. Для любой зависимости вида

$$n_1\pi + n_2\varphi = 0$$

должно выполняться соотношение

$$n_1f(\pi) + n_2f(\varphi) = 0.$$

Так как  $f(\pi) = 0$ , а  $f(\varphi) \neq 0$ , это соотношение может быть выполнено только при  $n_2 = 0$ , иными словами, функция будет аддитивной, если не существует зависимостей вида  $n_1\pi + n_2\varphi = 0$  при  $n_2 \neq 0$ . Это равносильно следующему утверждению (на лекции был другой пример (вроде), но не суть):

**Лемма.** Число  $\frac{\varphi}{\pi}$  иррационально.

*Доказательство.* Пусть

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

— несократимая дробь. Пусть также

$$\cos \varphi = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

— несократимая дробь (в нашем случае  $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ ). Воспользуемся формулой косинуса двойного угла: если  $\cos \alpha = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$ , то

$$\cos 2\alpha = 2\frac{k^2}{l^2} - 1 = \frac{2k^2 - l^2}{l^2}$$

— НОД числителя и знаменателя равен 1 либо 2. Но при  $l > 2$  выполнено  $\frac{l^2}{2} > l$ . Поэтому в последовательности

$$\cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \dots, \cos 2^r \varphi, \dots$$

нет повторяющихся чисел (так как знаменатели дробей возрастают).

С другой стороны, в последовательности

$$\varphi, 2\varphi, 4\varphi, \dots, 2^r \varphi, \dots$$

будут углы, равные по модулю  $2\pi$ : действительно, если  $\varphi = \frac{p}{q}\pi$ , то в последовательности

$$\frac{p}{q}\pi, 2\frac{p}{q}\pi, 4\frac{p}{q}\pi, \dots, 2^r\frac{p}{q}\pi, \dots$$

может быть всего  $2q - 1$  различных числа (по модулю  $2\pi$ ), поэтому достаточно взять  $r = 2q$ .

Получили противоречие — у чисел, равных по модулю  $2\pi$ , косинусы должны быть равны, но в последовательности, содержащей косинусы этих чисел, нет одинаковых членов.  $\square$

Тем самым, лемма доказана, а значит, доказана и аддитивность  $f$ . Поэтому (по теореме Хадвигера) куб и правильный тетраэдр не равноставлены, и теорема Дена доказана.  $\square$

*Доказательство теоремы Хадвигера.*

**Лемма (1).** Пусть  $f$  — аддитивная функция, определённая на множестве  $M : \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin M$ . Тогда существует аддитивная функция  $\tilde{f}$ , определённая на  $M \cup \{\alpha\}$  такая, что  $\forall x \in M : f(x) = \tilde{f}(x)$

*Доказательство.* Будем считать, что  $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ .

1. Если нет зависимости вида

$$n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + m\gamma = 0,$$

где  $m \neq 0$ , то положим  $\tilde{f}(\gamma)$  равным любому числу.

2. Пусть есть зависимость вида

$$n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + m\gamma = 0,$$

где  $m \neq 0$ . Тогда положим

$$\tilde{f}(\gamma) = -\left(\frac{n_1}{m}\right)f(\alpha_1) - \dots - \left(\frac{n_k}{m}\right)f(\alpha_k).$$

Проверим, что тогда для любой зависимости вида

$$p_1\alpha_1 + \dots + p_k\alpha_k + l\gamma = 0$$

будет выполнено соотношение

$$p_1\tilde{f}(\alpha_1) + \dots + p_k\tilde{f}(\alpha_k) + l\tilde{f}(\gamma) = 0.$$

Получим

$$\begin{aligned} (n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + m\gamma)l - (p_1\alpha_1 + \dots + p_k\alpha_k + l\gamma)m = \\ = (n_1l - p_1m)\alpha_1 + \dots + (n_kl - p_km)\alpha_k = 0 \end{aligned}$$

— зависимость на  $M$ . Так как  $f$  — аддитивная функция на  $M$ , то получаем, что выполнено соотношение

$$(n_1 l - p_1 m) f(\alpha_1) + \cdots + (n_k l - p_k m) f(\alpha_k) = 0,$$

откуда

$$l(n_1 f(\alpha_1) + \cdots + n_k f(\alpha_k)) - m(p_1 f(\alpha_1) + \cdots + p_k f(\alpha_k)) = 0.$$

Так как

$$n_1 f(\alpha_1) + \cdots + n_k f(\alpha_k) = -m \tilde{f}(\gamma),$$

получаем

$$-lm \tilde{f}(\gamma) - m(p_1 f(\alpha_1) + \cdots + p_k f(\alpha_k)) = 0.$$

Сокращая на  $m$  и меняя знак, получаем

$$p_1 \tilde{f}(\alpha_1) + \cdots + p_k \tilde{f}(\alpha_k) + l \tilde{f}(\gamma) = 0,$$

что и требовалось. □

**Лемма (2).** Пусть  $W$  — многогранник, состоящий (разбитый в объединение непересекающихся) из многогранников  $P_1, \dots, P_k$ .  $f$  — аддитивная функция, определённая на  $\pi$  и всех двугранных углах многогранников  $W, P_1, \dots, P_k$ . Тогда  $f(W) = \sum f(P_i)$ .

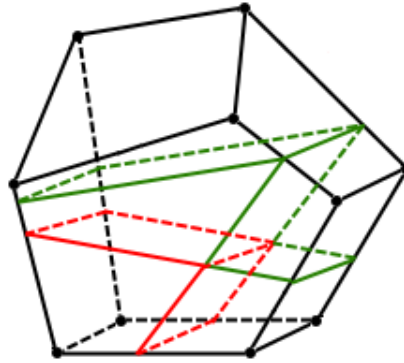


Рис. 40: Многогранник  $A$  состоит из многогранников  $P_1, \dots, P_k$ .

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение рёбер многогранников  $P_1, \dots, P_k$  на «звенья», заданное вершинами этих многогранников и точками пересечения рёбер.

Рассмотрим сумму

$$\sum_i c_i f(\alpha_j)$$



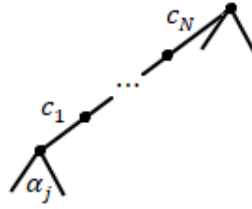


Рис. 41: Разбиение ребра на звенья.

по всем звеньям, получившимся при разбиении многогранника  $A$  на многогранники  $P_1, \dots, P_k$ , и всем двугранным углам при этих звеньях.

С одной стороны, эта сумма равна сумме инвариантов Дена для всех многогранников  $P_1, \dots, P_k$ , так как

$$c_1 f(\alpha_j) + \dots + c_N f(\alpha_j) = l f(\alpha_j),$$

где  $l$  — длина некоторого ребра какого-то из многогранников  $P_1, \dots, P_k$ , а  $\alpha_j$  — двугранный угол при этом ребре. Суммируя по всем звеньям, принадлежащим этому многограннику, получим значение инварианта Дена для этого многогранника. Поступая так для каждого многогранника  $P_1, \dots, P_k$ , получим

$$\sum_i c_i f(\alpha_j) = f(P_1) + \dots + f(P_k).$$

С другой стороны, все звенья можно разбить на три класса:

1. звено внутри  $A$ ;
2. звено на грани  $A$ ;
3. звено на ребре  $A$ .

1. Подсчитаем, какой вклад в сумму будут давать звенья, лежащие внутри  $A$ : Возможны два случая:

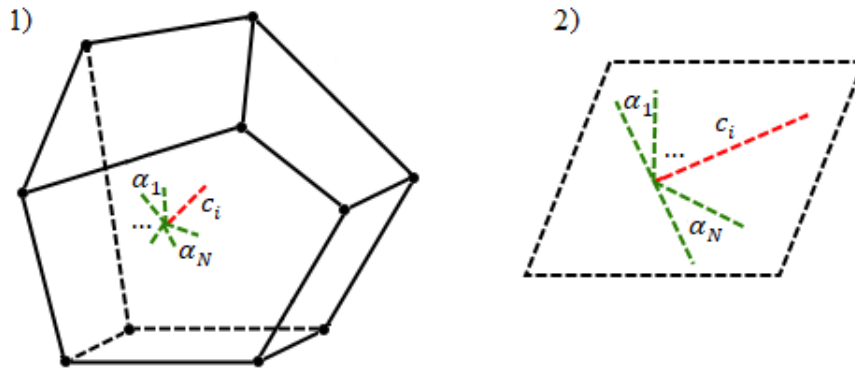


Рис. 42: Звено  $c_i$  лежит внутри многогранника.

- (а) когда звено не лежит на грани другого многогранника (см.рис.42), тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 2\pi;$$

- (b) когда звено лежит на грани другого многогранника (см.рис.42), тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \pi.$$

Так как

$$f(\pi) = f(2\pi) = 0,$$

получаем (из аддитивности функции), что

$$c_i \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) = 0.$$

2. Подсчитаем, какой вклад в сумму будут давать звенья, лежащие на грани  $A$ : В этом случае

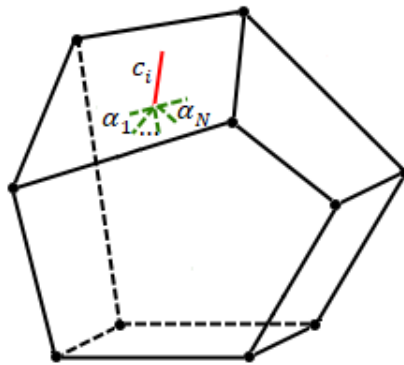


Рис. 43: Звено  $c_i$  лежит на грани многогранника.

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \pi,$$

и (по тем же соображениям, что и в первом пункте)

$$c_i \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) = 0.$$

3. Подсчитаем, какой вклад в сумму будут давать звенья, лежащие на ребре  $A$ : В зависимости от величины двугранного угла  $\beta$  при ребре, на котором лежит рассматриваемое звено, получаем два случая (в зависимости от того, больше или меньше  $\beta$  развёрнутого угла):

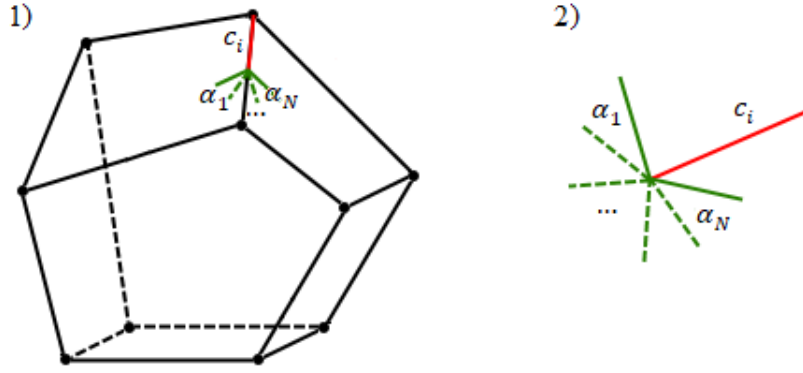


Рис. 44: Звено  $c_i$  лежит на ребре многогранника.

(a)  $\beta < \pi$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \beta.$$

(b)  $\beta > \pi$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = \beta - \pi.$$

Из условия  $f(\pi) = 0$  и условия аддитивности функции, получаем

$$c_i \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) = c_i f(\beta).$$

Суммируя по всем звеньям этого ребра, мы получим  $lf(\beta)$ , где  $l$  — длина ребра:

$$\sum_i c_i f(\beta) = lf(\beta).$$

Суммируя по всем рёбрам многогранника  $A$ , получим  $f(A)$

$$\sum_i l_i f(\beta_i) = f(A).$$

Таким образом, верно равенство

$$f(A) = f(P_1) + \dots + f(P_k).$$

□

*Замечание.* Из лемм (1)-(2) будет следовать теорема Хадвигера.

□

**Теорема** (Сидлер). Пусть для двух равновеликих многогранников все инварианты Дена равны, то есть для любой аддитивной функции, определённой на их двугранных углах и числе  $\pi$ , выполнено  $f(\pi) = 0$ ,  $f(w_1) = f(w_2) \Rightarrow w_1, w_2$  равноставлены.

*Доказательство.* Кажется, было без доказательства. □

### 3.6 Третья проблема Гильберта

**Определение.** Два равновеликих многогранника  $A, B$  называются *равнодополняемыми*, если существуют два равноставленных многогранника  $W_A, W_B$ , для которых существуют разбиения  $W_A = \bigcup_{i=1}^k P_i \cup A$ ,  $W_B = \bigcup P_i \cup B$ , где  $P_i$  — многогранники.

**Теорема** (3-я проблема Гильберта). Существуют ли не равнодополняемые тетраэдры с равными основаниями и высотами?

**Утверждение.** Если многогранники  $A, B$  равнодополняемые, то их инварианты Дена равны.

*Доказательство.*  $f(W_A) = f(W_B)$ , где

$$f(W_A) = f(A) + \sum_{i=1}^k f(P_i) = f(B) + \sum_{i=1}^k f(P_i) = f(W_B)$$

□

**Определение.** Координатный тетраэдр — тетраэдр с вершинами с координатами  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  или подобный ему.

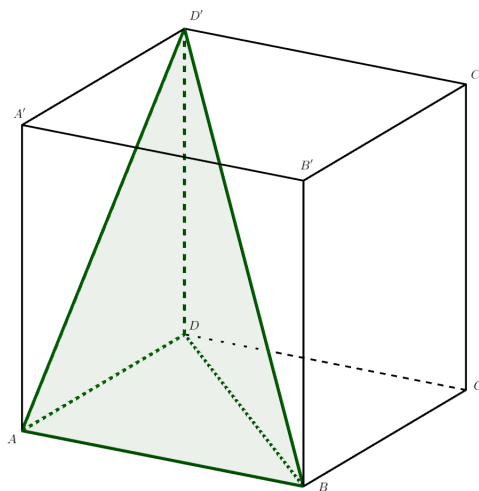


Рис. 45: Тетраэдр Хилла.

**Определение.** Тетраэдр Хилла — тетраэдр, у которого основание — равнобедренный прямоугольный треугольник, высота равна катету основания и падает в один из концов гипотенузы основания.

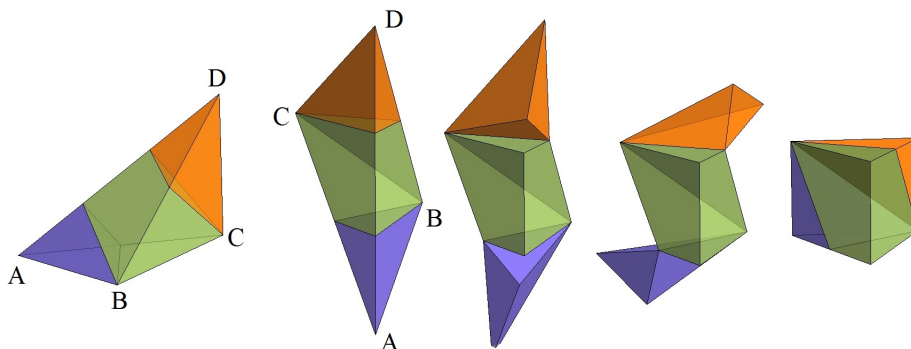


Рис. 46: Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой

**Утверждение.** *Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой.*

*Доказательство.* См.рис.46. □

**Утверждение.** *Каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.*

*Доказательство.* Данное утверждение — следствие утверждения, которое было только что, и теоремы о равнодополняемых многогранниках.

У тетраэдра Хилла каждый инвариант Дена такой же, как и у призмы. Так как каждый инвариант Дена для призмы равен нулю, то и для тетраэдра Хилла он также равен нулю. □

**Утверждение.** *У координатного тетраэдра имеется ненулевой инвариант Дена.*

*Доказательство.* Обозначим через  $\alpha$  величину двугранного угла при рёбрах грани, являющейся правильным треугольником. Тогда  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ . Число  $\frac{1}{\pi} \arccos 1/\sqrt{3}$  иррационально. Отсюда следует, что множество  $\{\alpha, \pi/2, \pi\}$  не имеет зависимостей, в которые  $\alpha$  входит с ненулевым коэффициентом.

Поэтому, положив  $f(\alpha) = 1$ ,  $f(\pi/2) = 0$ ,  $f(\pi) = 0$ , получим функцию Дена для координатного тетраэдра. Соответствующий ей инвариант Дена не равен нулю. □

**Утверждение** (Решение третьей проблемы Гильберта). *Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр не равносоставлены, а также не равнодополняемы.*

*Доказательство.* Пусть  $f$  — функция Дена, построенная в доказательстве выше. Тогда её значения на координатном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим  $f$  до функции Дена для тетраэдра Хилла. Однако любой инвариант Дена для тетраэдра Хилла равен нулю. Следовательно, тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр не являются равнодополняемыми.  $\square$

## 4 Многообразия

**Определение.** Пусть  $X$  — топологическое пространство. Пусть  $B$  — семейство его открытых подмножеств такое, что любое открытое множество в  $X$  есть объединение множеств из  $B$ .  $B$  называется *базой топологии*.

**Определение.** Хаусдорфово топологическое пространство называется *двумерным* ( $n$ -мерным) *многообразием*, если оно имеет счётную базу, и у любой точки существует окрестность, гомеоморфная открытому двумерному ( $n$ -мерному) диску.

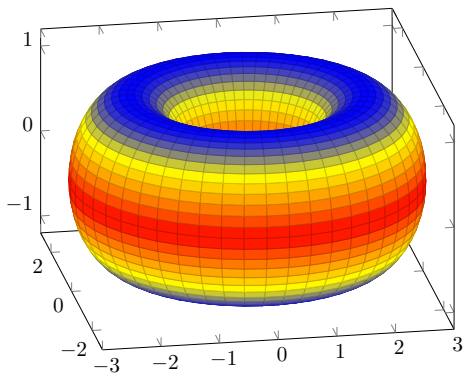
*Замечание.* По сути, мы задали определение  $n$ -мерного многообразия *без края*.  $n$ -мерное многообразие *с краем* — это хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, в котором каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству замкнутого полупространства в  $\mathbb{R}^n$  (полукругу, то есть).

*Замечание.* Точки, которые имеют открытую окрестность, гомеоморфную открытому двумерному диску, будем называть *внутренними*, а множество всех таких точек — *внутренностью многообразия*.

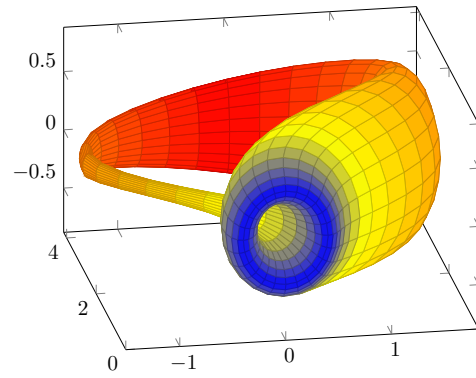
### 4.1 Классификация двумерных связных компактных многообразий

Примеры:

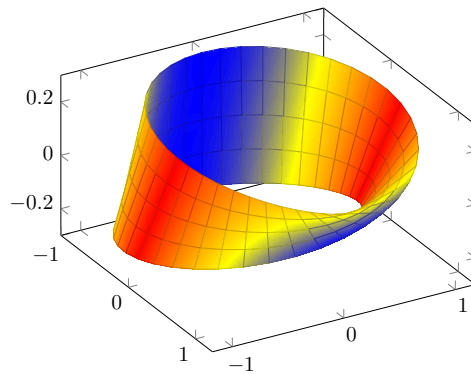
1.  $\mathbb{R}^2$  — плоскость — не компактна, без края;
2. Сфера — компактна, без края;
3. Тор (см.рис.47a) — компактен, без края;
4. Бутылка Клейна (см.рис.47b) — компактна, без края;
5. Проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$  — компактна, без края;
6. Диск — компактен, с краем;
7. Цилиндр без крышки — компактен, с краем;
8. Лист Мёбиуса (см.рис.47c) — с краем;



(a) Тор.



(b) Бутылка Клейна.



(c) Лента Мёбиуса.

Рис. 47: Примеры двумерных многообразий.

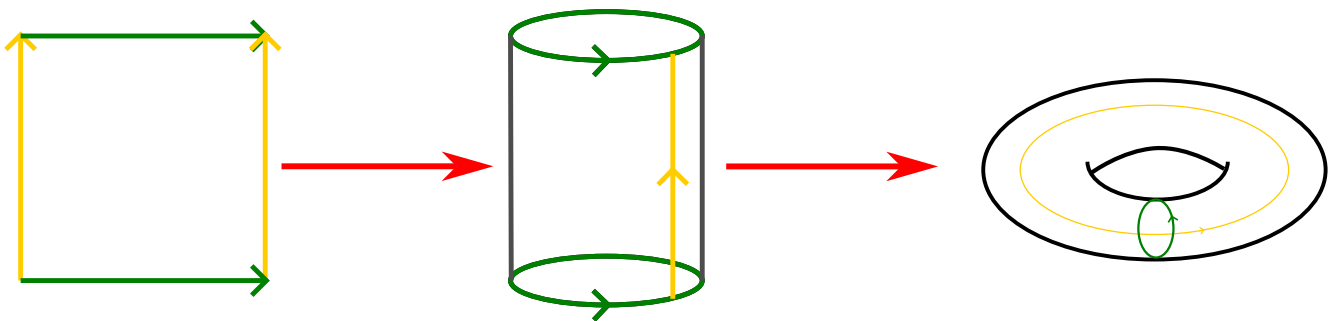


Рис. 48: Склейка тора.

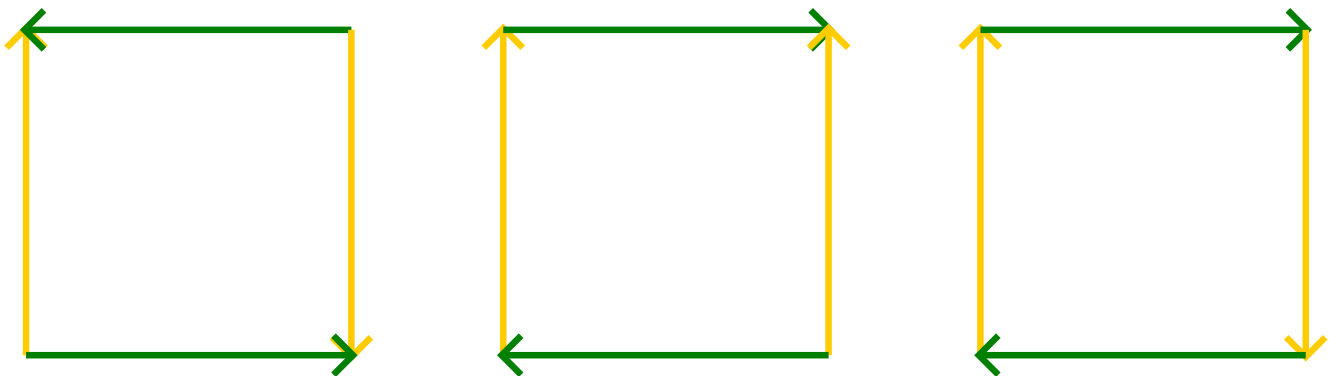


Рис. 49: Склейка сферы, бутылки Клейна и проективной плоскости (слева направо).



Существует способ описания двумерных многообразий с помощью склейки каких-то кусочков плоскости, как на рисунках 48 и 49.

Некоторые замечания по поводу проективной плоскости. Рассмотрим модель проективной плоскости. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что точками на проективной плоскости можно называть все прямые в  $\mathbb{R}^3$ , проходящие через начало координат. Тогда рассмотрим сферу произвольного радиуса с центром в начале координат и отождествим точки пересечения с одной прямой. Скажем, что проективная плоскость — это множество пар диаметрально противоположных точек на сфере. Сфера, у которой отождествили противоположные точки — это то же самое, что и полусфера, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки на границе. Но с топологической точки зрения такая полусфера и двумерный диск, у которого отождествлены точки на границе — это одно и то же. Склейка противоположных точек на границе диска соответствует склейке квадрата (см.рис.49).

Имея склейку, мы можем охарактеризовать двумерное многообразие словом. Начиная с какой-то точки будем идти по границе склейки и и выписывать встречающиеся буквы (выше обозначалось цветом, но это было только для наглядности (да кого я обманываю, мне просто было лень заморачиваться ещё и над гарнитурами)). Если направление стрелки совпадает с направлением обхода, то записываем букву как есть, иначе — записываем как бы в минус первой степени (см.рис.50).

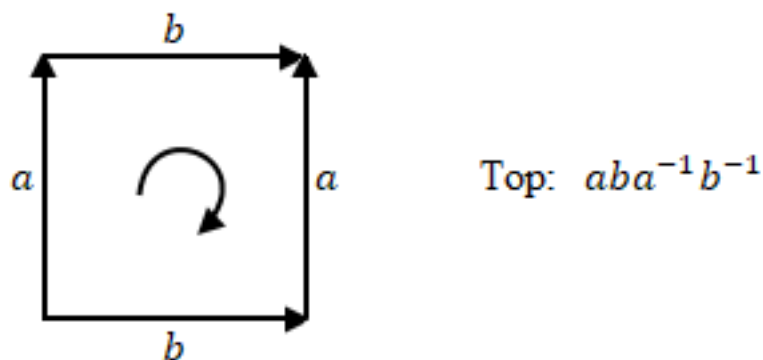


Рис. 50: Склейка тора из квадрата.

Слово задаётся неоднозначно, но по нему можно однозначно построить многообразие.

Можно обобщить данный метод на любой  $2k$ -угольник, у которого стороны помечены буквами и каждая буква встречается ровно 2 раза.

В результате склейки такого многоугольника мы получим двумерное многообразие (после склейки у каждой точки окрестность будет гомеоморфна диску).

Далее наша задача будет состоять в том, чтобы классифицировать все компактные связные двумерные многообразия с помощью таких слов. Итак,

**Теорема.** Любое связное компактное двумерное многообразие  $X$  гомеоморфно многообразию, полученному склейкой сторон многоугольника по одному из следующих слов:

1.  $aa^{-1}$ ;
2.  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ ,  $n \geq 1$ ;
3.  $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ma_m$ ,  $m \geq 1$ .

Прежде чем доказывать данную теорему, введём следующие определения:

**Определение.** Топологический треугольник в многообразии  $X$  — некоторое подмножество, которое гомеоморфно треугольнику на плоскости со структурой вершины-стороны (см.рис.51)

**Определение.** Триангуляция двумерного многообразия  $X$  — это представление  $X$  в виде объединения топологических треугольников с условием на их пересечение: два топологических треугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по вершине, либо пересекаются по стороне.

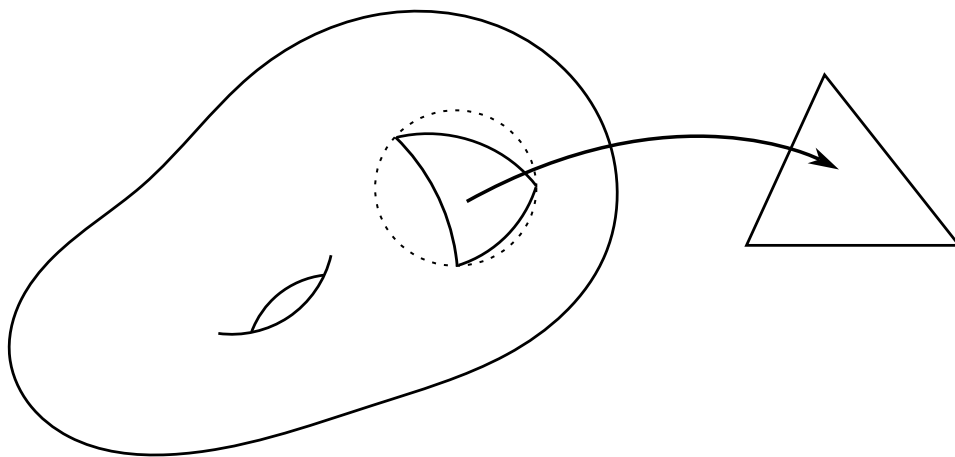


Рис. 51: К определению триангуляции.

**Доказательство.** Мы будем классифицировать такие двумерные многообразия без края, для которых существует конечная триангуляция.

**Первый этап доказательства.** Существование многоугольника, задающего многообразие. Рассмотрим на  $X$  конечную триангуляцию. Разрежем  $X$  на

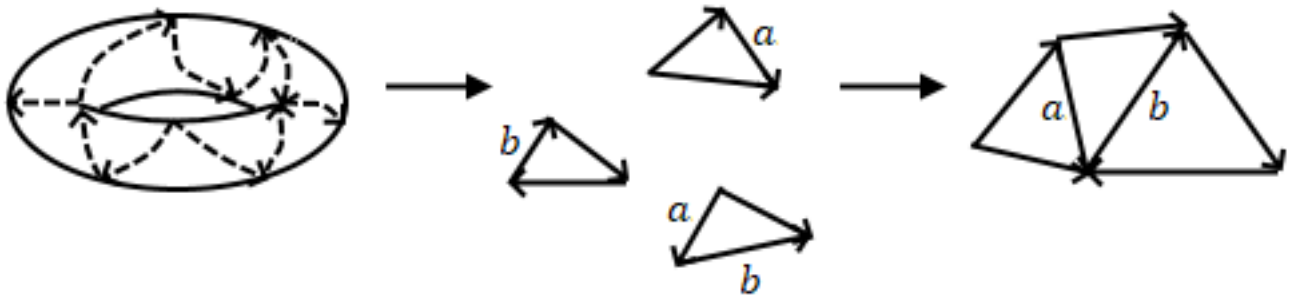


Рис. 52: Построение многоугольника из двумерного многообразия.

треугольники, помечая их стороны разными буквами и стрелками, чтобы получить набор треугольников, каждая сторона которых помечена буквой и выбрано направление, причём каждая буква будет встречаться ровно два раза.

Поскольку  $X$  связно, у нас будет конечное количество треугольников (действительно, если мы не можем приклеить треугольник, тогда мы получили многоугольник, на границе которого каждая буква встречается ровно два раза — склеив соответствующие стороны, получим связное двумерное многообразие, а из оставшихся склеим что-то ещё — противоречие с изначальной связностью множества), которые мы будем собирать вместе, приклеивая к уже полученному многоугольнику. В результате получим многоугольник, результатом склейки сторон которого будет многообразие  $X$ .

Теперь нам надо поменять слово, которое задаёт этот многоугольник таким образом, чтобы привести его к одному из канонических видов.

**Второй этап доказательства.** Алгоритм изменения слова до канонического вида.

1. Вычёркивание фрагмента вида  $\dots aa^{-1} \dots$ : Если в слове есть фрагмент  $\dots aa^{-1} \dots$  (причём  $aa^{-1}$  — это не всё слово), то вычёркиваем его. Действительно, после склейки фрагмент слова  $aa^{-1}$  пропадёт

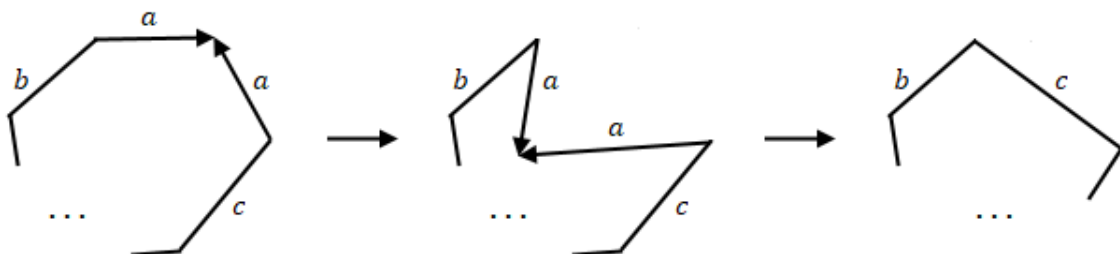


Рис. 53: Вычёркивание фрагмента вида  $\dots aa^{-1} \dots$ .

2. Приведение к одной вершине: Пометим все вершины многоугольника буквами  $(A, B, \dots)$ , которые соответствуют этим вершинам после склейки.

Пусть не все вершины многоугольника склеиваются в одну, тогда есть сторона многоугольника, концы которой не склеиваются, то есть принадлежат разным классам. Пометим эту сторону буквой  $a$ . Тогда соседняя сторона может быть помечена буквой  $b \neq a$  (случай  $\dots aa \dots$  невозможен, потому что мы предположили, что вершины  $A$  и  $B$  не склеиваются, а случай  $\dots aa^{-1} \dots$  исключён по первому пункту).

Найдём в многоугольнике вторую сторону, помеченную буквой  $b$ . Теперьотрежем помеченный треугольник и приклеим его к стороне  $b$  так, как показано на рис.54.

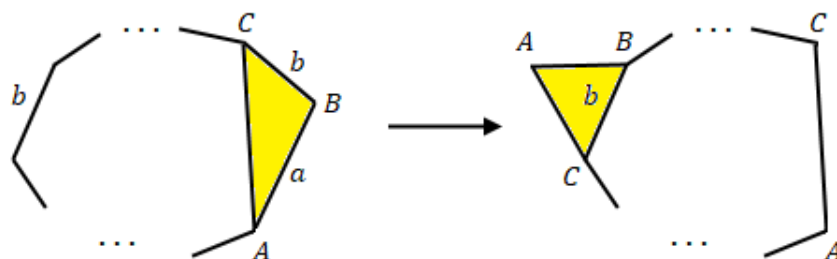


Рис. 54: Уменьшение вершин класса  $B$ .

В результате вершин класса  $B$  стало на одну меньше, а вершин класса  $A$  на одну больше (несложно понять, что если вершина какого-то класса останется одна, то склеятся рёбра, подходящие к этой вершине, и она уничтожится). Будем повторять данную операцию до тех пор, пока не останется один класс вершин, то есть все вершины многогранника будут склеиваться в одну.

3. Собираем вместе пары вида  $\dots a \dots a \dots$ . Если на границе многоугольника есть две стороны, помеченные одинаковой буквой так, что направление обхода сторон одинаковое относительно обхода границы многоугольника, то разрежем многоугольник так, как показано на рис.55 и склеим по стороне  $a$ .

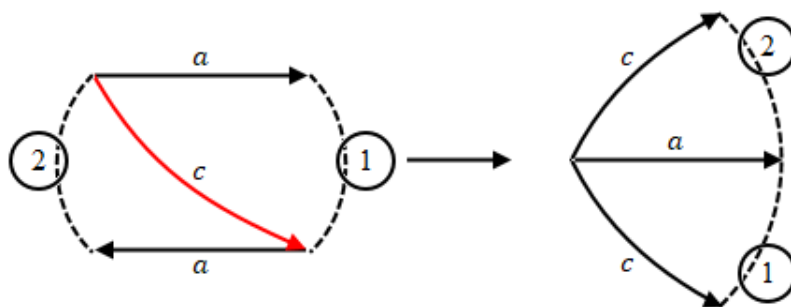


Рис. 55: Склейка многоугольника по стороне  $a$ .

Теперь два ребра, помеченные одной буквой, стоят рядом. Будем совершать эту операцию до тех пор, пока в слове есть две одинаковые буквы (в одинаковых степенях), не стоящие рядом.

Если на этом этапе мы получили слово вида  $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ma_m$ , то пришли к одному из канонических видов. Иначе:

4. Собираем вместе четвёрки  $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$ . Если после шага 2 есть буквы, входящие в слово как  $\dots b \dots$  и  $\dots b^{-1} \dots$ , тогда две стороны, помеченные одинаковой буквой, расположенные так, как показано на рис.56, лежащие в разных частях (есть ещё пара  $a$  и  $a^{-1}$ , причём в слове они встречаются так:  $\dots b \dots a \dots b^{-1} \dots a^{-1} \dots$ ).

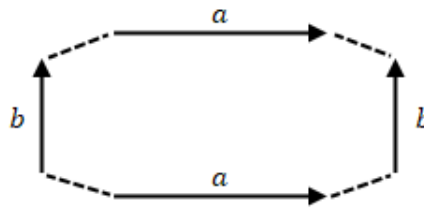


Рис. 56: Четвёрка  $bab^{-1}a^{-1}$ .

Действительно, не может быть так, чтобы стороны из частей, на которые границу многоугольника делят  $b$  и  $b^{-1}$ , склеивались только между собой — в этом случае вершины из этих частей склеивались бы только между собой, а это противоречит шагу 1 (приведение к одной вершине).

При этом рёбра, помеченные буквой  $a$ , расположены так, как показано на рис.56 — если у одной из стрелок поменять направление, то получим два ребра, которые направлены в одну сторону относительно обхода границы многоугольника, а это противоречит шагу 2.

Собираем четвёрки  $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$  вместе следующим образом. Сначала проведём разрез  $x$  как показано на рис.57 и склеим по стороне  $b$ .

Теперь проведём разрез  $y$  и склеим по стороне  $a$  (см.рис.58).

Получаем  $y^{-1}x^{-1}yx$ . Переобозначая направление стрелок, получим что требовалось. Фрагменты 1, 2, 3, 4 направлены так же, как и до переклеек, что гарантирует нам то, что при переклейках мы ничего не испортили (не нужно запускать шаг 2).

После этого шага алгоритма либо мы получили канонический вид

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1},$$

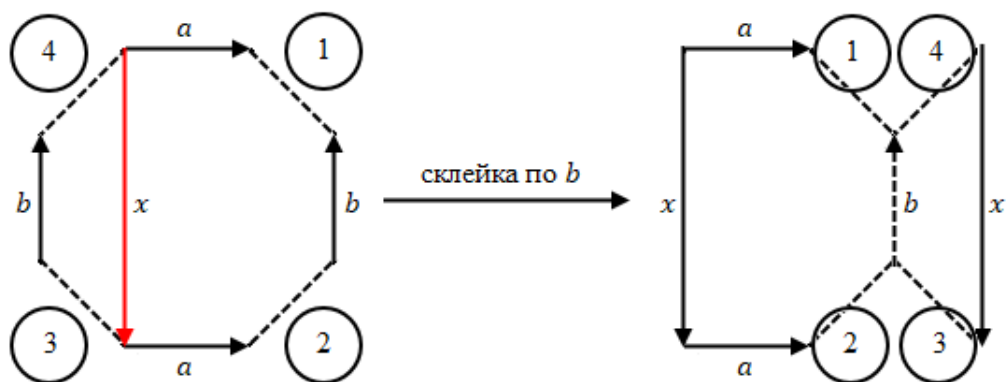


Рис. 57: Склейка многоугольника по стороне  $b$ .

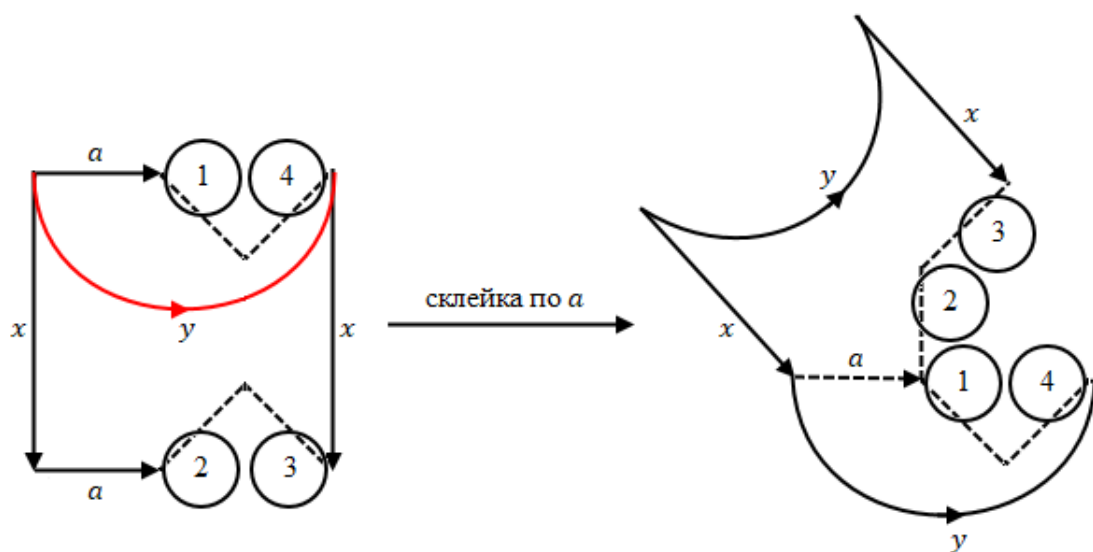


Рис. 58: Склейка многоугольника по стороне  $a$ .

либо в полученном слове есть фрагменты вида

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

и

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_m a_m,$$

причём они стоят рядом.

5. Если в слове есть фрагменты вида  $\dots aa \dots$  и  $\dots xux^{-1}y^{-1} \dots$ . Проведём разрез  $b$  и склеим по стороне  $a$  (см.рис.59).

Теперь проведём разрез  $p$  и склеим по стороне  $x$  (см.рис.60).

Далее проведём разрез  $q$  и склеим по стороне  $y$  (см.рис.61).

Наконец сделаем разрез  $z$  и склеим по стороне  $b$  (см.рис.62).

Вместо пары фрагментов  $\dots aa \dots$  и  $\dots xux^{-1}y^{-1} \dots$  возникли фрагменты  $\dots zz \dots$  и  $\dots prrq \dots$ . Таким образом, пока есть пары фрагментов вида  $\dots aa \dots$  и  $\dots xux^{-1}y^{-1} \dots$ , мы можем совершать эту операцию, после

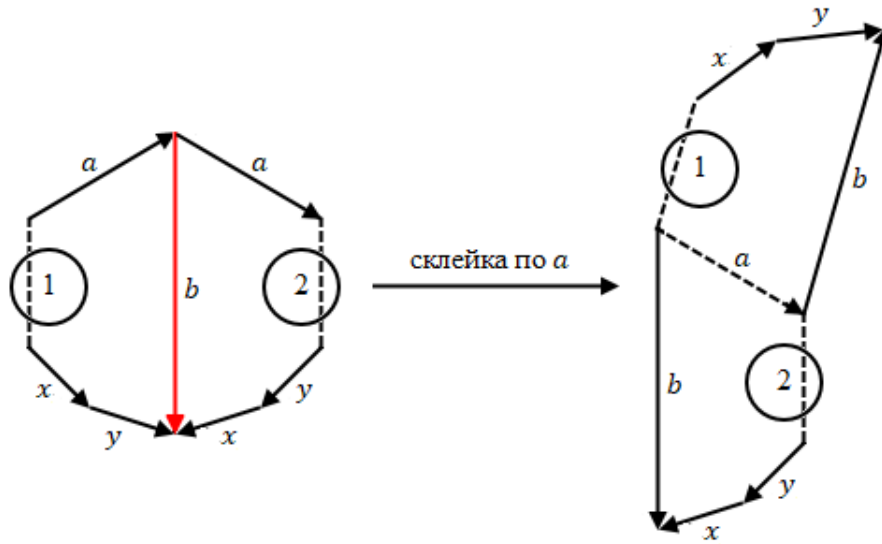


Рис. 59: Склейка многоугольника по  $a$ .

которой фрагмент  $xux^{-1}y^{-1}$  уничтожается. В результате мы придём к каноническому слову  $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ma_m$ .

□

*Замечание.* Многообразия, принадлежащие различным сериям, не гомеоморфны между собой. Также не гомеоморфны между собой многообразия из одной серии при различных  $n$ .

#### 4.1.1 Эйлерова характеристика многообразий

*Замечание.* Хотя теорема и доказана, но может возникнуть ситуация, когда разными словами представлены одни и те же многообразия. Для проверки того, что доказанная теорема действительно является теоремой классификации, нужно использовать характеристики, которые одинаковы для гомеоморфных многообразий.

**Определение.** Для двумерного многообразия  $X$  с данной триангуляцией число

$$B - P + \Gamma = \chi(X)$$

называется *эйлеровой характеристикой*  $X$ , где  $B$  — число вершин триангуляции,  $P$  — число рёбер триангуляции,  $\Gamma$  — число треугольников триангуляции.

**Теорема.** Число  $\chi(X)$  не зависит от триангуляции.

*Доказательство.* Полноценное доказательство слишком затруднительно. Нужно доказать, что для любых двух триангуляций многообразия число  $B - P + \Gamma$

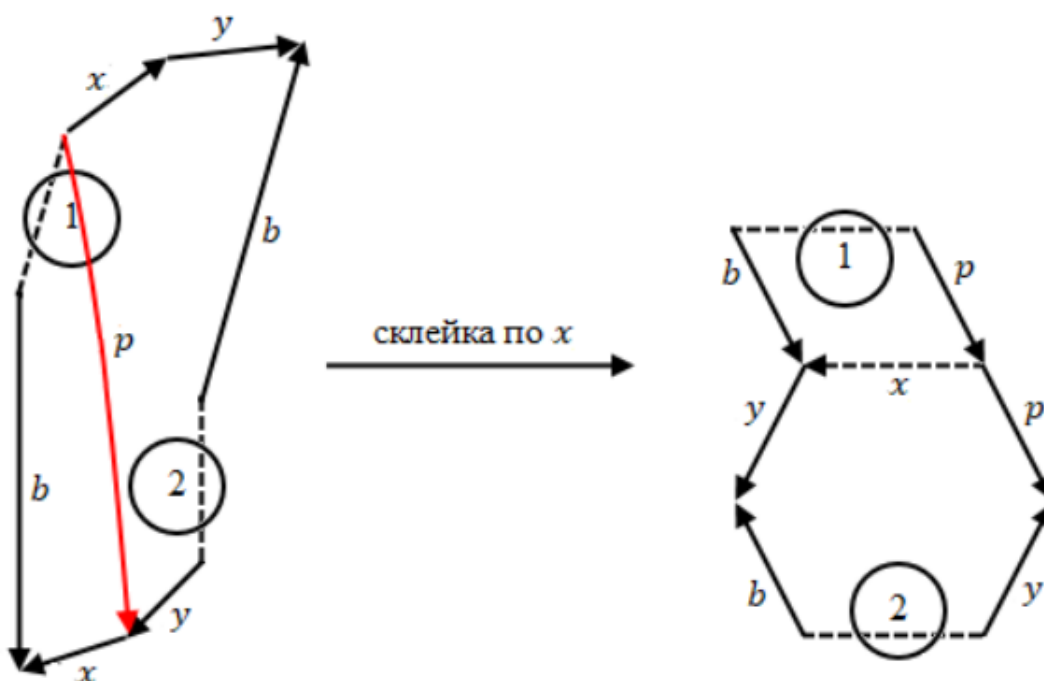


Рис. 60: Склейка многоугольника по стороне  $x$ .

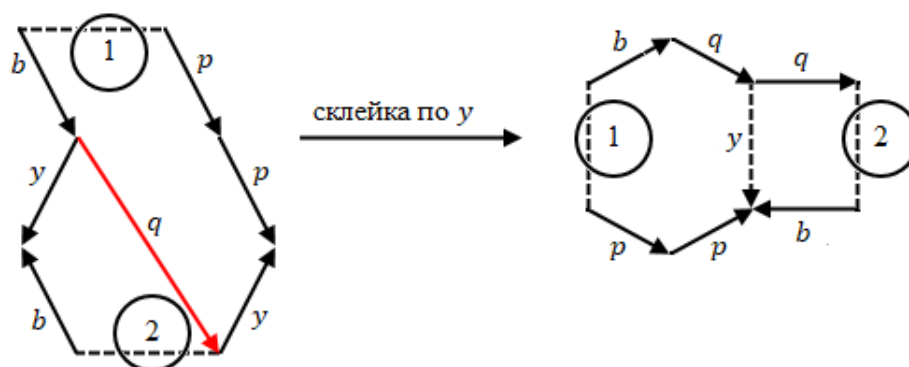


Рис. 61: Склейка многоугольника по стороне  $y$ .

одинаково. Для простых триангуляций, подобных тем, что изображены на рисунке 63, доказать несложно — достаточно рассмотреть рёбра обеих триангуляций и подразбить, если требуется, треугольники на более мелкие (измельчить триангуляцию) так, чтобы новая триангуляция была измельчением уже существующих. Однако если рёбра триангуляций — произвольные кривые (например,  $\sin \frac{1}{x}$ ), такое рассуждение не годится.

□

Если эйлерова характеристика двух многообразий различна, то эти многообразия не гомеоморфны. Вычислим эйлерову характеристику для многообразий из списка в теореме.

Для сферы  $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$  (мы уже вычисляли эйлерову характеристику сферы, так как рёбра триангуляции можно рассматривать как граф на сфере). В



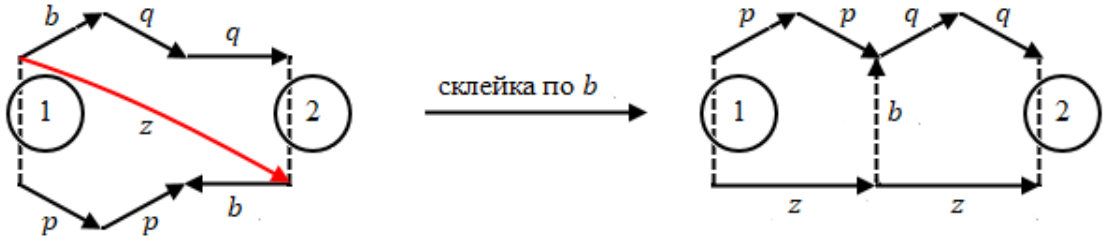


Рис. 62: Склейка многоугольника по стороне  $b$ .

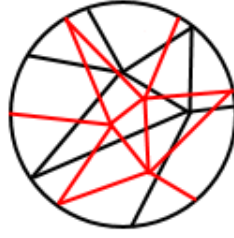


Рис. 63: Различные триангуляции многообразия.

качестве поверхности, гомеоморфной сфере, можно рассмотреть произвольный выпуклый многогранник, например, тетраэдр.

Рассмотрим триангуляцию поверхности, получающейся склейкой сторон  $2k$ -угольника (будем считать, что триангуляция получилась разбиением многоугольника на треугольники, многоугольник приведён к каноническому виду).

Число вершин у триангуляции многоугольника и число вершин у триангуляции поверхности будет разным. Пусть у триангуляции многоугольника  $B'$  вершин,  $P'$  рёбер и  $\Gamma'$  треугольников. Тогда после склейки получим (так как все вершины многоугольника склеиваются в одну, стороны многоугольника склеиваются попарно, количество треугольников триангуляции не изменится):

$$B = B' - (2k - 1),$$

$$P = P' - k,$$

$$\Gamma = \Gamma'$$

Триангуляцию многоугольника можно рассматривать как плоский граф. Мы знаем, что

$$B' - P' + \Gamma' = 1,$$

так как  $\Gamma'$  — число компонент на 1 больше, чем количество треугольников триангуляции). Отсюда получаем

$$\chi(X) = B - P + \Gamma = B' - (2k - 1) - (P' - k) + \Gamma' = B' - P' + \Gamma' - k + 1 = 2 - k.$$

В случае  $k = 2n$  получаем

$$\chi(X) = 2 - 2n.$$

В случае  $k = m$  получаем

$$\chi(X) = 2 - m.$$

Итак, действительно, эйлерова характеристика оказалась различной для любых двух многообразий из одной серии, но в разных сериях есть многообразия с одинаковой эйлеровой характеристикой.

В будущем, быть может, здесь появится что-то про различные методы вычисления эйлеровой характеристики.

#### 4.1.2 Ориентируемость многообразий

Используя триангуляцию, ориентируемость можно определить так: будем на каждом треугольнике выбирать некоторую ориентацию (направление обхода его границы), со следующим условием: если треугольники имеют общую сторону, то направление обхода, индуцированное обходом границы треугольника на этой (общей) стороне должно быть разным.



Рис. 64: Согласованная ориентация треугольников триангуляции.

Такие треугольники (см.рис.64) будем называть согласованно ориентированными.

**Определение.** Многообразие называется *ориентируемым*, если на треугольниках его триангуляции можно ввести согласованную ориентацию.

**Утверждение.** Свойство поверхности двумерного многообразия быть ориентируемым или неориентируемым не зависит от триангуляции.

*Доказательство.* Без доказательства. □

Пример неориентируемого многообразия: лист Мёбиуса (47с). Это многообразие с краем. Зададим лист Мёбиуса в виде склейки прямоугольника и разобьём каким-либо образом этот прямоугольник на треугольники. После выбора на произвольном треугольнике направления обхода, на соседних треугольниках направление обхода границы задаётся однозначно. Как бы мы ни выбрали

направление обхода при склейке листа Мёбиуса из прямоугольника по одной стороне, нам не удастся согласовать ориентацию на треугольниках, содержащих эту сторону.

Аналогичная ситуация в общем случае — выбрав направление обхода на одном треугольнике, мы однозначно ориентируем все остальные треугольники триангуляции (если поверхность связная). На плоскости (до склейки) это означает, что у всех треугольников будет направление обхода по или против часовой стрелки.

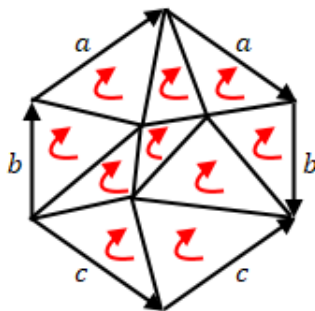


Рис. 65: Задание ориентации поверхности.

Несложно увидеть, что для всех сторон треугольников, находящихся внутри многоугольника, условие согласованности выполнено. Остаётся проверить (как и в случае с лентой Мёбиуса), согласована ли ориентация треугольников по сторонам многоугольника.

Отсюда следует, что понять, будет ли поверхность ориентируемой, можно по слову, которое её задаёт: если в слове есть пара одинаковых букв, встречающихся в одинаковых степенях, то задать ориентацию на поверхности не получится, а если все одинаковые буквы встречаются в разных степенях, то поверхность ориентируема.

Теперь можем дополнить классификацию: многообразия из первой и третьей серий ориентируемы, а из второй — неориентируемы.

**Утверждение.** *Двумерное многообразие неориентируемо тогда и только тогда, когда оно содержит лист Мёбиуса.*

### 4.1.3 Связные суммы и продолжение классификации

**Определение.** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — компактные связные двумерные многообразия. Вырежем диски в многообразии  $M_1$  и в многообразии  $M_2$ , и полученные окружности в  $M_1$  и  $M_2$  склеим по какому-то гомеоморфизму. Получим новое многообразие

$$M = M_1 \# M_2$$

— связная сумма многообразий  $M_1$  и  $M_2$ .

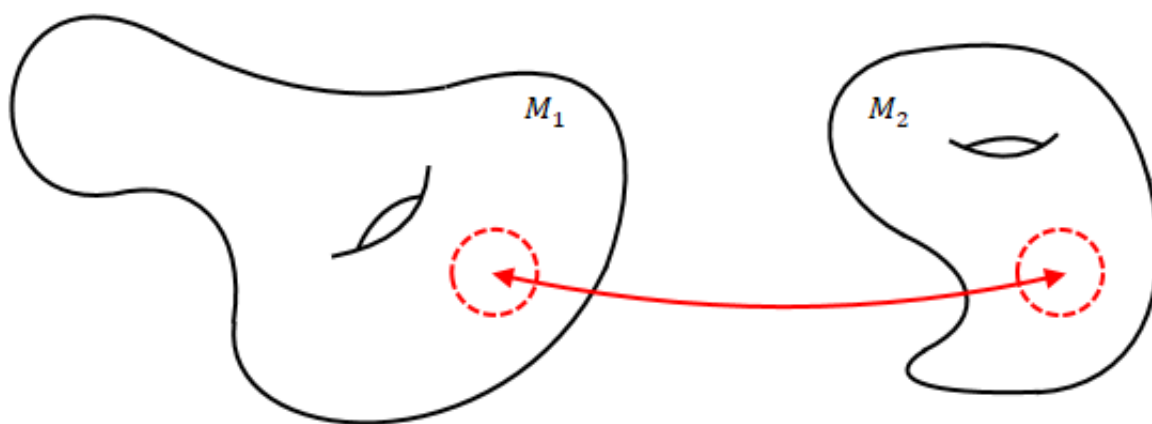


Рис. 66: Связная сумма двух многообразий.

Корректность определения: проверим, что после склейки получится двумерное многообразие (то есть, что после склейки окрестность каждой точки будет гомеоморфна двумерному диску). Окрестности точек, далёких от места склейки, не изменятся, нужно проверить, окрестности точек, которые принадлежат окружностям, по которым мы склеиваем многообразия: действительно, после склейки окрестности точек окружностей будут гомеоморфны двумерному диску. Также необходимо проверить, что результат операции не зависит от выбора вырезаемых дисков.

**Теорема.** Любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно одному из следующих:

1.  $S^2$ ;
2.  $T \# \dots \# T$ , где  $T$  — тор;
3.  $RP^2 \# \dots \# RP^2$ .

*Доказательство.*

*Замечание.* Для любого двумерного многообразия  $X$  выполнено

$$X \# S^2 = X,$$

поэтому можно сказать, что любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно одному из следующих:

1.  $T \# \dots \# T \# S^2$
2.  $RP^2 \# \dots \# RP^2$ .

Рассмотрим процесс взятия связной суммы для многообразий, представленных в виде склейки многоугольников. Пример (два тора, склеенных из квадрата):

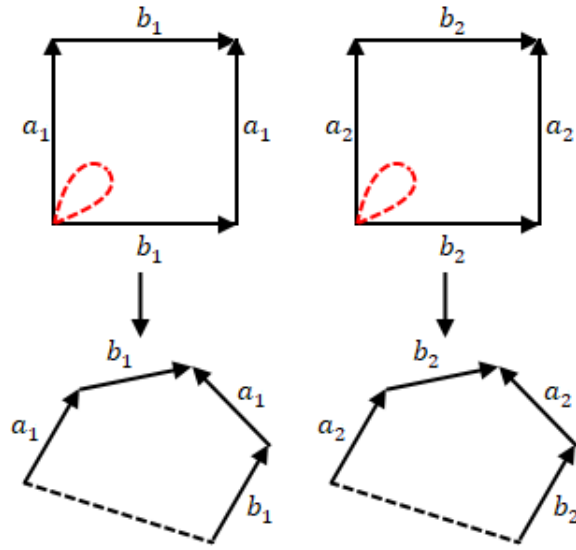


Рис. 67: Вырезание диска в торе.

Поскольку результат взятия связной суммы не зависит от того, где мы вырежем диск, вырежем его так, как показано на рисунке 67 (пунктиром отмечена граница, которая получалась после вырезания диска). Склеив стороны, отмеченные пунктиром получим восьмиугольник (см.рис.68).

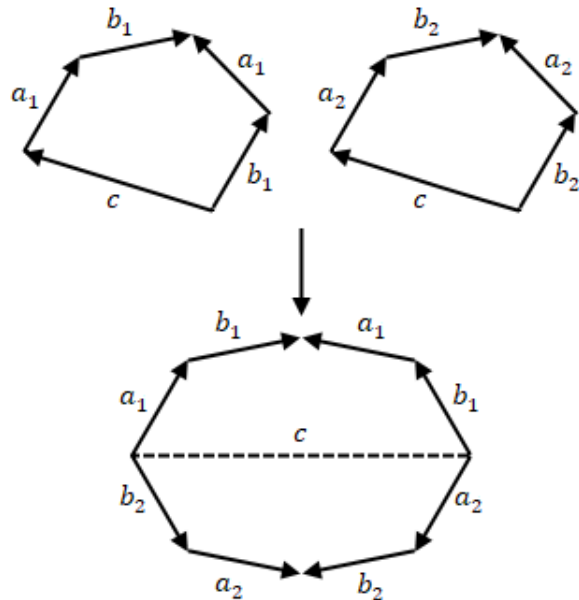


Рис. 68: Склейка квадратов с вырезанным диском.

Иными словами, связная сумма  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  получается как результат склейки такого восьмиугольника. То есть, слова  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$  и  $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$  склеиваются в слово  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ .

Для произвольных двух слов рассуждения совершенно аналогичные — если есть многоугольники  $W_1 = a_i b_k \dots$  и  $W_2 = c_j d_l \dots$ , то, вырезая таким образом диски и склеивая многоугольники по границе получившихся разрезов, получим, что многообразие, которое будет соответствовать связной сумме  $M_1 \# M_2$ , будет задаваться словом  $W_1 W_2$ , которое получается приписыванием к слову  $W_1$  слова  $W_2$ .

Тогда в первой серии слово состоит из четвёрок букв, где каждая четвёрка задаёт тор, а во второй серии слово состоит из пар букв, где каждая пара задаёт проективную плоскость.

Как и в примере с тором, для взятия связной суммы неориентируемых многообразий, вырезаем диск, как показано на рисунке (69).



Рис. 69: Склейка проективных плоскостей.

На языке связных сумм можно пояснить некоторые названия, которые принято приписывать многообразиям из тех серий, которые мы получили.

Процесс взятия связной суммы с тором обычно называют приклейкой ручки. Название для многообразий из первой серии теоремы классификаций — это сфера с  $n$  ручками (каждая ручка — операция взятия связной суммы с тором).

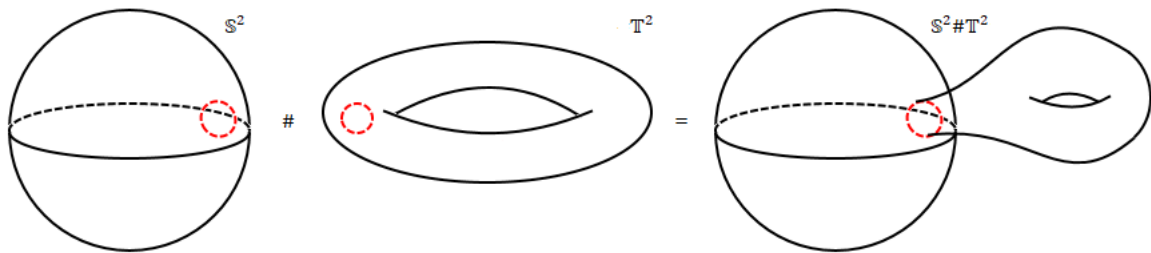


Рис. 70: Связная сумма многообразия с тором.

Многообразия из второй серии теоремы классификации называют сферой с  $t$  плёнками Мёбиуса. На примере сферы посмотрим, что происходит при взятии связной суммы многообразия с проективной плоскостью (будем для проективной плоскости использовать модель диска, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки на границе).

Вырежем диски на проективной плоскости и на сфере. Проективная плоскость — это объединение листа Мёбиуса с диском  $D^2$ .

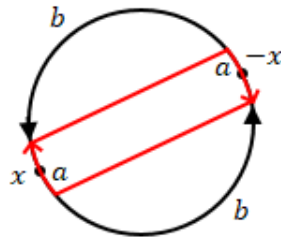


Рис. 71: Проективная плоскость — объединение диска и листа Мёбиуса.

То есть, можно разрезать проективную плоскость замкнутой кривой (выделена красным на рисунке (71)) на диск и лист Мёбиуса. Поэтому связная сумма сферы с проективной плоскостью — это приклейка листа Мёбиуса к сфере.

Итак, любое связное компактное двумерное многообразие гомеоморфно либо сфере с  $n$  ручками, либо сфере с  $m$  плёнками Мёбиуса.  $\square$

## 5 Кривые

### 5.1 Классификация замкнутых регулярных кривых на плоскости с точностью до регулярной гомотопии

**Определение.** *Непрерывная кривая* — непрерывное отображение отрезка в плоскость:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$\gamma : (x(t), y(t))$$

— параметрическая кривая ( $t$  — параметр).

**Определение.** *Гладкая параметрическая кривая*  $\gamma = (x(t), y(t))$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $x(t), y(t) \in C^\infty([a, b])$ . То есть, гладкая параметрическая кривая — это кривая, которая должна задаваться гладкими функциями, если записать её в координатах.

В нашем курсе мы рассматриваем параметрические кривые, поэтому кривые, которые задаются, например, следующими параметрами:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

разные, хотя как множество точек на плоскости они одинаковые.

Есть два подхода определения гладкой кривой:

1. Образ кривой должен выглядеть как гладкая линия;
2. Кривая, если её записать в координатах, должна задаваться гладкими функциями.

**Пример.** Рассмотрим негладкую кривую, которая задаётся гладкими функциями (см.рис.72).

Данная кривая задаётся следующими гладкими функциями (их графики см. на рис.73):

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0] \\ e^{-\frac{1}{t}}, & t \in (0, 1] \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}}, & t \in [-1, 0) \\ 0, & t \in [0, 1] \end{cases}$$



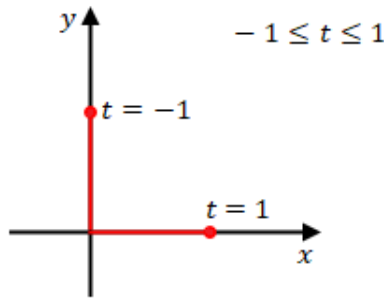


Рис. 72: Негладкая линия, задаваемая гладкими функциями.

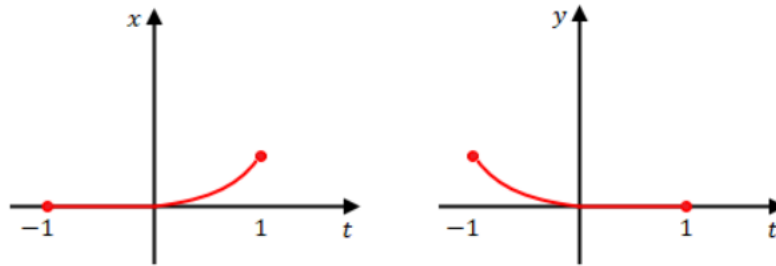


Рис. 73: Графики гладких функций.

**Пример.** Наоборот, рассмотрим кривую, график которой выглядит гладким, но которая задаётся негладкими функциями (см.рис.74). Прямую  $y = 0$  можно задать негладкими функциями, например:

$$x(t) = |t| + t,$$

$$y(t) = 0.$$

Чтобы объединить два данных подхода, определим понятие регулярной кривой.

**Определение.** *Регулярная кривая* — гладкая параметрическая кривая  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , для которой вектор  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$  (вектор скорости кривой) всюду отличен от нуля.

**Определение.** Для гладкой кривой  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  её *вектором скорости в точке*  $t_0 \in [a, b]$  называется вектор

$$\frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=t_0} = \left( \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}, \frac{dy}{dt}\Big|_{t=t_0} \right).$$

*Замечание.* Если кривая регулярная, то она в окрестности каждой своей точки будет выглядеть как гладкая линия (то есть, представима как график гладкой функции).

**Определение.** Пусть  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , а  $x(t), y(t)$  — гладкие периодические функции с периодом  $T$ . Тогда  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  — *гладкая замкнутая кривая*.

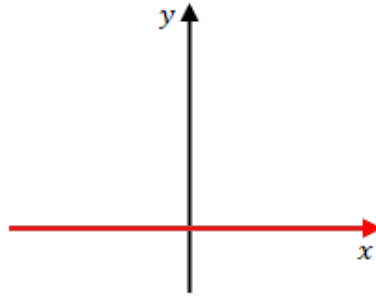


Рис. 74: Гладкая линия, задаваемая негладкими функциями.

*Замечание.* Чтобы не нарушалась гладкость кривой, можно потребовать, чтобы векторы скорости в начальной и конечной точке совпадали, а можно считать, что функции  $x(t), y(t)$  заданы не на отрезке, а на всей числовой прямой (как периодические функции) — в этом случае нам неважно, какая из точек отрезка  $[a, b]$  выбрана за начальную или конечную.

**Определение.** Две замкнутые гладкие регулярные кривые

$$\gamma_0(t), \gamma_1(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

называются *регулярно гомотопными*, если существует отображение

$$\gamma(t, s) : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

которое:

1. является гладким;
2.  $s = 0$ ,  $\gamma(t, s) \equiv \gamma_0(t)$ ;  $s = 1$ ,  $\gamma(t, s) \equiv \gamma_1(t)$ ;
3.  $\gamma(t, s)$  при фиксированном  $s$  — гладкая замкнутая регулярная кривая.

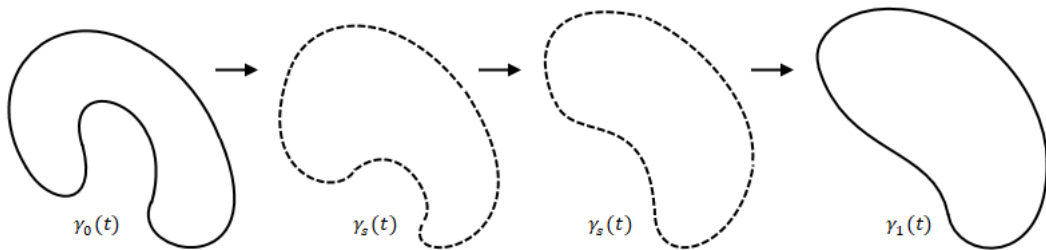


Рис. 75: Регулярно гомотопные кривые.

**Определение.** Две замкнутые непрерывные кривые

$$\gamma_0(t), \gamma_1(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

называются *гомотопными*, если существует отображение

$$\gamma(t, s) : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

которое:

1. является непрерывным;
2.  $s = 0$ ,  $\gamma(t, s) \equiv \gamma_0(t)$ ;  $s = 1$ ,  $\gamma(t, s) \equiv \gamma_1(t)$ ;
3.  $\gamma(t, s)$  при фиксированном  $s$  — непрерывная замкнутая кривая.

**Определение.** Две гладкие регулярные кривые

$$\gamma_0(t), \gamma_1(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

называются *регулярно гомотопными*, если существует отображение

$$\gamma(t, s) : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

которое:

1. является гладким;
2.  $s = 0$ ,  $\gamma(t, s) \equiv \gamma_0(t)$ ;  $s = 1$ ,  $\gamma(t, s) \equiv \gamma_1(t)$ ;
3.  $\gamma(t, s)$  при фиксированном  $s$  — гладкая регулярная кривая.

Пусть  $\gamma$  — гладкая регулярная кривая такая, что

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2, (x(t), y(t)),$$

$$\bar{0} \neq v = (x'(t), y'(t)) = (\rho(t) \cos \varphi(t), \rho(t) \sin \varphi(t)),$$

где  $\rho(t) > 0$  (длина  $v$ ).

**Определение.** Число вращения для замкнутой регулярной кривой  $\gamma$  — число

$$R(\gamma) = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

*Замечание.* Число вращения — это число оборотов, которое совершит вектор скорости при движении точки от начала до конца кривой. Например, для кривой на рис. 76  $R(\gamma) = 1$ .

*Замечание.* Число вращения — инвариант, отвечающий за регулярную гомотопность кривых.

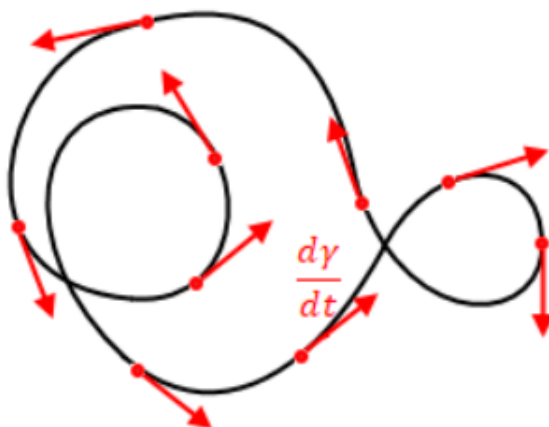


Рис. 76: Вычисление числа вращения.

**Теорема (Уитни).** *Две гладкие замкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают.*

Например, окружность с петлёй нельзя продеформировать в окружность, потому что их числа вращений не совпадают.

Пусть  $\gamma(t)$  — гладкая регулярная кривая.  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$  — ненулевой вектор скорости.

**Определение.** Гладкая регулярная кривая называется *натурально параметризуемой кривой*, если длина её вектора скорости равна 1.

**Утверждение.** Пусть  $\gamma(t)$  — гладкая регулярная кривая,  $t(\tau)$  — монотонно возрастающая функция и  $\frac{d\tau}{dt} > 0$ , тогда прямые  $\gamma(t)$  и  $\gamma(\tau) := \gamma(t(\tau))$  регулярно гомотопны. То есть, с помощью регулярной гомотопии можно менять параметр на кривой  $\gamma(t)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим семейство кривых  $\gamma(t, s) = \gamma((1-s)t + s\tau(t))$ . При  $s = 0$  получаем кривую  $\gamma(t)$ , при  $s = 1$  получаем кривую  $\gamma(\tau(t)) = \tilde{\gamma}(t)$ . Формально кривые  $\gamma(t)$  и  $\tilde{\gamma}(t)$  различны, но линии на плоскости, которые они задают, будут одинаковыми (разница будет только в скорости, с которой точка двигается по кривой в той или иной параметризации).

Скорость, с которой точка двигается по кривой  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma}' = \gamma' \frac{d\tau}{dt}.$$

Таким образом, вектор скорости кривой  $\tilde{\gamma}(t)$  отличается от вектора скорости  $\gamma(t)$  умножением на некоторую положительную константу.

Более того, замену параметра (для регулярной кривой) всегда можно сделать так, что длина вектора скорости будет постоянной. Действительно, для того, чтобы выполнялось равенство

$$|\tilde{\gamma}'| = |\gamma'| \frac{d\tau}{dt} \equiv c$$

нужно, чтобы

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c} |\gamma'|.$$

Интегрируя, получаем, что

$$t(\tau) = \frac{1}{c} \int_0^\tau \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du.$$

Отсюда можно выразить  $\tau(t)$ , для которой после замены параметра мы получим длину вектора скорости, равную константе. Найдём константу  $c$ . Подставляя в интеграл  $\tau = T$ , получим:

$$T = \frac{1}{c} \int_0^T \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du,$$

откуда

$$c = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \frac{d\gamma}{du} \right| du.$$

□

**Утверждение.** Пусть дана регулярная кривая  $\gamma(t)$ , тогда кривая, полученная из данной с помощью параллельного переноса, поворота или гомотетии, ей регулярно гомотопна.

*Доказательство.* Параллельный перенос:  $\gamma(t) \rightarrow \gamma(t) + w$ .  $\gamma(t, s) = \gamma(t) + sw$ .

Поворот:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \gamma(t)$$

$$\gamma(t, s) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 s & -\sin \varphi_0 s \\ \sin \varphi_0 s & \cos \varphi_0 s \end{pmatrix} \gamma(t)$$

Гомотетия:  $\gamma(t) \rightarrow \mu\gamma(t)$ .  $\gamma(t, s) = (1 - s + \mu s)\gamma(t)$ ,  $s \in [0, 1]$

□

Подготовительные утверждения к теореме Уитни доказаны: теперь мы можем регулярной гомотопией заменить кривые  $\gamma_0(t)$  и  $\gamma_1(t)$  на кривые, которые расположены так, как нам удобно (их можно поворачивать, сдвигать, растягивать), причём вектор скорости у полученных кривых будет единичной длины.

*Доказательство теоремы Уитни.*  $\implies$  Если кривые  $\gamma_0(t)$  и  $\gamma_1(t)$  регулярно гомотопны, то число вращения  $R(\gamma_s)$  непрерывно зависит от параметра гомотопии  $s$  (поскольку  $\varphi_s(t)$  непрерывно по  $s$ ).

Так как  $R(\gamma_s) \in \mathbb{Z}$ , то оно не меняется в процессе гомотопии, поэтому  $R(\gamma_1) = R(\gamma_2)$ .

$\impliedby$  Пусть  $\gamma_0(t)$  и  $\gamma_1(t)$  — замкнутые регулярные кривые,  $\gamma_i(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  такие, что  $R(\gamma_0) = R(\gamma_1)$ .

Считаем, что параметр на кривых натуральный:

$$\left| \frac{d\gamma_0}{dt} \right| \equiv \left| \frac{d\gamma_1}{dt} \right| \equiv 1$$

и кривые заданы на одном и том же отрезке  $t \in [0, T]$ .

Расположим кривые так, как нам удобно: пусть в начальные момент времени кривые  $\gamma_0(t)$  и  $\gamma_1(t)$  проходят через начало координат:  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = (0, 0)$  и имеют один и тот же касательный вектор  $(1, 0)$ :

$$\frac{d\gamma_0}{dt}(0) = \frac{d\gamma_1}{dt}(0) = (1, 0).$$

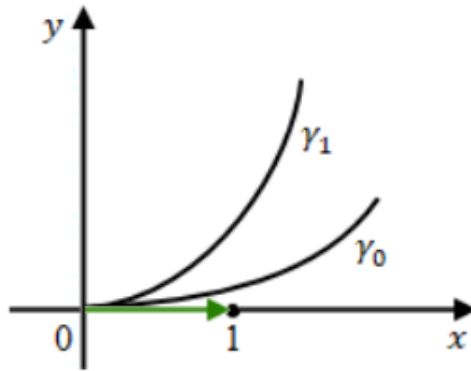


Рис. 77: Кривые  $\gamma_0(t)$  и  $\gamma_1(t)$ .

Докажем теперь, что кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  регулярно гомотопны, при условии, что их числа вращения равны  $R(\gamma_0) = R(\gamma_1)$ .

Поскольку вектор скорости имеет единичную длины, то можно считать, что

$$\frac{d\gamma_0}{dt} = (\cos \varphi_0(t), \sin \varphi_0(t)),$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = (\cos \varphi_1(t), \sin \varphi_1(t)),$$

где  $\varphi_0(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  — непрерывные функции.

Так как числа вращения кривых равны, то  $\varphi_0(T) = \varphi_1(T) = 2\pi k$ , где  $k$  — число вращения. Также  $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$  (мы так расположили кривые).

Тогда построим гомотопию между функциями  $\varphi_0(t)$  и  $\varphi_1(t)$ :

$$\varphi_s(t) = (1 - s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t).$$

Будем считать  $\varphi_s(t)$  тоже функцией угла, задающей единичный вектор  $v_s(t)$ :

$$v_s(t) = (\cos \varphi_s(t), \sin \varphi_s(t)).$$

Будем также считать  $v_s(t)$  вектором скорости некоторой кривой  $\tilde{\gamma}_s(t)$  — её нужно немного видоизменить, чтобы получить то семейство кривых, которое мы строим для гомотопии между  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

Так как  $\tilde{\gamma}_s(0) = (0, 0)$ , то

$$\tilde{\gamma}_s(t) = \int_0^t v_s(\tau) d\tau$$

— построили некоторое семейство кривых. Ясно, что при  $s = 0$  мы получим кривую  $\gamma_0(t)$ , при  $s = 1$  — кривую  $\gamma_1(t)$ .

Кривая  $\tilde{\gamma}_s(t)$ , очевидно, регулярна (длина вектора скорости равна 1), но она может быть незамкнутой — равенство функций  $\varphi_s(t)$  и  $v_s(t)$  при  $t = 0$  и  $t = T$  означает, что в начальной и конечной точке кривой одинаковый вектор скорости (см.рис.78).

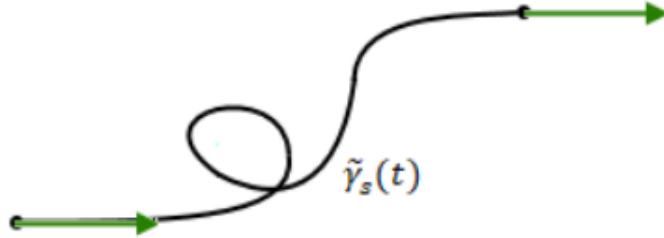


Рис. 78: Кривая  $\tilde{\gamma}_s(t)$  может быть незамкнутой.

Немного изменим кривую  $\tilde{\gamma}_s(t)$ , чтобы она стала замкнутой. Рассмотрим радиус-вектор новой кривой: пусть его конечная точка пробегает кривую  $\tilde{\gamma}_s(t)$ , а начальная точка пробегает отрезок, соединяющий начало и конец  $\tilde{\gamma}_s(t)$  (см.рис.79).

Получим

$$\gamma_s(t) = \tilde{\gamma}_s(t) - \frac{t}{T}\tilde{\gamma}_s(T).$$

Примем эту формулу за определение семейства кривых, связывающих кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  (иными словами, за отображение  $\gamma(s, t)$  из определения гомотопии).

Действительно, так как  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  замкнутые и  $\gamma_0(T) = \gamma_1(T) = (0, 0)$ , то при  $s = 0$  получаем  $\gamma_0(t)$ , при  $s = 1$  —  $\gamma_1(t)$ .

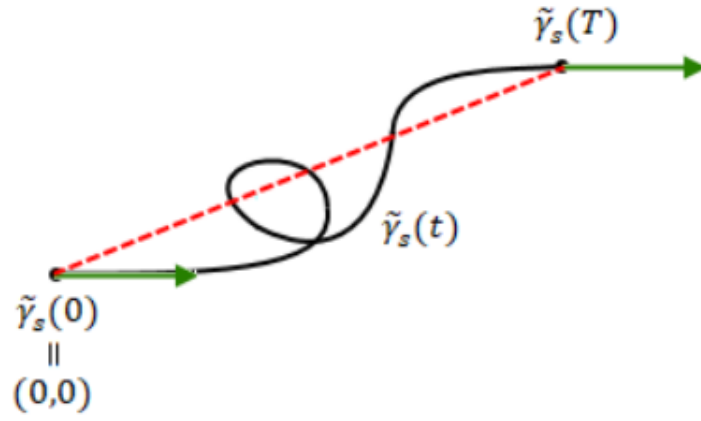


Рис. 79: Построение  $\gamma_s(t)$ .

Проверим, что при любом значении параметра  $s$  кривая  $\gamma_s(t)$  замкнута и регулярна.

Замкнутость: при  $t = 0$  получаем  $\tilde{\gamma}_s(0) = 0$ , при  $t = T$  получаем  $\tilde{\gamma}_s(T) - \tilde{\gamma}_s(T) = 0$ .

Регулярность: проверим, что

$$\frac{d\gamma_s(t)}{dt} \neq 0.$$

В самом деле (учтём, что кривая  $\tilde{\gamma}_s(t)$  строилась так, что её вектор скорости  $\frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} = 1$ ):

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\gamma_s(t)}{dt} \right| &= \left| \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} - \frac{1}{T} \tilde{\gamma}_s(T) \right| \geq \left| \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} \right| - \frac{1}{T} |\tilde{\gamma}_s(T)| = \\ &= 1 - \frac{1}{T} |\tilde{\gamma}_s(T)| = \frac{T - |\tilde{\gamma}_s(T)|}{T} \geq 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы кривая была регулярной, неравенство должно быть строгим. Вначале поймём, почему нестрогие неравенства выполняются:  $T$  — это длина кривой  $\tilde{\gamma}_s(t)$  (на ней выбран натуральный параметр), а длина вектора  $\tilde{\gamma}_s(T)$  — это длина отрезка, соединяющего начальную и конечную точки кривой  $\tilde{\gamma}_s(t)$  (см.рис.79). Поэтому геометрически последнее неравенство выражает тот факт, что длина кривой, соединяющей эти точки, не меньше, чем длина отрезка, соединяющего эти точки.

Более формально неравенство

$$\frac{T - |\tilde{\gamma}_s(T)|}{T} \geq 0$$

можно доказать воспользовавшись тем, что интеграл от модуля функции не



меньше модуля интеграла функции:

$$T = \int_0^T 1 dt = \int_0^T \left| \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} \right| dt \geq \left| \int_0^T \frac{d\tilde{\gamma}_s(t)}{dt} dt \right| = |\tilde{\gamma}_s(T) - \tilde{\gamma}_s(0)| = |\tilde{\gamma}_s(T)|.$$

Равенство будет достигаться только в случае, когда кривая совпадает с отрезком. Иначе говоря, неравенства « $\geq$ » обращаются в равенства только в том случае, когда  $\varphi_s(t) \equiv 0$  (действительно, если вектора скорости в любой точке кривой коллинеарны, то  $v_s(t) \equiv 0$ , откуда следует, что  $\varphi_s(t) \equiv 0$ ).

Иными словами, во всех случаях, кроме случая, когда для некоторого  $s$  выполнено  $\varphi_s(t) \equiv 0$ , теорема доказана, потому что мы явно предъявили гомотопию.

В случае когда для некоторого  $s$  выполнено  $\varphi_s(t) \equiv 0$ , функции  $\varphi_0(t)$  и  $\varphi_1(t)$  имеют специальный вид: они связаны линейной зависимостью

$$\varphi_s(t) = (1 - s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t).$$

В этом случае мы с помощью регулярной гомотопии можем изменить одну из функций, и линейная зависимость между ними пропадёт (см.рис.80).

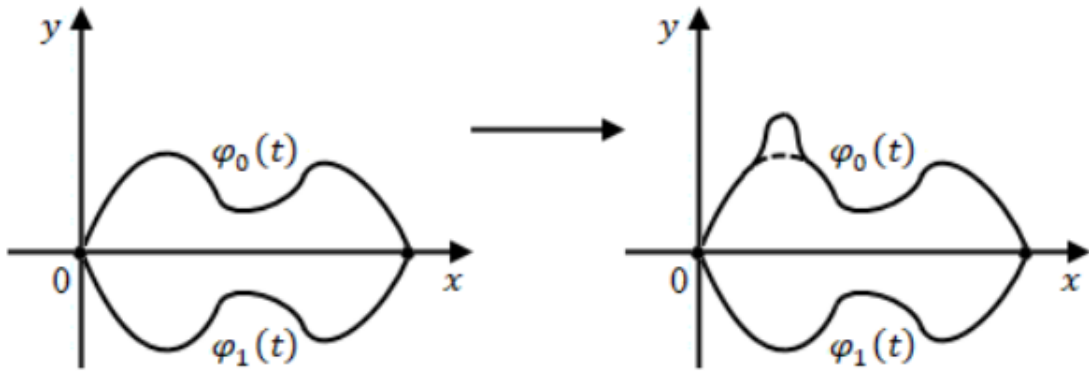


Рис. 80: Функции  $\varphi_0(t)$  и  $\varphi_1(t)$  линейно зависимы ( $s = 0.5$ ).

Далее способом, описанным выше, построим регулярную гомотопию между новой (возмущённой) кривой  $\varphi_0(t)$  и кривой  $\varphi_1(t)$ . Таким образом (ура), теорема Уитни доказана.  $\square$

## 5.2 Регулярные замкнутые кривые на двумерной сфере

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, когда две регулярные замкнутые кривые на сфере являются регулярно гомотопными.

Проблема состоит в том, что теория гладких многообразий обсуждается в курсе дифференциальной геометрии, поэтому дать определение регулярной кривой на сфере довольно проблематично. Мы обойдёмся простыми случаями.

В первых главах разбиралась стереографическая проекция (сюда бы ссылку). Так как сфера без северного полюса гомеоморфна плоскости, то гладкие кривые на сфере можно рассматривать как гладкие в координатах, которые получаются при соответствии между точками сферы и точками плоскости (будем считать, что кривые не проходят через северный полюс).

Также можем считать, что замкнутая регулярная кривая расположена на «небольшом» участке сферы и (по теореме Уитни для плоскости) регулярно гомотопна кривой вида, изображённого на рисунке 81.

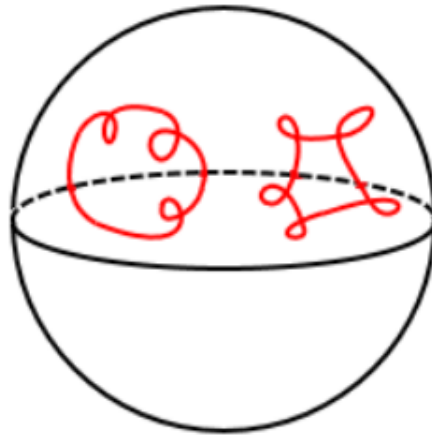


Рис. 81: Замкнутые регулярные кривые на сфере.

То есть, число классов регулярной гомотопии может только уменьшиться — может оказаться, что кривые, которые на плоскости не были регулярно гомотопными, на сфере окажутся регулярно гомотопными.

Действительно, на сфере нельзя определить число вращения кривой (так как на плоскости мы можем измерить угол между вектором скорости кривой и каким-то фиксированным направлением, например, осью  $x$ , а на сфере не существует способа задать фиксированное направление во всех точках сразу).

Но мы всегда можем рассуждать следующим образом: можно считать, что кривая находится на небольшом участке сферы, которые гомеоморфен плоскости. Значит, можно вычислить «число вращения», затем регулярной гомотопией как-то изменить кривую, затем снова перетащить её на этот участок сферы и опять вычислить «число вращения» — в процессе оно может меняться.

Рассмотрим процесс удаления двух соседних петелек: вытягивая кривую по сфере, придём к участку кривой, содержащему петельки с другой стороны (см.рис.82).

Если «число вращения» кривой до совершения этой операции было равно  $k + 1$ , то «число вращения» после совершения операции будет равно  $k - 1$  (по определению — посчитаем количество оборотов вектора скорости при движении

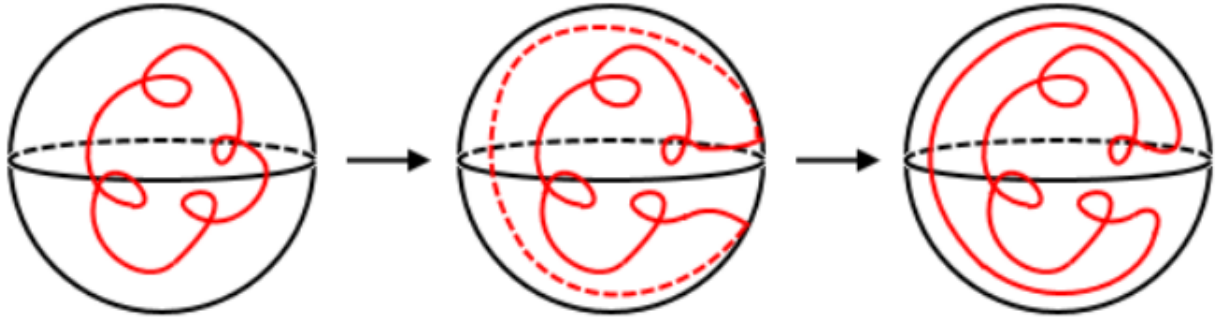


Рис. 82: Удаление соседних петелек у кривой на сфере.

точки по кривой).

Итак, после такой гомотопии «число вращения» изменится на 2. Отсюда следует, что кривые, у которых «число вращения» отличается на 2, регулярно гомотопны. Поэтому на сфере останется всего два класса регулярной гомотопности.

**Утверждение.** *На сфере существует ровно два класса гладких регулярных замкнутых кривых с точностью до регулярной гомотопии (на плоскости, кстати, их счётное число).*

**Теорема.** *Любая замкнутая кривая на сфере регулярно гомотопна либо «окружности», либо «восьмёрке», направление обхода при этом неважно.*

### 5.3 Классификация гладких замкнутых регулярных кривых на цилиндре с точностью до регулярной гомотопии

Цилиндр можно задать следующими способами:

1. Цилиндр в  $\mathbb{R}^3$ :  $x^2 + y^2 = R^2$
2. Плоскость со склеенными точками: зададим отношение эквивалентности

$$(\varphi, z) \sim (\varphi + 2\pi k, z), k \in \mathbb{Z},$$

тогда  $\mathbb{R}^2 / \sim$  — факторпространство и

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} y_1 = y_2, \\ \frac{x_1 - x_2}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Плоскость без точки:  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\cdot\}$  — так как цилиндр гомеоморфен плоскости без точки.

### Определим инварианты для кривых на цилиндре:

Аналогично с плоскостью определяется число оборотов вектора скорости  $R(\gamma)$ .

Определим радиус-вектор кривой  $\gamma(t)$  на плоскости, но через функции, которые задают кривую в полярной системе координат:

$$\gamma(t) = (\rho(t) \cos \varphi(t), \rho(t) \sin \varphi(t)).$$

Причём пусть кривая не проходит через некоторую точку  $A$ , которую примем за начало координат. В таком случае  $\rho(t) > 0$ , а  $\varphi(t)$  определяется по модулю  $2\pi$ , где  $t \in [0, T]$ . Тогда определим число оборотов вокруг точки  $A$ :

$$C(\gamma) = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Теперь число оборотов вокруг цилиндра можно считать как количество оборотов вокруг выколотой точки из третьего варианта задания цилиндра.

**Теорема** (аналог теоремы Уитни для цилиндра). *Две гладкие замкнутые регулярные кривые на цилиндре регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их числа  $R(\gamma)$  и  $C(\gamma)$  совпадают, то есть*

$$R(\gamma_0) = R(\gamma_1), \quad C(\gamma_0) = C(\gamma_1).$$

*Доказательство.* Доказательство сводится к приведению кривой с помощью регулярной гомотопии к хорошему виду<sup>2</sup>.

Пусть нам дана замкнутая регулярная кривая, у которой векторы скорости в начальной и конечной точках совпадают. Вытянем у неё кусок возле конечной точки до начальной и один из концов получившейся петли выпрямим.

Это регулярная гомотопия, потому что  $\gamma \sim (\alpha \cup \beta)$ , где  $\alpha$  — нижний кусок оранжевой кривой,  $\beta$  — верхний горизонтальный кусок кривой.

Осуществив такую гомотопию для  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ , получим

$$\gamma_0 \sim (\alpha_0 \cup \beta_0),$$

$$\gamma_1 \sim (\alpha_1 \cup \beta_1),$$

где  $\alpha_0, \alpha_1$  — замкнутые регулярные кривые на плоскости, которые имеют одинаковые числа вращения (т.к. числа вращения  $\gamma_0, \alpha_0$  и  $\gamma_1, \alpha_1$  совпадают, а числа вращения  $\gamma_0, \gamma_1$  одинаковы в силу нашей регулярной гомотопности);  $\beta_0, \beta_1$  —

---

<sup>2</sup>Я забыл сохранять исходники этих рисунков, поэтому на первых трёх рисунках начальная точка не склеивается в конечную, но вы уж как-то в голове представьте себе, что они на одном уровне :)

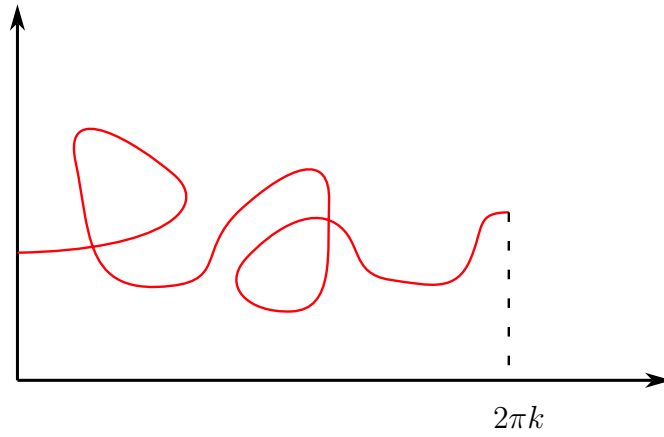


Рис. 83: Пример замкнутой регулярной кривой.

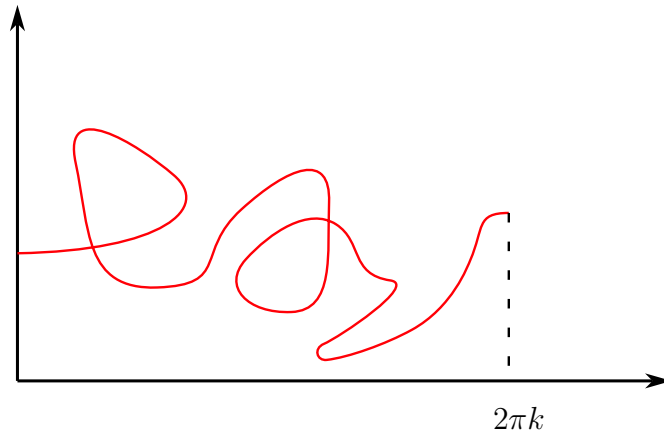


Рис. 84: С помощью регулярной гомотопии вытягиваем кривую.

одинаковые горизонтальные отрезки, имеющие длину  $2\pi k$ , где  $k = C(\gamma_0) = C(\gamma_1)$ .

Теперь можно построить регулярную гомотопию между  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  — горизонтальные участки совпадают, а для нижних участков можно применить теорему Уитни на плоскости.

□

## 5.4 Классификация гладких замкнутых регулярных кривых на торе с точностью до регулярной гомотопии

С тором поступим также, как с цилиндром: зададим факторпространство следующим образом:

$$(x, y) \sim (x + 2\pi k, y + 2\pi m), \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Также зададим числа вращения:

$$R_1 = \frac{x(T) - x(0)}{2\pi},$$

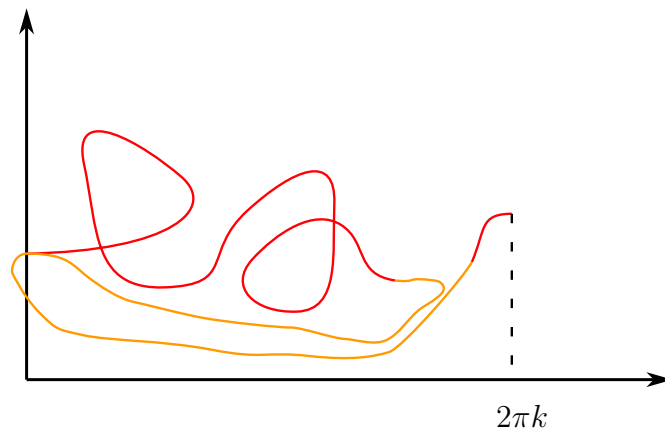


Рис. 85: С помощью регулярной гомотопии вытягиваем до начальной точки.

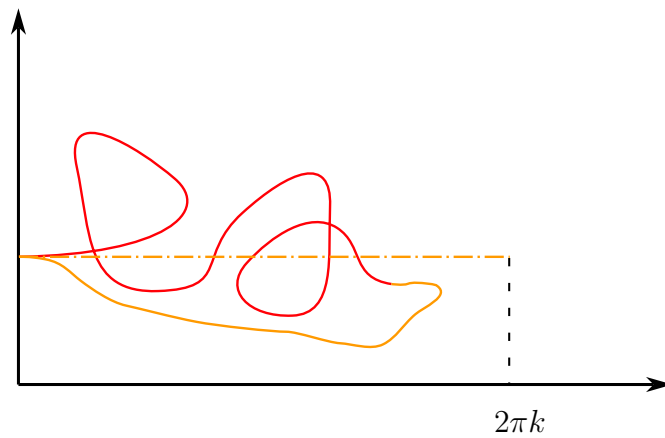


Рис. 86: С помощью регулярной гомотопии вытягиваем одну из ветвей вверх горизонтально оси абсцисс.

$$R_2 = \frac{y(T) - y(0)}{2\pi}.$$

**Теорема.** Две замкнутые кривые на торе гомотопны тогда и только тогда, когда их числа  $R_1$  и  $R_2$  совпадают.

## 6 Прочие сюжеты

### 6.1 Гомотопическая эквивалентность

**Определение.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства,  $f, g$  — непрерывные отображения

$$f : X \rightarrow Y,$$

$$g : X \rightarrow Y,$$

тогда  $f, g$  называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

$$F(x, 0) \equiv f, \quad F(x, 1) \equiv g.$$

*Замечание.* Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве всех непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$  (вот тут я, честно говоря, не помню, было ли это на лекции, но вообще данное утверждение является логической связкой между двумя определениями).

**Определение.** Топологические пространства  $X, Y$  называются *гомотопически эквивалентными*, если существует непрерывное отображение

$$f : X \rightarrow Y,$$

$$g : Y \rightarrow X,$$

$$f \circ g : Y \rightarrow Y,$$

$$g \circ f : X \rightarrow X.$$

**Утверждение.** Если  $X$  и  $Y$  гомеоморфны, то они гомотопически эквивалентны ( $x \simeq y \implies x \sim y$ ).

**Пример.** Замкнутый шар  $B^2$  и открытый шар  $D^2$  гомотопически эквивалентны точке, но попарно не гомеоморфны.

**Пример.** Окружность  $S^1$  и кольцо  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны.

**Утверждение.**  $\mathbb{R}^n \sim \{\cdot\}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \{\cdot\}, \\ g : \{\cdot\} &\rightarrow \{0\}, \\ f \circ g : \{\cdot\} &\rightarrow \{\cdot\}, \\ g \circ f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \vec{0} \end{aligned}$$

— надо доказать, что отображение гомотопно тождественному отображению:

$$\begin{aligned} F(x, s) &= \vec{x}(1 - s), \\ F(x, s) : \mathbb{R}^n \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ s = 0 : F(x, s) &= \vec{x} - id_{\mathbb{R}^n}, \\ s = 1 : F(x, s) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

□

## 6.2 Трёхмерные многообразия

**Определение.** *Трёхмерное многообразие* — это хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, в котором для каждой точки существует окрестность, гомеоморфная открытому трёхмерному шару.

*Замечание.*  $\partial M^3$  — двумерное многообразие.

**Определение.** *Полноторие* — прямое произведение  $D^2 \times S^1$  двумерного диска и окружности, то есть трёхмерная фигура, ограниченная тором.

*Замечание.* Полноторие — это бублик, тор — это оболочка бублика.

**Пример.** (трёхмерных многообразий).

1.  $S^3$  ( $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  в  $\mathbb{R}^4$ );
2.  $\mathbb{R}P^3$ ;
3.  $S^1 \times S^1 \times S^1 = T^3$ ;
4.  $S^2 \times S^1$ .

**Утверждение.**  $D^2 \times S^1 \sim S^1$ .

**Утверждение.** Трёхмерная сфера  $S^3$  является склейкой двух полноторий.



*Доказательство.*

$$S^3 = \{x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 1\}.$$

Пусть

$$x + iy = z \in \mathbb{C},$$

$$a + ib = w \in \mathbb{C}.$$

Тогда уравнение для сферы  $S^3$  в  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  можно записать как

$$|z|^2 + |w|^2 = 1, \quad |z| \in [0, 1], \quad |w| \in [0, 1].$$

Если зафиксируем  $|z| = z_0$ , тогда удовлетворяющий уравнению сферы  $|w|$  автоматически определяется как  $|w| = \sqrt{1 - z_0^2} = w_0$ .

Покажем, что зафиксированному модулю  $z$  на сфере соответствует некоторая поверхность. По формуле Эйлера комплексные  $z$  и  $w$  представим в виде

$$z = z_0 e^{i\varphi}, \quad w = w_0 e^{i\varphi}.$$

Пусть  $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Определим множества

$$A = \{|z| \leq z_0\},$$

$$B = \{|z| \geq z_0\}.$$

При этом  $|w| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = z_0$  для множества  $A$  и  $|w| \leq z_0$  для множества  $B$ . Они определяются симметрично и оба являются трёхмерными поверхностями с краем. Попробуем их представить.

Рассмотрим, чему гомеоморфно  $A$ .  $\{|z| \leq z_0\}$  — двумерный диск радиуса  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Если выберем какую-то точку  $z$  внутри диска, мы зафиксируем  $|z|$  и этой точке будет соответствовать целая окружность точек вида  $w$ . Действительно, мы сможем однозначно определить модуль точек  $w$  из модуля произвольной точки  $z = \tilde{z}$  по формуле  $|w| = \sqrt{1 - |\tilde{z}|^2}$ , тогда точки  $w$  определяются как

$$w = \sqrt{1 - |\tilde{z}|^2} e^{i\psi}, \quad \psi \in [0, 2\pi],$$

но мы не знаем угол  $\psi$  этих точек  $w$ . То есть, угол может быть произвольным.

Получается, что множество  $A$  является декартовым произведением двумерного диска  $D^2$  на окружность  $S^1$ , что является полноторием. Аналогично можно показать, что множество  $B$  также является полноторием. Только в этом случае теперь  $w$  определяют точки с двумерного диска. Следовательно, трёхмерная

сфера  $S^3$  является результатом склейки двух полноторий по общему граничному тору, который соответствует точкам

$$|z| = |w| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Так как в общем случае есть несколько способов склеить два полнотория по общей границе, и не все их этих склеек эквивалентны трёхмерной сфере  $S^3$ . Поэтому важно рассмотреть, как именно склеиваются полнотория в нашей задаче и будет ли их склейка гомеоморфна  $S^3$ .

На полнотории  $A$  рассмотрим кривую

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Такая кривая стягивается в точку внутри полнотория  $A$ , если уменьшать  $|z|$  к нулю, то есть к центру диска.  $w$  при этом будет расти к единице. Внутри полнотория  $B$  в качестве аналогичной стягивающейся в точку кривой — можно взять  $|w| = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Эти две кривые пересекаются в точке  $z = w = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Более того, они обе лежат на общей для полноторий  $A$  и  $B$  границе. Поэтому можно обе эти кривые изобразить на одном полнотории, например, на  $A$ . Обозначим цикл, который стягивается в точку в полнотории  $A$  через  $\lambda$ , а цикл, который стягивается в полнотории  $B$  обозначим через  $\mu$ .

То есть два полнотория  $A$  и  $B$  склеиваются по общему граничному тору со сменой ролей циклов: меридианы одного тора становятся параллелями на другом торе, и наоборот. Результатом такой склейки двух полноторий является трёхмерная сфера  $S^3$ .

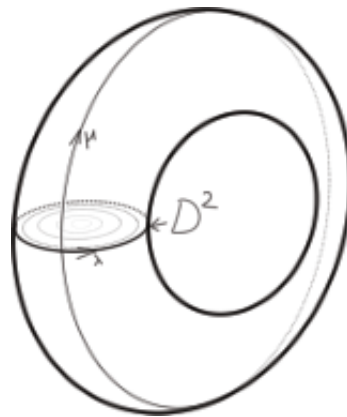


Рис. 87: Циклы  $\lambda$  и  $\mu$  на полнотории  $A$ .

□

### 6.3 Математический бильярд

В нашем курсе пишем именно бильярд, а не бильярд, когда имеем в виду математический бильярд.

**Определение.** *Математический бильярд* — механическая система, описывающая движение материальной точки в некоторой бильярдной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $\partial\Omega$ , которая является замкнутой кривой, и упругими отражениями от границы.

*Замечание.* Траектория бильярда в области определяется начальным положением точки и начальным вектором её скорости.

*Замечание.* Отражение от границы происходит по закону абсолютно упругого отражения, то есть «угол падения равен углу отражения».

**Определение.** *Фазовое пространство системы* — множество точек

$$M^4(x, y, v_1, v_2) / \sim,$$

где  $x, y \in \Omega$ ,  $v_1^2 + v_2^2 > 0$ .

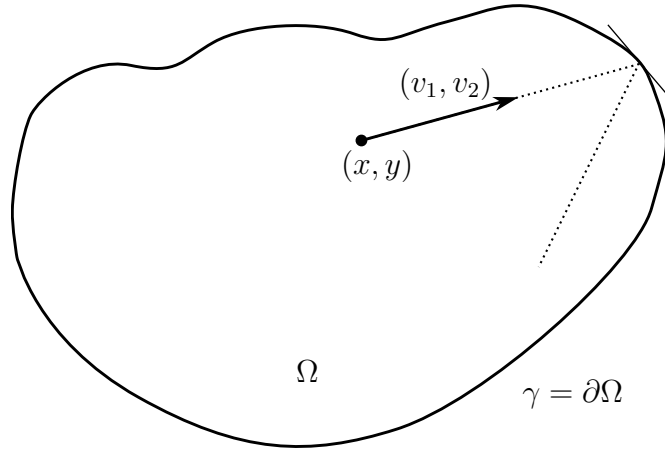


Рис. 88: Математический бильярд.

Пусть  $v = (v_1, v_2)$  — вектор скорости до удара,  $w = (w_1, w_2)$  — вектор скорости после удара,  $e = (e_1, e_2)$  — касательный вектор. Зададим отношение эквивалентности, склеивающее векторы скорости до и после удара о границу  $\partial\Omega$ :

$$(x, y, v_1, v_2) \sim (a, b, w_1, w_2) \iff (x, y) = (a, b) \in \gamma = \partial\Omega.$$

Тогда

$$v_1^2 + v_2^2 = w_1^2 + w_2^2,$$

$$e_1 v_1 + e_2 v_2 = e_1 w_1 + e_2 w_2.$$

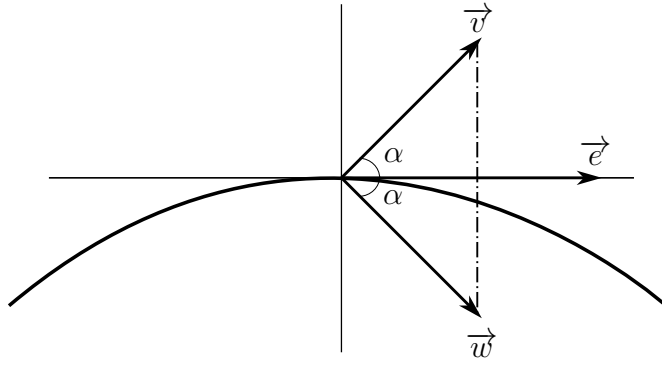


Рис. 89: Биллиардный закон.

Что произойдёт с траекторией движения материальной точки, если задать ей не скорость  $(v_1, v_2)$ , а, например,  $(2v_1, 2v_2)$ ? Понятно, что траектория не изменится, просто материальная точка пройдёт её в два раза быстрее. Тогда введём следующее определение:

**Определение.** *Изоэнергетическая поверхность* (поверхность, на которой энергия постоянна)  $Q_h^3$  — множество точек

$$(x, y, v_1, v_2) \in M^4$$

таких, что

$$v_1^2 + v_2^2 = h^2 > 0.$$

*Замечание.* Без ограничения общности, если не оговорено иное, всегда  $h = 1$ .

**Утверждение.** *Если  $\Omega$  гомеоморфна замкнутому диску  $D^2$ , то  $Q^3 \simeq S^3$ .*

**Утверждение.** *Пусть  $\Omega$  гомеоморфна замкнутому цилиндру, тогда  $Q \simeq S^2 \times S^1$ .*

Функция  $H = v_1^2 + v_2^2 = 1 = \text{const}$  — функция, которая сохраняет своё значение вдоль траектории биллиарда. Существует ли какая-нибудь функция  $F$ , которая будет функционально независима с  $H$  и которая тоже сохраняет своё значение вдоль траектории?

**Определение.** Функции  $F$  и  $H$  называются *функционально независимыми*, если их градиенты линейно независимы почти всюду (то есть множество точек, где они линейно независимы, имеют меру ноль).

**Пример.** (биллиард в круге).

Рассмотрим область  $\Omega$ , которая является двумерным диском единичного радиуса,  $\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ . Возьмём точку внутри и рассмотрим какую-нибудь траекторию.

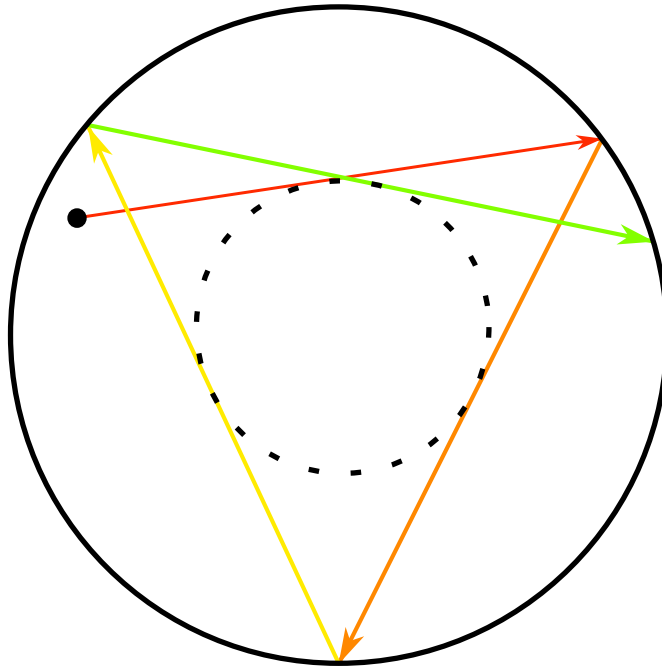


Рис. 90: Биллиард в круге.

Можно заметить несколько *интегралов*: угол падения, длина хорды, расстояние от центра до хорды.

Если расстояние от центра окружности до хорд одинаково, то можно провести окружность, радиус которой равен этому расстоянию. Такая кривая внутри биллиардной области, которая касается всех траекторий с заданным свойством, называется *каустикой*.

**Определение.** *Интегрируемый биллиард* — это биллиард, вдоль траектории которого какая-то функция  $F$  (кроме функции  $H$ ) сохраняет своё значение.

Так как в определении математического биллиарда мы не ограничивали себя регулярностью кривой, то можно рассмотреть, например, биллиард в прямоугольнике.

**Пример.** (биллиард в прямоугольнике).

Хоть каустики для данного биллиарда нет, но он всё равно интегрируем: звенья любой траектории лежат на прямых, принадлежащих одному из двух семейств параллельных прямых. Будет сохраняться угол между прямой, содержащей звено траектории и фиксированной прямой (например, на которой лежит сторона биллиарда) — в нашем случае это будет горизонтальная прямая.

Тогда  $\alpha$  может принимать значения из отрезка  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Граничные значения отрезка соответствуют движению точки параллельно горизонтальным или вертикальным границам прямоугольника. Обозначим отображение

$$A : Q^3 \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

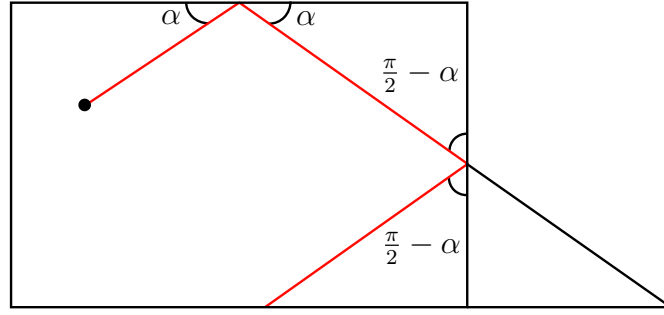


Рис. 91: Биллиард в прямоугольнике.

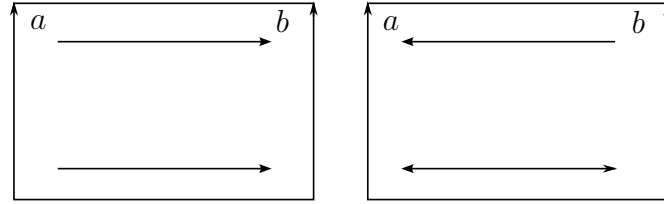


Рис. 92: Прямоугольники, соответствующие прообразу  $A^{-1}(0)$ .

Для биллиарда в прямоугольнике рассмотрим прообраз граничных значений отрезка  $A^{-1}(0)$  и  $A^{-1}(\frac{\pi}{2})$  в  $Q^3$ . Прообразом  $A^{-1}(0)$  являются два прямоугольника: в одном вектора направлены вправо, в другом — влево. Эти четырёхугольники отождествляются по левой и правой граница, при это на верхней и нижней никаких отождествлений нет. Результатом склейки будет цилиндр, на котором векторы скоростей образуют «обмотки». Прообраз  $A^{-1}(\frac{\pi}{2})$  рассматривается аналогично. Два соответствующих случая прямоугольника, соответствующие направленным вверх и вниз векторам скорости, склеиваются по верхней и нижней границе, результатом склейки снова является цилиндр.

Рассмотрим прообраз  $A^{-1}(\alpha_0)$ , где  $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Для произвольной точки  $(x, y)$  существует четыре вектора скорости, чтобы попасть на слой  $\alpha_0$ . Действительно, чтобы попасть на слой  $\alpha_0$  звено траектории должно образовывать угол  $\alpha_0$  с фиксированной прямой, содержащей границу биллиарда (например, с нижней границей прямоугольника). Таких прямых всего две, и вектор скорости может идти вдоль любой из них в одном из двух направлений. Занумеруем векторы  $v_1, \dots, v_4$  как на рис. 93. Разобьём слой  $A^{-1}(\alpha_0)$  на четыре прямоугольника, каждому поставим в соответствие по вектору скорости  $v_i$ .

Полученные прямоугольники склеиваются в соответствии с биллиардным отображением. А именно, если на границе отождествляются векторы скорости  $v_i$  и  $v_j$ , то по этой границе склеиваются и соответствующие им прямоугольники.

На верхней границе отождествляются векторы  $v_1 \sim v_2$ , а также  $v_3 \sim v_4$ . Аналогичное верно для нижней границы прямоугольника. На обеих вертикальных границах отождествления также совпадут  $v_1 \sim v_4$  и  $v_2 \sim v_3$ . Изобразим склейки

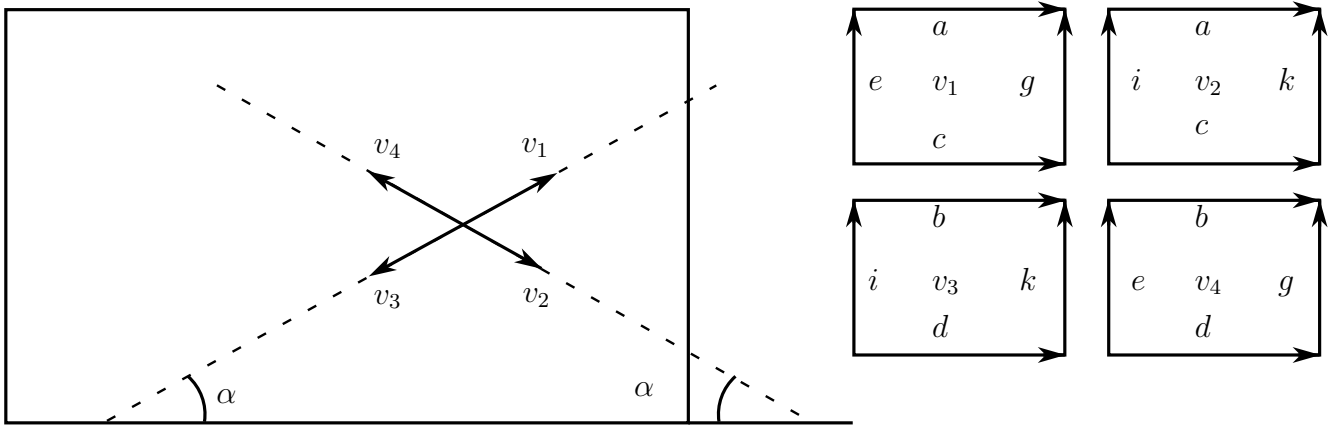


Рис. 93: Векторы скорости  $A^{-1}(\alpha_0)$  и склейки листов, соответствующих векторам  $v_1, \dots, v_4$ .

на рис.93.

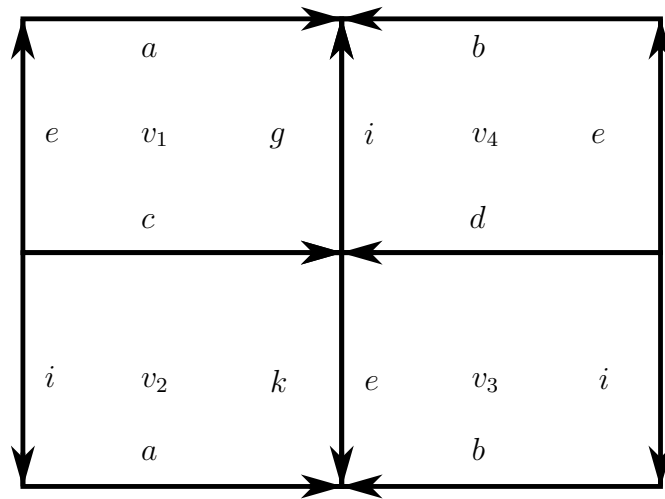


Рис. 94: Склейка прямоугольников.

Данную склейку можно привести к склейке (см.рис.94), соответствующей двумерному тору.

## 7 Программа экзамена (2025 год)

1. Топологическое пространство. Примеры. Непрерывные отображения: эквивалентные определения.
2. Основные классы топологических пространств: связные и линейно связные пространства. Их свойства.
3. Основные классы топологических пространств: компактность, хаусдорфовость.
4. Непрерывные отображения и гомеоморфизм. Примеры. Свойства непрерывных кривых.
5. Комбинаторное и топологическое описание графов. Вложения графов. Существования вложения произвольного графа в трёхмерное пространство.
6. Планарные графы. Теорема о существовании вложения планарного графа в плоскость так, чтобы его рёбра изображались ломаными.
7. Теорема Жордана для замкнутой ломаной.
8. Лемма о четырёх точках. Непланарность  $K_{3,3}$ .
9. Теорема Жордана для замкнутой непрерывной кривой (доказательство, что кривая разбивает плоскость не менее чем на две компоненты).
10. Формула Эйлера для плоских графов. Критерий Понтрягина-Куратовского.
11. Определение выпуклой многогранной поверхности и многогранника. Выпуклые многогранники, три определения. Их эквивалентность.
12. Формула Эйлера выпуклых многогранников. Классификация правильных многогранников. Теорема Коши о конгруэнтности выпуклых многогранников с одинаковыми гранями (без доказательства).
13. Ёж многогранника и его свойства. Теорема Минковского (без доказательства).
14. Теорема Бойяи-Гервина о равносторонности равновеликих многоугольников.
15. Инвариант Дена. Теорема о неравносторонности равновеликих куба и правильного тетраэдра.



16. Определение двумерного многообразия. Примеры двумерных многообразий (сфера, тор, бутылка Клейна, проективная плоскость) и их представление в виде склейки многоугольников.
17. Теорема классификации двумерных компактных связных многообразий (без края). Представление в виде склеек многоугольников.
18. Теорема классификации двумерных компактных связных многообразий (без края). Негомеоморфность многообразий, принадлежащих различным сериям и многообразий в одной серии с различными кодами. Эйлера характеристика поверхности. Ориентируемость поверхности.
19. Связная сумма поверхностей. Переформулировка теоремы классификации двумерных компактных связных многообразий (без края) в терминах связанных сумм торов и проективных плоскостей.
20. Регулярные параметризованные кривые на плоскости. Различные варианты определения гомотопии кривых. Примеры.
21. Монотонная замена параметра регулярной кривой, поворот, параллельный перенос, гомотетия с положительным коэффициентом как примеры регулярной гомотопии замкнутых кривых.
22. Число вращения. Теорема Уитни о классификации замкнутых регулярных кривых на плоскости с точностью до регулярной гомотопии.
23. Классификация замкнутых регулярных кривых на сфере и цилиндре. Классификация замкнутых непрерывных кривых на торе.
24. Гомотопическая эквивалентность. Примеры.
25. Трёхмерные многообразия. Примеры. Склейка трёхмерной сферы и прямого произведения двумерной сферы на окружность из двух полноторий.
26. Биллиарды. Изоэнергетическая поверхность. Класс гомеоморфности поверхности в зависимости от области биллиарда.
27. Интегрируемые биллиарды. Биллиард в круге и прямоугольнике. Регулярные поверхности уровня пары интегралов.

## 8 Заключение

Неужели всё? Ну, на самом деле, мне определённо есть что дополнить. Как минимум, шестая глава очень сырая. Ждите обновления, дополнения и исправления. Надеюсь, данный конспект был полезен. Всем успехов на сессии и не забывайте первое правило вёрстки конспектов в L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: «Никогда не верстать конспекты по геометрическим предметам».

*Егор Цыбулин, 2025 год.*

## Список литературы

- [1] В.Г. Болтянский, В.А. Ефремович. Наглядная топология. Москва: Наука, 1983. 160 с.
- [2] Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). Москва: Наука, 1990. 288 с.
- [3] К.Л. Козлов. [Введение в топологию](#). Москва: teach in, электронное издание. 92 с.
- [4] А.А. Ошемков. [Наглядная геометрия и топология. Лекции](#). Москва: teach in, электронное издание. 185 с.
- [5] А.А. Ошемков. [Наглядная геометрия и топология. Семинары](#). Москва: teach in, электронное издание. 68 с.
- [6] А.А. Ошемков и др. Курс наглядной геометрии и топологии. Москва: ЛЕ-НАНД, 2015. 360 с.
- [7] В.В. Прасолов. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. Москва: МЦНМО, 2004. 352 с.
- [8] Учебные материалы по наглядной геометрии и топологии от кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. URL: <http://dfgm.math.msu.ru/ngit.php> (дата обращения: 19.02.2025).