

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Конспект курса «Наглядная геометрия и топология»

**Автор курса:** профессор, д.ф.-м.н. Ведюшкина Виктория Викторовна

**Автор конспекта:** [Цыбулин Егор](#), студент 108 группы

Москва, 17 февраля 2025 г.

# Содержание

1	Топологические пространства	2
---	-----------------------------	---

# 1 Топологические пространства

**Определение 1.1.** *Метрика* — это функция  $\rho(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ , которая обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
3.  $\rho(x, z) + \rho(z, y) \geq \rho(x, y)$ .

**Определение 1.2.** Множество  $X$  называется *метрическим пространством*, если на нём задана метрика  $\rho(x, y) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение 1.3.**  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  — это множество всех точек  $x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon$ .

Из курса математического анализа. Свойства открытых множеств:

1. Пустое множество и само множество  $X$  открыты;
2. Любые объединения открытых множеств открыты;
3. Конечное пересечение открытых множеств открыто.

**Определение 1.4.** Семейство  $\tau$  подмножеств некоторого множества  $X$ , удовлетворяющее условиям 1-3, называется *топологией*.

**Определение 1.5.** Пусть  $X$  — произвольное множество и  $\tau = \{U_\alpha\}$  — некоторое семейство подмножеств множества  $X$ . Семейство подмножеств  $\tau$  называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое множество и само множество  $X$  принадлежат  $\tau$ ;
2. Объединение любого семейства множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
3. Пересечение любого конечного семейства множеств из  $\tau$  также принадлежит  $\tau$ .

**Определение 1.6.** Множество  $X$  с фиксированной топологией  $\tau$  называется *топологическим пространством* и обозначается через  $(X, \tau)$ .

Если  $X$  — метрическое пространство, то на нём можно задать топологию, индуцированную метрикой: множество открыто, если любая точка входит в него с некоторым  $\varepsilon$ -шаром (некоторой окрестностью).

Примеры:

1.  $\emptyset, X$ , других нет — *тривиальная топология*.
2. Семейство  $\tau$  состоит из всех подмножеств множества  $X$  — *дискретная топология*.

**Определение 1.7.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $x_0 \in X$ . *Окрестностью точки*  $x_0$  назовём любое открытое множество, содержащее эту точку.

**Утверждение 1.1.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  открыто  $\Leftrightarrow \forall x_0 \in A \exists U_{x_0} \in \tau : x_0 \in U_{x_0} \subset A$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $A$  открыто,  $x_0$  — точка  $A$ , тогда  $U_{x_0} = A$ .

$\Leftarrow$  Возьмём  $x \in U_x \subset A$ , где  $U_x$  открыты ( $\in \tau$ ). Рассмотрим  $\cup_{x \in A} U_x = U$ , где  $U$  открыто, т.к. все  $U_x$  открыты. При этом  $A \subset U$  и  $U \subset A \Rightarrow U = A \Rightarrow A$  открыто.  $\square$

**Определение 1.8.** Обратимся к курсу математического анализа. Пусть  $D_f$  — область определения  $f(x)$ ,  $x_0 \in D_f$ . Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in B_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap D_f : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

то  $f(x)$  называется *непрерывной* в точке  $x_0$ .

$$f : X \rightarrow Y \quad \forall B_\varepsilon(f(x_0)) \exists B_\delta(x_0) : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

— в терминах окрестностей.

**Определение 1.9.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  топологии пространств  $X$  и  $Y$  *непрерывно*, если  $\forall x_0 \in X$  и для любой окрестности  $\delta$  точки  $f(x_0)$  существует окрестность точки  $x_0$  такая, что  $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0))$ .

**Утверждение 1.2.** *Отображение  $f$  двух топологических пространств непрерывно  $\Leftrightarrow$  прообраз любого открытого множества открыт.*

*Доказательство.*  $\Rightarrow$   $f : X \rightarrow Y$ . Пусть  $A \subset Y$  открыто. Рассмотрим  $f^{-1}(A)$ . Пусть  $x_0 \in f^{-1}(A) \Rightarrow \exists U$  — открытое:  $f(U) \subset A \Rightarrow U \subset f^{-1}(A)$ .

$\Leftarrow$  Пусть прообраз любого множества открыт. Пусть  $x_0 \in X \Rightarrow f(x_0) \in Y$ . Возьмём  $V \subset Y$ , которое будет открыто.  $f(x_0) \in V \Rightarrow f^{-1}(V)$  — открытое множество и  $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow U := f^{-1}(V)$ .  $\square$

Другие способы задания топологии:

1. Топология на подмножестве:

Пусть  $X$  — топологическое пространство.  $X_0 \subset X$ .  $U \in \tau(X) \Rightarrow U \cap X_0 \in \tau(X_0)$ .

2.  $f : X \rightarrow Y$ ,  $Y$  — топологическое пространство,  $f$  — произвольное отображение. Тогда открытые множества на  $X$  — прообразы открытых на  $Y$ .

*Замечание 1.1* (Дополнение с лекции №2). Топология на  $Y$  порождается отображением  $f$ : множество открыто, если его прообраз открыт.

**Определение 1.10.** Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомеоморфными*, если между ними существует непрерывная биекция  $f : X \rightarrow Y$ , которая и называется *гомеоморфизмом*, такая, что отображение  $f^{-1}$  также непрерывно.

**Определение 1.11.** Множество  $A$  топологического пространства  $X$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $X \setminus A$  открыто.

**Определение 1.12.** Топологическое пространство  $X$  называется *связным*, если не существует двух открытых непустых непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  таких, что  $X = A \cup B$ .

**Утверждение 1.3.** *Отрезок вещественной прямой в стандартной топологии связан.*

*Доказательство.* От противного. Пусть отрезок несвязен.  $\exists A, B \subset \mathbb{R} : [a, b] = A \cup B$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , где  $A, B$  — открытые множества. Пусть  $\alpha \in A$ , тогда  $[a, \alpha) \subset A$  (т.к.  $A$  открыто). Рассмотрим  $\alpha_0 = \sup \alpha : [a, \alpha) \subset A$ .

Пусть  $\alpha_0 \in A$ , тогда:

1.  $\alpha_0 = b \Rightarrow B = \emptyset$  — противоречие.

2.  $\alpha_0 < b \Rightarrow \alpha_0$  входит в  $A$  с окрестностью  $\Rightarrow$  существует  $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon) \in A \Rightarrow \alpha_0$  — не супремум — противоречие.

□

Возвращаемся к гомеоморфизму.

**Пример 1.1.** Интервал гомеоморфен вещественной прямой  $\mathbb{R}$ . (Сюда рисунок с окружностью с выколотой точкой и прямой (стереографическая проекция), тогда можно задать гомеоморфизм между окружностью и прямой. Гомеоморфизм между отрезком и прямой строится "растягиванием окружности").

**Утверждение 1.4.** *Непрерывный образ связного пространства связан.*

*Доказательство.*  $f : X \rightarrow Y$ . От противного. Пусть образ несвязен. Тогда  $Im f = A \cup B$ , где  $A, B$  — открытые и непустые множества,  $A \cap B = \emptyset$ .  $f^{-1}(A)$  открыто,  $f^{-1}(B)$  открыто. Если множества не пересекаются, то и их образы не пересекаются. Так как множества не пусты, то и их образы не пусты.  $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X \Rightarrow X$  не связно — противоречие. □

Добавь сюда что-нибудь про топологические инварианты (связность, компактность).

**Определение 1.13.** *Непрерывная кривая (параметрическая)* — непрерывное отображение ненулевого отрезка в топологическое пространство.  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , где  $\gamma$  непрерывна.

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

**Определение 1.14.** Топологическое пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить кривой.

$x, y$  — точки  $X$ , тогда  $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X : \gamma(\alpha) = x, \gamma(\beta) = y$

**Утверждение 1.5.** *Образ линейно связного пространства линейно связан.*

*Доказательство.* Композиция непрерывных отображений непрерывно:  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow X, f : X \rightarrow Y$ . □

**Утверждение 1.6.** *Если топологическое пространство линейно связно, то оно связно. (Наоборот, вообще говоря, неверно — как задачу можно дать приведение контрпримера).*

*Доказательство.* Пусть топологическое пространство линейно связно, но не связно. Тогда  $X = A \cup B$ . Возьмём  $x \in A, y \in B$ . Пользуемся линейной связностью:  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma$  непрерывна,  $\gamma(0) = A, \gamma(1) = B, Im \gamma$  в  $X$  — связно.  $Im \gamma \cap A$  — открыто в топологии образа  $Im \gamma$ , индуцированного топологии на  $X$  (пользуемся топологией на подмножестве),  $Im \gamma \cap B$  — открыто в топологии образа  $Im \gamma$ , индуцированного топологии на  $X$  — получили противоречие с тем, что отрезок несвязен. □

**Определение 1.15.** Топологическое пространство *компактно*, если из его любого открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**Утверждение 1.7.** *Непрерывный образ компакта является компактом.*

*Доказательство.* Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Покрываем образ:  $Im f \subseteq \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  — покрытие.  $X \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}(U_{\alpha})$  — открытое покрытие  $X$  (т.к.  $f$  непрерывно).  $X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$  — конечное подпокрытие. Пользуемся компактностью  $X$ :  $Im f \subset \bigcup_{i=1}^n f(U_i)$  □

**Утверждение 1.8.** *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

*Доказательство.*  $M \subset X \subset Y$ ,  $M$  замкнуто,  $X$  компактно,  $Y$  — топологическое пространство.  $M \subset \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  открытое покрытие  $M$ .  $(Y \setminus M) \cup \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  — открытое покрытие. Выберем в нём конечное подпокрытие:  $X \subset (Y \setminus M) \cup \bigcup_{i=1}^n U_i$  — конечное подпокрытие.  $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ .  $\square$

**Определение 1.16.** Топологическое пространство  $X$  называется *хаусдорфовым*, если у любых двух его различных точек существуют непересекающиеся окрестности.

$\tau = X, \emptyset \Rightarrow X$  не хаусдорфово.

**Лемма 1.1.** *Компакт в хаусдорфовом пространстве является замкнутым множеством.*

*Доказательство.*  $M \subset X$ ,  $M$  — компакт.  $x_0 \in X \setminus M$ ,  $y \in M$ . Пользуемся хаусдорфовостью:  $x_0 \in U_{x_0}^y$ ,  $y \in V_y$ ,  $U_{x_0}^y \cap V_y = \emptyset$ .  $\bigcup_{y \in M} V_y$  — открытое покрытие всего множества  $M$ . Пользуемся компактностью: выберем конечное подпокрытие  $M \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ ,  $y_i \in M$ .  $\bigcap_{i=1}^n U_{x_0}^{y_i} = U$ ,  $x_0 \in U$ ,  $U \cap V_{y_i} = \emptyset$ ,  $U$  открытое  $\Rightarrow X \setminus M$  открыто.  $\square$

**Утверждение 1.9.**  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  — непрерывная биекция,  $X$  — компакт,  $Y$  — хаусдорфово топологическое пространство  $\Rightarrow f$  — гомеоморфизм.

*Доказательство.*  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  замкнуто,  $M \subset X$ ,  $M$  замкнуто  $\Rightarrow M$  компактно  $\Rightarrow f(M) \subset Y$ , где  $f(M)$  тоже компактно (т.к.  $f$  непрерывно)  $\Rightarrow f(M)$  замкнуто в  $Y$ .  $\square$

Фактор-топология: дано топологическое пространство  $X$ , и на нём задано отношение эквивалентности:  $f : X \rightarrow X/\sim$ .  $f$  сопоставляет каждой точке из  $X$  её класс эквивалентности. Топология  $X/\sim$  задаётся отображением  $f$ .

Важный пример не забудь добавить.