

**Основные конструкции языка C++. Полиморфизм, инкапсуляция, наследование. Конструкторы и деструкторы. Перегрузка унарных и бинарных операторов. Утечка памяти. Исключения. Ключевые слова (что означают, зачем используются, примеры использования): try, catch, const, static, public, private, protected, friend, template.**

### Основа (объект, класс)

В понятие объекта будем вкладывать следующий смысл:

1. Способ организации данных (деление данных на элементы, определение взаимодействий между отдельными элементами данных, задание *дисциплины доступа* к данным)
2. Правила модификации данных (*алгоритмы*), обеспечивающие обработку и преобразование данных
3. Правила взаимодействия данного объекта с другими объектами (*интерфейс*).

Итак,

#### Def

*Объект (object)* — это некоторая конструкция, которая обладает внутренним состоянием (набором данных) и набором функций, позволяющих это состояние модифицировать. Функции из этого набора могут быть доступны внешнему использованию (public-интерфейс), но также могут быть закрыты от внешнего воздействия и использоваться только как внутренние (private) алгоритмы объекта.

На C++ объект реализуется с помощью классов.

#### Def

*Класс (class)* — это структура, которая содержит некоторый набор данных и также набор методов (функций), которые могут выполнять работу с данными этого класса, преобразуя эти данные и тем самым меняя состояние конкретного экземпляра класса.

По Шилдту: класс — это механизм для создания объектов.

Короче говоря, класс — это такой шаблон, а объект — это его конкретная реализация, класс — это кусок исходного кода, а объект — это кусок памяти в компьютере (надеюсь, питонисты не прочитают этот текст..).

### Концепции ООП (полиморфизм, инкапсуляция, наследование)

Все языки объектно-ориентированного программирования (в том числе C++) основаны на трёх основных концепциях, называемых полиморфизмом, инкапсуляцией и наследованием.

### Def

*Инкапсуляция (encapsulation)* — механизм, который объединяет данные и код, манипулирующий с этими данными, а также защищает и то, и другое от внешнего вмешательства и неправильного использования.

### Tip

Когда данные и код объединяются согласно инкапсуляции, создаётся *объект* (объект — это то, что поддерживает инкапсуляцию).

Короче говоря, этот принцип гласит, что вам не надо знать что происходит внутри объекта, когда вы жмёте на какие-то кнопки (используете публичные методы) («чёрный ящик»).

Таким образом, благодаря этому принципу, у нас и данные защищены, и не надо думать над тем, как там всё устроено внутри объекта.

## Полиморфизм

### Def

*Полиморфизм (polymorphism)* — это свойство, которое позволяет одно и то же имя использовать для решения двух или более схожих, но технически разных задач.

Например, в С были функции `fabs()`, `labs()`, `abs()` для конкретного типа данных, а в объектно-ориентированном С++ каждая из них могла быть названа просто `abs()`.

Например, практически везде ограниченно применяется полиморфизм в арифметических операторах: в С символ «+» используется и для целых чисел, и для чисел с плавающей точкой.

Полиморфизм позволяет манипулировать объектами разной степени сложности путём создания для них стандартного интерфейса для реализации похожих действий. Таким образом, благодаря этому принципу, достаточно помнить и использовать общий интерфейс объектов.

### Дополнение

Есть такие понятия как *перегрузка функций* (function overloading) и *перегрузка операторов* (operator overloading). Это такой полиморфизм, при котором компилятор сам «по контексту» выберет какую функцию (оператор) выбрать в данном случае.

## Наследование

### Def

*Наследование (inheritance)* — это процесс, посредством которого один объект может приобретать свойства другого. Более точно, объект может наследовать основные свойства родительского объекта и добавлять к ним черты, которые характерны только для него.

Например, я — объект класса «студент мехмата», но студент мехмата — это часть более общего класса — «студент МГУ» и так далее.

Данный принцип важен для поддержания иерархии классов (hierarchical classification).

## Классы в C++

```
class MyClass {  
    // закрытые функции и переменные класса  
public:  
    // открытые функции и переменные класса  
} //список объектов (кто-то хоть раз тут что-то писал?)  
;
```

Пример:

```
class MyClass {  
    int a;  
public:  
    void set_a (int num);  
    int get_a ();  
};  
  
void MyClass::set_a (int num) {  
    a = num;  
}  
  
int MyClass::get_a () {return a;}  
  
int main() {  
    MyClass ob1, ob2;  
    ob1.set_a(10);  
    ob2.set_a(99);  
    cout << ob1.get_a() << " " << ob2.get_a() << endl;  
    return 0;  
}
```

В Шилдте переводчик гений и общепринятый перевод member function в виде метода заменил на какую-то функцию-член. Короче, метод — это функция, которая принадлежит классу или структуре. Она работает с конкретным объектом и имеет доступ к его внутреннему состоянию. Вызывается точкой после названия объекта.

В отличие от структур, классы обеспечивают инкапсуляцию, наследование и полиморфизм.

ляляляляляляля ляляля ляляляляляля

## Права доступа

Кто может обращаться к членам класса?

- **Public** — доступ открыт всем.
- **Protected** — доступ открыт только классу и его наследникам
- **Private** — доступ есть только внутри класса, права доступа не наследуются.

Пример:

```
class Base {
public:
    int public_member;
protected:
    int protected_member;
private:
    int private_member;
};

class Derived : public Base {
public:
    void access_members() {
        public_member = 1; // Доступно
        protected_member = 2; // Доступно
        // private_member = 3; // Ошибка: private_member недоступен
    }
};

int main() {
    Derived d;
    d.public_member = 4; // Доступно
    // d.protected_member = 5; // Ошибка: protected_member недоступен извне
    return 0;
}
```

## Шаблоны

Тут всё просто: `template<typename T>` или `template<class T>`.

## Конструкторы

Конструктор отвечает за то, в каком состоянии будет создаваться класс при его объявлении в программе.

Пример:

```
class MyClass {
    int a;
    int b;
public:
```

```

MyClass() = default; // конструктор называется так же, как и класс
MyClass() {a = b = 0;}
MyClass(int n, int m) {a = n; b = m;}
MyClass(int n = 0, int m = 0) {a = n; b = m;}
MyClass(int n = 0, int m = 0) : a(n), b(m) {}
void set_a (int num);
int get_a ();
};

```

## Деструкторы

Деструктор отвечает за уничтожение класса. По сути он освобождает ресурсы, захваченные классом во время его жизни. Пример:

```

class MyClass {
    int a;
public:
    MyClass() = default;
    ~MyClass() = default; // обозначается с тильдой
    void set_a (int num);
    int get_a ();
};

```

## Конструктор копирования

```

class MyClass {
public:
    int val;
    MyClass(int v) : val(v) {}
    // конструктор копирования
    MyClass(const MyClass& other) : value(other.val) {}
};

```

Он вызывается при инициализации объекта другим объектом:

```

MyClass obj1(10); // обычный конструктор
MyClass obj2(obj1); // конструктор копирования
MyClass obj3 = obj1; // тоже конструктор копирования (не присваивание!)

```

и при всяких передачах объекта в функцию или возвратах объекта из функции по значению.

## Перегрузка унарных и бинарных операторов

### Def

*Перегрузка (overloading) операторов* — это процедура определения встроенных операторов (+, -, \*, /, ++, =, //, \*\* и т.д.) для объектов класса.

## Def

*Оператор присваивания копированием* — оператор, который копирует состояние одного объекта в другой существующий объект.

Его можно вызвать двумя способами: как функцию со своим специфическим именем, либо как выражение с кратким значком операции:

```
const MyClass& MyClass::operator= (const MyClass &c);  
// вызовы:  
a.operator=(b);  
// или  
a = b;
```

Примеры:

```
Complex Complex::operator +(const Complex &a){  
    Complex tmp;  
    tmp.re=re+a.re;  
    tmp.im=im+a.im;  
    return tmp;  
}
```

```
// оператор присваивания копированием (всегда возвращают *this)  
const NumberA & operator=(const NumberA & v) { value = v.value; error = v.error; return *this;  
}  
const NumberA & operator=(double v) { return *this = NumberA(v); }  
  
// а вообще надо делать по-умному:  
class My_Array {  
    int * array;  
    int count;  
public:  
    My_Array & operator = (const My_Array & other) {  
        if (this != &other) { // защита от неправильного самоприсваивания  
            // 1: выделяем "новую" память и копируем элементы  
            int * new_array = new int[other.count];  
            std::copy(other.array, other.array + other.count, new_array);  
            // 2: освобождаем "старую" память  
            delete [] array;  
            // 3: присваиваем значения в "новой" памяти объекту  
            array = new_array;  
            count = other.count;  
        } // по соглашению всегда возвращаем *this  
        return *this;  
    }  
};
```

```

class Vector {
private:
    double x, y;
public:
    // 1. Бинарный оператор + (как метод класса)
    Vector operator+(const Vector& other) const {
        return Vector(x + other.x, y + other.y);
    }

    // 2. Унарный оператор - (префиксный, как метод класса)
    Vector operator-() const {
        return Vector(-x, -y);
    }

    // 3. Бинарный оператор += (возвращает ссылку на себя)
    Vector& operator+=(const Vector& other) {
        x += other.x;
        y += other.y;
        return *this;
    }

    // 4. Унарный оператор ++ (постфиксный). Фиктивный int - признак постфиксной формы.
    Vector operator++(int) {
        Vector temp = *this; // Сохраняем старое значение
        x++;
        y++;
        return temp; // Возвращаем старое значение
    }
    // Префиксный ++
    Vector& operator++() {
        ++x; ++y;
        return *this;
    }
};

// 5. Бинарный оператор << для вывода (обычно внешняя дружественная функция)
std::ostream& operator<<(std::ostream& os, const Vector& v) {
    os << "(" << v.x << ", " << v.y << ")";
    return os;
}

```

## Правило трёх

Вообще если программист не определит конструктор копирования, присваивания (копированием) и деструктор, то компилятор создаст их по своему разумению. В простых случаях этого и хватит. Однако в более запущенных случаях считается, что эти три покемона должны быть вместе, а именно:

## Правило трёх

Если программист явно определяет хотя бы одну из функций: конструктор копирования, присваивание (копированием), деструктор, то он должен явно определить и остальные, поскольку если для одной из функций не хватает дефолтной функциональности, то, скорее всего, её не хватает и для оставшихся.

## Утечка памяти

### Def

*Утечка памяти (memory leak)* — ситуация (проблема, оказия, конфуз), когда динамически выделенная память (через `new` или `malloc`) не освобождается (с помощью `delete` или `free`) после окончания её использования.

### Important

*RAII (Resource Acquisition Is Initialization)* — принцип, который гласит, что жизненный цикл ресурса должен быть связан с жизненным циклом объекта: ресурс должен выделяться в конструкторе и освобождаться в деструкторе, обеспечивая автоматическое управление.

Проблема в том, что программа будет потреблять много оперативной памяти и может аварийно завершить работу.

В классах прописываются деструкторы, поэтому при работе с классами можно не волноваться по поводу утечек памяти.

Как проверить? Ну, можно использовать Valgrind (на Linux) или AddressSanitizer.

## Исключения

### Def

*Исключения* — механизм обработки ошибок и исключительных ситуаций, который позволяет отделить код, генерирующий ошибку, от кода, который её обрабатывает.

### Принцип работы:

1. При возникновении ошибки код **генерирует** ( `throws` ) исключение — объект любого типа (чаще всего классы, унаследованные от `std::exception` ).
2. Управление немедленно передаётся вверх по стеку вызовов.
3. Исключение может быть **перехвачено** ( `catch` ) в любом подходящем месте стека, где есть соответствующий обработчик.
4. Если исключение не перехвачено, программа аварийно завершается.

Пример:

```
#include <iostream>
#include <stdexcept>

double divide(int a, int b) {
    if (b == 0) {
        throw std::invalid_argument("Division by zero!"); // ГЕНЕРАЦИЯ
    }
    return static_cast<double>(a) / b;
}

int main() {
    int x, y;
    std::cin >> x >> y;
    try { // БЛОК, ГДЕ МОЖЕТ ВОЗНИКНУТЬ ИСКЛЮЧЕНИЕ
        double result = divide(x, y);
        std::cout << "Result: " << result << std::endl;
    }
    catch (const std::invalid_argument& e) { // ОБРАБОТЧИК
        std::cerr << "Error: " << e.what() << std::endl;
    }
    catch (const std::exception& e) { // Более общий обработчик
        std::cerr << "Standard exception: " << e.what() << std::endl;
    }
    catch (...) { // Перехват ЛЮБОГО исключения
        std::cerr << "Unknown exception!" << std::endl;
    }
    return 0;
}
```

### Ключевые слова

`try`

Начало блока кода, в котором могут быть сгенерированы исключения.

`catch`

Начало блока-обработчика для исключения определённого типа.

`const`

1. **Константность объекта:** запрещает изменение

```
const int size;
```

2. **Константный метод:** гарантирует, что метод не меняет состояние объекта

```
void print() const;
```

3. **Константный параметр:** гарантирует, что функция не изменит аргумент

```
void func(const BigObject& obj);
```

`static`

1. **Статическая переменная в функции:** сохраняет значение между вызовами

```
int counter() { static int c=0; return ++c;}
```

2. **Статический член класса:** один на весь класс, а не на объект

```
static int totalCount;
```

3. **Статический метод:** принадлежит классу, а не объекту, может обращаться только к статическим членам

```
static int getTotal() { return totalCount; }
```

public

Модификатор доступа. Члены, объявленные после `public:`, доступны из любого места программы.

private

Модификатор доступа. Члены доступны **только** методам этого же класса и `friend`-элементам. Основа инкапсуляции.

protected

Модификатор доступа. Члены доступны методам этого класса и его наследникам, а также `friend`-элементам.

friend

Объявляет функцию или класс **"другом"**, предоставляя ему доступ к `private` и `protected` членам. Нарушает инкапсуляцию, но полезен для перегрузки операторов.

```
friend std::ostream& operator<<(...);
```

template

см. раздел «Шаблоны».

## Структуры

Так-то это должно было быть на первом курсе.

Грубо говоря, структура — это класс, у которого все поля по умолчанию public.

Пример:

```
struct Point {
    int x;
    int y;
    void print() {
        cout << "Point(" << x << ", " << y << ")" << endl;
    }
};
```

## Класс vs структура

```
struct ExampleStruct {
    int data; // по умолчанию public
};
```

```
class ExampleClass {
    int data; // по умолчанию private
};
```

```
struct BaseStruct {
    int publicData;
};

struct DerivedStruct : BaseStruct { // наследование по умолчанию public
    // можем напрямую обращаться к publicData
};

class BaseClass {
    int privateData;
public:
    int publicData;
};

class DerivedClass : BaseClass { // наследование по умолчанию private
    // не можем напрямую обращаться к privateData из BaseClass
    // (так как оно унаследовано как private)
};

// чтобы исправить:
class CorrectDerived : public BaseClass { // явно указываем public
    // теперь privateData доступно
};
```

---

## Стек, дек, очередь, приоритетная очередь. Непрерывные реализации на базе массива. Примеры алгоритмов на основе структур данных.

Там дальше будут случаи, когда в комментариях пишу «+ аналогичный с const» — это значит, что надо написать два метода: `const T& <метод> () const {...}` и `T& <метод> () {...}` для того, чтобы можно было вызывать метод для const-объектов.

### Стек

#### Def

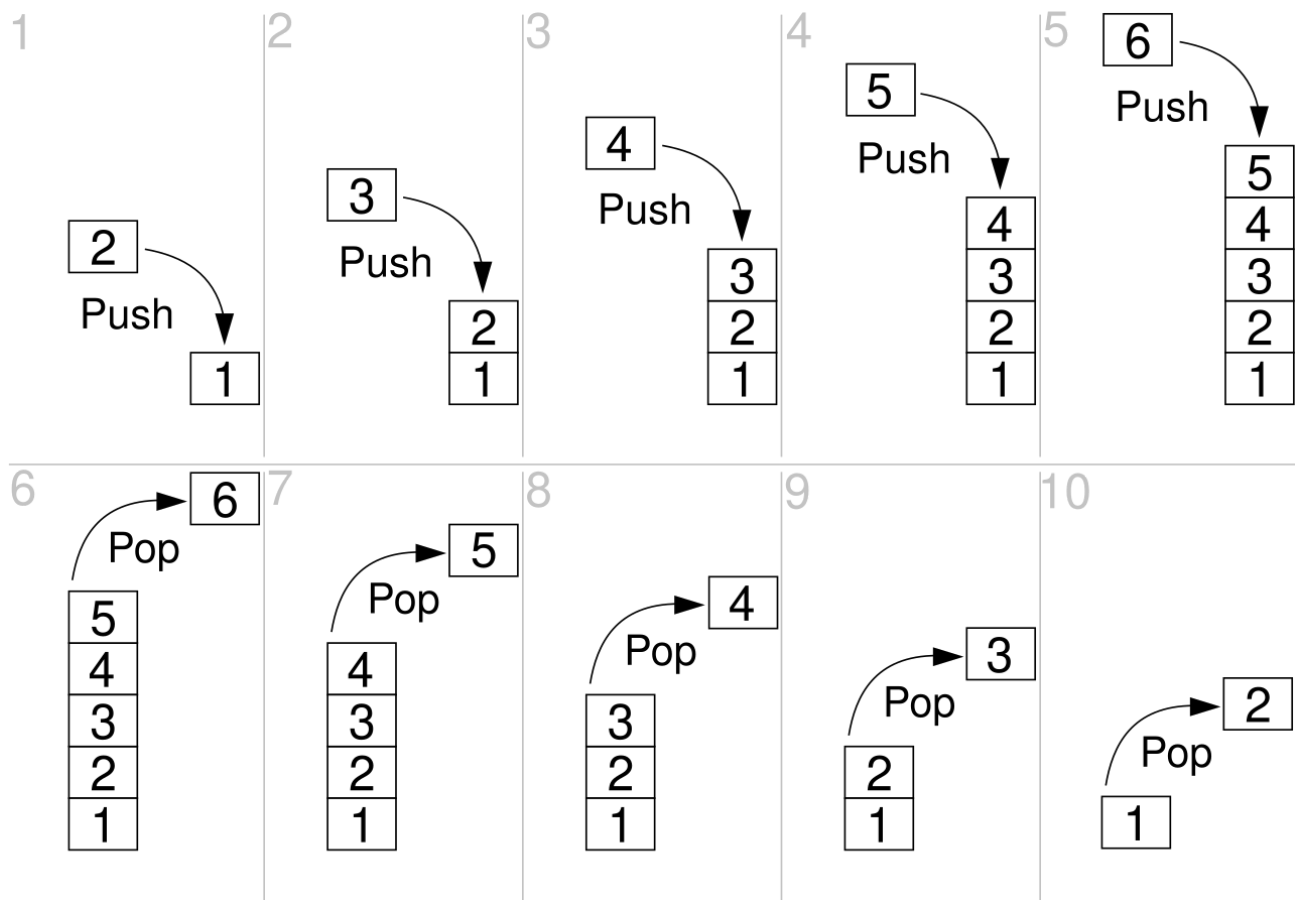
*Стек (stack)* — структура данных, организованная по принципу LIFO (last in — first out). То есть такая структура данных, которая умеет:

1. добавлять элемент в конец;
2. удалять последний элемент;
3. смотреть последний.

Каждую из этих операций умеет за  $O(1)$ .

Функционал:

1. Создание стека
2. Уничтожение стека
3. Добавление элемента в стек
4. Удаление вершины из стека
5. Изъятие элемента из стека
6. Чтение/изменение вершины стека
7. Очистка стека
8. Проверка наличия места в стеке
9. Проверка стека на пустоту



Краткий вариант:

```
class Stack {  
    int* data;  
    int capacity;  
    int topIndex;  
public:  
    Stack(int size) : capacity(size), topIndex(-1) {  
        data = new int[capacity];  
    }  
    void push(int x) {  
        if (topIndex < capacity - 1) {  
            data[++topIndex] = x;  
        }  
    }  
}
```

```

    }
    void pop() {
        if (topIndex >= 0) topIndex--;
    }
    int top() { // + аналогичный с const
        if (topIndex >= 0) {
            return data[topIndex];
        }
        throw std::underflow_error("Stack is empty");
    }
};

```

Реализация от В.Д. Валединского:

```

template <class T>
class Stack {
private:
    T *mem, *top;
    size_t sz;
public:
    Stack (size_t mxsz) : sz(mxsz) {
        mem = new T[sz];
        top = mem - 1;
    }
    Stack (const Stack<T>& st) : sz(st.sz) {
        mem = new T[sz];
        size_t sz2 = st.size();
        for (size_t i = 0; i < sz2; i++) {mem[i] = st.mem[i];}
        top = mem + sz2 - 1;
    }
    ~Stack () {delete [] mem;}

    void push (const T& x);
    void pop ();
    T& top ();
    const T& top() const;
    size_t size() const {return top - mem + 1;}
    size_t capacity () const {return sz;}
};

template <class T>
void Stack<T>::push (const T& x) {
    if (size() < sz) {
        *(++top) = x;
    }
}

template <class T>
void Stack<T>::pop () {
    if (size() > 0) top--;
}

template <class T>

```

```
T& Stack<T>::top () {
    if (size() == 0) throw std::range_error("Stack::top: empty stack");
    return *top;
}
```

## Дек

### Def

*Дек (deque — double-ended queue)* — структура данных, в которой элементы можно добавлять (удалять, смотреть) как в начале, так и в конце.

Функционал:

1. Создание дека
2. Уничтожение дека
3. Добавление элемента в начало / конец дека
4. Изъятие элемента из начала / конца дека
5. Удаление элемента из начала / конца дека
6. Чтение начала / конца дека
7. Изменение начала / конца дека
8. Очистка дека
9. Проверка наличия места в deque
10. Проверка дека на пустоту

Простой пример:

```
class Deque {
    int* data;
    int capacity;
    int front, rear, size;
public:
    Deque(int cap) : capacity(cap), front(0), rear(0), size(0) {
        data = new int[capacity];
    }
    void push_back(int x) {
        if (size < capacity) {
            data[rear] = x;
            rear = (rear + 1) % capacity;
            size++;
        }
    }
    void push_front(int x) {
        if (size < capacity) {
            front = (front - 1 + capacity) % capacity;
            data[front] = x;
            size++;
        }
    }
};
```

```

    }
}

int front_element() { // + аналогичный с const
    if (size > 0) {
        return data[front];
    }
    throw std::underflow_error("Deque is empty");
}

int back_element() { // + аналогичный с const
    if (size > 0) {
        int back_pos = (rear - 1 + capacity) % capacity;
        return data[back_pos];
    }
    throw std::underflow_error("Deque is empty");
}
};

```

Реализация от В.Д. Валединского:

```

template <class T>
class Deque {
private:
    T *mem, *endmem, *front, *back;
    size_t sz;
    T *Next (T *p) {
        return (p == endmem) ? 0 : p + 1;
    }
    T *Prev (T *p) {
        return (p == 0) ? endmem : p - 1;
    }
public:
    Deque (size_t mxsz) {
        mem = new T[mxsz];
        endmem = mem + mxsz - 1;
        back = mem;
        front = Next(back);
        sz = 0;
    }
    ~Deque () {delete [] mem;}
    void push_front (const T& x) {
        if (sz == max_size()) return;
        front = Prev(front);
        *front = x;
        sz++;
    }
    void push_back (const T& x) {
        if (sz == max_size()) return;
        back = Next(back);
        *back = x;
        sz++;
    }
    bool pop_back () {
        if (sz == 0) return false;

```

```

        back = Prev(back);
        sz--;
    }
    bool pop_front () {
        if (sz == 0) return false;
        front = Next(front);
        sz--;
    }
    bool del_head () {
        if (sz == 0) return false;
        head = Prev(head);
        sz--;
        return true;
    }
    T& front () {
        if (sz == 0) throw std::range_error("Deque::front() : empty queue\n");
        return *front;
    }
    T& back ();
    size_t size() const {return sz;}
    size_t max_size() const {return endmem - mem + 1;}
};

```

## Очередь



Def

Очередь (*queue*) — структура данных, организованная по принципу FIFO (first in — first out).

Функционал:

1. Создание очереди
2. Уничтожение очереди
3. Добавление элемента в конец очереди
4. Изъятие элемента из начала очереди
5. Удаление элемента из начала очереди
6. Изменение конца очереди
7. Очистка очереди
8. Проверка наличия места в очереди
9. Проверка очереди на пустоту

По факту полностью повторяет дек, только убираем функцию «добавить в начало» и «удалить в конце»

Прототип:

```

template <class T>
class Queue {
private:
    T *mem, *endmem, *head, *tail;

```

```

    int sz;
public:
    Queue();
    ~Queue();
    int put(T val); // push_back из дека
    int take(T *val); // pop_front из дека
    int del(); // del_head из дека
    // и прочее барахло
};

```

```

class Queue {
    int* data;
    int capacity;
    int front, rear, size;
public:
    Queue(int cap) : capacity(cap), front(0), rear(-1), size(0) {
        data = new int[capacity];
    }
    void enqueue(int x) {
        if (size < capacity) {
            rear = (rear + 1) % capacity;
            data[rear] = x;
            size++;
        }
    }
    void dequeue() {
        if (size > 0) {
            front = (front + 1) % capacity;
            size--;
        }
    }
    int front_element() { // + аналогичный с const
        if (size > 0) {
            return data[front];
        }
        throw std::underflow_error("Queue is empty");
    }
    int back() { // + аналогичный с const
        if (size > 0) {
            return data[rear];
        }
        throw std::underflow_error("Queue is empty");
    }
};

```

## Очередь с приоритетом

Здесь расскажу только концепцию: суть заключается в том, что данная структура поддерживает только две операции: добавить элемент и извлечь максимум (или минимум). То есть есть два метода:

`insert(ключ, значение)` — добавляет пару (ключ, значение) в хранилище

`extract_min()` — возвращает пару (ключ, значение) с минимальным значением ключа, удаляя её из хранилища.

В качестве примера очереди с приоритетом можно рассмотреть список задач работника. Когда он заканчивает одну задачу, он переходит к очередной — самой приоритетной (ключ будет величиной, обратной приоритету) — то есть выполняет операцию извлечения максимума. Начальник добавляет задачи в список, указывая их приоритет, то есть выполняет операцию добавления элемента.

## Общее

Очередь с приоритетом выкидываем, дальше разговор без неё.

В среднем все вышеприведённые структуры умеют добавлять, удалять и вытаскивать крайний для себя элемент за  $O(1)$  и требуют  $O(n)$  памяти.

## Примеры алгоритмов

### Стек

- Задача проверки баланса скобок
- DFS

### Очередь

- BFS

### Дек

- Скользящее окно максимумов (дан массив и длина отрезка, для каждого отрезка найти максимум на нём)

### Приоритетная очередь

- Алгоритм Дейкстры

---

## Ссылочные реализации списков. Однонаправленные и двунаправленные списки.

Скорее для общего развития:

### Def

*Последовательность* — это способ организации данных, смысл которого заключается в том, что в конкретный момент времени мы имеем доступ к текущему элементу последовательности, обработав который, можем перейти к следующему элементу. Если снова хотим вернуться к текущему, то надо заново пройти всю последовательность.

### Def

*Однопроходный алгоритм* — это алгоритм, который вычисляет все необходимые характеристики прямо по ходу чтения последовательности, сохраняя минимально возможное количество элементов.

Примеры задач:

1. Подсчёт количества локальных минимумов
2. Среднее арифметическое

Общее развитие закончилось.

#### Def

*Список* — это структура данных, которая обладает следующими свойствами:

1. Элементы данных образуют линейную цепочку, то есть для каждого элемента существует «следующий» и «предыдущий» (кроме, конечно же, крайних, у них только по одному соседу)
2. В каждый момент времени в этой линейной цепочке определена некоторая текущая позиция и нам разрешён доступ к элементу в этой текущей позиции (или к его непосредственным соседям)
3. Положение текущей позиции можно изменять и тем самым получать доступ к значению любого элемента данной структуры, не извлекая из неё элементов
4. Добавление и удаление элементов может происходить в окрестности текущей позиции, причём эти операции не должны приводить к массовым пересылкам данных в памяти.

Из-за четвёртого пункта нам придётся отказаться от непрерывности и размещать новые элементы там, где им найдётся место, а не по соседству. Для выполнения первого и второго пункта нам теперь придётся *запоминать* кто у кого сосед. Раньше (хаха, куда я ссылаюсь? ну типа в прошлый вопрос, да) для этого были функции `prev` и `next`, которые могли непосредственно посчитать кто для кого кто.

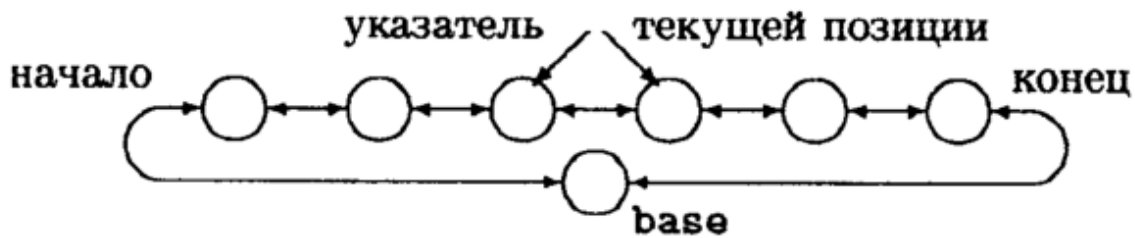
#### Def

*Двунаправленный список* — список, в котором каждый элемент (кроме первого и последнего) ссылается на два соседних с ним элемента.

Соглашения:

1. Каждый элемент списка хранит содержательную информацию и два указателя — на следующий и предыдущий элементы.
2. В каждый момент времени имеется доступ только к двум соседним элементам списка.
3. Удалять можно только соседей.
4. Новые элемент можно добавлять только по соседству.

А что делать с крайними элементами? Ну либо можно обнулить отсутствующих соседей (указатели), либо можно закольцевать список: возьмём элемент `base` и сделаем его предыдущим для первого и последующим для последнего. Зная адрес размещения `base`, знаем краевой ли рассматриваемый элемент.



**Рис. 6.1. Схема закольцованного двустороннего списка.**

Функционал (система предписаний, как пишет всегда Валединский):

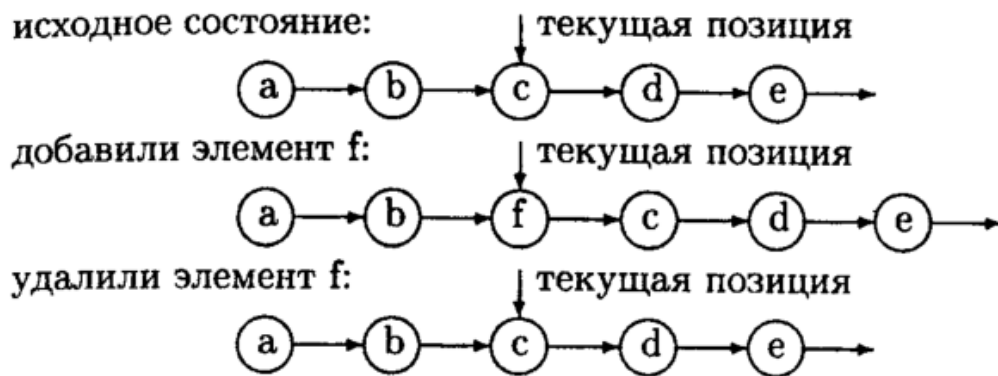
1. Создать список
2. Уничтожить список
3. Добавить элемент до (или за) указателем
4. Удалить элемент до (или за) указателем
5. Прочитать элемент до (или за) указателем
6. Изменить элемент до (или за) указателем
7. Передвинуть указатель вперед (или назад)
8. Встать в начало (конец) списка
9. Очистить список
10. Список пуст?
11. Указатель в конце (в начале)?

#### Def

*Однонаправленный список* — список, в котором каждый элемент (кроме первого и последнего) ссылается только на следующий элемент.

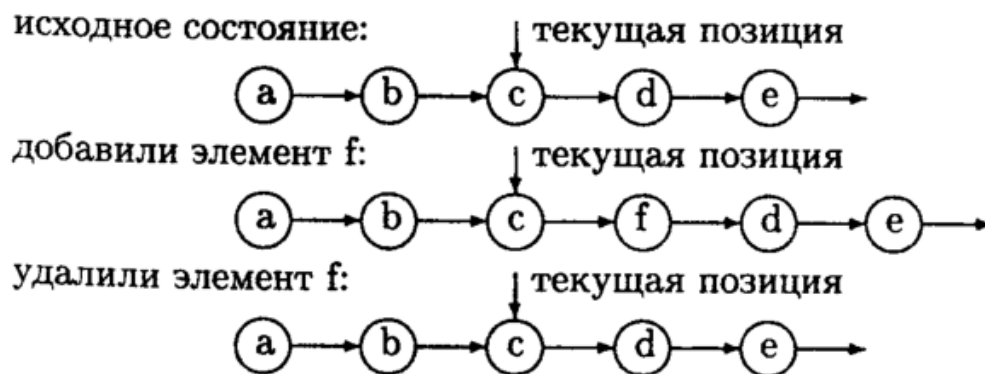
Как добавлять и удалять элементы из однонаправленного списка? Есть два варианта:

1. Удаляется текущий элемент, а новым текущим становится следующий за ним. Добавляемый элемент вставляется перед текущим и становится новым текущим. (тут нужен двойной указатель)



**Рис. 6.2.** Добавление и удаление элементов при первом подходе.

2. Удаляем не текущий элемент, а следующий за ним, добавляемый элемент ставится за текущим, текущая позиция не меняется.



**Рис. 6.3.** Добавление и удаление элементов при втором подходе.

Система предписаний (для второй реализации):

1. Создать список
2. Уничтожить список
3. Добавить элемент за текущим
4. Удалить элемент за текущим
5. Прочитать текущий элемент
6. Изменить текущий элемент
7. Доступ к элементу за текущим
8. Передвинуть текущую позицию вперёд
9. Встать в начало списка
10. Очистить список
11. Список пуст?
12. Текущая позиция в конце списка?

**Деревья. Определения и обходы. Реализация. Бинарные и произвольные (сильноветвящиеся) деревья. Представление произвольного дерева как бинарного.**

*Дерево (tree)* — связный граф без циклов.

*Расстояние между двумя вершинами* — количество рёбер графа, содержащихся в связной цепочке рёбер.

Вершина *B* — *потомок* вершины *A*, если расстояние между *A* и *B* равно 1 и расстояние от *A* до корня меньше, чем расстояние от *B* до корня дерева.

Вершина *A* — *родитель* вершины *B*.

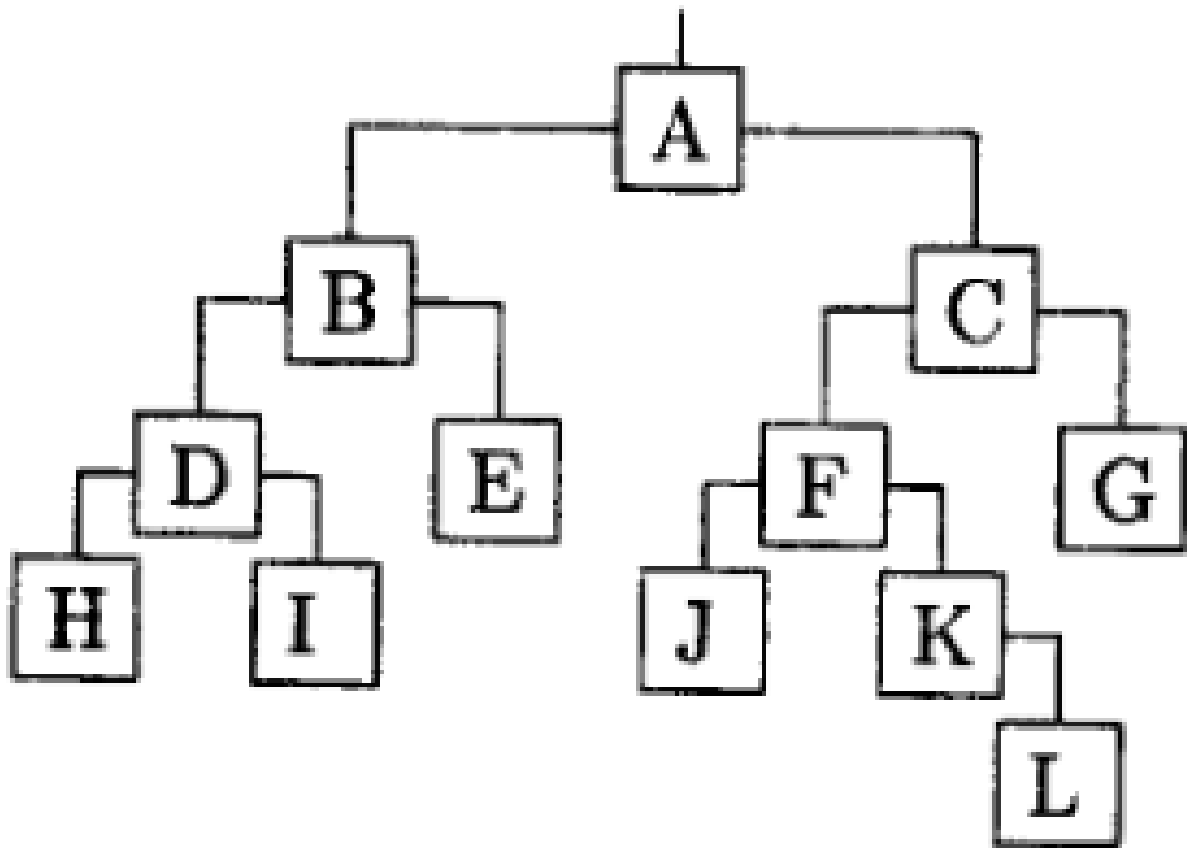
Будем говорить, что вершина *A* принадлежит *k*-му уровню дерева, если расстояние от *A* до корня дерева равно *k*.

*Ветвь дерева* — связная последовательность вершин, начинающаяся в корне и оканчивающаяся на вершине, не имеющей потомков.

### Def

Дерево, в котором каждая вершина имеет не более двух потомков, называется *бинарным*, в противном случае будем дерево называть *произвольным*.

## Обход бинарного дерева



```
class TreeNode {
public:
    Type val;
```

```

    TreeNode *prev; // ссылка на родителя (на самом деле почти никогда не используется, если
дерево имеет рекурсивное представление)
    TreeNode *left, *right;
};

```

Особый интерес представляет задача *обхода графа* (надо обойти все вершины, а вы что думали). Ею и займёмся для бинарного дерева. Вообще дерево можно определить рекурсивно, тогда и обходить можно рекурсивно:

```

// сверху вниз
void Up_Down (TreeNode *pos, Type *max) {
    if (!pos) return;
    if (*max < pos->val) *max = pos->val;
    Up_Down(pos->left, max);
    Up_Down(pos->right, max);
}

// слева направо
void Left_Right (TreeNode *pos, Type *max) {
    if (!pos) return;
    Left_Right(pos->left, max);
    if (*max < pos->val) *max = pos->val;
    Left_Right(pos->right, max);
}

// снизу вверх
void Down_Up (TreeNode *pos, Type *max) {
    if (!pos) return;
    Down_Up(pos->left, max);
    Down_Up(pos->right, max);
    if (*max < pos->val) *max = pos->val;
}

int main() {
    ...
    // поиск максимума на примере Up_Down
    Type max = root->val;
    Up_Down(root, &max);
    ...
}

```

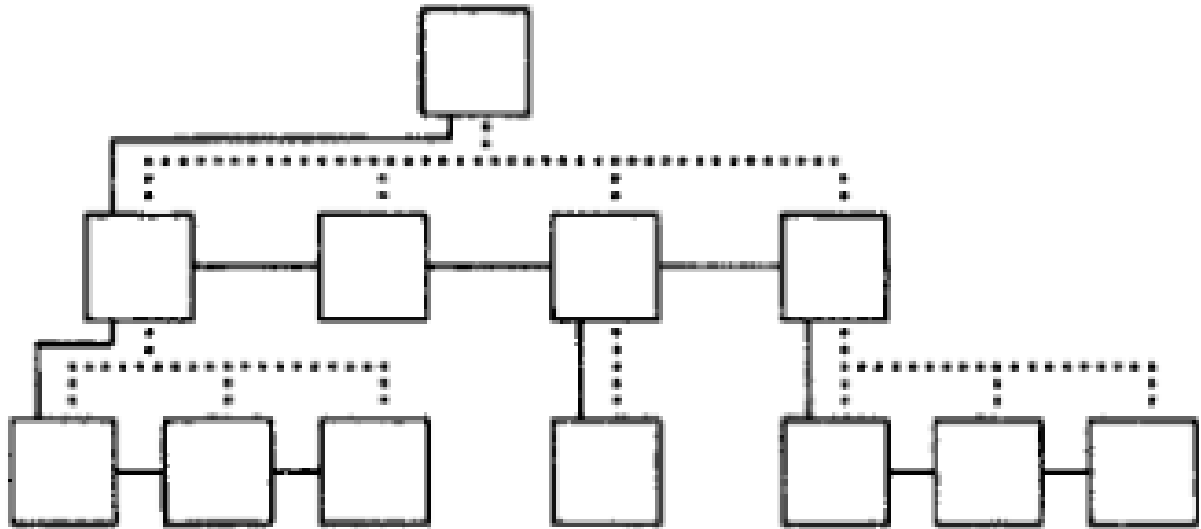
На примере рисунка:

- Сверху вниз: ABDHIECFJKLG
- Снизу вверх: HIDEBJLKFGCA
- Слева направо: HDIBEAJFKLCG

### Обход произвольного дерева

Мы же не знаем сколько изначально будет потомков у текущей вершины, поэтому предлагается всех потомков текущей вершины связать в однонаправленный список в том порядке, в котором они появляются в дереве, а в родительской вершине хранить два указателя: на следующий элемент в списке братьев и на

начало списка потомков данной вершины. Можно также добавить указатель на родительскую вершину, если необходимо перемещаться назад к корню.



Здесь пунктирными линиями обозначены связи между вершинами исходного дерева, а сплошными линиями — связи, определяемые указателями, хранящимися в реализации дерева.

Для такого случая:

```
class TreeNode {
public:
    Type val;
    TreeNode *next;
    TreeNode *down;
};

class TreeNode2 { // на векторах
public:
    Type val;
    vector<TreeNode2> sons;
};

class Tree {
    TreeNode* root; // указатель на корень дерева
public:
    Tree () {root = nullptr;}
};
```

Дальше методом чайника (только слева направо смысла не имеет):

```
void Up_Down (TreeNode *pos, Type *max) {
    if (!pos) return;
    if (*max < pos->val) *max = pos->val;
    pos = pos->down;
    while (pos) {
        Up_Down(pos, max);
        pos = pos->next;
    }
}
```

```
}  
}
```

Таким образом, каждый элемент имеет всего две ссылки на «последующие» элементы, поэтому в тех задачах, где не надо отслеживать принадлежность элементов определённому уровню, можно применять алгоритмы обходов бинарных деревьев.

## Бинарное дерево поиска. Реализация. Процедуры поиска, добавления и удаления элемента.

### Def

*Бинарное дерево поиска (BST — binary search tree)* — бинарное дерево, ключ любой вершины которого не меньше ключа любой вершины левого поддерева и строго меньше ключа любой вершины правого поддерева, то есть:

```
pos->left->val <= pos->val < pos->right->val
```

Ясен пень, что вряд ли на экзамене надо будет прям писать код, тут я имею в виду, что и так понятно что надо делать, если посмотреть на код. Мне понятно)

### Поиск элемента (из Валадинского)

```
class Node {  
public:  
    Type id;  
    Node* l, *r;  
};  
  
class BST {  
public:  
    Node* root;  
    BST () {root = nullptr;}  
};  
  
Node *RecurSearch (Node* root, Type x) { // рекурсивно  
    if (!root) return 0;  
    if (x == root->id) return root;  
    if (x < root->id) return RecurSearch(root->l, x);  
    else return RecurSearch(root->r, x);  
}  
  
Node *DirectSearch (Node* root, Type x) { // нерекурсивно  
    while (root) {  
        if (x == root->id) break;  
        root = (x < root->id) ? root->l : root->r;  
    }  
}
```

```
    return root;
}
```

### Добавление элемента (из Кошелева)

```
Node *_insert (Node* root, Type x) {
    if (v == nullptr) { // новый корень поддерева
        Node* nnode = new Node();
        nnode->id = x;
        return nnode;
    }
    if (root->id == x) {return v;}
    if (root->id < x) {
        root->r = _insert(root->r, x);
        return root;
    }
    if (root->id > x) {
        root->l = _insert(root->l, x);
        return root;
    }
}

void insert (Type x) {
    root = _insert(root, x);
}
```

### Удаление элемента (из Валединского)

```
Node *DelElement (Node* root, Type x) {
    Node *pos;
    if (!root) return 0; // пустое дерево
    if (x == root->id) {
        // не более одного потомка
        if (!root->left) {
            pos = root->l;
            delete root;
            return pos;
        }
        if (!root->right) {
            pos = root->r;
            delete root;
            return pos;
        }
        // два потомка
        for (pos = root->l; pos->r; ) pos = pos->r;
        root->id = pos->id;
        // удаляем ненужную вершину после подмены
        root->l = DelElement(poot->l, pos->id);
    }
    else {
        if (x < root->id) {
            root->l = DelElement(root->l, x);
        }
    }
}
```

```

    }
    else {
        root->r = DelElement(root->r, x);
    }
}
return root;
}

```

Полный пример (из ДЗ Кошелева):

```

#include <iostream>
using std::cin;
using std::cout;
using std::endl;

struct Node {
    int id;
    Node *l, *r;
    Node () {l = r = nullptr;}
};

struct BST {
    Node* root;
    BST () {root = nullptr;}
    ~BST() {
        _clear(root);
    }
    void _clear(Node* v) {
        if (v == nullptr) return;
        _clear(v->l);
        _clear(v->r);
        delete v;
    }
    int _find(Node* v, int x) {
        if (v == nullptr) return 0;
        if (v->id == x) return 1;
        if (x < v->id) return _find(v->l, x);
        return _find(v->r, x);
    }
    Node* _insert(Node* v, int x, bool& inserted) {
        if (v == nullptr) {
            inserted = true;
            Node* nnode = new Node();
            nnode->id = x;
            return nnode;
        }
        if (v->id == x) {
            inserted = false;
            return v;
        }
        if (v->id < x) {
            v->r = _insert(v->r, x, inserted);
        }
    }
}

```

```

        if (v->id > x) {
            v->l = _insert(v->l, x, inserted);
        }
        return v;
    }

Node* _erase(Node* v, int x, bool& removed) {
    if (v == nullptr) {
        removed = false;
        return nullptr;
    }
    if (v->id < x) {
        v->r = _erase(v->r, x, removed);
        return v;
    }
    if (v->id > x) {
        v->l = _erase(v->l, x, removed);
        return v;
    }
    if (v->id == x) {
        removed = true;
        Node* l = v->l;
        Node* r = v->r;
        delete v;
        return _merge(l, r);
    }
    return v;
}

Node* _merge (Node* l, Node* r) {
    if (l == nullptr) {return r;}
    if (r == nullptr) {return l;}
    l->r = _merge(l->r, r);
    return l;
}

int find(int x) {
    return _find(root, x);
}

int insert(int x) {
    bool inserted = 0;
    root = _insert(root, x, inserted);
    return inserted;
}

int erase(int x) {
    bool removed = 0;
    root = _erase(root, x, removed);
    return removed;
}

};

int main() {
    int q;
    cin >> q;

```

```

BST tree;

for (int i = 0; i < q; ++i) {
    int n, x;
    cin >> n >> x;
    if (n == 1) {
        cout << tree.insert(x) << endl;
    } else if (n == 2) {
        cout << tree.erase(x) << endl;
    } else if (n == 3) {
        cout << tree.find(x) << endl;
    }
}
return 0;
}

```

## АВЛ-дерево. Процедуры добавления и удаления элемента. Утверждение о длине АВЛ-дерева.

Вообще BST может вырождаться в линейный список и тогда поиск будет иметь сложность  $O(n)$ , а так-то хорошее бинарное дерево имеет глубину  $O(\log_2 n)$ . Как добавлять новые элементы так, чтобы дерево росло равномерно?

Накинем базы:

### Def

- Идеально сбалансированное бинарное дерево — дерево, длины любых двух ветвей которого отличаются не более чем на единицу, считая от корня.
- Длина дерева — длина его максимальной ветви.

- Сбалансированное бинарное дерево — дерево, для любой вершины которого левое и правое поддеревья отличаются не более чем на единицу.

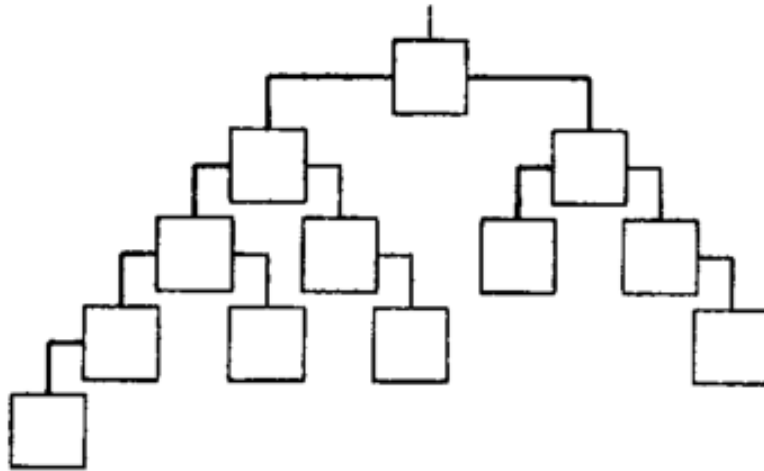


Рис. 7.7. Сбалансированное, но не идеально сбалансированное, дерево.

Тут надо сказать, что Валединский сразу решил, что сбалансированное дерево — это AVL-дерево. Также надо сказать, что далее все элементы в деревьях имеют различные ключи.

#### Theorem

Длина сбалансированного дерева превосходит длину идеально сбалансированного дерева с таким же числом вершин не более чем в 1,5 раза.

Построим наихудший вариант дерева: в любой вершине, кроме концевых, левое поддерево длиннее правого на единицу. Пусть  $N(h)$  — число элементов в худшем дереве глубины  $h$ .

Тогда  $N(0) = 0$  — пустое дерево.

$N(1) = 1$  — дерево с одним элементом.

$N(k) = N(k-1) + N(k-2) + 1$  — похоже на числа Фибоначчи.

Тогда  $N(h) = F_{h+2}$ . При  $h \rightarrow \infty$ :  $F_h \sim \frac{\varphi^h}{\sqrt{5}}$ , где  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Тогда

$$k \sim \log_2 N / \log_2 \varphi \leq 1,45 \log_2 N.$$

#### Балансировка, добавление, удаление

Нам придётся хранить показатель сбалансированности вершины `balance`. Если значение равно -1, 0, 1, то вершина сбалансирована, иначе — нет.

Пусть  $h(T)$  — высота поддерева  $T$ . Если  $|h(L) - h(R)| = 2$ , то вершина разбалансирована, если меньше двух, то сбалансирована. Также пусть  $d[i] = h(L) - h(R)$ . Тогда имеются 4 типа вращения:

Тип вращения	Иллюстрация	Когда используется	Расстановка балансов
Малое левое вращение		$diff[a] = -2$ и $diff[b] = -1$ или $diff[a] = -2$ и $diff[b] = 0$ .	$diff[a] = 0$ и $diff[b] = 0$ или $diff[a] = -1$ и $diff[b] = 1$
Большое левое вращение		$diff[a] = -2$ , $diff[b] = 1$ и $diff[c] = 1$ или $diff[a] = -2$ , $diff[b] = 1$ и $diff[c] = -1$ или $diff[a] = -2$ , $diff[b] = 1$ и $diff[c] = 0$ .	$diff[a] = 0$ , $diff[b] = -1$ и $diff[c] = 0$ или $diff[a] = 1$ , $diff[b] = 0$ и $diff[c] = 0$ или $diff[a] = 0$ , $diff[b] = 0$ и $diff[c] = 0$

Аналогично с правыми.

Ну я так понимаю тут просто картинки надо будет нарисовать и соотношения балансировки написать + идею добавления и удаления. Опишу кратко: тут всё как в BFS, только надо ещё снизу вверх проводить балансировку на выходе из рекурсий.

```

struct Node {
    int id;
    Node* l;
    Node* r;
    int h;
    Node () = default;
    Node (int x) {
        id = x;
        h = 1;
        l = r = nullptr;
    }
};

struct AVL {
    Node* root;
    AVL () {root = nullptr;}
    ~AVL () {clear(root);}

    Node* _insert (Node* v, int x) { // как в BST + балансировка
        if (v == nullptr) {
            Node* nnode = new Node();
            nnode->id = x;
            return nnode;
        }
        if (v->id == x) {return v;}
        if (v->id < x) {
            v->r = _insert(v->r, x);
        }
        if (v->id > x) {
            v->l = _insert(v->l, x);
        }
        return balance(v);
    }

    Node* _erase (Node* v, int x) {

```

```

    if (!v) return nullptr;
    if (x < v->id)
        v->l = _erase(v->l, x);
    else if (x > v->id)
        v->r = _erase(v->r, x);
    else { // нашли элемент, который хотим удалить
        if (!v->l || !v->r) { // 1 или 0 потомков
            Node* temp = v->l ? v->l : v->r;
            if (!temp) { // нет потомков
                temp = v;
                v = nullptr;
            }
            else *v = *temp; // один потомок
            delete temp;
        }
        else { // 2 потомка
            // нам надо найти элемент с как можно более близким значением к x
            // находим минимум в правом поддереве – это и будет нужный элемент
            Node* temp = _find_min(v->r);
            v->id = temp->id;
            v->r = _erase(v->r, temp->id);
        }
    }
    return balance(v);
}

int _search (Node* v, int x) {
    if (!v) return 0;
    if (x == v->id) return 1;
    return x < v->id ? _search(v->l, x) : _search(v->r, x);
}

Node* _find_min (Node* v) {
    return v->l ? _find_min(v->l) : v;
}

int height (Node* v) {
    if (v) return v->h;
    return 0;
}

void upd_height (Node* v) {
    if (v) {
        v->h = 1 + std::max(height(v->l), height(v->r));
    }
}

int diff (Node* v) {
    return v ? height(v->l) - height(v->r) : 0;
}

Node* rotate_left (Node* v) {
    if (!v || !v->r) return v;
    Node* w = v->r;
    v->r = w->l;

```

```

        w->l = v;
        upd_height(v);
        upd_height(w);
        return w;
    }

Node* rotate_right (Node* v) {
    if (!v || !v->r) return v;
    Node* w = v->l;
    v->l = w->r;
    w->r = v;
    upd_height(v);
    upd_height(w);
    return w;
}

Node* big_rotate_left (Node* v) {
    if (!v) return nullptr;
    v->r = rotate_right(v->r);
    return rotate_left(v);
}

Node* big_rotate_right (Node* v) {
    if (!v) return nullptr;
    v->l = rotate_left(v->l);
    return rotate_right(v);
}

Node* balance (Node* v) {
    if (!v) return nullptr;
    upd_height(v);
    if (diff(v) == -2) { // правое поддереву тяжелее
        if (diff(v->r) <= 0) { // правое поддереву правого поддереву тяжелее
            return rotate_left(v);
        }
        return big_rotate_left(v); // левое поддереву правого поддереву тяжелее
    }
    if (diff(v) == 2) { // левое поддереву тяжелее
        if (diff(v->l) >= 0) { // левое поддереву левого поддереву тяжелее
            return rotate_right(v);
        }
        return big_rotate_right(v); // правое поддереву левого поддереву тяжелее
    }
    return v;
}

void clear (Node* v) {
    if (v) {
        clear(v->l);
        clear(v->r);
        delete v;
    }
}

//-----
void insert (int x) {root = _insert(root, x);}
void erase (int x) {root = _erase(root, x);}

```

```
int search (int x) {return _search(root, x);}
};
```

## Красно-чёрное дерево. Процедуры добавления и удаления элемента. Утверждение о длине красно-чёрного дерева.

### Def

Бинарное дерево называется *красно-чёрным*, если оно удовлетворяет следующим требованиям:

1. Каждая вершина имеет свой цвет — красный или чёрный (корень дерева всегда чёрный)
2. Красная вершина может иметь только чёрных потомков
3. В любой ветке от корня до концевой вершины содержится одинаковое число чёрных вершин (это число называется чёрной длиной дерева).

Третье условие даёт основания надеяться на необходимую логарифмическую сложность поиска, ибо красно-чёрное дерево является «идеально сбалансированным по чёрной длине».

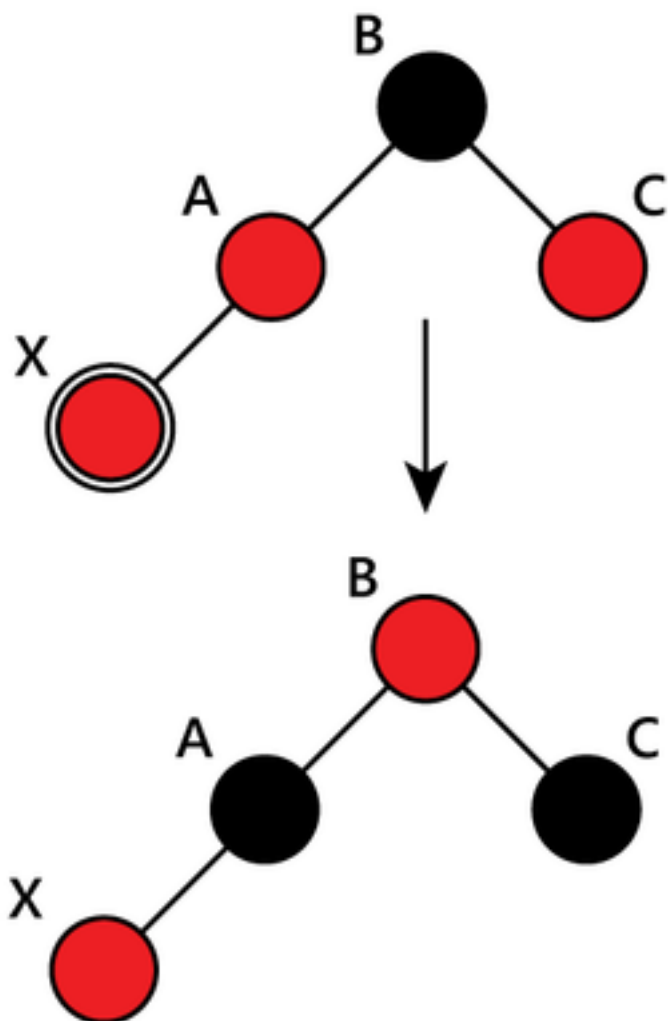
### Theorem

Глубина красно-чёрного бинарного дерева с  $N$  вершинами не превосходит  $2 \log(N + 1)$ .

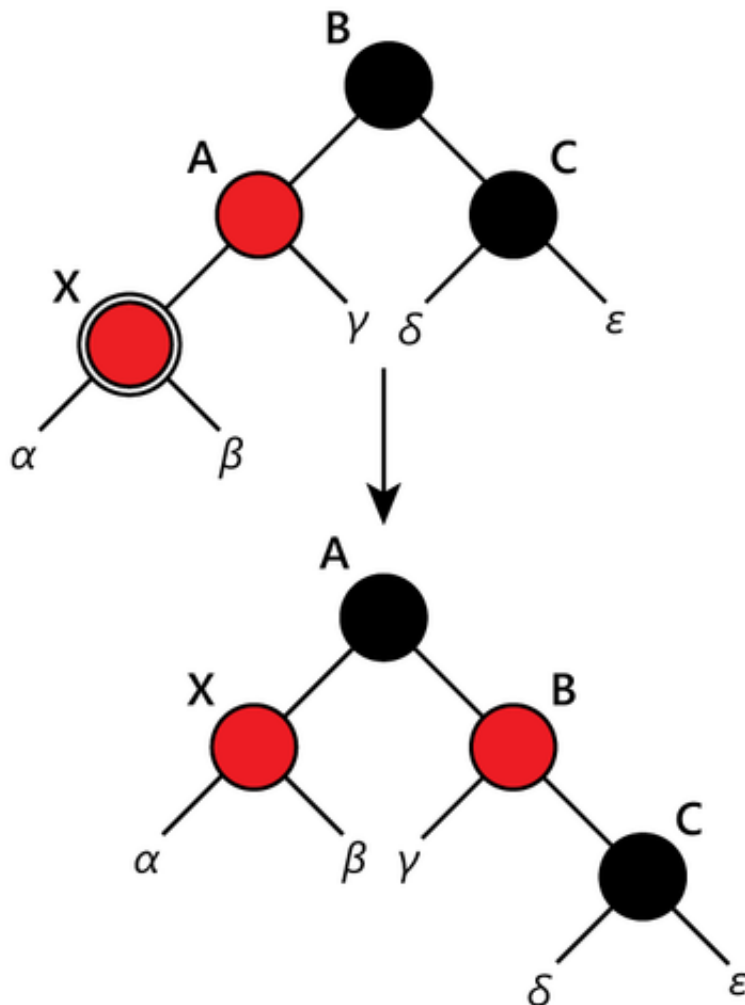
**Доказательство.** Пусть исходное КЧ-дерево имеет длину  $h$ . Построим его до идеально сбалансированного (добавленные вершины не имеют цвета). Количество вершин в новом дереве будет  $N^* = 2^{h+1} - 1$ . В силу второго условия определения количество чёрных вершин в любой ветви исходного дерева не менее количества красных вершин. Таким образом, чёрная длина исходного дерева не менее  $h/2$ . Отсюда следует, что начальная часть построенного идеально сбалансированного дерева до уровня  $h/2$  полностью заполнена вершинами исходного дерева и, следовательно, для количества элементов  $N$  справедлива оценка  $N \geq 2^{\frac{h}{2}+1} - 1$ . Прологарифмируем и получим ответ.

## Алгоритм добавления элемента

1. Добавим элемент как в BST. Он становится концевой вершиной. Красим в красный цвет.
2. Проверяем баланс.
3. Если отец нового элемента чёрный, то ничего не нарушено.
4. Если он красный, то сломано второе свойство, перекрашиваем:
  1. Дядя этого узла тоже красный. Тогда перекрашиваем отца и дядю в чёрный цвет, деда — в красный. Проверяем баланс. Если дошли до корня, то его красим в чёрный.



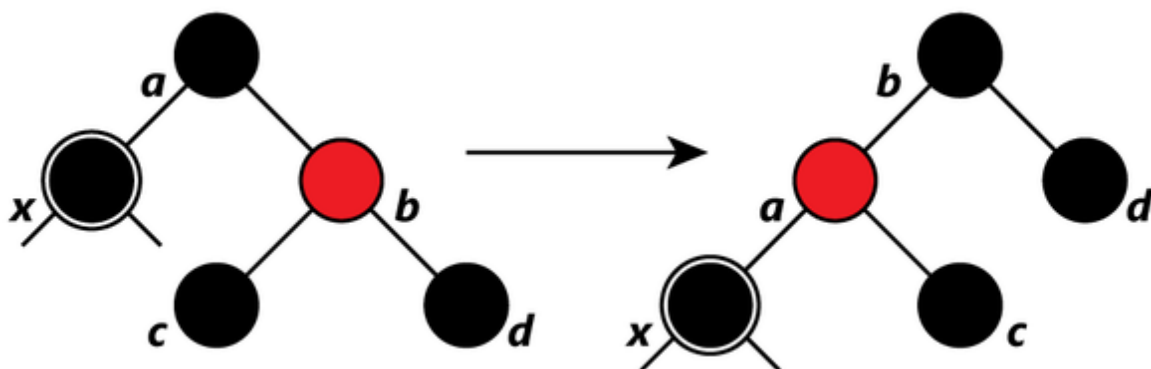
2. Дядя чёрный. Выполняем поворот. Если добавляемый узел был правым потомком, то необходимо сначала левое вращение, которое сделает его левым потомком. Остальные свойства сохраняются.



### Алгоритм удаления элемента

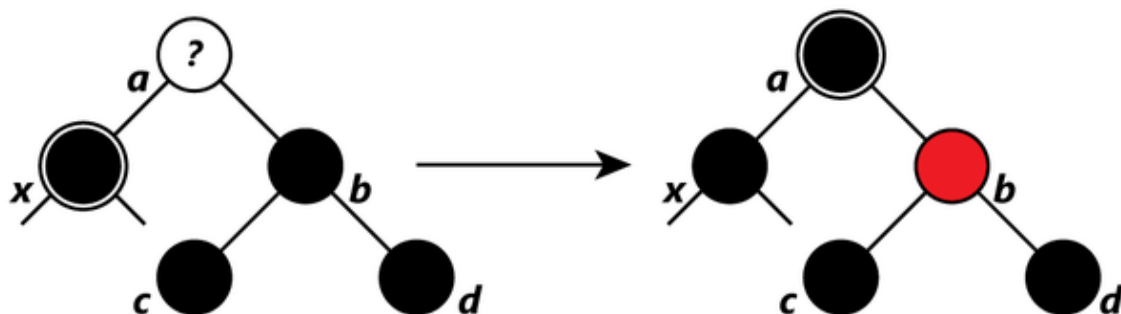
1. Если у вершины нет детей, то очевидно.
2. Если у неё только один ребёнок, то делаем у родителя ссылку на него вместо этой вершины.
3. Если есть оба ребёнка, то найдём вершину со следующим значением ключа. У такой вершины нет левого ребёнка (потому что такая вершина находится в правом поддереве исходной вершины и она самая левая в нём, иначе бы мы взяли её левого ребёнка. То есть, сначала переходим в правое поддерево, а после спускаемся вниз в левое до тех пор, пока у вершины есть левый ребёнок). Удаляем уже эту вершину описанным во втором пункте способом, скопировав её ключ в изначальную вершину.
4. Проверяем баланс дерева. При удалении красной вершины баланс дерева не нарушается. Балансировку надо производить только при удалении чёрной.
5. Какой ребёнок у чёрной вершины?
  1. Если брат этого ребёнка красный, то делаем вращение вокруг ребра между отцом и братом, тогда брат становится родителем отца. Красим его в чёрный, а отца — в красный, сохраняя тем самым чёрную высоту дерева. Теперь  $x$  содержит чёрного брата и красного отца. Таким образом,

переходим к следующему шагу.

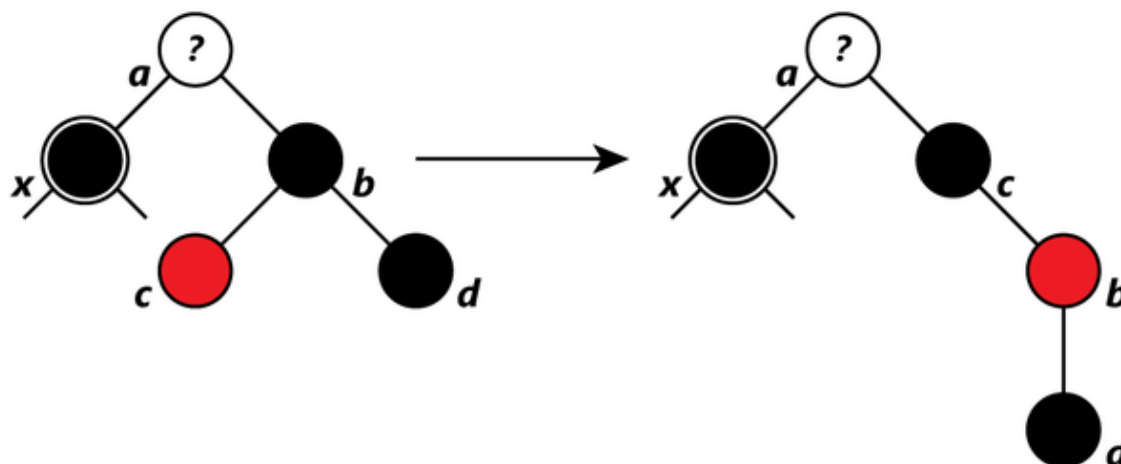


2. Брат текущей вершины был чёрным. Тогда:

1. Оба ребёнка у брата чёрные. Красим брата в красный цвет и рассматриваем далее отца вершины. Делаем его черным, это не повлияет на количество чёрных узлов на путях, проходящих через  $b$ , но добавит один к числу чёрных узлов на путях, проходящих через  $x$ , восстанавливая тем самым влияние удаленного чёрного узла. Таким образом, после удаления вершины черная глубина от отца этой вершины до всех листьев в этом поддереве будет одинаковой.

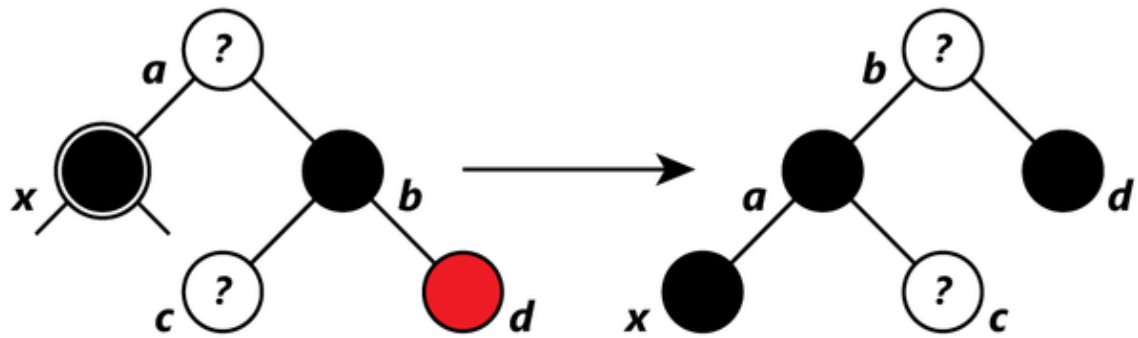


2. Если у брата правый ребёнок чёрный, а левый красный, то перекрашиваем брата и его левого сына и делаем вращение. Все пути по-прежнему содержат одинаковое количество чёрных узлов, но теперь у  $x$  есть чёрный брат с красным правым потомком, и мы переходим к следующему случаю. Ни  $x$ , ни его отец не влияют на эту трансформацию.



3. Если у брата правый ребёнок красный, то перекрашиваем брата в цвет отца, его ребёнка и отца — в чёрный, делаем вращение. Поддерево по-прежнему имеет тот же цвет корня, поэтому свойство 3 и 4 не нарушаются. Но у  $x$  теперь появился дополнительный чёрный предок: либо  $a$  стал чёрным, или он и был чёрным и  $b$  был добавлен в качестве чёрного

дедушки. Таким образом, проходящие через  $x$  пути проходят через один дополнительный чёрный узел. Выходим из алгоритма.



6. Продолжаем тот же алгоритм, пока текущая вершина чёрная и мы не дошли до корня дерева. Из рассмотренных случаев ясно, что при удалении выполняется не более трёх вращений.

### В-дерево. Процедуры поиска, добавления и удаления элемента. Трудоёмкость операций с В-деревом.

#### Def

*В-дерево порядка  $n$*  — древовидная структура, удовлетворяющая следующим условиям:

1. Вершиной дерева является массив, способный вместить  $2n$  элементов данных
2. В каждой вершине элементы данных расположены в массиве вершины в порядке возрастания их ключей
3. Каждая вершина, кроме корневой, содержит не менее  $n$  и не более  $2n$  элементов данных
4. Вершина, содержащая  $k$  ( $n \leq k \leq 2n$ ) элементов данных, имеет ровно  $k + 1$  потомков или является концевой
5. Если вершина имеет  $k$  элементов, то ключи всех элементов поддерева  $i$ -го потомка меньше ключа  $i$ -го элемента и больше ключа  $(i - 1)$ -го элемента родительской вершины
6. Все концевые вершины лежат на одном уровне дерева

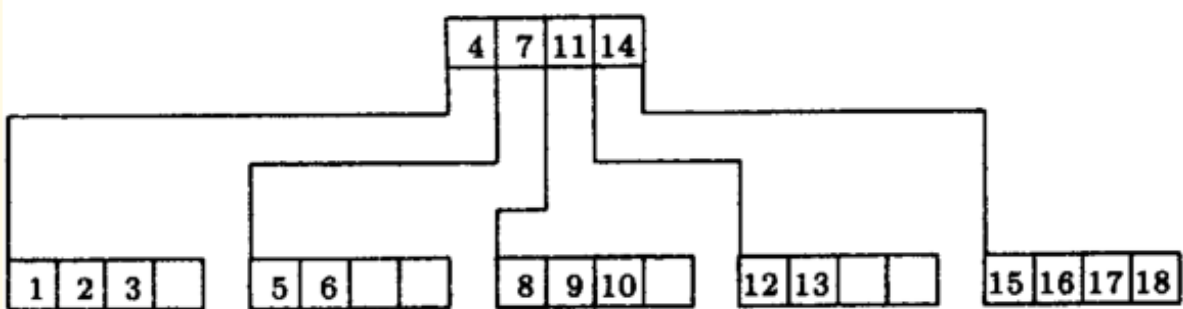


Рис. 7.23. Числовое В-дерево порядка 2, длины 2.

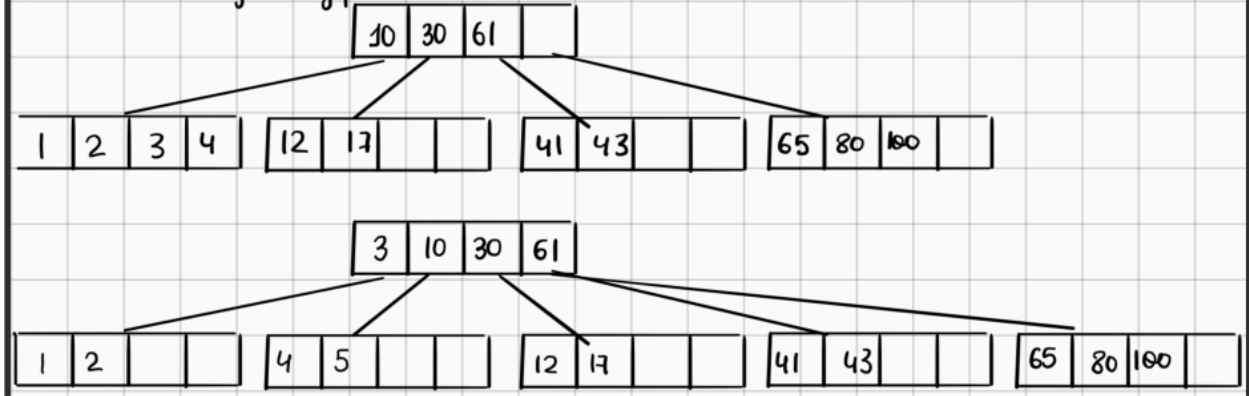
Длина В-дерева, содержащего  $N$  элементов данных, не превосходит  $O(\log_n N)$ , что при  $n > 2$  существенно меньше, чем у бинарного дерева.

Доступ к любому элементу можно осуществить за  $O(\log_n N)$  обращений к диску, считывая каждый раз массив длины  $2n$ .

## Добавление элемента

1. Ищем конечную вершину, в которую можно добавить требуемый элемент в соответствии с упорядоченностью уже существующих элементов.
2. Если добавление не превышает размера массива  $2n$ , то вставим в упорядоченный массив.
3. Иначе создаём новую вершину уровнем выше, записываем в неё значение середины, первые  $n$  элементов переносим к ней, последние  $n$  элементов оставляем в старой вершине.

Добавим элемент 5 в данное дерево:



Лучшая оценка:  $O(\log_n N * \log_2 n + n)$  — спуск по ветви и одна вставка.

Плохая оценка:  $O(n \log_n N)$  — деление вершин во всей ветви.

## Алгоритм удаления

1. Если элемент в конечной вершине и число элементов в ней больше  $n$ , то просто его удаляем.
2. Если элемент в конечной вершине и число элементов в ней  $n$ , то попробуем перелить несколько элементов из левого или правого соседа текущей вершины, чтобы разделить число элементов в них поровну, и затем удаляем элемент.
3. Если элемент содержит потомков, то попробуем перелить этот элемент уровнем ниже и поставить на его место элемент из нижележащих уровней, после чего удалить элемент.
4. В обоих случаях сливаем эти две вершины по  $n$  элементов в одну из  $2n$  элементов.
5. На каком-то этапе на самом верхнем уровне может не остаться элементов совсем — в таком случае удаляем вершину и делаем корнем потомка этой вершины.

Асимптотика такая же, как у добавления.

## Битовое множество. Поиск, добавление, удаление; операции объединения, пересечения, инвертирования.

Для задач, в которых не важна упорядоченность, удобно пользоваться математическим понятием множества. Над множествами можно выполнять следующие операции: добавлять / удалять / искать элемент, а также объединять / пересекать / инвертировать сами множества.

Какой хотим функционал:

1. Создать пустое множество
2. Уничтожить множество
3. Добавить элемент
4. Удалить данный элемент
5. Принадлежит ли элемент множеству?

6. Взять элемент из множества
7. Очистить множество
8. Множество пусто?
9. Итератор по элементам множества.

### 🔗 Question

Реализовать подмножество множества целых чисел в диапазоне от 0 до  $N_{max} - 1$ .

Надо выделить массив целых чисел, каждое из которых рассматривается как набор из фиксированного количества бит. Определение местоположения конкретного бита сводится к вычислению порядкового номера элемента базового массива чисел и определении номера нужного нам бита в этом элементе.

`unsigned long int` занимает 4 байта или 32 бита, поэтому за один такт процессор будет делать сразу 32 вычисления, отчего скорость выполнения множественных операций вырастет в 32 раза.

Если  $k$  — интересующий нас элемент числового множества, то номером элемента в базовом числовом массиве будет целая часть от деления на 32 (`cell_num(k)`), а номером бита в этом элементе — остаток от деления  $k$  на 32.

```
#include <string.h>
// делим x на 32:
#define cell_num(x)    ((x) >> 5) // номер ячейки (5 потому что ul)
// остаток от деления на 32:
#define cell_bit(x)    ((x) & 0x1FL) // номер бита в ячейке
using ul = unsigned long;

class BitSet {
private:
    ul* mem; // указатель на массив базовых ячеек
    ul n;
public:
    BitSet (ul maxsize) {
        n = cell_num(maxsize) + 1; // количество ячеек
        mem = new ul[n];
        memset(mem, 0, n * sizeof(ul));
    }
    ~BitSet () {if (mem) delete [] mem;}
    // (1 << cell_bit(x)) означает сдвиг на номер бита, который
    // отвечает за данный x
    bool Find (unsigned long x) {
        return (mem[cell_num(x)] & (1 << cell_bit(x))) != 0;
    }
    void Put (ul x) {
        *(mem + cell_num(x)) |= (1 << cell_bit(x));
    }
    void Del (ul x) {
        *(mem + cell_num(x)) &= ~(1 << cell_bit(x));
    }
}
```

```

BitSet& Union (BitSet& oth, ul n) {
    for (ul i = 0; i < n; i++) {
        mem[i] |= oth.mem[i];
    }
    return *this;
}
BitSet& Intersection (BitSet& oth, ul n) {
    for (ul i = 0; i < n; i++) {
        mem[i] &= oth.mem[i];
    }
    return *this;
}
BitSet& Diff (BitSet& oth, ul n) {
    for (ul i = 0; i < n; i++) {
        mem[i] &= ~oth.mem[i];
    }
    return *this;
}
BitSet& Inv () {
    for (ul i = 0; i < n; i++) {
        mem[i] = ~mem[i];
    }
    return *this;
}
};
// здесь по-хорошему при побитовом сдвиге надо написать
// вместо единицы 1UL или закастовать (ul)1
// и надо везде проверки границ, но это и так понятно.

```

Асимптотика на множественных операциях здесь улучшается с  $O(n)$  для массивов до  $O(n/32)$  для битового множества (да, константы можно выносить в  $O$ -нотации, но тут это важно). А ещё в STL уже давно написано то же самое и называется `bitset`.

## Хеширование. Примеры хеш-функций. Хеш-множество на основе массива списков.

Задача состоит в обработке небольшого подмножества некоторого необозримого множества. Хочется разделить исходное множество на несколько классов эквивалентности относительно некоторой функции. Более формально:

$$f : M \rightarrow \{0, 1, \dots, p-1\}$$

$$N \subset M$$

$$M_k = \{x \in M : f(x) = k\}$$

Функция  $f$  разбивает множество  $M$  на  $p$  классов эквивалентности  $M_k$ . Тогда при работе с подмножеством  $N$  достаточно вычислить значение функции на элементе из этого подмножества и работать с пересечением

$$N_k = M_k \cap N.$$

Если удачно выбрать функцию, то количество элементов в  $N_k$  будет в среднем в  $p$  раз меньше, чем во всём множестве  $N$ .

## Реализация хеш-множества на основе массива списков

(также ещё называется хеш-таблицей с закрытой адресацией)

Каждая ячейка хеш-таблицы — это указатель на некоторый список. Элементы, которые имеют один и тот же хеш, попадают в этот список.

- Вставка: Вычисляется хеш элемента, находится нужная ячейка, элемент добавляется в список из этой ячейки.
- Поиск: Вычисляется хеш элемента, в нужном списке как-то ищется элемент.
- Удаление: Вычисляется хеш элемента, в нужном списке удаляется элемент, если он есть.

Вместо списков можно использовать любую другую структуру данных: хотите бинарное дерево, хотите битовое множество, хотите динамический массив — короче тут под конкретную задачу можно подгонять производительность.

### Затраты памяти

Если резервировать место для хранения  $n$  элементов с размером  $a$  байт, а хеш-функция принимает  $p$  значений, то для хранения множества с помощью списков потребуется

$$(a + b)n + pb$$

байт, где  $b$  — количество байт в представлении адреса.

Для дерева, соответственно:

$$(a + 2b)n + pb$$

Здесь второе слагаемое отвечает за, так скажем, заголовок хеш-таблицы, а вторая часть за каждый класс эквивалентности.

---

## Хеш-множество по методу последовательных (линейных) проб. Оценка среднего количества проб при добавлении элемента.

### Def

*Коллизия* — это совпадение значений хеш-функции для различных элементов.

Можно ли как-то без ссылочной структуры оформить хеш-таблицу? Такой способ называется хеш-таблицей с открытой адресацией (если что, так на лекциях не говорилось, только на семинарах). Короче, берём массив длиннее, чем количество принимаемых хеш-функцией значений.

Добавление:  $h[k] = x$ , где  $k = f(x)$ . Если произошла коллизия, то пусть  $f(x) = f(t)$ , тогда следующей ячейкой будет ячейка с номером  $f(t) + g(t)$ , где  $g(t)$  можно взять какой-нибудь константной функцией ( $g(t) = 1$ ). Если снова попали в занятую ячейку, то смотрим  $f(t) + 2g(t)$  и т.д. Складывать надо, конечно, по модулю длины массива.

Поиск: аналогичный добавлению алгоритм.

Удаление: просто так очистить ячейку нельзя: прервётся цепочка для поиска, поэтому обычно создаётся дополнительный массив, который имеет три значения: ячейка пустая, ячейка занята и ячейка была занята. Если ячейка была занята, то на добавлении её можно перезаписать, а для поиска просто пропустить данную итерацию.

### Theorem

Пусть в методе проб коэффициент заполнения хеш-таблицы есть  $s = \frac{m}{n}$ , где  $n$  — размер таблицы,  $m$  — количество занятых ячеек (мощность рабочего множества). Пусть хеш-функция обеспечивает равномерное распределение элементов рабочего множества по позициям в таблице. Тогда среднее число проб при работе с множеством (при поиске, добавлении, удалении) составляет  $\frac{1}{1-s}$ .

Доказательство:

Вероятность попасть на занятую ячейку есть  $s_1 = s$ , а на незанятую —  $(1 - s_1)$ . При второй пробе эти вероятности есть  $s_2 = \frac{m-1}{n-1}$  и  $(1 - s_2)$ .

Для третьей пробы  $s_3 = \frac{m-2}{n-2}$  и  $(1 - s_3)$ .

Вероятность сделать ровно  $k$  проб есть:

$$q_k = s_1 s_2 \dots s_{k-1} (1 - s_k)$$

— тут  $k - 1$  неудачных и последняя удачная (неважно сколько раз ты падал, важно сколько раз ты поднялся после падения уу)

блин, серьёзно? а как без матожидания? ну ладно, тут вроде очев.

Среднее число проб — это математическое ожидание

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k q_k &= 1(1 - s_1) + 2s_1(1 - s_2) + 3s_1 s_2(1 - s_3) + \dots = \\ &= 1 + s_1 + s_1 s_2 + s_1 s_2 s_3 + \dots < \\ &< 1 + s_1 + s_1^2 + \dots \leq \frac{1}{1 - s}. \end{aligned}$$

## Минимальная совершенная хеш-функция. Определение. Построение.

Задача состоит в том, что у нас есть  $m$  слов (ключей). Надо построить такую хеш-функцию, которая не даёт коллизий на этих словах.

Пусть  $\mathcal{M}$  — множество всех возможных ключей,  $M \subseteq \mathcal{M}$  — подмножество заданных фиксированных ключей, то есть  $|M| = m$ .

### Def

- Хеш-функция  $h(x)$  называется *совершенной*, если для любых  $x_1, x_2 \in M$ :

$$x_1 \neq x_2 \implies h(x_1) \neq h(x_2).$$

- Совершенная хеш-функция  $h(x)$  называется *минимальной*, если

$$h : M \rightarrow \{0, \dots, m - 1\}.$$

- Пусть на множестве ключей введено отношение порядка «<». Совершенная хеш-функция  $h(x)$  сохраняет порядок, если для любых  $x_1, x_2 \in M$ :

$$x_1 < x_2 \implies h(x_1) < h(x_2).$$

- Ищем наш идеал (но не кольца)  $h(x)$  в виде

$$h(x) = g(f_1(x)) + g(f_2(x)),$$

где  $f_1, f_2$  — хеш-функции на основе случайных таблиц (что это такое см. ниже),  $g$  — некоторая функция, которую мы будем строить.

- Выбираем  $n = ct$ , где  $c > 2$  — некоторая константа.
  - Генерируем две случайные хеш-функции  $f_1, f_2$  с диапазонами значений  $\{0, \dots, n - 1\}$ .
  - Каждому ключу  $x$  поставим в соответствие пару  $(f_1(x), f_2(x))$ .
  - Из этих пар, как из рёбер, строим граф, склеивая вершины с одинаковыми значениями. Нам ещё надо, чтобы не было циклов в графе. Как это сделать? Ну, в тупую. Если граф получился циклический, то перегенерируем случайные таблицы.
  - Теперь каждому ребру графа соответствует ключ из  $M$ .
  - Нумеруем рёбра от 0 до  $m$  в соответствии с порядком, заданным на  $M$ .
  - Пусть  $n_{PQ}$  — номер ребра  $PQ$ .
  - Для каждой компоненты связности  $C$  будем вычислять  $g$ .
  - Каждая вершина содержит значения либо  $f_1(x)$ , либо  $f_2(x)$ , поэтому далее мы можем отождествить вершину со значением, записанным в этой вершине.
  - Берём произвольную вершину  $P$  в  $C$  и пусть  $g(P) = 0$ .
  - Далее, для вершины  $Q$  ребра  $PQ$  положим  $g(Q) = -g(P) + n_{PQ}$ .
  - Проходим далее по рёбрам этой связной компоненты и определяем значения  $g$  в остальных вершинах.
  - Различные компоненты связности не содержат одинаковых значений в вершинах, поэтому при построении функции не возникает конфликтов.
- Если же у нас был бы цикл, то цепочка уравнений не была бы совместной.

Вообще что такое «случайная табличная функция»? Берётся таблица, которая заполняется случайными числами (из области значений нужной хеш-функции), а индекс в этой таблице вычисляется тоже как некоторое хеш-значение.

Например:

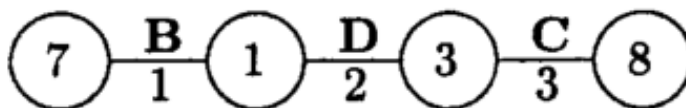
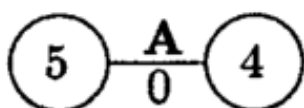
```
char tab[256];
char hasher(char *key, int len, char *tab) {
    int k, hash = 0;
    for (k = 0; k < len; k++) hash = tab[hash^key[k]];
    return hash;
}
```

Мегапример:

	A	B	C	D
$f_1$	5	7	3	1
$f_2$	4	1	8	3

— так у нас сгенерированы хеш-функции.

Имеем две компоненты связности (ЗДЕСЬ С НАДО ЗАНУМЕРОВАТЬ 2, а D — 3):



Для первой компоненты связности:

$$g(5) = 0 \implies g(5) + g(4) = 0 \implies g(4) = 0.$$

Для второй компоненты связности:

$$g(7) = 0 \implies g(7) + g(1) = 1 \implies g(1) = 1$$

$$g(1) + g(3) = 3 \implies g(3) = 2$$

$$g(3) + g(8) = 2 \implies g(8) = 0.$$

Кстати, значения  $h$  — это в точности номера рёбер графа.

Получили (ДА, ТУТ ВСЁ НЕПРАВИЛЬНО, СМОТРИТЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЫШЕ):

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g(x)$		1		1	0	0		0	2	

В пустых местах  $g$  определим произвольно.

**Поиск подстроки в строке. Использование конечного автомата. Использование хеш-функции (алгоритм Рабина-Карпа). Определение циклической хеш-функции. Определение полиномиальной хеш-функции. Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта.**

вааааа ТДФ, так, мне с этим ещё 4 года на матисе жить, надо хорошо написать

#### Def

- *Строка* — последовательность символов, взятых из некоторого алфавита.
- *Префикс строки A* — это строка  $P$ , которая получается удалением нуля или более последних символов строки  $A$ .

- *Суффикс строки  $A$*  — строка  $S$ , которая получается удалением нуля или более первых символов строки  $A$ .
- *Подстрока строки  $A$*  — строка  $Q$ , которая получается удалением префикса и суффикса строки  $A$ .

Определим операции над строками:

1. Конкатенация (т.е. сложение) строк  $A$  и  $B$  — это дописывание строки  $B$  в конец строки  $A$ . Обозначаем.. ну кто бы сомневался  $AB$ .
2. Итерация (т.е. повторение) строки  $n$  раз — это конкатенация самой строки  $n$  раз. Обозначаем  $A^n$ .
3. Инверсия (т.е. обращение) строки — запись символов строки в обратном порядке. Обозначаем  $A^R$ .

Кому-то может быть непонятно, что значит задача поиска подстроки в строке?

Пусть у нас есть некоторая строка, которая состоит из букв из фиксированного алфавита. Также у нас есть некоторая референсная подстрока, которую хотим найти в изначальной строке. Пусть  $s$  — сдвиг, с которого начинается наша подстрока в строке, тогда очевидно, что  $s > n - m$ , где  $n$  — длина строки,  $m$  — длина подстроки.

## Использование конечного автомата

### Def

Инициальный конечный автомат — это объект  $M = (Q, q_0, A, \Sigma, \delta)$ , где  $Q$  — конечное множество состояний,  $q_0 \in Q$  — начальное состояние,  $A \subseteq Q$  — множество различных допускающих состояний (все остальные состояния называются отвергающими),  $\Sigma$  — конечный входной алфавит,  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  — функция перехода автомата.

В конечный автомат поступают символы входной строки. После считывания нового символа автомат меняет своё состояние при помощи функции перехода. В зависимости от того, является текущее состояние принимающим или отвергающим, автомат принимает или отвергает текущую позицию строки. Для образца  $P[1, \dots, m]$  строится суффиксная функция  $\sigma(x) : A \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ . Значение  $\sigma(x)$  равняется длине максимального префикса  $P$ , который является суффиксом строки  $x$ .

Определим конечный автомат, соответствующий образцу  $P[1, \dots, m]$ , следующим образом:

1. Множество состояний  $Q = \{0, 1, \dots, m\}$ . Начальное состояние  $q_0 = 0$ , множество допускающих состояний  $A = m$ , все остальные состояния считаем отвергающими.
2. Функция перехода  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  определяется следующим образом:

$$\delta(q, a) = \sigma(P_q a),$$

где  $P_q$  — префикс длины  $q$  строки  $P$ ,  $a$  — новый символ, поступивший в автомат,  $q$  — текущее состояние автомата.

Пример:

$$P = ab : \sigma(\varepsilon) = 0; \sigma(a) = 1; \sigma(cda) = 1; \sigma(ccdab) = 2; \sigma(ccdabc) = 0.$$

## Использование хеш-функции (алгоритм Рабина-Карпа)

Эффективнее бывает сравнивать не сами строки, а их хеш-значения. В целом понятно, что если строки равны, то и их хеш-значения равны (из детерминированности хеш-функции).

### Def

*Полиномиальный хеш:*

$$P_s(x) = (s_0 \cdot x^{n-1} + s_1 \cdot x^{n-2} + \dots + s_{n-1}) \% p,$$

где  $p$  — некоторое простое число,  $x$  — некоторое число.

Начальные условия и некоторые рекуррентные выражения:

$$P_0(x) = 0$$

$$P_{s_0, \dots, s_{m-1}}(x) = \dots$$

$$P_{s_0, \dots, s_m}(x) = (P_{s_0, \dots, s_{m-1}}(x) \cdot x + s_m) \% p$$

Таким образом, за  $O(n)$  можно посчитать полиномиальный хеш от всех префиксов. Далее хеш-значение любой подстроки можно вычислить за время  $O(1)$ .

Идея решения нашей задачи заключается в том, что надо построить такой массив  $h$ , что  $h[k]$  содержит хеш-код префикса  $s_k$ . Элементы такого массива рекурсивно вычисляются по формулам, которые приведены выше.

Мой код аналогичной задачи:

```
// найти индексы подстрок
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
#include <utility>
using std::string;
using std::vector;
using std::cout;
using std::cin;
using std::endl;

void Pows (int n, int x, long long mod, vector<long long>& pow) { // заранее все степени по
// основанию x по модулю m посчитаем
    pow.resize(n + 1);
    pow[0] = 1;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        pow[i + 1] = (pow[i] * x) % mod;
    }
}

void PrefixHashes (const string& s, int x, int mod, vector<long long>& pref) { // считаем
```

префиксные хеши

```
int n = s.size();
pref.resize(n + 1);
pref[0] = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    pref[i + 1] = (pref[i] * x + s[i]) % mod;
}
}

long long MegaPolyHash (int l, int r, int mod, const vector<long long>& pref, const
vector<long long>& pow) { // считаем хеши на отрезке [l,r-1]
    long long res = (pref[r] - pref[l] * pow[r - l]) % mod;
    if (res < 0) res += mod;
    return res;
}

long long PolyHash (int size, int x, int mod, const string& t) { // полиномиальный хеш
    long long thash = 0;
    for (int i = 0; i < size; i++) {
        thash = (thash * x + t[i]) % mod;
    }
    return thash;
}

int main() {
    string s, t;
    cin >> s;
    cin >> t;
    int n = s.size();
    int m = t.size();
    vector<long long> pow1, pow2;
    vector<long long> pref1, pref2;
    int x = 29;
    int mod1 = (int)10e8 + 9;
    int mod2 = (int)10e8 + 7;
    long long thash1 = PolyHash(m, x, mod1, t);
    long long thash2 = PolyHash(m, x, mod2, t);

    Pows(n, x, mod1, pow1);
    Pows(n, x, mod2, pow2);
    PrefixHashes(s, x, mod1, pref1);
    PrefixHashes(s, x, mod2, pref2);
    vector<int> lst;

    for (int i = 0; i <= n - m; i++) {
        if (MegaPolyHash(i, i + m, mod1, pref1, pow1) == thash1 && MegaPolyHash(i, i + m,
mod2, pref2, pow2) == thash2) {
            lst.push_back(i);
        }
    }

    for (int i = 0; i < (int)lst.size(); i++) {
        cout << lst[i] << endl;
    }
}
```

```
    return 0;
}
```

## Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта

### Def

*Циклическая хеш-функция* — это хеш-функция, которая считается для следующего значения на основании предыдущего с минимальными затратами ресурсов.

Короче, сейчас я просто скопирую из билетов Софии Куршиной, а там посмотрим:

### Def

- Грани строки  $S$  — это строка  $B$  такая, что  $B \neq S$ ,  $B$  — префикс  $S$ ,  $B$  — суффикс  $S$ .
- Префикс-функция шаблона  $P$  — это массив  $\pi[0, \dots, m-1]$ , где
$$\pi[i] = \max \{k \mid 0 \leq k \leq i+1; P[0:k-1] = P[i-k+1:i]\}, \pi[i] \text{ — длина наибольшей грани строки } P[0:i].$$

Если произошло несовпадение, но мы уже знаем часть совпавших символов, поэтому можно сдвинуть образец на несколько позиций вперёд, не возвращаясь назад в тексте.

```
int *find_borders (char* pattern, int len) {
    int *borders = new int[n]; // длина наибольшего постфикса для первых i+1 букв
    borders[0] = 0;
    int len_bord = 0;
    for (int i = 1; i < len; i++) {
        // ищем подходящий постфикс, следующий элемент которого будет совпадать с элементом в
        // конце
        while ((len_bord > 0) && (pattern[len_bord] != pattern[i]))
            len_bord = borders[len_bord - 1];
        // добавим элемент в конце
        if (pattern[len_bord] == pattern[i])
            len_bord++;
        borders[i] = len_bord; // записали максимальную длину
    }
    return borders;
}

// поиск шаблона P в тексте T
int KMP (const char *text, int t_len, char *pattern, int p_len) {
    int *borders = get_borders(pattern);
    int len_subpattern = 0, i = 0;
    for (i = 0; i < t_len; i++) {
        // если паттерн не совпал, ищем внутри него ту часть, которая совпадает
        while (len_subpattern > 0 && text[i] != pattern[len_subpattern])
            len_subpattern = borders[len_subpattern - 1];
        // добавляем совпавший элемент
```

```

    if (text[i] == pattern[len_subpattern])
        len_subpattern++;
    // весь паттерн совпал
    if (len_subpattern == p_len) break;
}
delete borders;
return i - p_len + 1; // возвращаем индекс начала
}

```

Асимптотика: время построения префикс-функции:  $O(m)$ , время поиска:  $O(n)$ , общее время работы:  $O(n + m)$ , общие затраты памяти:  $O(m)$ .

## Жадные алгоритмы и динамическое программирование. Примеры.

### Def

*Жадный алгоритм (greedy algorithm)* — алгоритм, заключающийся в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе работы, допуская, что конечное решение также окажется оптимальным.

Чтобы жадный алгоритм работал, решаемая с помощью него задача должна иметь оптимальные подструктуры. Оптимальное решение задачи содержит оптимальное решение подзадач.

### Example

*Алгоритм Краскала*: необходимо построить минимальное остовное дерево, то есть дерево, которое соединяет все вершины и имеет минимальную сумму весов рёбер. Первое ребро берём с минимальным весом среди всех рёбер (две вершины помечаем). Потом из всех оставшихся рёбер берём бёбра минимального веса, не соединяющие две помеченные вершины.

### Def

*Динамическое программирование* — техника проектирования алгоритмов, которую можно использовать для нахождения оптимальных решений задач и подсчёта числа таких решений. Способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи.

[извините, не удержался](#)

### Example

*Наибольшая возрастающая последовательность*: в массиве из  $n$  элементов самая длинная последовательность элементов массива, продолжающаяся слева направо и такая, что каждый следующий элемент больше предыдущего. Например, в последовательности  $\{6, 2, 5, 1, 7, 4, 8, 3\}$

наибольшая возрастающая последовательность в этом массиве:  $\{2, 5, 7, 8\}$ . Для эффективного поиска такой последовательности воспользуемся динамическим программированием:

Пусть  $len(k)$  — длина НВП, заканчивающейся на позиции  $k$ . Тогда чтобы вычислить значение  $len(k)$ , мы должны найти позицию  $i < k$ , для которой  $arr[i] < arr[k]$  и  $len(i)$  максимально. Тогда  $len(k) = len(i) + 1$ , потому что это оптимальный способ добавить  $arr[k]$  в подпоследовательность.

Но если такой позиции  $i$  не существует, то  $len(k) = 1$ , то есть подпоследовательность состоит только из  $arr[k]$ .

### ≡ Example

Алгоритм Флойда-Уоршалла — будет далее.

---

**Граф. Хранение графа. Матрица смежности, сокращённое хранение для неориентированного графа. Список рёбер. Обход в ширину (волновой алгоритм) и его использование. Обход в глубину и его использование.**

### ✎ Def

Комбинаторное описание *графа*:

Зададим  $V$  — множество вершин,  $E$  — множество рёбер и отношение инцидентности «любому ребру соответствует начало и конец из  $V$ ».

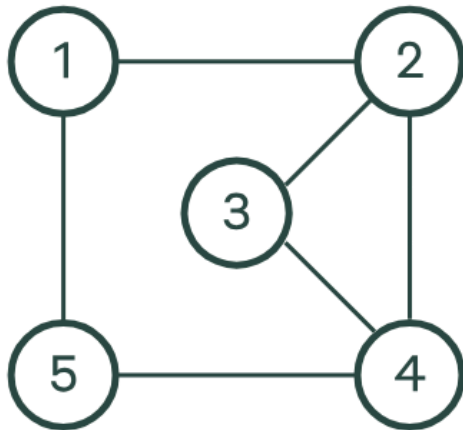
Пусть далее  $n$  — число вершин,  $m$  — число рёбер.

### Способы хранения графа

#### Список смежности

Можно задать граф *списком смежности* (`vector<vector<int>> g`, `g[i]` хранит множество индексов вершин, в которые ведут рёбра из вершины `i`). Такой метод требует  $O(n + m)$  памяти, где  $m$  —

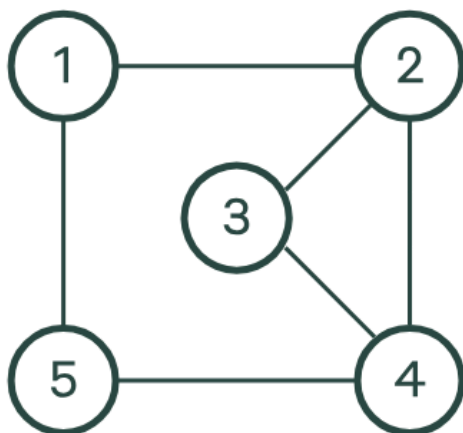
количество рёбер в графе.



1	2	5	-
2	1	3	4
3	2	4	-
4	2	3	5
5	1	4	-

#### Матрица смежности

Граф можно задать *матрицей смежности* (1 — если есть ребро между  $i$  и  $j$ , 0 — иначе). Минус такого метода в том, что он требует  $O(n^2)$  памяти, где  $n$  — количество вершин в графе.



-	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	0

*Обход графа* — это систематический просмотр вершин или рёбер по некоторому правилу, чтобы посетить все достигнутые вершины и при необходимости найти нужные элементы.

### DFS (depth-first search)

Идём по рёбрам максимально вглубь, когда упираемся в тупик (вершина, у которой все соседи посещены), делаем шаг назад и ищем следующий ход.

Схема:

1. Все вершины пометить как непосещённые
2. Выбрать старт  $s$ , пометить посещённой
3. Из текущей вершины перейти в первого непосещённого соседа, пометить его посещённым
4. Если непосещённых соседей нет, то возвращаемся назад
5. Повторить третий пункт

Реализация:

```
int dfs (Graph &g, int v, bool* used) {
    // used = 1, если вершина посещена, иначе = 0
    used[v] = true;
    int sm = 1;
    for (int u: g[v]) {
        if (!used[u]) {
            sm += dfs(g, u, used);
        }
    }
    return sm; // вернули количество вершин в компоненте связности
}
```

DFS работает за  $O(n + m)$ .

### BFS (breadth-first search)

Посещаем граф слоями (по расстоянию от старта): сначала все на расстоянии 1, потом на расстоянии 2 и т.д.

Схема:

1. Сначала все вершины непосещённые
2. Выбираем старт  $s$ , помечаем посещённой, кладём в очередь
3. Пока очередь не является пустой:
  1. Достаём вершину  $v$
  2. Для каждого её соседа  $u$ , если не посещён, пометить и добавить очередь

BFS используется для графов, у которых веса рёбер равны 1.

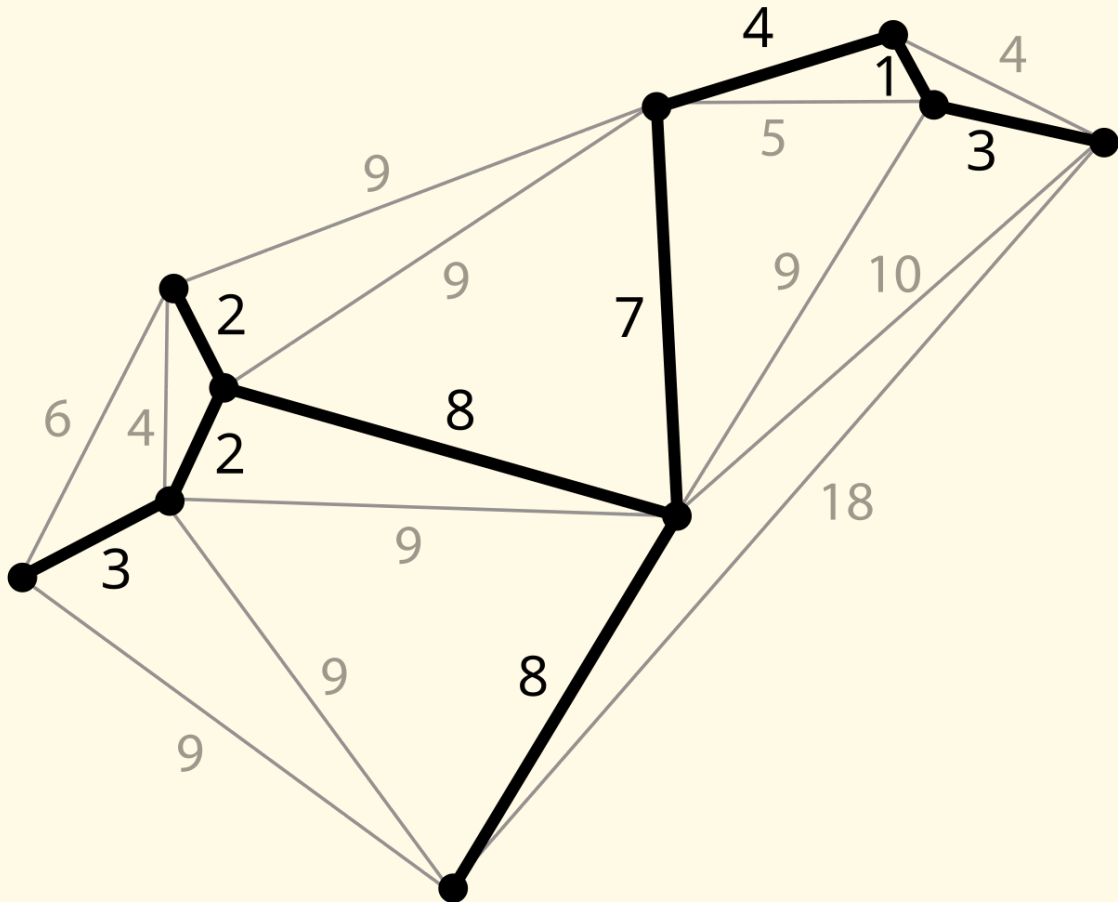
BFS работает за  $O(n + m)$ .

## Минимальное остовное дерево. Алгоритмы Прима и Краскала.

### Def

*Минимальное остовное дерево (minimum spanning tree)* — подграф связного неориентированного, взвешенного графа, который:

1. соединяет все вершины
2. является деревом (т.е. нет циклов)
3. имеет минимальную сумму весов рёбер среди всех возможных остовных деревьев



### Алгоритм Прима

1. Берётся одна любая вершина исходного графа — из неё начинаем строить подграф.
2. Выбираем такое минимальное ребро, инцидентное взятой вершине, которое связало бы две разные компоненты связности, одной из которых является наш подграф.

### 3. Повторить предыдущий шаг.

Изображение	Множество вершин	Описание										
	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td></tr><tr><td>0</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td><td>∞</td></tr></table>	a	b	c	d	e	0	∞	∞	∞	∞	<p>Извлечём из множества вершину <b>a</b>, так как её приоритет минимален.</p> <p>Рассмотрим смежные с ней вершины <b>b</b>, <b>c</b>, и <b>e</b>.</p> <p>Обновим их приоритеты, как веса соответствующих рёбер <b>ab</b>, <b>ac</b> и <b>ae</b>, которые будут добавлены в ответ.</p>
a	b	c	d	e								
0	∞	∞	∞	∞								
	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>∞</td><td>1</td></tr></table>	a	b	c	d	e	0	3	4	∞	1	<p>Теперь минимальный приоритет у вершины <b>e</b>.</p> <p>Извлечём её и рассмотрим смежные с ней вершины <b>a</b>, <b>c</b>, и <b>d</b>.</p> <p>Изменим приоритет только у вершины <b>d</b>, так как приоритеты вершин <b>a</b> и <b>c</b> меньше, чем веса у соответствующих рёбер <b>ea</b> и <b>ec</b>, и установим приоритет вершины <b>d</b> равный весу ребра <b>ed</b>, которое будет добавлено в ответ.</p>
a	b	c	d	e								
0	3	4	∞	1								
	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>1</td></tr></table>	a	b	c	d	e	0	3	4	7	1	<p>После извлечения вершины <b>b</b> ничего не изменится, так как приоритеты вершин <b>a</b> и <b>c</b> меньше, чем веса у соответствующих рёбер <b>ba</b> и <b>bc</b>. Однако, после извлечения следующей вершины — <b>c</b>, будет обновлён приоритет у вершины <b>d</b> на более низкий (равный весу ребра <b>cd</b>) и в ответе ребро <b>ed</b> будет заменено на <b>cd</b>.</p>
a	b	c	d	e								
0	3	4	7	1								
	<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>e</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	a	b	c	d	e	0	3	4	2	1	<p>Далее будет рассмотрена следующая вершина — <b>d</b>, но ничего не изменится, так как приоритеты вершин <b>e</b> и <b>c</b> меньше, чем веса у соответствующих рёбер <b>de</b> и <b>dc</b>.</p> <p>После этого алгоритм завершит работу, так как в заданном множестве не останется вершин, которые не были бы рассмотрены</p>
a	b	c	d	e								
0	3	4	2	1								

Затраты времени:  $O(n + m \log m)$

## Алгоритм Краскала

1. Сортируем рёбра по неубыванию их весов.
2. Добавляем  $i$ -е ребро в подграф в случае, если данное ребро соединяет две различные компоненты связности, одним из которых является данный подграф.
3. Когда множество вершин данного подграфа совпадёт с множеством вершин исходного графа, алгоритм завершится.

Изображение	Описание
	Первое ребро, которое будет рассмотрено — <b>ae</b> , так как его вес минимальный. Добавим его к ответу, так как его концы соединяют вершины из разных множеств ( <b>a</b> — красное и <b>e</b> — зелёное). Объединим красное и зелёное множество в одно (красное), так как теперь они соединены ребром.
	Рассмотрим следующее ребро — <b>cd</b> . Добавим его к ответу, так как его концы соединяют вершины из разных множеств ( <b>c</b> — синее и <b>d</b> — голубое). Объединим синее и голубое множество в одно (синее), так как теперь они соединены ребром.
	Дальше рассмотрим ребро <b>ab</b> . Добавим его к ответу, так как его концы соединяют вершины из разных множеств ( <b>a</b> — красное и <b>b</b> — розовое). Объединим красное и розовое множество в одно (красное), так как теперь они соединены ребром.

	<p>Рассмотрим следующие ребро — <b>be</b>.</p> <p>Оно соединяет вершины из одного множества, поэтому перейдём к следующему ребру <b>bc</b></p> <p>Добавим его к ответу, так как его концы соединяют вершины из разных множеств (<b>b</b> — красное и <b>c</b> — синее). Объединим красное и синее множество в одно (красное), так как теперь они соединены ребром.</p>
	<p>Рёбра <b>ec</b> и <b>ed</b> соединяют вершины из одного множества, поэтому после их просмотра они не будут добавлены в ответ</p> <p>Всё рёбра были рассмотрены, поэтому алгоритм завершает работу.</p> <p>Полученный граф — минимальное остовное дерево</p>

Затраты времени:  $O(m \log n)$ .

## Максимальный поток. Алгоритм Форда-Фалкерсона для неориентированного взвешенного графа. Максимальное паросочетание в двудольном графе.

### Def

*Транспортная сеть* — это ориентированный граф  $(V, E)$ , в котором:

1. Каждое ребро  $(u, v) \in E$  имеет неотрицательную пропускную способность, которая выражается функцией  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$  такой, что для любого ребра значение функции равно нулю.
2. Выделены две специальные вершины: источник  $s$  и сток  $t$  такие, что любая другая вершина лежит на пути из  $s$  в  $t$  и при этом  $s \neq t$ .

### Def

*Поток* — это функция  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  со следующими свойствами:

1. Величина потока для любого ребра  $e$  не может превысить его пропускную способность:  
 $|f(e)| \leq c(e)$
2. Поток из  $u$  в  $v$  должен быть противоположен потоку из  $v$  в  $u$ :  $f(u, v) = -f(v, u)$ .

$$3. \quad \sum_{u \in V} f(v, u) = \begin{cases} |f|, & v = s \\ -|f|, & v = t \\ 0, & v \neq s, v \neq t \end{cases}$$

### Def

*Величина потока* — это сумма потоков из источника или сумма потоков в сток. Обозначаем:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t)$$

### Def

*Максимальный поток* — это поток  $f$  такой, что не существует потока  $f^*$  с условием  $|f^*| \geq |f|$ .

#### Def

*Двудольный граф* — это граф, вершины которого можно разбить на два непересекающихся множества так, чтобы каждое ребро соединяло вершину из одного множества с вершиной из другого, а рёбра внутри одного множества отсутствуют.

#### Def

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ . *Паросочетанием*  $M$  в  $G$  называется множество попарно несмежных рёбер, то есть рёбер, не имеющих общих вершин.

#### Def

*Максимальное паросочетание* — это такое паросочетание  $M$  в графе  $G$ , которое не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа.

*Наибольшее паросочетание* — это такое паросочетание, которое содержит максимальное число рёбер.

## Алгоритм Форда-Фалкерсона

[я устал.](#)

## Контейнеры. Определение и примеры.

#### Def

*Контейнер* — это программная реализация, предназначенная для сохранения данных в памяти в течение некоторого периода времени. А вообще я вроде давал определение в самом начале..

При добавлении набора данных контейнер размещает данные в памяти и возвращает указатель на место размещения. Используя этот указатель, можно получить доступ к значениям данных. Когда необходимость в использовании данных отпадёт, их можно удалить из контейнера и тем самым освободить дополнительное место для размещения новых данных.

Функционал:

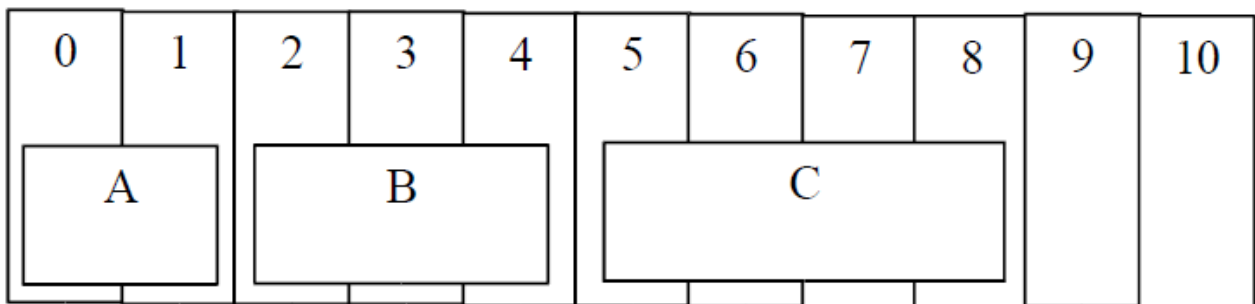
1. Создать контейнер

2. Разместить данные
3. Удалить данные
4. Очистить контейнер
5. Закончить работу

#### Example

`malloc` и `free` в C; `new` и `delete` в C++ — примеры контейнерной организации работы с данными.

### Реализация контейнера в виде массива



При размещении элемента записываем длину выделенной области памяти и указатель на начало сегмента, который выбирается случайно среди возможных несвязных кусков памяти. Возвращаем указатель на адрес памяти.

При удалении элемента он может образовать свободный участок памяти среди занятых. При многократном удалении может произойти ситуация, когда свободной памяти в контейнере достаточно, но выделить её невозможно, потому что она разделена на мелкие кусочки. Это называется фрагментацией.

Для сохранения информации о сегментах выделенной памяти, следует где-то хранить указатели на начала занятых сегментов, а также их длины. Это можно сделать двумя способами:

1. Выделяем сегмент памяти перед и после массива с данными, в котором хранится вся системная информация.
2. Информация хранится после каждого сегмента, но тогда если сегмент выйдет за разрешённую область, то он может перезаписать системную информацию, которая может быть важна для работы всего контейнера.