Программа экзамена по математическому анализу

Цыбулин Егор

14 марта 2025 г.

Билет 1

Формулировка. *Множества, кванторы, подмножества. Основные операции на множествах и их свойства. Прямое произведение множеств.*

Определения:

1. Подмножество
2. Пустое множество
3. Пересечение множеств
4. Объединение множеств
5. Разность множеств
6. Одноэлементное множество
7. Пара
8. Упорядоченная пара
9. Декартово (прямое) произведение

Билет 2

Формулировка. *Отображения, классификация отображений, области определния и значений. Образы и прообразы множеств при отображениях, обратное отображение.*

Определения:

1. Отображение (функция)
2. Область определения функции
3. Область значения функции
4. Инъекция
5. Сюръекция
6. Биекция
7. Ограничение f на X_1
8. Образ множества
9. (Полный) прообраз множества
10. Обратное отображение
11. Правила де Моргана

Билет 3

Формулировка. *Аксиоматика Пеано натурального ряда. Конечные множества. Отношение порядка. Порядок на $\mathbb{N}$ (без доказательства). Операции сложения и умножения.*

Определения:

1. 4 аксиомы Пеано
2. n-элементное множество
3. Конечное множество
4. Бесконечное множество
5. Отношение
6. Отношение порядка
7. Арифметические операции (сумма, разность, произведение, частное)

Теоремы:

1. О единственности отношения порядка на $\mathbb{N}$ (без доказательства)
2. Принцип наименьшего элемента

Билет 4

Формулировка. *Целые числа, их свойства. Рациональные числа, их свойства. Аксиоматика архимедова упорядоченного числового поля.*

Определения:

1. Множество целых чисел
2. 6 свойств целых чисел
3. Множество рациональных чисел
4. 14 свойств рациональных чисел
5. Упорядоченное поле
6. Архимедово поле

Билет 5

Формулировка. *Аксиома полноты, действительные числа. Полнота модели бесконечных десятичных дробей. Модель действительных чисел как числовой прямой, модель действительных чисел как множества сечений рациональных чисел.*

Определения:

1. Множество действительных чисел
2. Аксиома полноты
3. Последовательность
4. Бесконечная десятичная дробь (БДД)
5. Отношение порядка для БДД
6. Дедекиндовы сечения
7. Геометрическая модель числовой прямой

Теоремы:

1. Теорема о том, что модель БДД удовлетворяет аксиоме полноты
2. Теорема о том, что на множестве всех пар сечений можно ввести операции и отношение таким образом, что будут выполняться все 16 аксиом

Билет 6

Формулировка. *Ограниченные множества в $\mathbb{R}$, точные грани. Принцип полноты Вейерштрасса. Промежутки действительных чисел. Принцип полноты Кантора.*

Определения:

1. Максимальный (минимальный) элемент
2. Верхняя (нижняя) грань
3. Ограниченное (сверху, снизу) множество
4. Точная верхняя (нижняя) грань
5. Промежутки
6. Модуль

Теоремы:

1. Принцип полноты Вейерштрасса
2. Свойство точной верхней грани
3. Принцип вложенных отрезков (принцип полноты Кантора)

Билет 7

Формулировка. *Отношение эквивалентности. Равномощность множеств. Равномощность как отношение эквивалентности.*

Определения:

1. Отношение эквивалентности
2. Равномощность

Теоремы:

1. Теорема о том, что равномощность множеств является отношением эквивалентности
2. Теорема о том, что конечные множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов

Билет 8

Формулировка. *Счётные множества, их свойства, примеры. Несчётность интервала. Множества мощности континуум. Сравнение мощностей как отношение порядка (без доказательства).*

Определения:

1. Счётное множество
2. Не более чем счётное множество
3. Примеры счётных множеств
4. Множество мощности континуум

Теоремы:

1. Теорема о том, что объединение не более счётного числа счётных множеств счётно
2. Теорема о том, что объединение не более чем счётного числа не более чем счётных множеств не более чем счётно (без доказательства)
3. Теорема Кантора (несчётность интервала)

4. Следствие о том, что действительных чисел несчётно (множество мощности континуум)

5. Теорема о том, что у любого множества мощность множества всех подмножеств строго больше, чем мощность самого множества (без доказательства)

6. Теорема о том, что сравнение мощностей является отношением порядка

7. Теорема о том, что у любого бесконечного множества существует счётное подмножество

8. Теорема о том, что если A - бесконечное, B - не более чем счётное, то $A \sim A \cup B$

Билет 9

Формулировка. *Окрестности точки. Классификация точек относительно подмножеств действительных чисел. Открытые и замкнутые множества, их свойства.*

Определения:

1. ε-окрестность
2. Проколотая ε-окрестность
3. Внутренняя точка множества
4. Внешняя точка множества
5. Граничная точка множества
6. Внутренность множесттва
7. Внешность множества
8. Граница множества
9. Предельная точка
10. Изолированная точка
11. Точка прикосновения
12. Множество Кантора
13. Открытое множество
14. Замкнутое множество

Теоремы:

1. Утверждение о том, что точки прикосновения множества являются либо внутренними, либо граничными
2. Утверждение о том, что точки прикосновения множества являются либо предельными, либо изолированными
3. Теорема с объединениями / пересечениями открытых / замкнутых множеств

Билет 10

Формулировка. *Критерии замкнутости множеств. Свойства замкнутых множеств. Компакты. Компактность отрезка. Теорема Больцано-Вейерштрасса.*

Определения:

1. Покрытие
2. Компакт

Теоремы:

1. Теорема-критерий замкнутости множеств
2. Теорема о том, что если A - ограничено сверху или снизу и замкнуто, то существует $\max A$ или $\min A$, соответственно
3. Теорема о том, что любой отрезок является компактом
4. Лемма Гейне-Бореля (без доказательства)
5. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Билет 11

Формулировка. *Числовые последовательности, подпоследовательности, предел. Свойства последовательностей, имеющих предел.*

Определения:

1. Последовательность
2. Ограниченность последовательности
3. Подпоследовательность
4. Предел последовательности

Теоремы:

1. Теорема о том, что если последовательность сходится, то её предел единственный
2. Теорема о том, что если последовательность имеет предел, то и любая её подпоследовательность имеет тот же предел
3. Теорема об отделимости

Билет 12

Формулировка. *О-символика. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. Арифметические свойства сходящихся последовательностей. Критерий Коши сходимости последовательностей. Примеры.*

Определения:

1. О-малое
2. О-большое
3. Бесконечно малая последовательность
4. Бесконечно большая последовательность
5. Фундаментальная последовательность

Теоремы:

1. Арифметические свойства бесконечно малых (как теорема)
2. Теорема о том, что если a_n - бесконечно большая и $a_n \neq 0$, то $\frac{1}{a_n}$ - бесконечно малая
3. Лемма $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n - a = \bar{\bar{o}}(1)$
4. Теорема том, что если последовательность ограничена, то существует подпоследовательность, которая стремится к пределу
5. Арифметические свойства сходящихся последовательностей
6. Критерий Коши сходимости последовательностей

Билет 13

Формулировка. *Предельный переход в неравенствах. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.*

Теоремы:

1. Предельный переход в неравенствах и следствие
2. Следствие из предельного перехода
3. Теорема о двух милиционерах
4. Неравенство Бернулли
5. Бином Ньютона

Билет 14

Формулировка. *Монотонные последовательности, их свойства. Число "e".*

Определения:

1. Монотонные последовательности

Теоремы:

1. Теорема о том, что если последовательность монотонна и ограничена, то у неё есть предел
2. Число "е"и всё, что с ним связано в рамках последовательностей

Билет 15

Формулировка. *Частичные пределы последовательностей, их свойства. Верхний и нижний пределы последовательностей, их свойства.*

Определения:

1. Частичный предел
2. Верхний (нижний) предел

Теоремы:

1. Теорема о связи частичных пределов и замкнутости множества
2. Теорема о верхних и нижних пределах
3. Критерий сходимости в терминах частичных пределов

Билет 16

Формулировка. *Предел функции по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Основные свойства предела функции.*

Опредлеения:

1. Предел по Коши
2. Предел по Гейне
3. Предел функции в точке по множеству
4. Односторонние пределы

Теоремы:

1. Теорема об эквивалентности определений
2. Теорема о том, что если у функции существует предел в точке, то он единственный
3. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности в некоторой проколотой δ-окрестности
4. Теорема об отделимости для функций
5. Критерий существования предела в точке в терминах односторонних пределов

Билет 17

Формулировка. *О-символика для функций, бесконечно малые и бесконечно большие функции. Исчисление бесконечно малых, арифметические свойства предела. Предельный переход в неравенствах. Критерий Коши существования предела функции.*

Определения:

1. О-малое для функции
2. Бесконечно малая функция
3. О-большое для функции
4. Бесконечно большая функция

Теоремы:

1. Исчисление бесконечно малых (арифметические свойства как теорема)
2. Теорема о том, что предел функции $f(x)$ a в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \bar{\bar{o}}(1),\ x \to x_0$
3. Арифметические свойства пределов функций
4. Предельный переход в неравенствах
5. Следствие из предельного перехода
6. Теорема о двух милиционерах
7. Критерий Коши для функций

Билет 18

Формулировка. *Монотонные функции, теорема о пределе монотонной и ограниченной функции.*

Определения:

1. Монотонные функции

Теоремы:

1. Теорема о пределе монотонной и ограниченной функции

Билет 19

Формулировка. *Непрерывные функции, локальные свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация.*

Определения:

1. Непрерывность функции в точке
2. Точки устранимого разрыва
3. Точки разрыва первого рода

4. Точки разрыва второго рода

Теоремы:

1. Арифметические свойства непрерывных функций
2. Непрерывность композиции непрерывных функций

Билет 20

Формулировка. *Глобальные свойства непрерывных функций.*

Определения:

1. Непрерывность на множестве

Теоремы:

1. Первая теорема Вейерштрасса
2. Вторая теорема Вейерштрасса
3. Теорема о промежуточном значении функции

Билет 21

Формулировка. *Теорема о разрывах монотонной функции. Теорема об обратной функции к непрерывной и монотонной.*

Теоремы:

1. Теорема о том, что у монотонной функции бывают разрывы только 1 рода
2. Следствие для функции, которая определена на интервале
3. Утверждение о том, что у монотонной функции разрывов не более чем счётное множество
4. Теорема об обратной функции к непрерывной и монотонной

Билет 22

Формулировка. *Равномерно непрерывные функции, теорема Кантора.*

Определения:

1. Равномерная непрерывность

Теоремы:

1. Теорема Кантора

Билет 23

Формулировка. *Построение показательной функции. Логарифм, степенная функция, синус. Замечательные пределы.*

Теоремы:

1. Весь билет одна большая теорема

Билет 24

Формулировка. *Производная функции, производная по множеству. Производная суммы, произведения и отношения функций.*

Определения:

1. Производная функции
2. Производная функции по множеству

Теоремы:

1. Теорема о том, что если существует производная в точке, то функция непрерывна в данной точке
2. Арифметические свойства производных

Билет 25

Формулировка. *Производная композиции функций, производная обратной функции. Таблица производных.*

Теоремы:

1. Производная композиции функций
2. Производная обратной функции
3. Вывод некоторых формул из таблицы производных

Билет 26

Формулировка. *Дифференцируемость функций, первый дифференциал. Связь между дифференцируемостью и существованием производной.*

Определения:

1. Полное приращение функции
2. Дифференцируемая функция
3. Первый дифференциал

Теоремы:

1. Связь между дифференцируемостью и существованием производной

Билет 27

Формулировка. *Полукасательные и касательная к графику функции. Геометрический смысл первого дифференциала. Инвариантность первого дифференциала и неинвариантность производной.*

Определения:

1. Предельное положение семейства лучей
2. Полукасательные
3. Касательная
4. Левая и правая производные
5. Уравнение касательной
6. Геометрический смысл первого дифференциала
7. Инвариантность первого дифференциала и неинвариантность производной

Билет 28

Формулировка. *Старшие производные. Старшие дифференциалы. Неинвариантность второго дифференциала.*

Определения:

1. Вторая производная
2. Второй дифференциал
3. n-ая производная
4. Неинвариантность второго дифференциала

Билет 29

Формулировка. *Теорема Ферма, необходимый признак локального экстремума, теорема Ролля. Формула Лагранжа и следствие из неё.*

Определения:

1. Точки экстремума

Теоремы:

1. Теорема Ферма и следствие из неё
2. Необходимое условие существования экстремума
3. Теорема Ролля
4. Формула Лагранжа
5. Следствие формулы Лагранжа

Билет 30

Формулировка. *Формула Коши. Связь монотонности функции и знака производной.*

Теоремы:

1. Формула Коши
2. Связь монотонности функции и знака производной

Билет 31

Формулировка. *Отсутствие у производной дифференцируемой функции устранимых разрывов и разрывов первого рода.Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.*

Теоремы:

1. Отсутствие у производной дифференцируемой функции устранимых разрывов и разрывов первого рода
2. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной

Билет 32

Формулировка. *Правила Лопиталя.*

Теоремы:

1. Правила Лопиталя

Билет 33

Формулировка. *Формула Тейлора. Остаточный член в форме Пеано и в общей форме. Остаточный член в форме Лагранжа.*

Определения:

1. Формула Тейлора

Теоремы:

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано
2. Остаточный член в общей форме
3. Остаточный член в форме Лагранжа

Билет 34

Формулировка. *Формула Тейлора для основных элементарных функций. Достаточные условия локального экстремума. Общая схема поиска глобального экстремума функции на отрезке. Асимптоты.*

Определения:

1. Формулы Тейлора для основных элементарных функций
2. Вертикальная асимптота
3. Наклонная асимптота

Теоремы:

1. Достаточные условия локального экстремума
2. Общая схема поиска глобального экстремума функции на отрезке
3. Теорема о наклонной асимптоте

Билет 35

Формулировка. *Выпуклые функции, достаточное условие выпуклости. Теорема о касательной к графику выпуклой функции. Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия наличия точки перегиба. Неравенство Йенсена и следствие из него.*

Определения:

1. Выпуклая вверх (вниз) функция
2. Точка перегиба

Теоремы:

1. Достаточное условие выпуклости
2. Теорема о касательной к графику функции
3. Необходимое и достаточные условия наличия точки перегиба
4. Неравенство Йенсена
5. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим
6. Неравенство Юнга

Итог: 122 определения; 96 теорем.