Линейная алгебра и геометрия

12.03.2025 18:41 #Математика/Алгебра #Конспект #Избранное #MSU/S2

Векторные пространства и подпространства

Определение

Множество V — векторное пространство над полем F, если заданы операции сложения и умножения на скаляр и выполнены следующие аксиомы:

1. коммутативность
2. ассоциативность по сложению
3. ноль
4. противоположный по сложению
5. ассоциативность по умножению
6. единица
7. дистрибутивность
8. другая дистрибутивность

Определение

$U \subset V$ — векторное подпространство, если:

1. ноль лежит в U
2. сумма двух элементов из U — элемент из U
3. произведение элемента из U на скаляр — элемент из U

Задание подпространства

Подпространство можно задать двумя способами:

1. $U =< a_1, \dots, a_k >$
2. U — множество решений ОСЛУ

Перейти от ОСЛУ к линейной оболочке можно с помощью ФСР. Наоборот интереснее. Пусть дана линейная оболочка $< a_1, a_2 >$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица должна быть совместной, после приведения к ступенчатому виду мы получим, что в правом нижнем углу у нас будут уравнения, которые должны быть равны нулю. Вот они и являются нужной ОСЛУ

Операции с подпространствами

Пусть U, W — подпространства V. Тогда

1. Пересечение U и W — тоже подпространство V
2. Объединение U и W является подпространством V тогда и только тогда, когда или U лежит в W, или W лежит в U
3. Разность U и W подпространством V не является
4. Сумма U и W — подпространство V. Определяется так:

   $$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

   Как найти пересечение и сумму подпространств? Сумму можно найти как объединение линейных оболочек подпространств. То есть, нам сначала даны линейные оболочки, потом мы просто выписываем все векторы из них в общую кучу и так получаем новое подпространство, которое и является суммой. Пересечение же находится как ОСЛУ, состоящая из уравнений ОСЛУ, которые задавали изначальные подпространства.

Формула Грассмана

Теорема

Если U_1, U_2 — конечные подпространства в V, то

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Прямая сумма

Определение

Сумма подпространств $U_i \in V$ называется прямой суммой, если $\forall u \in U_1 + \dots + U_m$ представим в виде $u = u_1 + \dots + u_m$ единственным образом, то есть $u_1, \dots, u_m$ ЛНЗ.

$$V = U \oplus W \Rightarrow \forall v \in V \; \exists! u \in U, w \in W : v = u + w$$

где u — проекция на U вдоль W.

Линейные отображения

Определение

V, W — векторные пространства над F. $\phi : V \to W$ — линейное отображение, если:

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) \; \forall \lambda \in F, \; v, v_1, v_2 \in V$.

Замечу, что если отображение линейное, то ноль переходит в ноль, а $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Переход к другому базису

Здесь обычно где-то рассказывают про переход к другому базису, но мне лень это расписывать. Проще запомнить мнемоническое правило и всё.

Матрица линейного отображения

Пусть задан базис E в V и базис F в W, а также отображение из V в W. Тогда применив отображение к вектору из E, получим разложение по базису F. Координаты, записанные по столбцам, образуют матрицу линейного отображения $A_{f,\varphi,e}$

Формула перехода:

$$A_{f',\varphi,e'} = C_{f'\to f} A_{f,\varphi,e} C_{e\to e'}$$

Ядро и образ

Пусть $\varphi : V \to W$. Тогда

$$Ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \leq V$$

$$Im\varphi = \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\} \leq W$$

Пусть $v \in V$, X_e — координаты v, $\varphi(v)$ имеет координаты $A_\varphi X_e$, тогда:

$$Ker\varphi = \{v \in V \mid A_\varphi X_e = 0\}$$

$$Im\varphi = < \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) >$$