Методичка по проективной геометрии

11 января 2025 г.

1 Проективная плоскость

(Сипачёва) Одна из возможных моделей проективной плоскости - связки прямых и плоскостей в трёхмерном аффинном (или точечно-евклидовом) пространстве.

Определение 1.1 (Комбаров)**.** *Проективная плоскость* P - произвольное множество, элементы которого называются *точками*, и набор его подмножеств, именуемых *прямыми* вместе с отношением инцидентности, если при этом выполняются аксиомы П1-П4.
П1. Любые две различные точки плоскости инцидентны одной и только одной прямой.
П2. Любые две различные прямые плоскости инцидентны одной и только одной точке.
П3. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.
П4. Каждая прямая инцидентна по меньшей мере трём точкам.

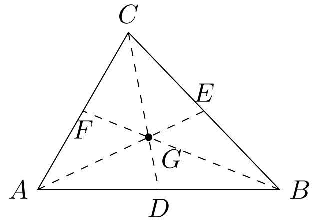
Определение 1.2 (Комбаров)**.** Две проективные плоскости P_1 и P_2 называются *изоморфными*, если существует биекция $f : P_1 \to P_2$, которая переводит точки в точки, прямые в прямые и сохраняет отношение инцидентности.

(Сипачёва) Изоморфизмы между евклидовыми аффинными плоскостями тоже можно определить как биекции, сохраняющие структуры этих плоскостей: отображение одной евклидовой плоскости в другую является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно сохраняет расстояния между точками (и взаимно однозначно переводит прямые в прямые, но это можно не добавлять, так как эти условия выполнены автоматически, если сохраняются расстояния) - это мы доказали раньше; отображение одной аффинной плоскости в другую является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и переводит прямые в прямые - это доказывается в курсе линейной алгебры.

В отличие от евклидовой и аффинной плоскостей, проективная плоскость определяется аксиомами неоднозначно: существуют неизоморфные проективные плоскости. Две проективные плоскости (точнее, две разные можели одной и той же проективной плоскости) мы уже построили и доказали, что они изоморфны. Ешё одну можно описать так:

1.1 Плоскость Фано

Точки - A, B, C, D, E, F, G
Прямые - $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, A\}$, $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$, $\{D, E, F\}$
Все аксиомы выполнены. Это минимальная модель проективной плоскости.



Замечание 1.1. Проективная плоскость не может содержать меньше семи точек.

Определение 1.3 (Сипачёва)**.** *Связка с центром O* - множество всех прямых и плоскостей трёхмерного пространства, проходящих через данную точку O. Прямые связки называются *точками*, а плоскости - *прямыми* проективной плоскости.

2 Перспективное соответствие

(Сипачёва) Возьмём в аффинном пространстве какую-нибудь плоскость π, не проходящую через центр связки O. Через каждую точку M плоскости π проходит единственная прямая OM связки (точка проективной плоскости), и через каждую прямую l на плоскости π проходит единственная плоскость связки (обозначим её Ol) (это прямая проективной плоскости).

Обратно, каждой прямой связки (если только она не параллельна π) соответствует единственная точка плоскости π, через которую она проходит. Каждой плоскости связки (не параллельной π) соответствует прямая на π.

Получилось почти биективное соответствие между точками (прямыми) проективной плоскости и точками (прямыми) на аффинной плоскости π. Чтобы сделать его совсем биективным, надо что-то поставить в соответствие прямым и плоскостям связки, которые параллельны π. Для этого плоскость π придётся пополнить.

3 Пополненная плоскость

(Сипачёва) К каждой прямой $l \subset \pi$ добавим одну бесконечно удалённую точку. Эта точка будет соответствовать прямой связки, параллельной прямой l. Таким образом, ко всем прямым из несобственного пучка всех прямых, параллельных прямой l, будет добавлена одна и та же бесконечно удалённая точка. Её можно отождествить с самим несобственным пучком прямых на π, параллельных прямой l.

Определение 3.1. *Пополненная плоскость* $\overline{\pi}$ - плоскость π вместе с добавленными бесконечно удалёнными точками.
Несобственные точки - добавленные (бесконечно удалённые) точки.
Несобственная прямая (бесконечно удалённая прямая) - множество всех несобственных точек.
Собственные прямые пополненной плоскости $\overline{\pi}$ - прямые $l \subset \pi$ вместе с добавленными точками.
Собственные точки плоскости π - точки плоскости π. Несобственная прямая соответствует плоскости связки, параллельной плоскости π.

(Комбаров) Для данной прямой l обычной плоскости π обозначим через $[l]$ несобственный пучок прямых, параллельных прямой l. Этот пучок $[l]$ назовём *несобственной точкой* плоскости π. Остальные её точки будем называть *собственными.* Добавим к плоскости π. все её несобственные точки и обозначим это новое множество через $\overline{\pi}$. Эти прямые обозначаются теми же символами l. Несобственная точка $[l]$ называется *несобственной точкой прямой* l. Множество $\overline{\pi}$ π всех несобственных точек называется *несобственной прямой* расширенной плоскости $\overline{\pi}$. Множество $\overline{\pi}$ с выделенными в нём собственными и несобственными прямыми называется *пополненной плоскостью.* Несобственные точки пополненной плоскости называются также *бесконечно удалёнными*, несобственная прямая - *бесконечно удалённой* прямой. Напомним, что выражения "точка инцидентна прямой"и "прямая инцидентна точке"означают, что данная точка принадлежит данной прямой.

Пополненную плоскость моожно воспринимать и как множество всех пучков на плоскости как собственных, так и несобственных. Если мы поставим в соответствие каждому собственному пучку прямых на плоскости центр этого пучка, то мы получим взаимно однозначное соответствие между всеми точками плоскости и всеми собственными пучками. Каждый несобственный пучок мы отождествляем с несобственной точкой. Собственные прямые пополняются несобственными точками. При этом множество всех несобственных пучков объявляется несобственной прямой.

Итак, на проективной плоскости всякие две различные прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке: собственной, если прямые l_1 и l_2 на обычной плоскости не параллельны, и несобственной, если параллельны. Если одна из двух прямых несобственная, то она пересекается со второй прямой в единственной несобственной точке последней. Легко видеть, что на проективной плоскости (так же как и на обыкновенной) через всякие две различные точки M и N проходит ровно одна прямая. Это очевидно, если обе точки собственные. Если M - собственная, а N - несобственная, то прямая MN проходит через точку M и принадлежит несобственному пучку, соответствующему точке N. Наконец, если обе точки несобственные, то прямая MN - несобственная прямая проективной плоскости.

4 Однородные координаты

(Сипачёва) Пусть в трёхмерном (аффинном) пространстве задана связка с центром O. Возьмём какой-нибудь репер $Oe_1e_2e_3$ (с началом в O). Для каждой прямой l из связки (точки проективной плоскости) координаты (x_1, x_2, x_3) любого её направляющего вектора пропорциональны координатам любого другого её направляющего вектора. Получается отношение эквивалентности между ненулевыми тройками координат:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists \lambda (\neq 0) \in \mathbb{R} : \ (y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Класс эквивалентности всех ненулевых троек координат, пропорциональных данной тройке (x_1, x_2, x_3) (т.е. множество троек координат всех направляющих векторов прямой l) называется *однородными координатами прямой* l в репере $Oe_1e_2e_3$ и обозначается $(x_1 : x_2 : x_3)$. Ясно, что однородные координаты любой прямой однозначно определяются любой тройкой координат из класса троек, представляющего собой эти однородные координаты, поэтому запись $(x_1 : x_2 : x_3)$ удобна и однозначно определяет однородные координаты; двоеточия говорят о том, что она определена с точностью до пропорциональности, т.е.

$$(x_1 : x_2 : x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),\ \forall \lambda \neq 0.$$

Однородные координаты точки проективной плоскости (связки), которая является прямой l связки, - это однородные координаты прямой l. Тем самым каждой точке проективной плоскости мы поставили во взаимно однозначное соответствие класс (множество) пропорциональных друг другу ненулевых троек чисел.

Каждая плоскость λ (это прямая проективной плоскости) из связки задаётся уравнением вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Тройки коэффициентов $\{a_1, a_2, a_3\}$ в разных уравнениях, задающих одну и ту же плоскость λ, пропорциональны друг другу.

Определение 4.1. Класс всех (ненулевых пропорциональных друг другу) троек коэффициентов $\{a_1, a_2, a_3\}$ уравнений, задающих плоскость λ в репере $Oe_1e_2e_3$, называется *однородными координатами плоскости* λ в репере $Oe_1e_2e_3$ и обозначается $\{a_1 : a_2 : a_3\}$.

Однородные координаты прямой проективной плоскости (т.е. плоскости в связке) - это однородные координаты соответствующей плоскости в связке.

Таким образом, каждой прямой проективной плоскости мы тоже поставили во взаимно однозначное соответствие класс пропорциональных друг другу ненулевых троек чисел.

Точка проективной плоскости с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ *инцидентна* прямой с однородными координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ тогда и только тогда, когда $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Таким образом, в отношении инцидентности точки и прямые равноправны.

Замечание 4.1. Точки и прямые проективной плоскости равноправны всегда, не только в модели связки: легко показать, что аксиомы П1-П4 равносильны тем же аксиомам, в которых слова "точка" и "прямая" поменяны местами. Единственное, что отличает точку от прямой - это то, что прямая является множеством точек. Однако с тем же успехом можно объявить точку множеством всех инцидентных ей прямых.

5 Арифметическая модель проективной плоскости

(Сипачёва) Рассмотрим два (совершенно идентичных) множества всех классов ненулевых пропорциональных друг другу троек чисел. Назовём классы троек из первого множества точками и будем записывать их в виде $(x_1 : x_2 : x_3)$, а классы из второго множества назовём прямыми и будем записывать их в виде $\{a_1 : a_2 : a_3\}$. Скажем, что точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямая $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ инцидентны друг другу, если

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Получилась почти проективная плоскость - все аксиомы выполнены, и есть лишь одна беда: прямые не являются множествами точек. Однако каждая прямая однозначно определяется множеством точек, которые ей инцидентны. Поэтому окончательное определение таково:

Определение 5.1. *Точки* - классы ненулевых троек чисел, пропорциональных друг другу, обозначаются $(x_1 : x_2 : x_3)$. *Прямая* - множество всех точек (классов троек), удовлетворяющих одному и тому же уравнению вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0.$$

Каждая прямая однозначно определяется ненулевой тройкой чисел, пропорциональной тройке a_1, a_2, a_3, т.е. классом ненулевых троек, пропорциональных a_1, a_2, a_3 (обозначается $\{a_1 : a_2 : a_3\}$), и наоборот - любой такой класс $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ однозначно задаёт прямую. Таким образом, в рассуждениях прямые тоже можно отождествлять с тройками чисел, только надо помнить, что они другого сорта (однако если поменять местами роли прямых и точек, то ничего не изменится).

Получившаяся проективная плоскость называется *арифметической моделью проективной плоскости.*

Утверждение 5.1. *Арифметическая модель проективной плоскости изоморфна и пополненной плоскости, и связке.*

Доказательство. Изоморфизм между проективной плоскостью-связкой и арифметической моделью строится очевидным образом с помощью однородных координат. Изоморфизм между пополненной плоскостью и арифметической моделью получается как композиция изоморфизмов между пополненной плоскостью и связкой и между связкой и арифметической моделью. □

В дальнейшем под проективной плоскостью мы будем иметь в виду одну (любую) из этих изоморфных моделей.

6 Принцип двойственности

(Сипачёва) Неоднократно отмечавшееся выше равноправие точек и прямых проективной плоскости формулируется в виде принципа так:

Теорема 6.1 (Принцип двойственности). *Утверждение, касающееся точек и прямых проективной плоскости и отношения инцидентности между ними, верно тогда и только тогда, когда верно двойственное утверждение, которое получается из данного заменой слова "прямая" на "точка" и наоборот.*

(Комбаров) В самом деле, числовое равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

выражающее условие инцидентности точки $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямой $\{a_1 : a_2 : a_3\}$, не зависит от того, какую из троек мы заключаем в круглые, а какую - в фигурные скобки. Принцип двойственности иллюстрирует равноправие точек и прямых на проективной плоскости, представленной рассматриваемыми моделями.

Рассмотрим пример двойственных утверждений. Две точки инцидентны одной и только одной прямой. Двойственное утверждение: две прямые инцидентны одной и только одной точке. Иными словами, аксиомы П1 и П2 являются двойственными утверждениями.

7 Проективные системы координат

Определение 7.1 (Комбаров). Два репера $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ с общим началом O называются *эквивалентными*, если существует такое число λ, что

$$e'_i = \lambda e_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Следующее утверждение необходимо для последующего определения проективных координат.

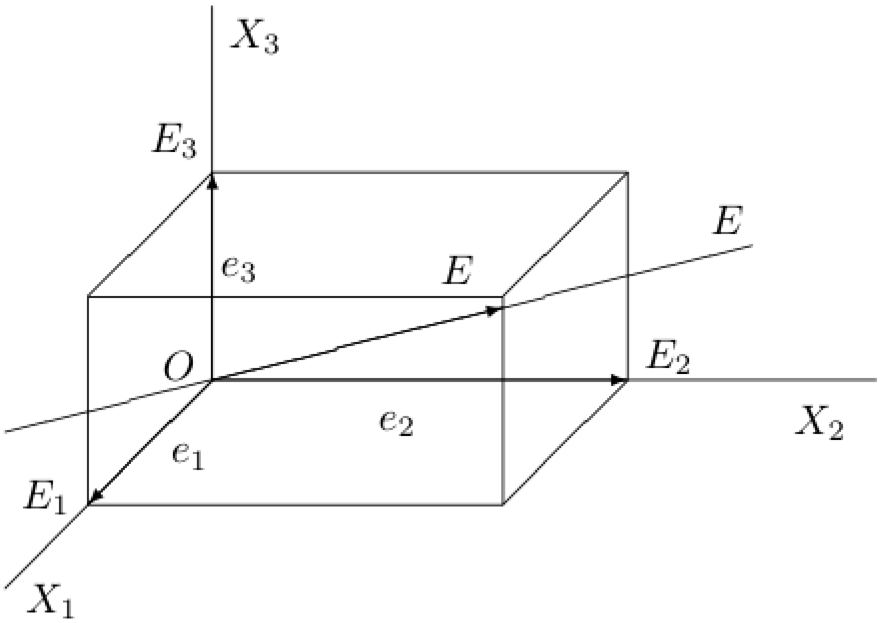
Утверждение 7.1. *Реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ эквивалентны тогда и только тогда, когда каждая прямая связки O имеет одни и те же однородные координаты в этих реперах.*

Доказательство. В книге А.П. Комбарова, Ю.В. Садовничего "Аналитическая геометрия". □

Определение 7.2. *Проективной системой координат в связке O* называется класс эквивалентных между собой аффинных реперов (или, что то же самое, аффинных систем координат) с началом O.

Проективная система координат в связке O однозначно определяется упорядоченной четвёркой прямых X_1, X_2, X_3, E связки, таких что никакие три прямые не лежат в одной плоскости. Такая четвёрка прямых (точек проективной плоскости) называется *фундаментальной четвёркой*. Прямые X_1, X_2, X_3 называются координатными, а E - единичной.

Определение 7.3. Тройки однородных координат произвольной прямой связки O в аффинном репере $Oe_1e_2e_3$, или, что то же самое, в любом аффинном репере, эквивалентном реперу $Oe_1e_2e_3$, называются *тройками проективных координат* этой прямой в проективной системе X_1, X_2, X_3, E.



В частности, прямые X_1, X_2, X_3, E имеют в этой системе координат следующие координаты:

$$X_1 = (1:0:0),\ X_2 = (0:1:0),\ X_3 = (0:0:1),\ E = (1:1:1).$$

7.1 Переход от одной проективной системы координат к другой

Пусть на проективной плоскости P заданы две проективные системы координат - исходная, "старая" $X_1X_2X_3E$ и "новая" система $X_1'X_2'X_3'E'$. Выберем какой-нибудь параллелепипед, соответствующий "новой" системе координат, и запишем координаты векторов e_1', e_2', e_3', совпадающих со сторонами параллелепипеда, в "старой" системе координат $Oe_1e_2e_3$. То есть, "новая" система задана какими-то тройками проективных координат относительно "старой" системы:

$$\begin{cases} X_1' = (c_{11} : c_{21} : c_{31}), \\ X_2' = (c_{12} : c_{22} : c_{32}), \\ X_3' = (c_{13} : c_{23} : c_{33}), \\ X_1' = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3). \end{cases}$$

Надо найти формулы преобразования координат, выражающие координаты x_1, x_2, x_3 любой точки m относительно "старой" системы координат через координаты x_1', x_2', x_3' той же точки в "новой" системе координат. Заметим, что, поскольку был выбран конкретный параллелепипед, тройки координат точек X_1', X_2', X_3', E' выбраны согласованными, т.е. подчинены условию

$$(c_{11} : c_{21} : c_{31}) + (c_{12} : c_{22} : c_{32}) + (c_{13} : c_{23} : c_{33}) = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3).$$

Тогда, возвращаясь к связке O и предполагая, что ("старая") проективная система $X_1X_2X_3E$ порождается аффинным репером $Oe_1e_2e_3$, видим, что векторы

$$e_1' = \{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\ e_2' = \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\},\ e_3' = \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\},$$

заданные координатами в базисе e_1, e_2, e_3, линейно независимы, поскольку прямые X_1, X_2, X_3 не лежат в одной плоскости. Заметим, что матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3', то есть

$$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C.$$

Далее, каждая тройка x_1, x_2, x_3 проективных координат в системе $X_1X_2X_3E$ произвольной прямой m есть тройка координат в репере $Oe_1e_2e_3$ некоторого направляющего вектора a этой прямой. Аналогичным образом тройка координат x_1', x_2', x_3' прямой m в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ есть тройка координат в репере $Oe_1'e_2'e_3'$ какого-то направляющего вектора $a' = \lambda a$ той же прямой m. Поэтому из формул преобразования аффинных координат получаем

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Здесь λ - множитель, принимающий все отличные от нуля значения. Это и есть формула перехода от проективной системы $X_1X_2X_3E$ к проективной системе $X_1'X_2'X_3'E'$.

8 Линии второго порядка на проективной плоскости

(Сипачёва) Будем рассматривать проективную плоскость как пополненную плоскость $\overline{\pi}$. При этом π задаётся уравнением $x_3 = 1$ в некотором аффинном репере $Oe_1e_2e_3$ в трёхмерном пространстве, а $\overline{\pi}$ получается из π добавлением бесконечно удалённых точек. Реперу $Oe_1e_2e_3$ соответствует репер Oe_1e_2 на π. Будем рассматривать однородные координаты точек $\overline{\pi}$, которые получаются с использованием этого же репера.

Линия второго порядка на π задаётся уравнением

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Перейдём к однородным координатам

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \; y = \frac{x_2}{x_3}:$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{1}$$

т.е.

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Определение 8.1. Линией второго порядка на проективной плоскости называется множество точек проективной плоскости, проективные координаты которых удовлетворяют уравнению вида (1), где $A \neq 0$, в некоторой проективной системе координат.

На пополненной плоскости уравнению (1) удовлетворяют, во-первых, все собственные точки, однородные координаты которых удовлетворяют уравнению (1) (т.е. обычные координаты в репере Oe_1e_2 удовлетворяют уравнению $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$).

Замечание 8.1. Заметим, что это не обязательно линия второго порядка на π, так как ненулевая матрица A может иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, а тогда это прямая вида $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Несобственные точки (с однородными координатами $(x_1 : x_2 : 0)$), удовлетворяющие уравнению (1), т.е. такие, что $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$. Они отвечают асимптотическим направлениям линии второго порядка на π, заданной уравнением $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, если не все элементы a_{11}, a_{12}, a_{22} матрицы A равны 0. Если же они все равны 0, то уравнению (1) удовлетворяют все несобственные точки пополненной плоскости $\overline{\pi}$, т.е. вся несобственная прямая.

Итак, всякая линия второго порядка на пополненной плоскости - это либо

- линия второго порядка на π, пополненная асимптотическим направлением, либо
- пара пересекающихся прямых, одна из которых несобственная (когда $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ и $a_{12}^2 + a_{23}^2 \neq 0$), либо
- пара совпадающих несобственных прямых (когда $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = 0$, в этом случае $a_{33} \neq 0$, т.к. $A \neq 0$).

Определение 8.2. Уравнения вида (1) линий второго порядка на проективной плоскости *проективно эквивалентны*, если одно из них можно превратить в другое проективной заменой координат.

У нас есть соответствующие друг другу реперы $Oe_1e_2e_3$ в пространстве и Oe_1e_2 на π. Мы знаем, что если $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ (1 случай), то аффинной заменой координат матрицу A можено привести к виду $\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$ (не парабола) или $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (парабола), где $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} = \pm 1$ или 0; $a'_{22} = a'_{13} = 1$.

Рассмотрим возможные разновидности пересечения нашей проективной линии с π.

1. *Эллипс*: $x^2 + y^2 = 1$. В однородных координатах: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
2. *Гипербола*: $x^2 - y^2 = 1$. В однородных координатах: $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \Leftrightarrow -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

   Проективная замена координат $\begin{cases} \lambda x_1 = x'_3, \\ \lambda x_2 = x'_1, \\ \lambda x_3 = x'_2 \end{cases}$ приводит это уравнение к виду: $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$.

3. *Парабола*: $y^2 - 2x = 0$. В однородных координатах: $x_2^2 - 2x_1x_3 = 0$. Проективная замена $\begin{cases} \lambda x_1 = x'_2, \\ \lambda x_2 = \frac{x'_3 + x'_1}{\sqrt{2}}, \\ \lambda x_3 = \frac{x'_3 - x'_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

   приводит это уравнение к виду $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$.

   Вывод: Уравнение линий второго порядка на проективной плоскости, собственные точки которой образуют эллипс, гиперболу или параболу, проективно эквивалентны.

   Определение 8.3. Линия второго порядка на проективной плоскости, которая в некоторой проективной системе координат описывается уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, называется *овалом*.

4. *Мнимый эллипс*: $x^2 + y^2 + 1 = 0$. В однородных координатах: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Эта линия называется *мнимым овалом*. Это пустое множество.
5. *Пара пересекающихся прямых*: $x^2 - y^2 = 0$. В однородных координатах: $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Это и в проективной плоскости пара пересекающихся прямых.
6. *Пара мнимых пересекающихся прямых (точка)*: $x^2 + y^2 = 0$. В однородных координатах: $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Это, по-прежнему, точка.
7. *Пара совпадающих прямых*: $y^2 = 0$, т.е. $x_2^2 = 0$. Это уравнение проективно эквивалентно $x_1^2 = 0$.
8. *Параллельные прямые*: $y^2 - 1 = 0$. В однородных координатах: $x_2^2 - x_3^2 = 0$. Проективно эквивалентно уравнению пары пересекающихся прямых.
9. *Мнимые параллельные прямые*: $y^2 + 1 = 0$, т.е. $x_2^2 + x_3^2 = 0$. Проективно эквивалентно уравнению пары мнимых пересекающихся прямых.

Итак, существуют 5 классов проективной эквивалентности уравнений линий второго порядка на проективной плоскости:

1. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ - овал;
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ - мнимый овал;
3. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ - пара пересекающихся прямых;
4. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ - пара мнимых пересекающихся прямых (точка);
5. $x_1^2 = 0$ - пара совпадающих прмяых.

Утверждение 8.1. *Уравнения 1.-5. попарно НЕ проективно эквивалентны. Следует помнить, что с точки зрения проективной плоскости собственные и несобственные прямые на пополненной плоскости совершенно равноправны, т.к. их уравнения можно преобразовать друг в друга проективной заменой координат.*

9 Проективные преобразования

(Сипачёва)

Определение 9.1. Отображение $f : P \to P$ проективной плоскости P в себя называется проективным преобразованием, если существуют две проективные системы координат $X_1X_2X_3E$ и $\tilde{X_1}\tilde{X_2}\tilde{X_3}\tilde{E}$ такие, что $\forall M \in P$ точка $f(M)$ имеет во второй системе координат те же координаты, что M имела в первой.

Замечание 9.1. Очевидно, это биекция.

Ситуация совершенно аналогична случаю линейных преобразований. Если C - матрица перехода от $X_1X_2X_3E$ к $\tilde{X_1}\tilde{X_2}\tilde{X_3}\tilde{E}$, т.е. от аффинного репера (какого-нибудь из них), определяющего проективный репер $X_1X_2X_3E$, к аффинному реперу, определяющему $\tilde{X_1}\tilde{X_2}\tilde{X_3}\tilde{E}$, то координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ точки M относительно первого репера выражаются через её координаты $(\tilde{x_1} : \tilde{x_2} : \tilde{x_3})$ относительно второго так:

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{pmatrix}.$$

Пусть $(x_1' : x_2' : x_3')$ - координаты в $X_1X_2X_3E$ точки $f(M)$, где $M \simeq (x_1 : x_2 : x_3)$. Тогда

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется *матрицей проективного преобразования f.*

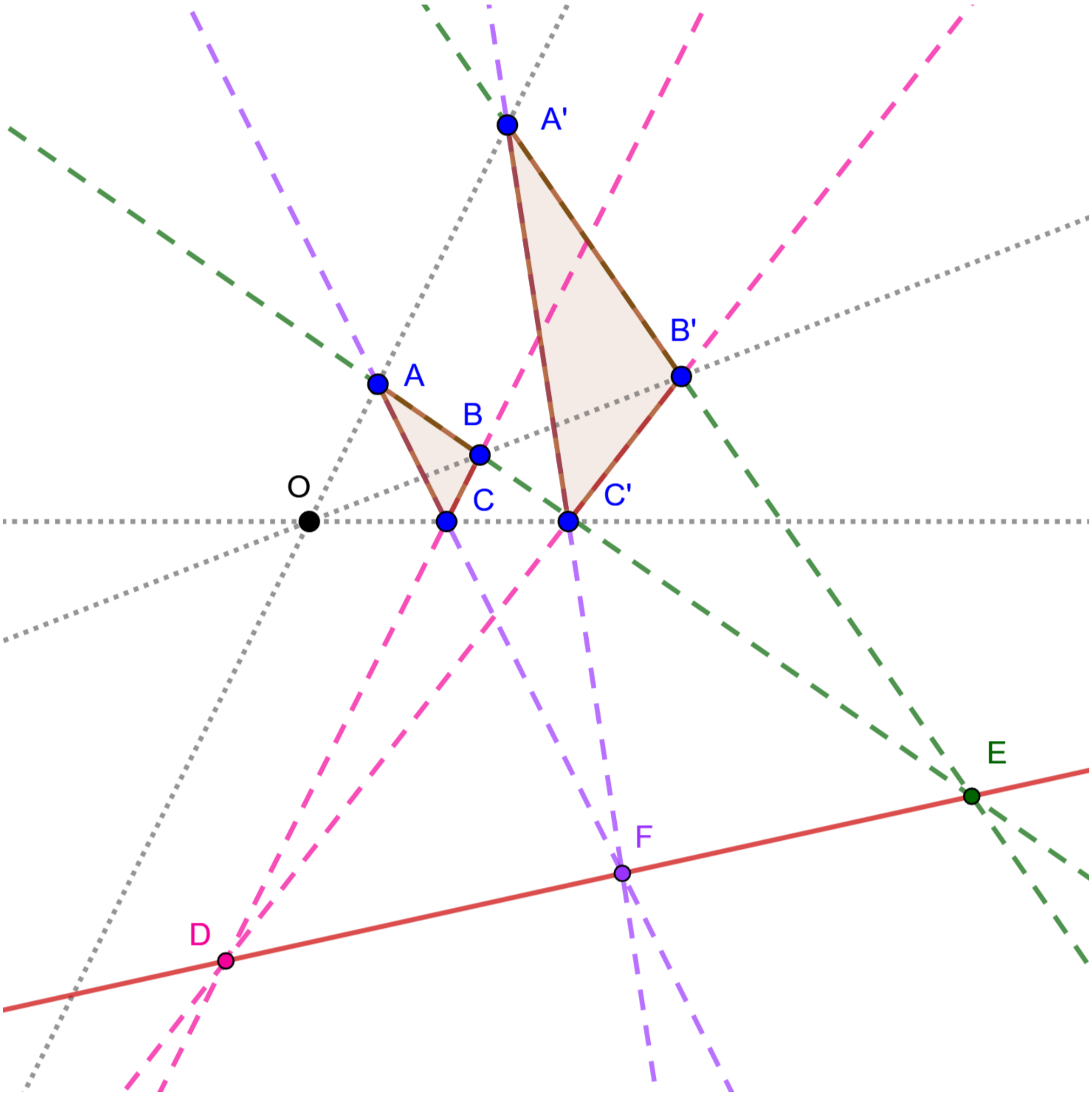
Утверждение 9.1. *Пусть l - прямая с координатами $a_1 : a_2 : a_3$ на проективной плоскости. Тогда $f(l)$ - прямая с координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}C^{-1}$.*

Определение 9.2. Линии второго порядка на проективной плоскости *проективно эквивалентны*, если одну из них можно перевести в другую проективным преобразованием.

Замечание 9.2. В отличие от евклидова и аффинного случаев, линии второго порядка на проективной плоскости проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их уравнения проективно эквивалентны.

10 Теорема Дезарга

Теорема 10.1. *Если прямые, проходящие через соответственные вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке, то точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой.*


A'
B'
A
B
O
C
C'
E
F
D