Теория дискретных функций

09.03.2025 20:13 #Математика/ТДФ #Конспект #Избранное #MSU/S2

Про функции вообще

- В нашем курсе функции равны, когда они в каждой точке из области определения принимают одинаковые значения и ИХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОВПАДАЮТ — последнее очень важно.
- Конечный упорядоченный набор — это тоже функция, определённая на отрезке натурального ряда от 1 до n. Т.к. мы всегда работаем с упорядоченными наборами, то слово "упорядоченный" обычно опускают, но про него не надо забывать.
- С помощью таких наборов определяется прямое произведение множеств.
- Если функция определена на прямом произведении n множеств, то она называется функцией от n переменных.
- Число переменных — число сомножителей, т.к. пока что не дали определение переменной.

Функции алгебры логики

- $$E_2 = \{0, 1\},\ E_2 \times \cdots \times E_2 = B_n$$
- Функция алгебры логики: $f : B_n \to E_n$
- Нульарные функции (n == 0):
  - Тождественный ноль
  - Тождественная единица
- Унарные функции (n == 1):
  - Тождественный ноль и единица
  - Повторитель
  - Отрицание
- Бинарные операции (n == 2):

x_0=x	1	0	1	0	Обозначение функции	Название функции
x_1=y	1	1	0	0		
0	0	0	0	0	F2,0 = 0	тождественный ноль
1	0	0	0	1	F2,1 = $x \downarrow y = x \dagger y$ = x NOR y = NOR(x,y) = x НЕ-ИЛИ y = НЕ-ИЛИ(x,y) = NOT(MAX(X,Y))	стрелка Пи́рса - "↓" (кинжал Куайна - "†"), функция Ве́бба - "∘"[7], НЕ-ИЛИ, 2ИЛИ-НЕ, антидизъюнкция, инверсия максимума
2	0	0	1	0	F2,2 = $x > y$ = x GT y = GT(x,y) = $\overline{x \rightarrow y} = x \nrightarrow y$	функция сравнения "первый операнд больше второго операнда", инверсия прямой импликации, коимпликация[8]
3	0	0	1	1	F2,3 = $\overline{y} = y' = \neg y$ = NOT2(x,y) = НЕ2(x,y)	отрицание (негация, инверсия) второго операнда
4	0	1	0	0	F2,4 = $x < y$ = x LT y = LT(x,y) = $\overline{x \leftarrow y} = x \nleftarrow y$	функция сравнения "первый операнд меньше второго операнда", инверсия обратной импликации, обратная коимпликация[8]
5	0	1	0	1	F2,5 = $\overline{x} = x' = \neg x$ = NOT1(x,y) = НЕ1(x,y)	отрицание (негация, инверсия) первого операнда
6	0	1	1	0	F2,6 = x >< y = x <> y = x NE y = NE(x, y) = $x \oplus y$ = x XOR y = XOR(x,y) = XMAX(x,y) = x XMAX y	функция сравнения "операнды не равны", сложение по модулю 2, исключающее «или», сумма Жегалкина[9], исключающий max
7	0	1	1	1	F2,7 = $x \mid y = x \uparrow y$ = x NAND y = NAND(x,y) = x НЕ-И y = НЕ-И(x,y) = NOT(MIN(X,Y))	штрих Ше́ффера, пунктир Чулкова[10], НЕ-И, 2И-НЕ, антиконъюнкция, инверсия минимума
8	1	0	0	0	F2,8 = $x \wedge y = x \cdot y = xy$ = x & y = x AND y = AND(x,y) = x И y = И(x,y) = min(x,y)	конъюнкция, 2И, минимум
9	1	0	0	1	F2,9 = $(x \equiv y) = x \sim y = x \leftrightarrow y$ = x EQV y = EQV(x,y)	функция сравнения "операнды равны", эквивалентность
10	1	0	1	0	F2,10 = YES1(x,y) = ДА1(x,y) = x	первый операнд
11	1	0	1	1	F2,11 = $x \geq y$ = x >= y = x GE y = GE(x,y) = $x \leftarrow y = x \subset y$	функция сравнения "первый операнд не меньше второго операнда", обратная импликация (от второго аргумента к первому)
12	1	1	0	0	F2,12 = YES2(x,y) = ДА2(x,y) = y	второй операнд
13	1	1	0	1	F2,13 = $x \leq y$ = x <= y = x LE y = LE(x,y) = $x \rightarrow y = x \supset y$ = x IMP y[11]	функция сравнения "первый операнд не больше второго операнда", прямая (материальная) импликация (от первого аргумента ко второму)
14	1	1	1	0	F2,14 = $x \vee y = x + y$ = x OR y = OR(x,y) = x ИЛИ y = ИЛИ(x,y) = max(x,y)	дизъюнкция, 2ИЛИ, максимум
15	1	1	1	1	F2,15 = 1	тождественная единица

- Тернарные функции (n == 3):

x_0=x	1	0	1	0	1	0	1	0	Обозначения	Названия
x_1=y	1	1	0	0	1	1	0	0		
x_2=z	1	1	1	1	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	1	F3,1 = $x \downarrow y \downarrow z$ = ↓(x,y,z) = Webb$_2$(x,y,z) = NOR(x,y,z)	3ИЛИ-НЕ, функция Вебба, стрелка Пирса, кинжал Куайна - "†"
23	0	0	0	1	0	1	1	1	F3,23 = $\neg(>= 2(x,y,z))$ = $\overline{\geq 2(x,y,z)}$	Переключатель по большинству с инверсией, 3ППБ-НЕ, мажоритарный клапан с инверсией
126	0	1	1	1	1	1	1	0	F3,126 = (x≠y≠z) = [≠(x,y,z)] = NE(x,y,z)	Неравенство
127	0	1	1	1	1	1	1	1	F3,127 = $x \mid y \mid z$ = $\mid$(x,y,z) = NAND(x,y,z)	3И-НЕ, штрих Шеффера
128	1	0	0	0	0	0	0	0	F3,128 = x&y&z = &(x,y,z) = (x AND y AND z) = AND(x,y,z) = (x И y И z) = И(x,y,z) = min(x,y,z)	3И, минимум
129	1	0	0	0	0	0	0	1	F3,129 = (x=y=z) = [=(x,y,z)] = EQV(x,y,z)	Равенство
150	1	0	0	1	0	1	1	0	F3,150 = $x \oplus y \oplus z = x \oplus_2 y \oplus_2 z = \oplus_2(x,y,z)$	Тернарное сложение по модулю 2
184	1	0	1	1	1	0	0	0	F3,184 = $[x, y, z]$	Условная дизъюнкция
202	1	1	0	0	1	0	1	0	F3,202 = MUX(x,y)	Мультиплексор 2 в 1
216	1	1	0	1	1	0	0	0	F3,216 = f_1	Разряд займа при тернарном вычитании
232	1	1	1	0	1	0	0	0	F3,232 = f_2 = [>=2(x,y,z)] = ≥2(x,y,z) = (x И y) ИЛИ (y И z) ИЛИ (z И x)	Разряд переноса при тернарном сложении, переключатель по большинству, 3ППБ, мажоритарный клапан
248	1	1	1	1	1	0	0	0	F3,248 = x OR (y AND z) = $G_{i+1,j+1}$ = $G_{i+1,j}$ OR ($P_{i+1,j}$ AND $G_{i,j}$)	Оператор G (Genarate) Valency-2 (валентность=2) в параллельно префиксных сумматорах
254	1	1	1	1	1	1	1	0	F3,254 = (x+y+z) = +(x,y,z) = (x OR y OR z) = OR(x,y,z) = (x ИЛИ y ИЛИ z) = ИЛИ(x,y,z) = max(x,y,z)	ИЛИ, максимум

- Множество всех функций алгебры логики: P_2
- Число функций алгебры логики, зависящих от n переменных: 2^{2^n}
- Что такое существенные и фиктивные переменные, надеюсь, мне очевидно.
- Функции, которые равны с точностью до добавления фиктивных переменных — *эквивалентные*.
- Функция называется *симметрической*, если любая перестановка значений переменных не изменяет значение функции.

Формулы

- Общепринято элементарные функции:
  - Константы 0 и 1
  - Тождественная функция x

- Отрицание
- Конъюнкция, и, &, *, минимум
- Дизъюнкция, или, галочка вверх, максимум
- Импликация (если, то)
- XOR (сумма по модулю два)
- Эквивалентность
- Штрих Шеффера (отрицание конъюнкции)
- Стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции)

- В чём отличие между функцией и формулой, по мнению Подколзина: функция — это абстрактный математический объект, а формула — способ его задания
- *Формула (в матлоге)* — слово в некотором алфавите А.
- *Алфавит* — конечное или бесконечное множество.
- *Слово* $a_1 \ldots a_n$ *в алфавите* — произвольная функция, определённая на начальном отрезке натурального ряда $\{1, \ldots, n\}$ и принимающая в точке i значения a_i из А.
- Короче, это синоним "упорядоченного набора элементов из А"
- Теперь пусть F — множество функций алгебры логики, которые мы будем считать "элементарными". Пусть S — множество символов, которые будут использоваться для обозначения функций из F. Тогда отображение

  $$\Sigma : S \to F,$$

  сопоставляющее каждому символу из S функцию из F будем называть *сигнатурой для* F. Вообще говоря, сигма — не инъекция.
- Для построения формул нам также будут нужны переменные. Выберем счётный список

  $$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

  объектов, которые будем называть *символами переменных*.
- Формулы в сигнатуре определяются индуктивно:
  - База индукции: Если x_i — символ переменной, то однобуквенное слово, состоящее из этого символа, является формулой.
    - Например, x_1 — формула.
  - Шаг индукции: Если s — символ, обозначающий элементарную функцию f, которая зависит от n переменных, и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — уже построенные

формулы, то слово $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ также является формулой.

- Например, если s обозначает функцию «и», то $S(x_1, x_2)$ — это формула, которая представляет собой конъюнкцию переменных x_1, x_2.

- Таким образом, ***формула*** — это слово в алфавите, состоящем из символов переменных, символов элементарных функций, запятых и скобок.
- Формула сама по себе не задаёт функцию. Чтобы формула задавала функцию, необходимо указать относительно каких переменных она рассматривается.
- Пусть Φ — формула в сигнатуре Σ, $\tilde{x} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ — какой-то упорядоченный набор переменных, включающий все переменные формулы Φ, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — двоичный набор.

  Определим значение $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}]$ формулы Φ на наборе $\tilde{\alpha}$ значений переменных $\tilde{x}$ индукцией по построению формулы Φ:

  1. Если Φ есть однобуквенное слово x_{i_j}, то $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$.
  2. Пусть Φ имеет вид $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $f = \Sigma(s)$, причем уже определены $\Phi_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1, \ldots, \Phi_m[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_m$. Тогда
     $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = f(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

- *Вырожденные формулы* — это формулы, которые состоят только из одной переменной. Такие формулы задают тождественную функцию.
- *Невырожденные формулы* — это формулы, которые состоят из более чем одного символа и включают элементарные функции.

Суперпозиция формул

- Суперпозиция — это способ получения новых функций из уже имеющихся с помощью операций подстановки переменных, подстановки одной функции в другую и добавления или удаления фиктивных переменных.

- Операции суперпозиции:
  1. **Подстановка переменных**: Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, то можно получить новую функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, подставив вместо переменных x_i другие переменные. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, то $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.
  2. **Подстановка одной функции в другую**: Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функции, то можно получить новую функцию $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1})$, подставив g в f. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ и $g(x_1) = \bar{x}_1$, то $h(x_1, x_2) = f(g(x_1), x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2$.
  3. **Добавление или удаление фиктивной переменной**: Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, то можно добавить или удалить фиктивную переменную, не изменяя значения функции. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, то $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, где x_3 — фиктивная переменная.