

Теория дискретных функций

09.03.2025 20:13

#Математика/ТДФ

#Коспект

#Избранное

#MSU/S2

Про функции вообще

- В нашем курсе функции равны, когда они в каждой точке из области определения принимают одинаковые значения и ИХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОВПАДАЮТ — последнее очень важно.
- Конечный упорядоченный набор — это тоже функция, определённая на отрезке натурального ряда от 1 до n . Т.к. мы всегда работаем с упорядоченными наборами, то слово "упорядоченный" обычно опускают, но про него не надо забывать.
- С помощью таких наборов определяется прямое произведение множеств.
- Если функция определена на прямом произведении n множеств, то она называется функцией от n переменных.
- Число переменных — число сомножителей, т.к. пока что не дали определение переменной.

Функции алгебры логики

- $E_2 = \{0, 1\}, E_2 \times \dots \times E_2 = B_n$
- Функция алгебры логики: $f : B_n \rightarrow E_n$
- Нульарные функции ($n == 0$):
 - Тожественный ноль
 - Тожественная единица
- Унарные функции ($n == 1$):
 - Тожественный ноль и единица
 - Повторитель
 - Отрицание
- Бинарные операции ($n == 2$):

$x_0=x$	1	0	1	0		Обозначение функции	Название функции
$x_1=y$	1	1	0	0			
0	0	0	0	0		$F2,0 = 0$	тождественный ноль
1	0	0	0	1		$F2,1 = x \downarrow y = x \uparrow y = x \text{ NOR } y = \text{NOR}(x,y) = x \text{ НЕ-ИЛИ } y = \text{НЕ-ИЛИ}(x,y) = \text{NOT}(\text{MAX}(x,y))$	стрелка Пирса - "↓" (кинкал Куайна - "↑"), функция Вебба - "↑", НЕ-ИЛИ, 2ИЛИ-НЕ, антидизъюнкция, инверсия максимума
2	0	0	1	0		$F2,2 = x > y = x \text{ GT } y = \text{GT}(x,y) = \overline{x \rightarrow y} = x \rightarrow y$	функция сравнения "первый операнд больше второго операнда", инверсия прямой импликации, коимпликация ^[9]
3	0	0	1	1		$F2,3 = \bar{y} = y' = \neg y = \text{NOT2}(x,y) = \text{HE2}(x,y)$	отрицание (негация, инверсия) второго операнда
4	0	1	0	0		$F2,4 = x < y = x \text{ LT } y = \text{LT}(x,y) = \overline{x \leftarrow y} = x \leftarrow y$	функция сравнения "первый операнд меньше второго операнда", инверсия обратной импликации, обратная коимпликация ^[9]
5	0	1	0	1		$F2,5 = \bar{x} = x' = \neg x = \text{NOT1}(x,y) = \text{HE1}(x,y)$	отрицание (негация, инверсия) первого операнда
6	0	1	1	0		$F2,6 = x > x = y = x \leftrightarrow y = x \text{ NE } y = \text{NE}(x,y) = x \oplus y = x \text{ XOR } y = \text{XOR}(x,y) = \text{XMAX}(x,y) = x \text{ XMAX } y$	функция сравнения "операнды не равны", сложение по модулю 2, исключающее «или», сумма Жегалина ^[9] , исключающий max
7	0	1	1	1		$F2,7 = x \downarrow y = x \uparrow y = x \text{ NAND } y = \text{NAND}(x,y) = x \text{ НЕ-И } y = \text{НЕ-И}(x,y) = \text{NOT}(\text{MIN}(x,y))$	штрих Шеффера , пунктир Чулкова ^[10] , НЕ-И, 2И-НЕ, антиконъюнкция, инверсия минимума
8	1	0	0	0		$F2,8 = x \wedge y = x \cdot y = xy = x \& y = x \text{ AND } y = \text{AND}(x,y) = x \text{ И } y = \text{И}(x,y) = \text{min}(x,y)$	конъюнкция , 2И, минимум
9	1	0	0	1		$F2,9 = (x \equiv y) = x = y = x \leftrightarrow y = x \text{ EQV } y = \text{EQV}(x,y)$	функция сравнения "операнды равны", эквивалентность
10	1	0	1	0		$F2,10 = \text{YES1}(x,y) = \text{DA1}(x,y) = x$	первый операнд
11	1	0	1	1		$F2,11 = x \geq y = x \geq y = x \text{ GE } y = \text{GE}(x,y) = x \leftarrow y = x < y$	функция сравнения "первый операнд не меньше второго операнда", обратная импликация (от второго аргумента к первому)
12	1	1	0	0		$F2,12 = \text{YES2}(x,y) = \text{DA2}(x,y) = y$	второй операнд
13	1	1	0	1		$F2,13 = x \leq y = x \leq y = x \text{ LE } y = \text{LE}(x,y) = x \rightarrow y = x \supset y = x \text{ IMP } y$ ^[11]	функция сравнения "первый операнд не больше второго операнда", прямая (материальная) импликация (от первого аргумента к второму)
14	1	1	1	0		$F2,14 = x \vee y = x + y = x \text{ OR } y = \text{OR}(x,y) = x \text{ ИЛИ } y = \text{ИЛИ}(x,y) = \text{max}(x,y)$	дизъюнкция , 2ИЛИ, максимум
15	1	1	1	1		$F2,15 = 1$	тождественная единица

- Тернарные функции (n == 3):

$x_0=x$	1	0	1	0	1	0	1	0		Обозначения	Названия
$x_1=y$	1	1	0	0	1	1	0	0			
$x_2=z$	1	1	1	0	1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	1		$F3,1 = x \downarrow y \downarrow z = \downarrow(x,y,z) = \text{Webb}_2(x,y,z) = \text{NOR}(x,y,z)$	ЗИЛИ-НЕ, функция Вебба, стрелка Пирса, кинкал Куайна - "↑"
23	0	0	0	1	0	1	1	1		$F3,23 = \neg(> = 2(x,y,z)) = \bar{z}2(x,y,z)$	Переключатель по большинству с инверсией, ЗППБ-НЕ, мажоритарный клапан с инверсией
126	0	1	1	1	1	1	1	0		$F3,126 = (x \neq y \neq z) = \neq(x,y,z) = \text{NE}(x,y,z)$	Неравенство
127	0	1	1	1	1	1	1	1		$F3,127 = x \downarrow y \downarrow z = \downarrow(x,y,z) = \text{NAND}(x,y,z)$	ЗИ-НЕ, штрих Шеффера
128	1	0	0	0	0	0	0	0		$F3,128 = x \& y \& z = \&(x,y,z) = (x \text{ AND } y \text{ AND } z) = \text{AND}(x,y,z) = (x \text{ И } y \text{ И } z) = \text{И}(x,y,z) = \text{min}(x,y,z)$	ЗИ, минимум
129	1	0	0	0	0	0	0	1		$F3,129 = (x=y=z) = [=](x,y,z) = \text{EQV}(x,y,z)$	Равенство
150	1	0	0	1	0	1	1	0		$F3,150 = x \oplus y \oplus z = x \oplus_2 y \oplus_2 z = \oplus_2(x,y,z)$	Тернарное сложение по модулю 2
184	1	0	1	1	1	0	0	0		$F3,184 = [x,y,z]$	Условная дизъюнкция
202	1	1	0	0	1	0	1	0		$F3,202 = \text{MUX}(x,y)$	Мультиплексор 2 в 1
216	1	1	0	1	1	0	0	0		$F3,216 = f_i$	Разряд займа при тернарном вычитании
232	1	1	1	0	1	0	0	0		$F3,232 = f_2 = [=2(x,y,z)] = \bar{z}2(x,y,z) = (x \text{ И } y) \text{ ИЛИ } (y \text{ И } z) \text{ ИЛИ } (z \text{ И } x)$	Разряд переноса при тернарном сложении, переключатель по большинству, ЗППБ, мажоритарный клапан
248	1	1	1	1	1	0	0	0		$F3,248 = x \text{ OR } (y \text{ AND } z) = G_{i+1,j+1} = G_{i+1,j} \text{ OR } (P_{i+1,j} \text{ AND } G_{i,j})$	Оператор G (Generate) Valency-2 (валентность=2) в параллельно префиксных сумматорах
254	1	1	1	1	1	1	1	0		$F3,254 = (x+y+z) = +(x,y,z) = (x \text{ OR } y \text{ OR } z) = \text{OR}(x,y,z) = (x \text{ ИЛИ } y \text{ ИЛИ } z) = \text{ИЛИ}(x,y,z) = \text{max}(x,y,z)$	ИЛИ, максимум

- Множество всех функций алгебры логики: P_2
- Число функций алгебры логики, зависящих от n переменных: 2^{2^n}
- Что такое существенные и фиктивные переменные, надеюсь, мне очевидно.
- Функции, которые равны с точностью до добавления фиктивных переменных — *эквивалентные*.
- Функция называется *симметрической*, если любая перестановка значений переменных не изменяет значение функции.

Формулы

- Общепринято элементарные функции:
 - Константы 0 и 1
 - Тождественная функция x

- Отрицание
- Конъюнкция, и, &, *, минимум
- Дизъюнкция, или, галочка вверх, максимум
- Импликация (если, то)
- XOR (сумма по модулю два)
- Эквивалентность
- Штрих Шеффера (отрицание конъюнкции)
- Стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции)
- В чём отличие между функцией и формулой, по мнению Подколзина: функция — это абстрактный математический объект, а формула — способ его задания
- *Формула (в матлоге)* — слово в некотором алфавите A .
- *Алфавит* — конечное или бесконечное множество.
- *Слово $a_1 \dots a_n$ в алфавите* — произвольная функция, определённая на начальном отрезке натурального ряда $\{1, \dots, n\}$ и принимающая в точке i значения a_i из A .
- Короче, это синоним "упорядоченного набора элементов из A "
- Теперь пусть F — множество функций алгебры логики, которые мы будем считать "элементарными". Пусть S — множество символов, которые будут использоваться для обозначения функций из F . Тогда отображение

$$\Sigma : S \rightarrow F,$$

сопоставляющее каждому символу из S функцию из F будем называть *сигнатурой для F* . Вообще говоря, сигма — не инъекция.

- Для построения формул нам также будут нужны переменные. Выберем счётный список

$$X = \{x_1, x_2, \dots\}$$

объектов, которые будем называть *символами переменных*.

- Формулы в сигнатуре определяются индуктивно:
 - База индукции: Если x_i — символ переменной, то однобуквенное слово, состоящее из этого символа, является формулой.
 - Например, x_1 — формула.
 - Шаг индукции: Если s — символ, обозначающий элементарную функцию f , которая зависит от n переменных, и Φ_1, \dots, Φ_n — уже построенные

формулы, то слово $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ также является формулой.

- Например, если s обозначает функцию «и», то $S(x_1, x_2)$ — это формула, которая представляет собой конъюнкцию переменных x_1, x_2 .
- Таким образом, **формула** — это слово в алфавите, состоящем из символов переменных, символов элементарных функций, запятых и скобок.
- Формула сама по себе не задаёт функцию. Чтобы формула задавала функцию, необходимо указать относительно каких переменных она рассматривается.
- Пусть Φ — формула в сигнатуре Σ , $\tilde{x} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ — какой-то упорядоченный набор переменных, включающий все переменные формулы Φ , $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — двоичный набор.

Определим значение $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}]$ формулы Φ на наборе $\tilde{\alpha}$ значений переменных \tilde{x} индукцией по построению формулы Φ :

1. Если Φ есть однобуквенное слово x_{i_j} , то $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \alpha_j$.
 2. Пусть Φ имеет вид $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, $f = \Sigma(s)$, причем уже определены $\Phi_1[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_1, \dots, \Phi_m[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = \beta_m$. Тогда $\Phi[\tilde{x}, \tilde{\alpha}] = f(\beta_1, \dots, \beta_m)$.
- - **Вырожденные формулы** — это формулы, которые состоят только из одной переменной. Такие формулы задают тождественную функцию.
 - **Невырожденные формулы** — это формулы, которые состоят из более чем одного символа и включают элементарные функции.

Суперпозиция формул

- Суперпозиция — это способ получения новых функций из уже имеющихся с помощью операций подстановки переменных, подстановки одной функции в другую и добавления или удаления фиктивных переменных.

- Операции суперпозиции:

1. **Подстановка переменных:** Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, то можно получить новую функцию $g(x_1, \dots, x_n)$, подставив вместо переменных x_i другие переменные. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, то $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.
2. **Подстановка одной функции в другую:** Если $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_m)$ — функции, то можно получить новую функцию $h(x_1, \dots, x_{n+m-1})$, подставив g в f . Например, если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ и $g(x_1) = \bar{x}_1$, то $h(x_1, x_2) = f(g(x_1), x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2$.
3. **Добавление или удаление фиктивной переменной:** Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, то можно добавить или удалить фиктивную переменную, не изменяя значения функции. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, то $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, где x_3 — фиктивная переменная.