

重积分			仅供学习参考，勿作商业用途。 作者：参宿四星云 2022年4月15日		
二重积分 （黎曼积分） $def: \iint_D f(x,y) d\sigma \text{ 或 } \iint_D f(x,y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i$ 其中 λ 为 积分区域 D 的子区域 D_i 直径的最大值			三重积分 （黎曼积分） $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dV \text{ 或 } \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$ 其中 Ω 为 积分区域， dV 为 体积元素（体积微元）		
可积的判定：有界闭区域上连续（或分片连续）的二元函数			性质 <div>对积分区域的可加性&对被积函数的可加性</div> <div>保号性&保不等号性</div> <div>积分中值定理</div> <div>关于某一变量的奇偶性&轮换对称性（计算量影响大）</div>		
性质 <div>对积分区域的可加性&对被积函数的可加性</div> <div>保号性&保不等号性</div> <div>$\int f(x) dx \cdot \int g(y) dy = \iint f(x) g(y) dx dy$</div> <div>奇偶性$\begin{cases} \text{关于 } x \text{ 的偶函数: } f(x,y) = f(-x,y) \\ \text{关于 } x \text{ 的奇函数: } f(x,y) = -f(-x,y) \end{cases}$ 轮换对称性: $f(x,y) = f(y,x)$</div> <div>积分中值定理 $f(x,y) \in C(D)$，则 $\exists (x_0, y_0) \in D$，$st. \iint_D f(x,y) d\sigma = f(x_0, y_0) \cdot S$，其中 $S = \iint_D d\sigma$</div>			直角坐标下的 投影法 （先一后二） $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$ 其中 D 为 Ω 在平面 xOy 的投影， Ω 是以 $z = z_1(x,y)$ 和 $z = z_2(x,y)$ $\left((x,y) \in D\right)$ 为底的的正柱面体，即侧面的母线平行于 z 轴，具有积聚性		
直角坐标下的计算公式（ 累次积分 ） $\iint_D f(x,y) d\sigma = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$ （面包片模型）（此例子为 X 型区域： D 为“两直两曲” 四边形，其中直边为 $x = a$ 和 $x = b$ ，曲边为 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ ）			直角坐标下的 截面法 （先二后一） $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_D f(x,y,z) dx dy$ 其中 Ω 要介于平面 $z = a$ 和 $z = b$ 之间， $\forall z_0 \in [a,b], z = z_0 \cap \Omega = D_{z_0}$ 为闭区域（连通的开集并其边界）		
要点 <div>积分次序影响积分的繁易</div> <div>上下限函数分段时，分区域积分</div> <div>改变积分次序可能改变分区域积分的需要</div>			如何选用坐标系 <div>注意被积函数的特殊结构，如平方和</div> <div>注意各种坐标下被积区域是否需要分割</div>		
极坐标 下的计算公式 $\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr$ （一般先 r 后 θ ） 其中有坐标变换 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 另外，还有椭圆坐标系（广义极坐标变换）			柱坐标 下的计算公式 $\left(T: \begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases}\right)$ $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r dr d\theta dz$		
二重积分的变量变换公式 若 $f(x,y) \in C(D)$ ，变换 $T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, (u,v) \in D \rightarrow D$ 满足 ① $x(u,v), y(u,v) \in C'(D)$ ② $J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ 则有 $\iint_D f(x,y) \underline{dx dy} = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \underline{ J } \underline{du dv}$			球坐标 下的计算公式 $\left(T: \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \leq r < +\infty \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta & 0 \leq \varphi < \pi \\ z = \rho \cos \varphi & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}\right)$ $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \cdot \rho^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ 另外，还有广义球坐标变换		
曲面的面积 直角坐标 曲面 $z = f(x,y), (x,y) \in D$ 的面积为 $S = \iint_D \frac{d\sigma}{ \cos \gamma } = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)} d\sigma$ 参数方程 （坐标变换）曲面 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, 则 $\underline{dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv}$.			在一般变量替换下的变换公式 若 $f(x,y,z) \in C(\Omega)$ ，变换 $T: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w), (u,v,w) \in \Omega' \leftrightarrow \Omega \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ $\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot J du dv dw$ 其中 $ J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$		