



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA E EXPERIMENTAL
BACHARELADO EM FÍSICA

Análise Qualitativa do Método de Inversão Completa das Formas de Onda no Domínio do Tempo

Suzane Adrielly da Silva

Natal-RN
Novembro de 2017

Suzane Adrielly da Silva

Análise Qualitativa do Método de Inversão Completa das Formas de Onda no Domínio do Tempo

Monografia de graduação apresentada ao Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Medeiros de Araújo

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Departamento de Física Teórica e Experimental - DFTE

Natal - RN
2017

Monografia de graduação sob o título **Análise Qualitativa do Método de Inversão Completa das Formas de Onda no Domínio do Tempo** apresentada por *Suzane Adrielly da Silva* e aceita pelo Departamento de Física Teórica e Experimental do Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sendo aprovada por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. João Medeiros de Araújo. - Orientador
Departamento de Física Teórica e Experimental
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Gilberto Falkembach Corso - Interno
Departamento de Biofísica e Farmacologia
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Claudionor Gomes Bezerra - Interno
Departamento de Física Teórica e Experimental
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Natal-RN, 28 de Novembro de 2017.

In memorian de Mércia Karoliny

Agradecimentos

À minha família, primeiramente. Em especial à minha mãe, Rosalucia, que sempre foi a minha referência maior.

Ao meu avô, João Martins, por todo carinho e incentivo que me deu. Por acreditar em todos os meus sonhos e me permitir realizá-los. Nunca vou esquecer tudo que fez por mim, e farei por merecer o “minha doutora” com que me apresentava aos seus amigos.

Ao meu orientador, o Prof. João medeiros, pelo apoio, por toda atenção e principalmente pela orientação acadêmica.

À Matheus Phellipe, que entre todas as pessoas que conheci ao longo dessa jornada foi a mais importante. O mais companheiro e fiel dos amigos.

Aos meus grandes amigos, Isaac e Valdecio, por tudo que vivemos juntos ao longo do curso, pelo apoio moral e por terem me dado uma segunda família.

À Acácio de Melo, que foi muito mais que um amigo, foi um verdadeiro irmão. Além de ser um exemplo de pessoa para mim, por sua dedicação, integridade e bondade.

À Marcio Assolin, pela confiança que depositou em mim, pela oportunidade que me deu de fazer parte dos seus projetos e principalmente por ter me apresentado a física experimental.

Aos colegas do PPGCEP, Rutinaldo Aguiar, Yuri Freitas, Juan Medeiros, Marcos Vinícius e Bruno, pelo conhecimento compartilhado, e pela enriquecedora experiência adquirida nesse grupo de pesquisa.

Aos professores Liacir Lucena, Álvaro Barroca e Gilberto Corso, pelos debates científicos e pelo grande conhecimento adquirido com eles.

Aos colegas da pós graduação, Cristovão, Edimilson Félix, Danielle, Diego, Suzana, Carlos Iglesias, Lázaro, Núbia, Carlinhos, Rafael, Veruska, Nazareno, Lucas, Neymar e Vivian. (Peço perdão se esqueci de alguém).

Aos professores do Departamento de Física, Ananias Monteiro, Carlos Chesman, Bruno Canto, Francisco Alexandre, Daniel Brito e Marco Morales, pelo carinho, atenção e pelos conselhos valiosos que me deram.

Aos professores do Departamento de Geofísica, Walter, Josibel, Rosângela e Márcio Maia, por terem me apresentado a beleza do curso de Geofísica.

Aos colegas de Geofísica, Dênis, Lucas, Asmminey, entre outros.

À minha amiga Raquel Angélica, pelo carinho, pela atenção e por todo apoio que sempre me deu nas hora difíceis.

À minha amiga-irmã Jeany Eunice, por ser um exemplo de mulher pra mim. Espero que um dia eu possa ser uma pessoa tão bondosa e generosa quanto você.

Aos colegas da física, Rafael Nascimento, Rafael Alexandre, Jardes, Felipe da Paz, Diego Brito, Josiano, entre outros.

Aos meus primeiros amigos na UFRN, Caciano, Aline, Arthur, Tiely e Estevam.

Aos funcionários do DFTE, Ricardo e Max, pelas boas conversas e por serem pessoas maravilhosas.

Eu é que sei o que penso sobre vós, diz o SENHOR. Pensamentos de paz e não de mal,
para vos dar o fim que desejais.
(Jer)

Análise Qualitativa do Método de Inversão Completa das Formas de Onda no Domínio do Tempo

Autora: Suzane Adrielly da Silva

Orientador: Prof. Dr. João Medeiros de Araújo

RESUMO

Um dos grandes desafios da ciência moderna é obter boas imagens de subsuperfícies de forma indireta, tendo em vista que muitas vezes a forma direta de observar tal superfície é inviável. Podemos citar alguns exemplos que utilizam processos indiretos de imageamento, tais como: Ultrassonografia, Tomografia, Imageamento Sísmico, entre outros. A semelhança entre esses métodos advém da forma utilizada para obter a imagem. Em todos os exemplos citados a região de interesse é submetida à algum tipo de onda, que penetra no meio (corpo) e sofre reflexões, refrações, etc. Tais fenômenos podem ser detectados graças à recepção dessas ondas por sensores. Neste trabalho abordamos o problema de Imageamento Sísmico, detalhando algumas das etapas mais importantes da técnica, que é a mais utilizada pela indústria de Petróleo para imagear subsuperfícies, em busca de reservatórios de óleo e gás. Este trabalho se trata de uma análise geral da metodologia FWI no domínio do tempo, desde a formulação matemática até uma aplicação computacional. No desenvolvimento deste trabalho foi utilizado o Método das Diferenças Finitas para discretizar a equação da onda acústica, supondo o campo de onda sendo exclusivamente acústico. Também foi utilizado o Método do Gradiente Descendente para atualizar o modelo de velocidades. Usamos inicialmente um modelo de velocidades suave que supomos estar próximo do modelo real e o reconstruímos iterativamente até obter um modelo mais realístico. Foi utilizado o Método Adjunto para calcular o gradiente da função objetivo. A análise desenvolvida neste trabalho foi dividida em três partes: análise da qualidade da imagem de subsuperfície reconstruída perante mudança na quantidade de disparos; a mesma análise, agora perante mudança na quantidade de iterações; e análise do tempo de execução de cada configuração. Podemos a partir desse estudo, levantar uma análise quantitativa dos parâmetros do modelo, observando o que chamamos de “ponto ótimo”, o ponto em que encontramos a solução m que minimiza nossa função erro.

Palavras-Chave: Inversão Completa das Formas de Onda, Migração, Método Adjunto, Programação Paralela.

Qualitative Analysis of the Full Waveforms Inversion Method in Time Domain

Author: Suzane Adrielly da Silva
Advisor: Prof. Dr. João Medeiros de Araújo

ABSTRACT

One of the great challenges of modern science is to obtain good images of subsurfaces in an indirect way, since the direct way of observing such surface is often not feasible. We can cite some examples that use indirect processes of imaging, such as: Ultrasonography, Tomography, Seismic Imaging, among others. The similarity between these methods comes from the way used to obtain the image. In all the cited examples the region of interest is subjected to some kind of wave, which penetrates the middle (body) and undergoes reflections, refractions, etc. Such phenomena can be detected thanks to the reception of these waves by sensors. In this work we approach the problem of Seismic Imaging, detailing some of the most important steps in the technique, which is the most used by the Oil industry to image subsurface areas, in search of oil and gas reservoirs. This work deals with a general analysis of the FWI methodology in the time domain, from mathematical formulation to a computational application. In the development of this work the Finite Differences Method was used to discretize the acoustic wave equation, assuming the wave field to be exclusively acoustic. We also used the Descent Gradient Method to update the velocity model. We initially use a smooth velocity model that we assume to be close to the real model and reconstruct iteratively until a more realistic model is obtained. The Adjoint Method was used to calculate the objective function gradient. The analysis developed in this work was divided into three parts: analysis of the quality of the reconstructed subsurface image due to a change in the number of shots; the same analysis, now considering the change in the number of iterations; and analysis of the execution time of each configuration. From this study, we can take a quantitative analysis of the parameters of the model, observing what we call the “optimal point”, the point where we find the solution m which minimizes our error function.

Palavras-Chave: Full Waveform Inversion, Migration, Adjoint Method, Parallel Programming.

Lista de Figuras

1.1	Fluxograma de um levantamento sísmico. Figura adaptada da referência [2]	4
1.2	Ilustração de uma aquisição sísmica marinha. Figura retirada da referência [8]	4
1.3	Ilustração de uma aquisição sísmica terrestre. Figura retirada da referência [8].	5
2.1	Representação da malha discreta à esquerda e representação da malha com condições de borda à direita. Fonte: adaptada de [13]	9
3.1	Fluxograma do FWI. Fonte: elaborada pela autora.	18
4.1	(a) Modelo inicial (b) Modelo Reconstruído e (c) Modelo Real. Fonte: elaborada pela autora.	20
4.2	(a) Modelo inicial. Reconstruído com (b) 10 disparos (c) 12 disparos (d) 14 disparos (e) 16 disparos e (f) 18 disparos, mantendo $N_I = 10$. Fonte: elaborada pela autora.	21
4.3	(a) Modelo reconstruído com 30 disparos e 10 iterações (b) Modelo reconstruído com 40 disparos e 10 iterações (c) Modelo reconstruído com 50 disparos e 10 iterações (d) Modelo real. Fonte: elaborada pela autora.	22
4.4	Gráfico do resíduo em função do número de iterações, variando N_s de 2 em 2. Fonte: elaborada pela autora.	23
4.5	Gráfico do resíduo em função do número de iterações para grandes quantidades de disparos. Fonte: elaborada pela autora.	24
4.6	(a) Modelo inicial. Modelo reconstruído com $N_s = 10$ e (b) $N_I = 10$ (c) $N_I = 12$ (d) $N_I = 14$ (e) $N_I = 16$ (f) $N_I = 18$. Fonte: elaborada pela autora.	25
4.7	(a) Modelo inicial, (b) Reconstruído com $N_s = 10$ $N_I = 30$, (c) Reconstruído $N_s = 10$ $N_I = 40$ e (d) Modelo real. Fonte: elaborada pela autora.	26
4.8	Gráfico do erro em função da quantidade de iterações, mantendo $N_s = 10$ e variando N_I . Fonte: elaborada pela autora	26
4.9	Gráfico do erro em função da quantidade de iterações, mantendo $N_s = 10$ e variando N_I . Fonte: elaborada pela autora.	27
4.10	Gráfico do erro em função da quantidade de iterações, com $N_s = 10$ e $N_I = 30$ à esquerda e $N_I = 40$ à direita. Fonte: elaborada pela autora.	27
4.11	(a) Modelo reconstruído com 20 disparos e 20 iterações (b) Modelo reconstruído com 20 disparos e 30 iterações (c) Modelo real. Fonte: elaborada pela autora.	28

- 4.12 Gráfico do erro e função do número de iterações, para 20 disparos e 20 iterações à esquerda, e 20 disparos e 30 iterações à direita. Fonte: elaborada pela autora. 29

Lista de Tabelas

4.1	Geometria de Aquisição para o modelo Marmousi.	19
4.2	Tabela do tempo de execução das amostras com $N_s = 10$	24
4.3	Tempo de execução da simulações com $N_s = 10$ variando a quantidade de iterações.	28
4.4	Tempo de execução das simulações com $N_s = 20$ com $N_I = 20$ e $N_I = 30$ iterações, respectivamente.	29

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Sumário	1
1 Introdução	2
1.1 Levantamento sísmico	3
1.1.1 Aquisição sísmica	3
1.1.2 Processamento de sinais	5
1.1.3 Interpretação de dados	5
1.2 Problema inverso	6
1.3 Estrutura do trabalho	6
2 Equação da Onda	7
2.1 Equação da Onda Acústica	7
2.2 Discretização pelo Método das Diferenças Finitas (MDF)	8
3 FWI como método de otimização	10
3.1 Aproximação de Born	10
3.2 Método do Gradiente Descendente	13
3.3 Método do Estado Adjunto	13
3.4 Visão geral do método FWI	17
4 Resultados e Discussões	19
4.1 Resultados variando a quantidade de disparos	20
4.1.1 Análise do erro	22
4.1.2 Análise do tempo de execução	24
4.2 Resultados variando a quantidade de iterações	25
4.2.1 Análise do erro	26
4.2.2 Análise do tempo de execução	27
4.3 Ponto ótimo	28
4.3.1 Análise do erro	29
4.3.2 Análise do tempo de execução	29

5 Conclusões e Perspectivas

30

Introdução

Um dos grandes desafios da ciência moderna é obter boas imagens de subsuperfícies de forma indireta, tendo em vista que muitas vezes a forma direta de observar tal superfície é inviável. Alguns exemplos de técnicas que utilizam processos indiretos de imageamento são: Ultrassonografia, Tomografia e Imageamento Sísmico. A semelhança entre os métodos advém da maneira de gerar a imagem, já a diferença vem basicamente da escala em que se trabalha, sendo problemas de Medicina muitas vezes da ordem de centímetros, enquanto problemas sísmicos podem chegar a milhares de metros, o que torna o método sísmico bastante atrativo. A indústria petrolífera a cada dia demanda novas tecnologias para a identificação e caracterização de reservatórios de óleo e gás (MARTINS, 2015) [4]. Devido à sua habilidade de produzir imagens até profundidades de milhares de metros com resolução de dezenas de metros, o método sísmico tornou-se de longe o método geofísico mais utilizado na indústria do petróleo (BLEISTEIN, 2001) [3] .

A qualidade dos dados adquiridos em uma exploração sísmica depende de vários fatores, e precisamos ter consciência que sempre haverá imperfeições (ruído). Por este motivo, faz-se necessário o uso de métodos que ajustem os dados da melhor maneira possível. Um destes métodos de processamento é o que chamamos de Inversão Completa das Formas de Onda.

Nos últimos anos, o método da Inversão Completa da Forma da Onda (FWI) tem sido bastante utilizado na exploração de petróleo. Isso se deve ao fato deste método gerar modelos de velocidades sísmica de alta resolução, como mencionado por Carrillo *et al* (2015) [1].

A modelagem FWI consiste em obter parâmetros do meio, através dos dados gerados em campo (sismogramas). O processo de inversão ocorre quando minimizamos o resíduo entre o dado observado e o dado modelado. A formulação matemática do método segue nas próximas seções e nos próximos capítulos.

Algumas características desta modelagem são:

- Função objetivo;
- Modelo inicial de velocidades;

- Propagador de ondas.

Uma vez definida a função objetivo, buscamos a solução m que a torna mínima. Veremos no próximo capítulo que m representa um parâmetro que pertence ao espaço do modelo, $m \in \mathcal{M}$. O modelo inicial de velocidades é atualizado até que seja obtido um modelo reconstruído bem próximo do que seria um modelo real.

A teoria de Inversão Completa das Formas de Onda foi desenvolvida na década de 1980 por Lailly (1983) [12] e Tarantola (1984) [16], ambos trabalhando no domínio do tempo. Nos anos seguintes diversos pesquisadores ampliaram a utilização do método em outros domínios, como o da Frequência (Pratt *et al.*, 1998) [15] e de Laplace (Shin *et al.*, 2016) [9].

O FWI geralmente usa métodos que utilizam derivadas, como a família de métodos **descendentes** (Gradiente Conjugado, Quase-Newton, Gradiente Descendente, etc.), para atualizar o modelo de velocidades. Contudo, o cálculo dessas derivadas numericamente se torna muito caro, principalmente quando tratamos problemas com muitas fontes e receptores. O que instigou muitos cientistas a buscarem uma maneira alternativa de realizar esse processo de atualização do modelo. Além das várias técnicas livres de derivadas que surgiram nos últimos anos, outra maneira de implementar o FWI de forma mais ágil foi a implementação do método em programação paralela (Carrillo *et al.*, 2015; Yang, Gao & Wang, 2015).

Neste trabalho realizamos um estudo qualitativo e quantitativo do método FWI no domínio do tempo, desde a sua formulação matemática até o produto final, que seria a imagem reconstruída da subsuperfície, através de simulação numérica. No capítulo de Resultados e Discussões apresentamos uma comparação entre as imagens obtidas por FWI variando alguns parâmetros de interesse, com o objetivo de visualizar a importância dos mesmos na imagem reconstruída. Usamos um modelo de velocidades razoavelmente complexo para esse estudo.

No desenvolvimento computacional foi utilizado o método das **Diferenças Finitas** para discretizar a equação da onda acústica e o método do **Estado Adjunto**, ou simplesmente **Adjunto**, para calcular o gradiente da função objetivo. Foi usado também, o método do **Gradiente Descendente** para atualizar um modelo de velocidades inicial. Tendo em vista que neste método o custo computacional é menor.

1.1 Levantamento sísmico

1.1.1 Aquisição sísmica

Em um levantamento sísmico é apropriado dividir o trabalho em partes, a Figura 1.1 mostra um fluxograma desse processo. A primeira etapa do levantamento é a aquisição sísmica. Esta etapa baseia-se em técnicas específicas para adquirir informações sobre as camadas internas de uma região de interesse, é a etapa de obtenção de dados. Os métodos utilizados para gerar o campo de ondas, assim como a descrição dos equipamentos não serão apresentados, pois não se trata do objetivo deste trabalho descrevê-los.

A técnica de aquisição sísmica consiste em produzir artificialmente um campo de ondas que se propaga em subsuperfície e que, ao encontrar um contraste entre duas camadas geológicas diferentes, esse campo é refletido e/ou refratado. A aquisição sísmica pode ser feita em terra (*onshore*) ou no mar (*offshore*). Em um típico levantamento terrestre são distribuídos sensores (geofones) na superfície do terreno, que recebem o sinal das ondas refletidas. A partir destes dados é possível estimar características da camada geológica, tais como: profundidade, velocidade, etc.. Em seguida os dados são gravados em sismógrafos e apresentados em forma de sismogramas. O mesmo ocorre em um levantamento sísmico marinho, onde os sensores, agora hidrofones, estão dispostos na superfície do mar. A Figura 1.2 apresenta de forma esquemática uma aquisição sísmica marinha e a 1.3 uma aquisição terrestre.



Figura 1.1: Fluxograma de um levantamento sísmico. Figura adaptada da referência [2]

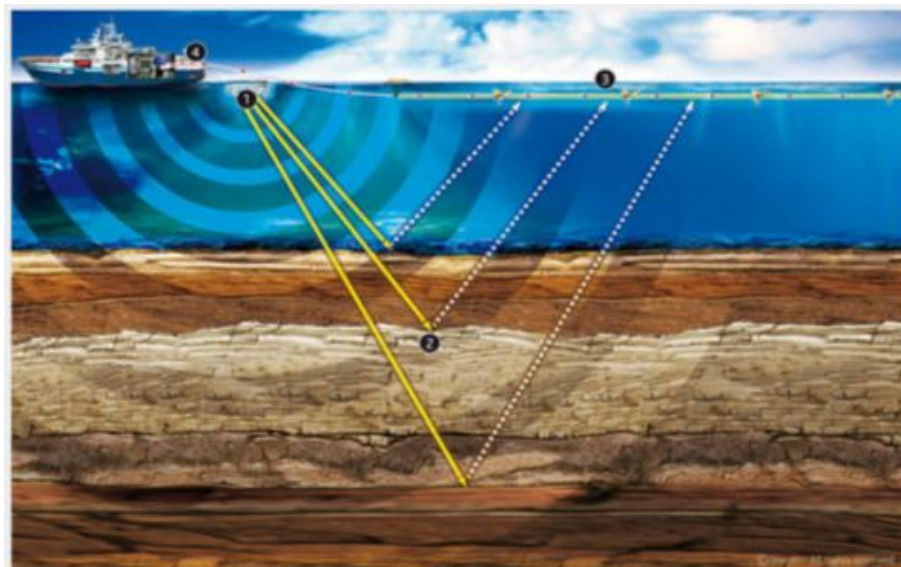


Figura 1.2: Ilustração de uma aquisição sísmica marinha. Figura retirada da referência [8]

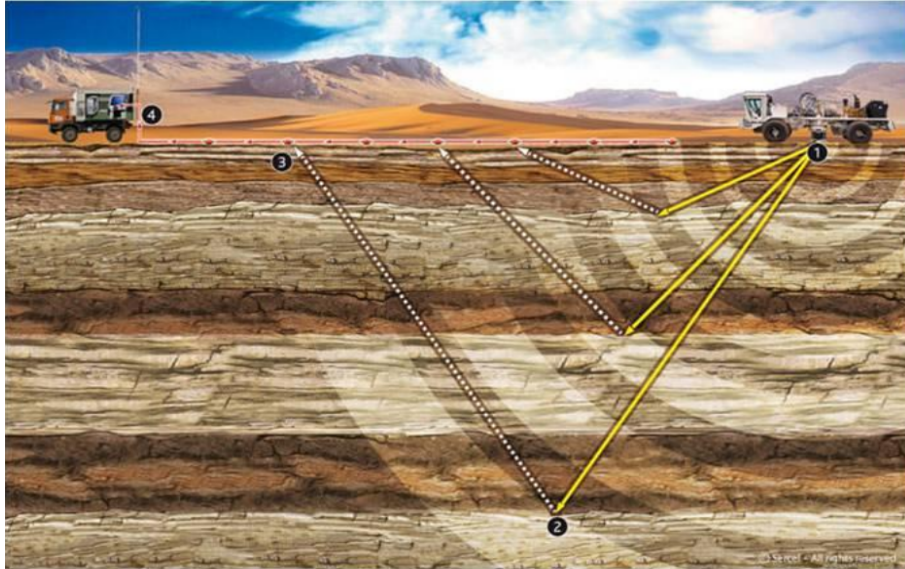


Figura 1.3: Ilustração de uma aquisição sísmica terrestre. Figura retirada da referência [8].

1.1.2 Processamento de sinais

A aquisição sísmica é um passo importante, mas o dado medido neste procedimento não é interpretado diretamente, antes disso deve ser processado. Após ser processado para eliminar qualquer ruído o dado passa a etapa de modelagem para se ter uma interpretação geológica do meio. O resultado desse processamento nos traz uma imagem.

Algumas etapas importantes do processamento sísmico são:

- Pré-Processamento;
- Deconvolução;
- Filtragem;
- Migração.

Sendo esse último um fator importantíssimo em problemas de imageamento.

1.1.3 Interpretação de dados

De acordo com (Kearey, 2009) [11], a interpretação de dados segue basicamente duas etapas:

- Análise estrutural;
- Análise estratigráfica.

A **Análise estrutural** consiste em extrair informações analisando os tempos de reflexão com base na geometria dos refletores. E a **Análise estratigráfica** consiste em subdividir as seções sísmicas em sequências de reflexões. A partir dela é possível estudar o comportamento dos estratos, ter informações sobre a idade da camada geológica, entre outras coisas.

1.2 Problema inverso

A teoria inversa se trata de um conjunto de técnicas matemáticas usadas para obter informações físicas a partir de dados obtidos em campo. Antes de definir o problema inverso em essência, é necessário entender o que é o problema direto. Pois bem, vamos supor uma situação em que conhecemos o modelo (equação que governa um determinado sistema físico) e almejamos obter dados, este é um processo direto. Um exemplo, nós conhecemos a equação que modela um meio geológico, vamos supor a equação da onda acústica. Se conhecemos o modelo em cada ponto, podemos inferir os dados. No problema inverso os dados que são conhecidos, e desejamos estimar parâmetros do modelo a partir deles. Vale ressaltar que resolvendo o problema direto obtemos estimativas dos parâmetros do modelo, e não o modelo, propriamente dito.

Seja d um dado de campo real, podemos descrevê-lo a partir de um operador de modelagem direta, G .

$$Gm = d \tag{1.1}$$

A inversão portanto se caracteriza como o processo inverso da equação (1.1), tendo como intuito a aplicação de processos numéricos para se obter o modelo (ROCHA, 2013). [10]

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho foi dividido em 5 capítulos. Após introduzido o problema geral precisamos formalizar matematicamente a modelagem FWI. O primeiro passo desta etapa é definir o domínio físico em que vamos trabalhar e em que condições iremos trabalhar. Para isso, no capítulo 2 introduziremos a Equação da Onda Acústica, seção 2.1. Na seção 2.2 será apresentada a versão discretizada da Equação da onda, assim como a condição de borda absorvente utilizada.

No capítulo 3 serão apresentados os pontos principais que formalizam o FWI como um método de otimização. Na seção 3.1 será apresentado um fator chave do nosso trabalho que é a aproximação de Born, e a sua importância para linearizar o problema. Na seção 3.2 será definido o Método do Gradiente Descendente como ferramenta para atualizar o modelo. Na seção 3.3 será apresentado o Método Adjunto, destacando alguns aspectos históricos e a relevância do mesmo para o desenvolvimento deste trabalho. Na seção 3.4 apresentaremos uma visão geral da modelagem FWI .

No capítulo 4 serão apresentados os resultados e discussões, apresentando os principais pontos a serem analisados. E por fim, no capítulo 5, serão apresentadas as nossas conclusões, assim como nossas perspectivas para o futuro.

Equação da Onda

2.1 Equação da Onda Acústica

Em geral, quando construímos um modelo de terra consideramos um meio ideal, isotrópico e homogêneo. Entretanto, um modelo realístico é bem mais complexo. Por simplicidade, iremos considerar um caso particular, onde o campo de onda é exclusivamente acústico. Nesta abordagem, podemos representar o modelo em termos de pressão (campo escalar, $p(x, t)$) e velocidade (campo vetorial, $\vec{v}(x, t)$). Para simplificar a notação usaremos apenas p e v , mas se tratam de funções do espaço e do tempo. Estes parâmetros são regidos pelas equações:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -k_0 \nabla \cdot v, \quad (2.2)$$

onde ρ_0 é a densidade de massa e k_0 o módulo de volume (*bulk*). Essas quantidades estão relacionadas através da velocidade do meio c , da forma $k_0 = \rho_0 c^2$. Levando em consideração a conservação do momento e da massa, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0. \quad (2.4)$$

Podemos expressar a equação de estado em termos apenas de p , derivando em relação ao tempo a equação (2.2) e usando o valor de (2.1), obtendo:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{k_0(x)}{\rho_0(x)} \nabla \cdot (\nabla p) = c_0^2 \nabla^2 p + f(x, t). \quad (2.5)$$

Que nada mais é que a equação de onda para o campo de pressão que buscamos. Usaremos esta equação para modelar o dado sintético no processo de inversão, que será visto no próximo capítulo. A discretização desta equação será vista na próxima seção.

2.2 Discretização pelo Método das Diferenças Finitas (MDF)

Uma ferramenta usual no sentido de resolver problemas de equações diferenciais parciais (EDPs) numericamente é o **método das diferenças finitas**. Por simplicidade, usaremos ele para resolver a equação da onda acústica.

A equação da onda acústica em uma dimensão é dada por:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (2.6)$$

onde $p(x, t)$ representa o campo de onda (pressão) unidimensional e $f(x, t)$ um termo de fonte. No nosso caso, iremos considerar a equação bidimensional (x, z) que evolui no tempo (t) . Temos então:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, z, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 p(x, z, t) = f(x, z, t). \quad (2.7)$$

Como mencionado $f(x, t)$ é um termo de fonte, neste trabalho foi usada a fonte Wavelet Ricker, que é dada por:

$$f(x, t) = w(t)\delta(x - x_s) = (1 - 2\pi^2 v_0^2 t^2) e^{-\pi^2 v_0^2 t^2} \delta(x - x_s).$$

Onde v_0 representa o pico de frequência.

O método das diferenças finitas representa o espaço-tempo como uma grade de pontos discretos (malha), como mostra a Figura 2.1. Com isso, a equação da onda é calculada em cada ponto da malha. O **MDF** aproxima equações diferenciais parciais por **série de Taylor**, de ordem N . Para o caso da onda acústica bidimensional, temos.

$$\frac{\partial^2 p(x, z, t)}{\partial t^2} \approx \frac{p_{j,i}^{n+1} - 2p_{j,i}^n + p_{j,i}^{n-1}}{dt^2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 p(x, z, t)}{\partial x^2} \approx \frac{p_{j,i+1}^n - 2p_{j,i}^n + p_{j,i-1}^n}{dh^2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 p(x, z, t)}{\partial z^2} \approx \frac{p_{j+1,i}^n - 2p_{j,i}^n + p_{j-1,i}^n}{dh^2}, \quad (2.10)$$

A equação da onda para o ponto $p_{j,i}$ representado em azul na Figura 2.1, é:

$$\frac{1}{c_{j,i}^2} \frac{p_{j,i}^{n+1} - 2p_{j,i}^n + p_{j,i}^{n-1}}{dt^2} - \frac{p_{j,i+1}^n + p_{j,i-1}^n + p_{j+1,i}^n + p_{j-1,i}^n - 4p_{j,i}^n}{dh^2} = f_{j,i}^n. \quad (2.11)$$

Para encontrar a equação de onda no instante seguinte só precisamos isolar o termo $p_{j,i}^{n+1}$:

$$p_{j,i}^{n+1} - 2p_{j,i}^n + p_{j,i}^{n-1} = c_{j,i}^2 dt^2 \left[\frac{p_{j,i+1}^n + p_{j,i-1}^n + p_{j+1,i}^n + p_{j-1,i}^n - 4p_{j,i}^n}{dh^2} \right]. \quad (2.12)$$

A equação da onda no instante seguinte $(p_{i,j}^{n+1})$, é:

$$p_{j,i}^{n+1} = c_{j,i}^2 dt^2 \left[\frac{p_{j,i+1}^n - 4p_{j,i}^n + p_{j,i-1}^n + p_{j+1,i}^n + p_{j-1,i}^n}{dh^2} \right] + 2p_{j,i+1}^n - p_{j,i}^{n-1}. \quad (2.13)$$

Colocando os termos $p_{j,i}^n$ em evidência e chamando $\frac{c_{j,i}^2 dt^2}{dh^2} = C^2$, temos:

$$p_{j,i}^{n+1} = 2(1 - C^2)p_{j,i}^n + C^2 \left[\frac{p_{j,i+1}^n + p_{j,i-1}^n + p_{j+1,i}^n + p_{j-1,i}^n}{dh^2} \right] - p_{j,i}^{n-1}. \quad (2.14)$$

O incremento dh representa o passo de um ponto inicial para o ponto vizinho. Grande parte dos problemas de EDPs são problemas de valor inicial e sujeitos à condições de borda ou de contorno, para garantir a unicidade da solução. Existem dois tipos de condições de borda muito usadas em EDPs: **Condição de Neumann**, que exige que a derivada seja conhecida no contorno da região de interesse ($\frac{\partial p}{\partial n} = 0$) e **Condição de Dirichlet**, que exige que a função seja conhecida no contorno ($p = 0$). Entretanto, em problemas de propagação de onda as condições de Neumann e de Dirichlet fariam com que toda a onda incidente fosse refletida para dentro da região de interesse, dificultando a implementação do método. Uma alternativa para resolver esse problema é usar bordas absorventes, que é enfatizado por Barbosa (2015) [7] na sua dissertação.

As bordas absorventes são necessárias para minimizar reflexões dentro da área de interesse. Diversos métodos incluem as ABCs (sigla em inglês de *Absorbing Boundary Conditions*) na solução da equação da onda para atenuar o efeito dessas reflexões, como por exemplo: *Perfectly Matched Layer* (PML), *Convolutional Perfectly Matched Layer* (CPML), entre outros.

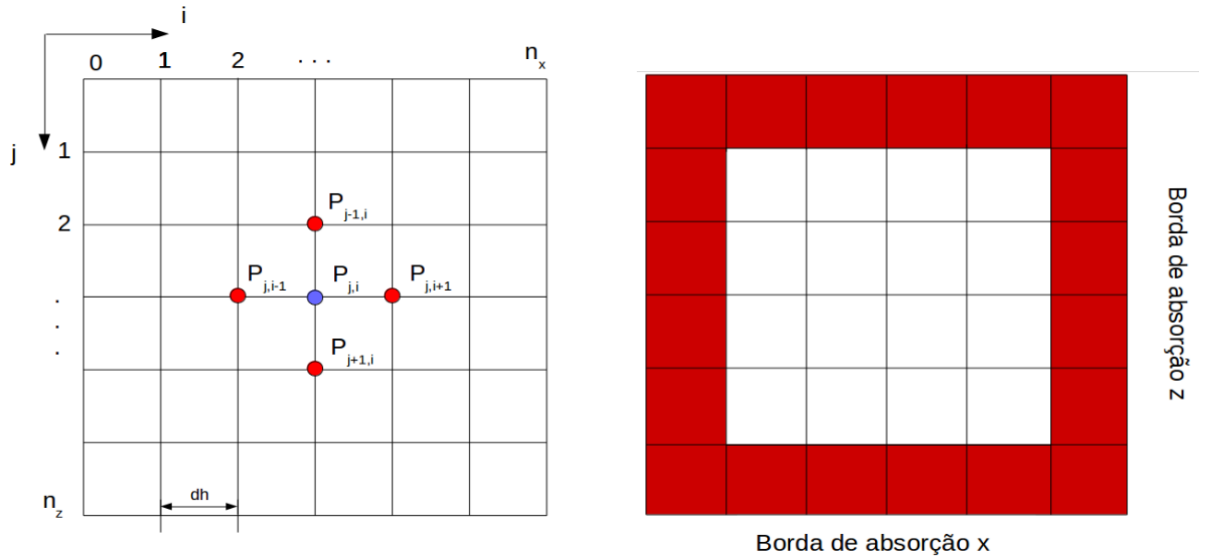


Figura 2.1: Representação da malha discreta à esquerda e representação da malha com condições de borda à direita. Fonte: adaptada de [13] .

FWI como método de otimização

Neste capítulo serão abordados os principais pontos no sentido de formalizar a FWI como um método otimizador. O objetivo de todo método de otimização é maximizar ou minimizar uma variável. No caso do FWI a quantidade a ser minimizada é a função de custo (ou erro, ou objetivo), que nada mais é que a norma L_2 da diferença entre o dado real (adquirido em campo) e o dado simulado (ou modelado). Como apresentada na equação (3.1).

$$J[m] = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}[m] - d\|_2^2. \quad (3.1)$$

Definimos

$$d_{mod} = \mathcal{F}[m].$$

- d_{mod} : dado modelado
- m : modelo
- \mathcal{F} : um operador que atua nos parâmetros do modelo

3.1 Aproximação de Born

Alguns fatores dificultam a inversão da forma da onda, um deles é chamado de **problema mal posto**. O método FWI geralmente é um problema mal posto e não linear. Uma maneira de resolver o problema da não linearidade é escrever o modelo em termos de uma série de perturbação e usar a chamada aproximação de Born para linearizar o problema, que será visto com mais detalhes nesta seção. De acordo com Demanet (2016) [6] Linearização e Série de Espalhamentos são a base da maioria dos métodos de inversão, ambos direto e iterativo. Do ponto de vista matemático, o problema é dito mal posto quando existem direções onde a variação da função objetivo (ou erro) é zero na vizinhança da solução m . Em outras palavras, há uma abundância de possíveis soluções do problema de minimização, o que nos leva à não unicidade da solução. Outro fator que torna o problema mal posto é a não existência de uma solução m que minimize a função. Já o fato dele ser do tipo não linear implica que os parâmetros do modelo não podem ser escritos como uma combinação linear dos dados.

No FWI o modelo é representado da seguinte forma:

$$\frac{1}{c^2(x)} = m, \quad (3.2)$$

onde c representa a velocidade.

Podemos expressamos nosso modelo como uma série de perturbação:

$$m(x) = m_0(x) + \varepsilon m_1(x), \quad (3.3)$$

onde assumimos que ε é um número muito pequeno.

Se o problema de espalhamento direto é formulado, tal que, o parâmetro material desconhecido é representado como uma perturbação de um parâmetro do meio conhecido, então uma representação do campo de onda é obtida como a soma de um termo que depende linearmente do parâmetro perturbado do meio mais um termo que depende não-linearmente destes parâmetros (BLEINSTEIN, 2001) [3].

A equação de onda para esse sistema é dada por:

$$m(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 u(x) = f(x, t), \quad (3.4)$$

onde u é o campo de onda total, que pode ser escrito na forma:

$$u(x) = u_0(x) + u_{sc}(x),$$

sendo $u_0(x)$ o campo de onda do meio não perturbado, e $u_{sc}(x)$ o campo espalhado.

Podemos fazer uma breve análise dos campos de onda separados, a equação de onda para o meio não perturbado, ou campo incidente, é dada por:

$$m_0(x) \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 u_0(x) = f(x, t). \quad (3.5)$$

É possível explicitar o campo espalhado u_{sc} subtraindo a equação (3.5) da (3.4), utilizando a equação (3.3) e a expressão $u = u_0 + u_{sc}$, ficamos com:

$$m_0(x) \frac{\partial^2 u_{sc}(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 u_{sc}(x) = -\varepsilon m_1(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Aqui temos um pequeno problema. Não obtemos uma equação apenas em função do campo espalhado como no caso anterior que ficamos com uma equação de onda para o campo incidente, como mostra a equação (3.5), devido o termo u do lado direito que tem uma dependência implícita de u_0 . Uma forma de resolver essa equação é expressar $u_{sc}(x)$ em termos de uma função de Green:

$$u_{sc}(x) = -\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; t-s) m_1(y) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2}(y, s) dy ds. \quad (3.7)$$

Para simplificar a notação podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$u_{sc}(x) = -\varepsilon G m_1 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

Este passo é útil porque agora posso expressar o campo de onda total, u , em função apenas do campo de onda incidente, u_o . Substituindo esse resultado na equação do campo de onda total, temos:

$$u(x) = u_o(x) - \varepsilon G m_1 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Essa equação é muito importante em qualquer problema de espalhamento, é conhecida como equação de **Lippmann-Schwinger**. Rearrmando a equação, temos u em função de u_o da seguinte forma:

$$u(x) = \left[I + \varepsilon G m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]^{-1} u_o(x). \quad (3.10)$$

O resultado obtido em (3.10) pode ser expandido como uma **série de Neumann**, $[I + A]^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \dots$, cuja condição de convergência é $\|A\| < 1$. Substituindo A por $\varepsilon G m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, obtemos a chamada **série de Born**:

$$u = u_o - \varepsilon \left(G m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_o + \varepsilon^2 \left(G m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(G m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_o + \dots \quad (3.11)$$

A **série de Born** é fundamental em problemas não lineares, mas só é válida na condição de fraco espalhamento ($-\varepsilon \|G m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\| < 1$). Essa série representa o campo de onda total, onde o primeiro termo da série é o campo incidente, e os demais são os múltiplos espalhamentos.

Podemos reescrever a equação (3.11) de forma simplificada, como mostra a expressão a seguir:

$$u(x) = u_o(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (3.12)$$

onde u_1 representa espalhamento único, u_2 duplo espalhamento e assim por diante.

Tratando ε como sendo um fator muito pequeno, podemos desconsiderar os termos de ordem superiores. A **Aproximação de Born** sugere que $u_{sc} \simeq \varepsilon u_1$. De tal forma que $u_1(x) = -G m_1 \frac{\partial^2 u_o(x)}{\partial t^2}$, para satisfazer a série de Born.

Substituindo a aproximação de Born na equação (3.5), obtemos a equação de onda para reflexão primária:

$$m_0(x) \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 u_1(x) = -m_1(x) \frac{\partial^2 u_o(x)}{\partial t^2}. \quad (3.13)$$

Comparando as equações (3.6) e (3.13) podemos perceber que a equação do campo espalhado que não era linear, agora tornou-se linear. Além de que, na equação (3.6) tínhamos uma dependência implícita de u_o , enquanto que na (3.13) temos uma dependência explícita do campo incidente. Conseguimos expressar o campo de espalhamento em termos apenas do campo incidente.

3.2 Método do Gradiente Descendente

Na modelagem FWI definimos um modelo inicial de velocidades que é atualizado por algum método iterativo, com o objetivo de fornecer um modelo que se assemelhe a um modelo real de velocidades. Neste trabalho usaremos o método do **Gradiente Descendente** (GD), que é um método de otimização local, como técnica de iteração para atualizar o modelo de velocidades. A expressão do GD é a seguinte:

$$m^{(k+1)} = m^{(k)} - \alpha(k) \frac{\delta J}{\delta m} [m^{(k)}], \quad (3.14)$$

onde m é o parâmetro do modelo, no nosso caso, a velocidade. α é um parâmetro de ajuste, que é útil para garantir a estabilidade e a velocidade de convergência, e $\frac{\delta J}{\delta m} [m^{(k)}]$ é o gradiente da função custo, que é obtido através do método adjunto que será descrito na seção seguinte.

Considerando o ponto de partida como sendo $k = 0$, a primeira iteração do GD é:

$$m^{(1)} = m^{(0)} - \alpha(0) \frac{\delta J}{\delta m} [m^{(0)}].$$

3.3 Método do Estado Adjunto

O **Método Adjunto** foi desenvolvido na década de 1970 por Chavent (1974), na sua tese: *Analyse Fonctionnelle et Identification de Coefficients Répartis dans les Équations aux Dérivées Partielles*. Embora hoje seja uma técnica bastante conhecida pela comunidade acadêmica, ainda é pouco compreendida em alguns aspectos, como mencionado por Plessix (2006) [14]. Mas, ainda assim é uma ferramenta matemática de grande utilidade, e tem sido amplamente utilizada em várias áreas da ciência, como: Meteorologia, Geodinâmica, etc.

No contexto de otimização, usando a equação (3.14) como método de atualização do modelo, precisamos calcular o gradiente da função objetivo J , dado pela equação (3.1), em cada iteração. A variação de J em relação ao parâmetro do modelo é chamada *Sensitividade de Kernel* e, é dada por:

$$\frac{\delta J}{\delta m} [m] = \frac{\delta}{\delta m} \left[\frac{1}{2} \|\mathcal{F}[m] - d\|_2^2 \right] = F^*[\mathcal{F}[m] - d], \quad (3.15)$$

A prova desta equação segue abaixo:

$$J[m + h] \approx J[m] + \frac{\delta J}{\delta m} h + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.16)$$

Portanto,

$$\frac{\delta J}{\delta m} \approx \frac{J[m + h] - J[m]}{h}. \quad (3.17)$$

A equação (3.1) diz:

$$J[m] = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}[m] - d\|^2 = \frac{1}{2} \langle \mathcal{F}[m] - d | \mathcal{F}[m] - d \rangle,$$

Analogamente,

$$J[m+h] = \frac{1}{2} \|\mathcal{F}[m+h] - d\|^2 = \frac{1}{2} \langle \mathcal{F}[m+h] - d | \mathcal{F}[m+h] - d \rangle,$$

onde $\mathcal{F}[m+h] \approx \mathcal{F}[m] + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta m}[m]h$. Substituindo na equação acima, temos:

$$\frac{1}{2} \langle \mathcal{F}[m+h] - d | \mathcal{F}[m+h] - d \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{F}[m] + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta m}h - d | \mathcal{F}[m] + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta m}h - d \rangle \quad (3.18)$$

Podemos simplificar a notação, definindo $F = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta m}[m]$. Temos então:

$$\frac{1}{2} \langle \mathcal{F}[m+h] - d | \mathcal{F}[m+h] - d \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathcal{F}[m] + Fh - d | \mathcal{F}[m] + Fh - d \rangle \quad (3.19)$$

Vamos considerar $A = \mathcal{F}[m] - d$ e $B = Fh$

$$\frac{1}{2} [\langle \mathcal{F}[m] + Fh - d | \mathcal{F}[m] + Fh - d \rangle] = \frac{1}{2} [\langle A \rangle^2 + 2\langle AB \rangle + \langle B \rangle^2]. \quad (3.20)$$

Podemos desconsiderar o termo $\mathcal{O}(h^2)$, porque se trata da variação de segunda ordem do funcional $J[m]$ (Hessiana) que não é necessária no método do GD, ficamos apenas com $\langle A \rangle^2 + 2\langle AB \rangle$.

Temos então:

$$\frac{1}{2} [\langle \mathcal{F}[m] + Fh - d | \mathcal{F}[m] + Fh - d \rangle] = \frac{1}{2} [\langle F[m] - d \rangle + 2\langle \mathcal{F}[m] - d | Fh \rangle] \quad (3.21)$$

A equação (3.17) nos dá uma aproximação do gradiente da função objetivo. Substituindo $J[m+h]$ (equação 3.21) e $J[m]$, nela, ficamos com:

$$\frac{\delta J}{\delta m} \approx \langle \mathcal{F}[m] - d | Fh \rangle = \frac{\langle F^*(F[m] - d) | h \rangle}{h} = F^*(F[m] - d) \quad (3.22)$$

onde F representa a derivada de Fréchet $\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta m}[m]$, um mapa linearizado do espaço do modelo para o espaço do dado ($F : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{D}$) e F^* representa o adjunto de F , um mapa do espaço do dado para o espaço do modelo ($F^* : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{M}$). Em outras palavras, o operador F atua nos parâmetros conhecidos do modelo buscando obter dados (sismogramas), esse processo é conhecido como problema direto. Se conhecemos o modelo que define um meio geológico, podemos inferir os parâmetros dele, como: velocidade, tempo de transito, etc. Já o problema inverso ocorre quando modelamos o dado com a equação da onda e obtemos um modelo de subsuperfície. Nesse processo precisamos conhecer o modelo inicial e o dado real, para que seja feita a inversão. Na próxima seção será apresentado um fluxograma do método FWI.

A aplicação de F^* no dado é a forma mais simples de imagear, por esta razão em muitas literaturas ele é tratado como “operador de imagem”. Em geofísica, o operador F^* é chamado operador de migração, ou simplesmente **migração**, como mencionado por

Demagnet [6].

A necessidade de conseguir uma técnica que calcule o gradiente da função objetivo sem usar as derivadas de Fréchet surge pelo alto custo de se construir uma matriz de representação do operador F e calcular o transposto conjugado (adjunto) dela. Em casos onde há muitas fontes e receptores é inviável o cálculo das derivadas diretamente, sendo necessário introduzir variáveis adicionais que auxiliam no cálculo indireto do gradiente da função objetivo. Para este fim, foi utilizado o método Adjunto. Tendo em vista que não há necessidade de usar as derivadas de Fréchet neste método, apenas definimos um campo auxiliar que fará esse papel, como veremos a seguir.

Um fator muito importante na modelagem FWI é o que chamamos de **Condição de Imagem**. Mas antes de abordá-lo iremos montar o problema. A definição do adjunto de um operador linear garante que:

$$\langle d|Fm \rangle_{\mathcal{D}} = \langle F^*d|m \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.23)$$

onde o produto da esquerda é representado no espaço do dado (\mathcal{D}) e o da direita no espaço do modelo (\mathcal{M}). Usando a definição de produto interno, temos:

$$\langle d|Fm \rangle = \sum_r \int_0^T (d_r^*(t)Fm) dt = \sum_r \int_0^T (d_r(t)u(x_r, t)) dt, \quad (3.24)$$

$$\langle F^*d|m \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (F^*d)(x)m(x)dx. \quad (3.25)$$

Onde expressamos $Fm = u(x_r, t)$ e $d_r^*(t) = d_r(t)$, pois o dado é real na equação (3.24), já o subscrito r é referente ao receptor e x_r à posição do receptor. Para resolver o lado direito da equação (3.24) é necessário introduzir uma integral no espaço, como mostra a equação (3.25). Isso pode ser feito expressando a contribuição espacial em termos de uma função delta de Dirac localizada em x_r , como mostra a equação a seguir:

$$d_{ext}(x, t) = \sum_r d_r(t)\delta(x - x_r). \quad (3.26)$$

Substituindo este resultado na equação (3.24) e integrando em relação ao espaço, temos:

$$\langle d|Fm \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T d_{ext}(x, t)u(x, t)dxdt. \quad (3.27)$$

A relação $u = Fm$ usada em (3.24) deve satisfazer as seguintes equações:

$$\left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) u = -m \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \quad (3.28)$$

e

$$\left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) u_0 = f. \quad (3.29)$$

O campo auxiliar $q(x, t)$ que resolve a equação de onda, para o dado estendido, d_{ext} , é conhecido como **Campo Adjunto**. A equação do estado Adjunto é dada por:

$$\left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) q(x, t) = d_{ext}(x, t). \quad (3.30)$$

Substituindo este resultado na equação (3.27), obtemos:

$$\langle d|Fm \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T \left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) q(x, t) u(x, t) dx dt. \quad (3.31)$$

Essa integral pode ser resolvida separadamente. Primeiro resolvemos a integral no tempo por partes e depois a integral espacial, também por partes. As condições de contorno para o problema são: $q|_{t=T} = 0$ e $\frac{\partial q}{\partial t}|_{t=T} = 0$.

Ficamos com:

$$\begin{aligned} \langle d|Fm \rangle &= \int_V \int_0^T q(x, t) \left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u(x, t) dx dt + \int_V m_0 \frac{\partial q}{\partial t} u|_{t=0}^{t=T} dx - \\ &\quad - \int_V m_0 q \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}^{t=T} dx + \int_{\partial V} \int_0^T \frac{\partial q}{\partial n} ds_x dt - \int_{\partial V} \int_0^T q \frac{\partial u}{\partial n} ds_x dt. \end{aligned}$$

Onde V representa o volume que se estende a todo \mathbb{R}^n e ∂V delimita o contorno de V . Devido as condições de borda que impomos, apenas o primeiro termo dessa integral permanecerá, ficamos então com:

$$\langle d|Fm \rangle = \int_V \int_0^T q(x, t) \left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u(x, t) dx dt. \quad (3.32)$$

Usando a equação (3.28), temos:

$$\int_V \int_0^T q(x, t) \left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u(x, t) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T q(x, t) m(x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dx dt. \quad (3.33)$$

Lembrando que:

$$\langle d|Fm \rangle = \langle F^* d|m \rangle.$$

Usando novamente a definição de produto interno, temos:

$$\langle F^* d|m \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (F^* d)(x) m(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^T q(x, t) m(x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dx dt. \quad (3.34)$$

Comparando o meio da equação (3.34) com o lado direito, podemos observar que:

$$(F^* d)(x) = - \int_0^T q(x, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dt. \quad (3.35)$$

Que é chamada de condição de imagem, ou **Migração**, em Sismologia. Ela é expressa como a ação de F^* no dado d , numa sequência de passos descritos abaixo:

- Coloca d_r na posição dos receptores para obter d_{ext} ;
- Usa d_{ext} na equação adjunta da onda para obter o campo **Adjunto** q ;
- Simula o campo incidente, u_0 ;
- Usa a equação (3.35) para cada x independentemente.

É necessário fazer algumas ressalvas a cerca do Campo Adjunto: primeira, ele não representa um campo físico, apenas uma convenção utilizada para resolver o problema numericamente; segundo, ele deve satisfazer algumas exigências, ou seja, é um problema sujeito à vínculos, e uma outra maneira de resolvê-lo é utilizando os multiplicadores de Lagrange, para mais informações a respeito deste método vide Menezes (2016) [5].

3.4 Visão geral do método FWI

Nessa seção será apresentado um fluxograma do método FWI, Figura 3.1, assim como um pseudo-algoritmo que foi utilizado para investigar a eficiência do método perante a mudança de alguns parâmetros do modelo. O algoritmo completo que está disponível na plataforma *Pysit*, implementa o método FWI em programação paralela e usa o modelo geológico Marmousi do *Institut Français du Petrole* para testar a eficiência do algoritmo.

1. O algoritmo abaixo implementa a Inversão Completa da Forma de Onda no domínio do tempo.

Algorithm 1 FWI no domínio do tempo

- 1: $\text{FWI}(v, \text{Obs}, \alpha)$ ▷ Inputs
 - 2: Entrada do Modelo Marmousi inicial
 - 3: N_s ▷ $N_s = N_f$, Número de tiros igual ao número de fontes
 - 4: Config ▷ Aquisição equidistante, Fonte Wavelet, N_r , Deph
 - 5: Densidade da Onda Acústica constante
 - 6: Inicia o *loop* com o Modelo Inicial
 - 7: Modelagem direta com a equação da onda $\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ▷ Problema Direto
 - 8: **Def** Misfit
 - 9: $\text{Misfit} \leftarrow \frac{1}{2} \|\mathcal{F}[m] - d\|_2^2$
 - 10: Se Convergiu faça Modelo Real \leftarrow Modelo Reconstruído
 - 11: Senão
 - 12: Compute $F^*[\mathcal{F}[m] - d] = \frac{\delta J}{\delta m}[m]$ ▷ Operador Adjunto
 - 13: Atualize o Modelo de Velocidades $m^{(k+1)} = m^{(k)} - \alpha(k) \frac{\delta J}{\delta m}[m^{(k)}]$ ▷ GD
 - 14: Modelo Inicial \leftarrow Modelo Reconstruído
 - 15: Quando a condição de parada é obtida FIM do *loop* ▷ Modelo Final
- return** J, v_{final}
-

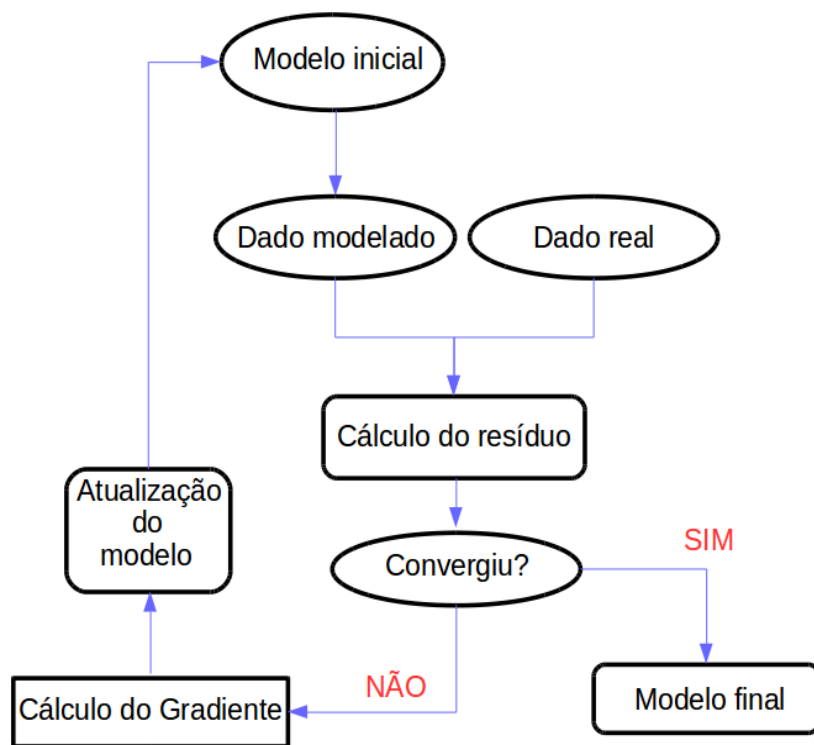


Figura 3.1: Fluxograma do FWI. Fonte: elaborada pela autora.

Resultados e Discussões

Para realizar as simulações foi usado um *cluster* com 20 máquinas, Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1270 V2 @ 3.50GHz, cada uma com 1 processador i7, com 4 cores, hyper threading e 16 GB de memória.

O modelo Marmousi, usado neste trabalho, baseia-se em um perfil que corta a Bacia de Cuanza, Quenguela Norte, Angola. Uma série de falhas e blocos inclinados tornam o modelo bastante complexo. O modelo contém 158 camadas horizontais, uma camada de água de 32m e abaixo dela 3 km de profundidade, além de 9,2 km de extensão. A grade é formada por 151 pontos em z e 461 em x , e o espaçamento entre os pontos é $dx = dz = 20\text{m}$. Outras informações sobre a Geometria de Aquisição do modelo é apresentado na Tabela 4.1.

Tais simulações seguiram a seguinte geometria:

Geometria de Aquisição	
Número de Fontes	Número de Tiros
Número de Receptores	Máx. (461)
Espaçamento da Aquisição	Equidistante (20 m)
Profundidade da Fonte	20 m
Configuração da Fonte	10 Hz
Configuração da Malha	151x461
N° de Amostragem Espacial	30 m
N° de Amostragem Temporal	$3,3 \times 10^{-3}\text{s}$

Tabela 4.1: Geometria de Aquisição para o modelo Marmousi.

De acordo com Menezes (2016) [5] os números de amostragem espacial e temporal são dados por:

$$h \leq \frac{v_{min}}{5f_{max}}$$

e

$$\Delta t \leq 0.606 \frac{h}{v_{max}}.$$

4.1 Resultados variando a quantidade de disparos

O caso mais simples de ser investigado é o que temos um único disparo e apenas uma iteração. Essa simulação durou cerca de 1 minuto. A Figura 4.1 traz a comparação entre o modelo de velocidades inicial, reconstruído e o modelo geológico real para essa configuração.

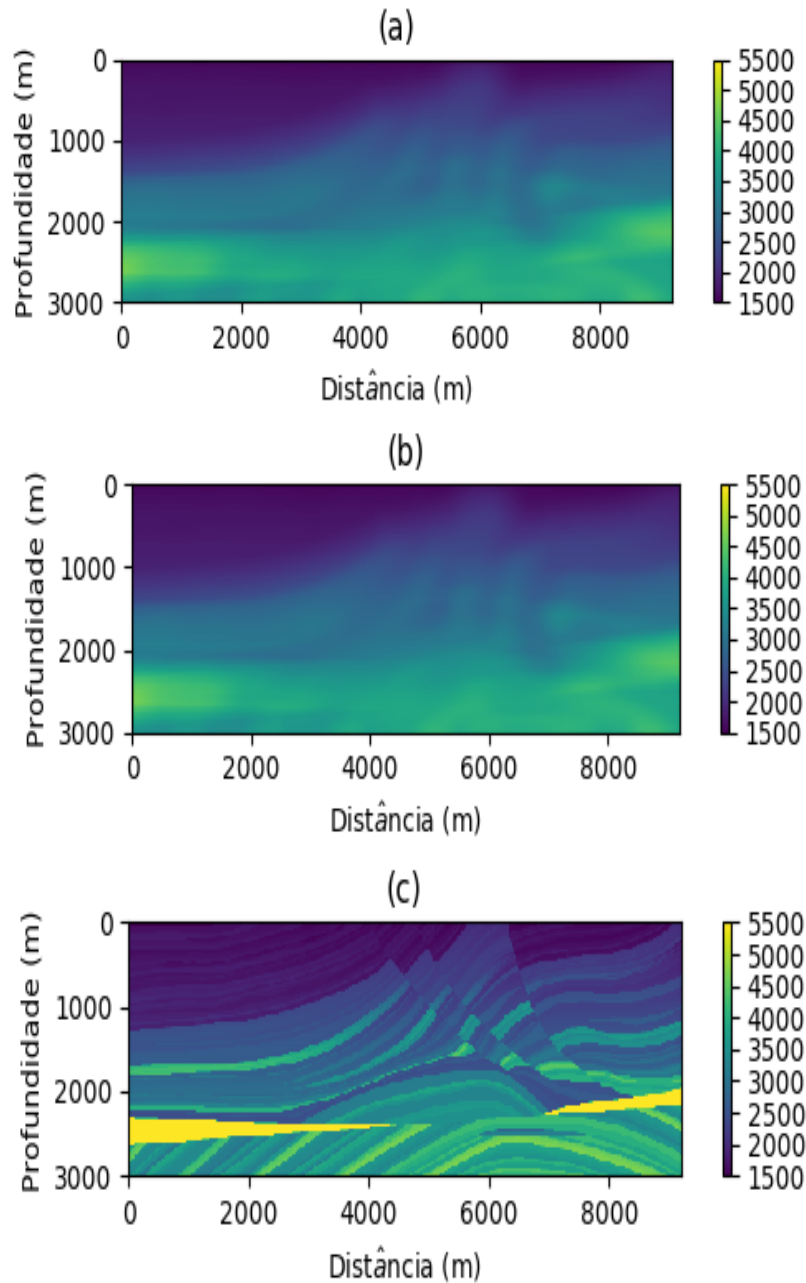


Figura 4.1: (a) Modelo inicial (b) Modelo Reconstruído e (c) Modelo Real. Fonte: elaborada pela autora.

É possível notar que, com apenas um disparo e uma iteração pouca coisa mudou. É intuitivo que apenas uma iteração não vá me trazer um bom resultado, independente da quantidade de disparos. Então mantivemos o número de iterações fixo $N_i = 10$ (chute) e variamos o número de disparos de 2 em 2 unidades: $N_s = 10, 12, \dots, 18$. Tendo em vista que não sabemos como a mudança na quantidade de disparos afeta na resolução da imagem reconstruída.

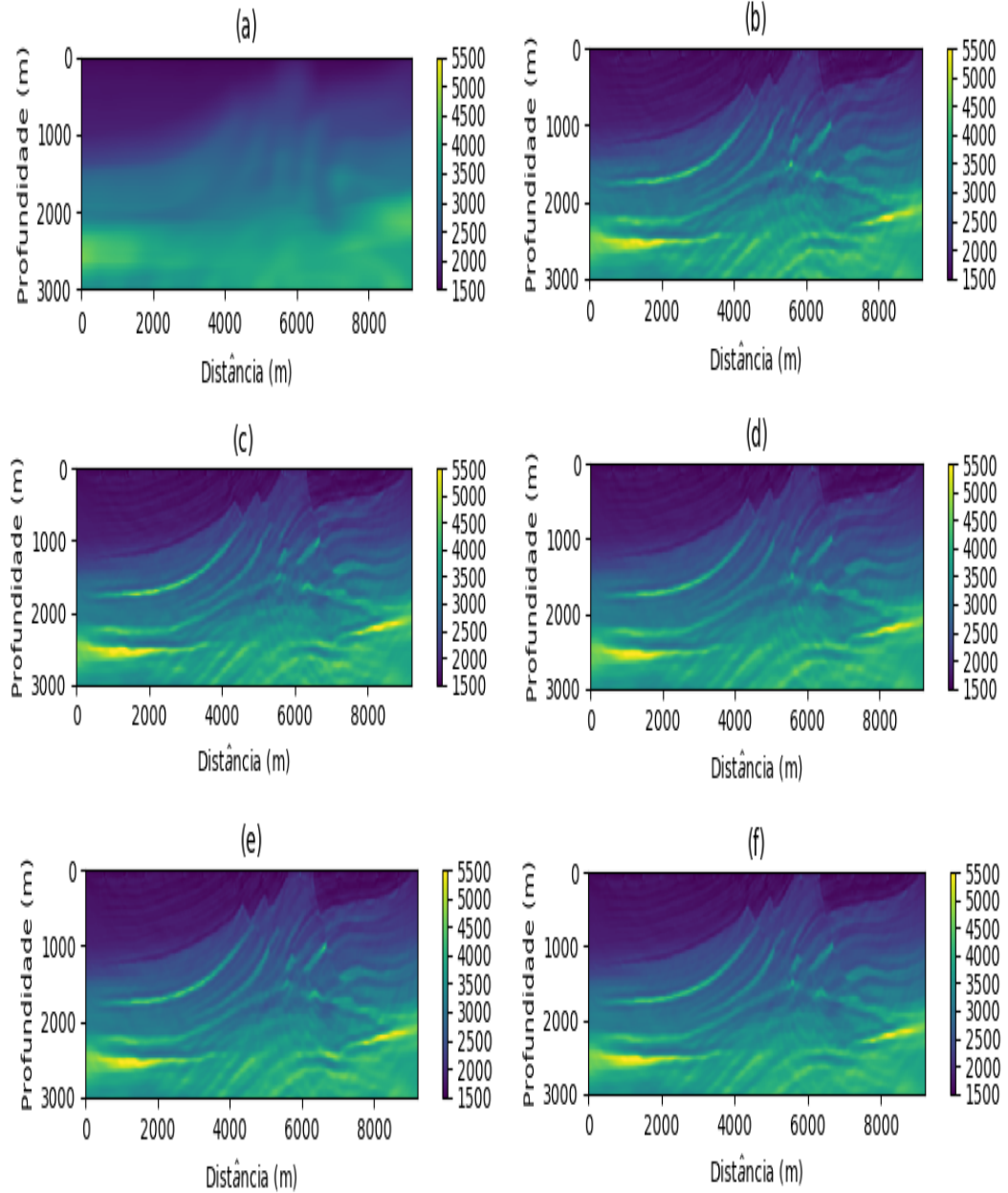


Figura 4.2: (a) Modelo inicial. Reconstruído com (b) 10 disparos (c) 12 disparos (d) 14 disparos (e) 16 disparos e (f) 18 disparos, mantendo $N_I = 10$. Fonte: elaborada pela autora.

É notório que mantendo fixo $N_I = 10$ obtivemos uma resolução bem melhor que aquela

obtida com apenas uma iteração, como mostra a Figura 4.2. Entretanto, percebemos também que houve pouca mudança na resolução variando a quantidade de disparos de duas em duas unidades. Isso nos leva a crer que a pequena mudança na quantidade de tiros gera pouca interferência no resultado do processamento. Por este motivo, fizemos mudanças consideráveis na quantidade de disparos, como mostra a Figura 4.3.

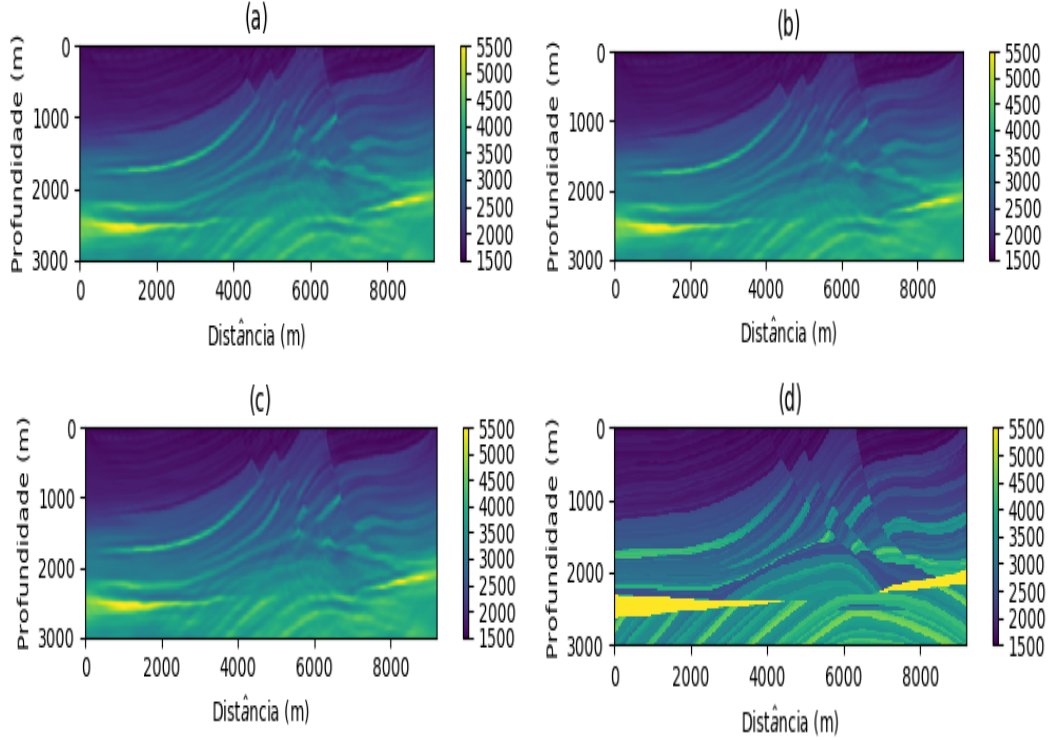


Figura 4.3: (a) Modelo reconstruído com 30 disparos e 10 iterações (b) Modelo reconstruído com 40 disparos e 10 iterações (c) Modelo reconstruído com 50 disparos e 10 iterações (d) Modelo real. Fonte: elaborada pela autora.

Aqui é possível notar que as imagens reconstruídas apresentam a forma do modelo real. Conseguimos notar descontinuidades na imagem, assim como as falhas geológicas do meio. Contudo, comparadas ao conjunto de simulações variando de 2 em 2 unidades também tivemos pouca mudança. Então em vez de prosseguir aumentando o número de tiros, faremos outra análise, a do resíduo. Com o intuito de observar de outra forma as mudanças em função do aumento da quantidade de disparos.

4.1.1 Análise do erro

Com base na Figura 4.4, há duas coisas a serem observadas: primeira, para cada N_s temos uma quantidade de iterações ideal, que nos traz um desajuste mínimo; segunda, é fácil ver que o comportamento do erro (resíduo) em função do número de iterações é semelhante em cada caso. O que de certa forma reforça a análise anterior de que pouca mudança na quantidade de disparos acarreta também pouca mudança no resultado obtido.

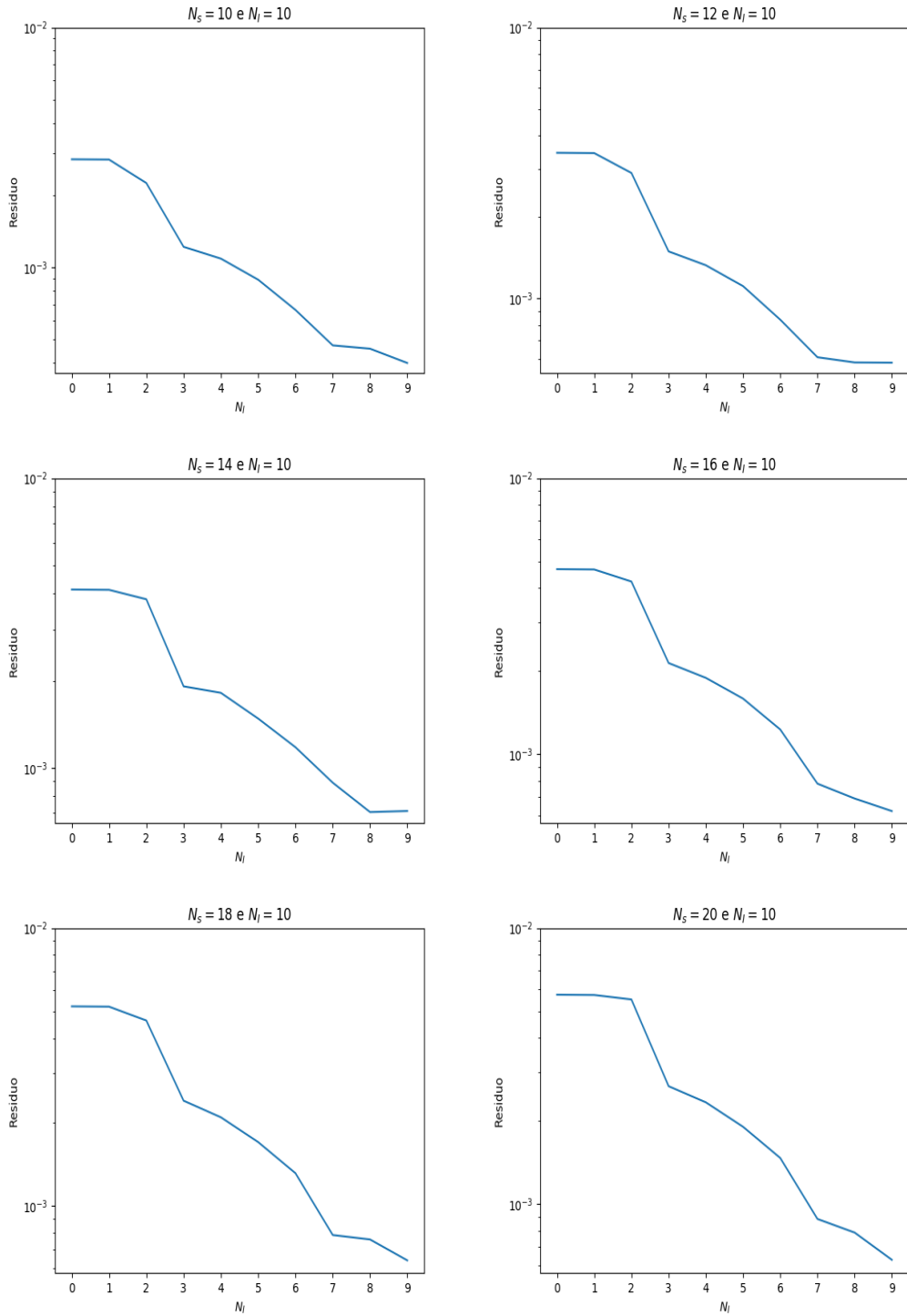


Figura 4.4: Gráfico do resíduo em função do número de iterações, variando N_s de 2 em 2. Fonte: elaborada pela autora.

A Figura 4.5 representam a análise do erro para os casos em que $N_s = 30, 40$ e 50 . Com base nela e na Figura 4.2, é possível observar que embora a reconstrução já se aproxime do modelo real de velocidades, o desajuste ainda não é mínimo, como esperamos. O que nos mostra que é necessário aumentar também a quantidade de iterações.

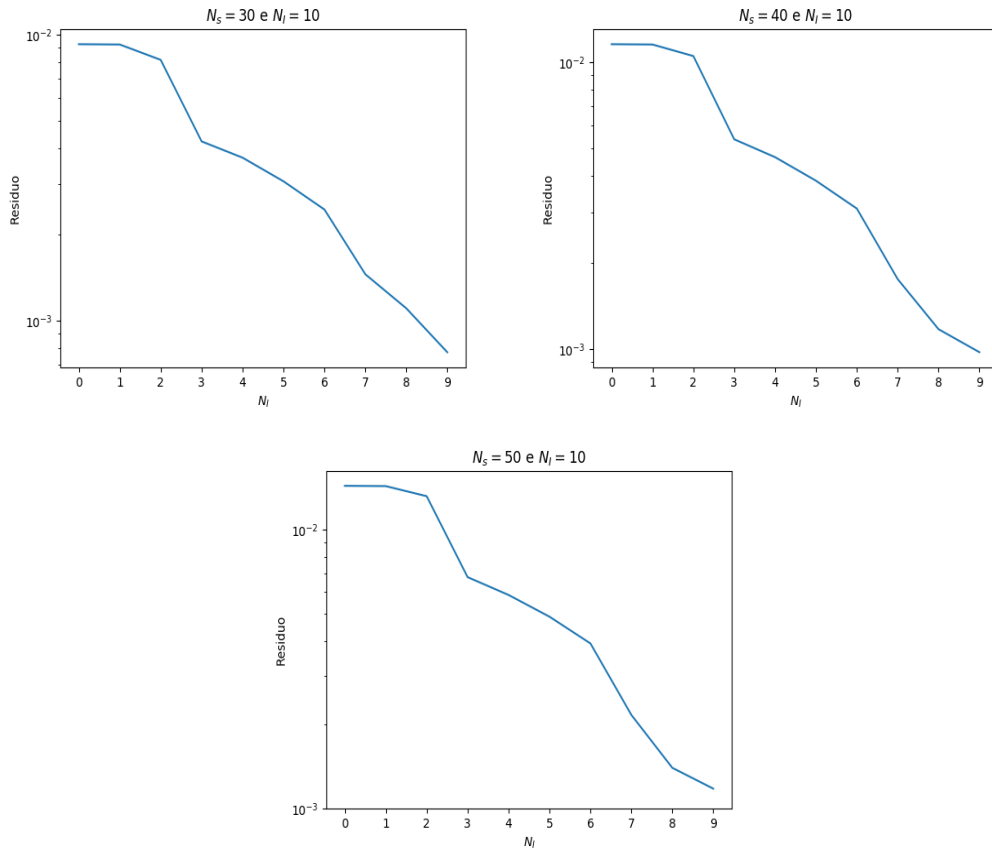


Figura 4.5: Gráfico do resíduo em função do número de iterações para grandes quantidades de disparos. Fonte: elaborada pela autora.

4.1.2 Análise do tempo de execução

Uma terceira análise é feita em cima dessa mudança de parâmetro, que é o estudo do tempo de execução de cada simulação desse conjunto. A Tabela 4.2 apresenta o tempo de execução médio de cada amostra. Podemos observar que a medida que aumentamos a quantidade de disparos também aumenta o tempo de execução. Logo podemos concluir que em determinada configuração não será possível processar a quantidade de dados.

Conjunto A	Tempo de execução total médio
$N_s = 10$ e $N_I = 10$	1h 54m
$N_s = 10$ e $N_I = 12$	2h 12m
$N_s = 10$ e $N_I = 14$	2h 24m
$N_s = 10$ e $N_I = 16$	2h 49m
$N_s = 10$ e $N_I = 18$	3h 09m

Tabela 4.2: Tabela do tempo de execução das amostras com $N_s = 10$.

4.2 Resultados variando a quantidade de iterações

Ao contrário do procedimento anterior em que variamos a quantidade de tiros mantendo fixo o número de iterações, nessa seção manteremos fixo o número de disparos $N_s = 10$ e variamos o número de iterações. Com o objetivo de visualizar como a mudança desse parâmetro interfere no resultado da reconstrução.

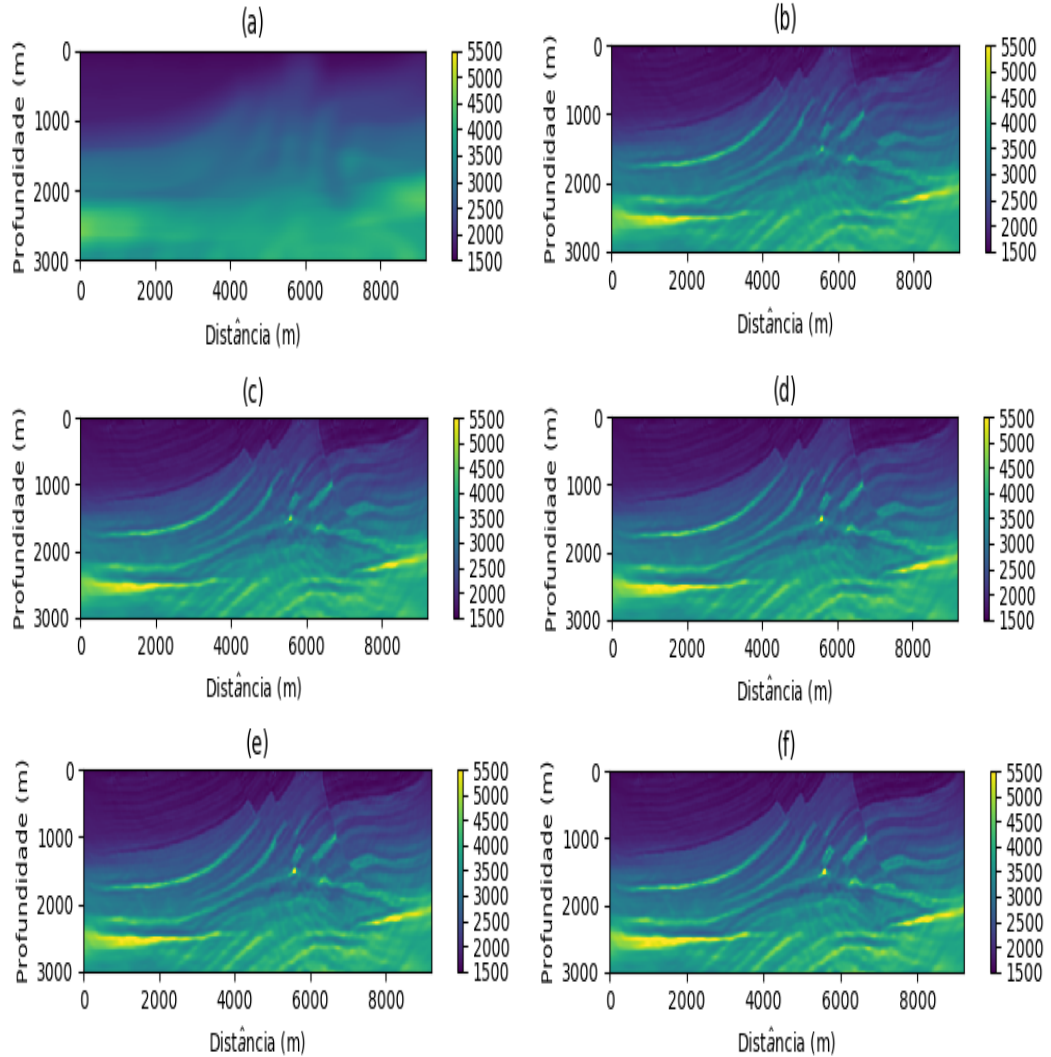


Figura 4.6: (a) Modelo inicial. Modelo reconstruído com $N_s = 10$ e (b) $N_I = 10$ (c) $N_I = 12$ (d) $N_I = 14$ (e) $N_I = 16$ (f) $N_I = 18$. Fonte: elaborada pela autora.

A Figura 4.7 mostra a reconstrução para 30 e 40 iterações, respectivamente. Podemos observar que embora ela se aproxime do modelo real, ainda não podemos a partir dela confirmar que encontramos o erro mínimo. Então mais uma vez partiremos para a análise do resíduo.

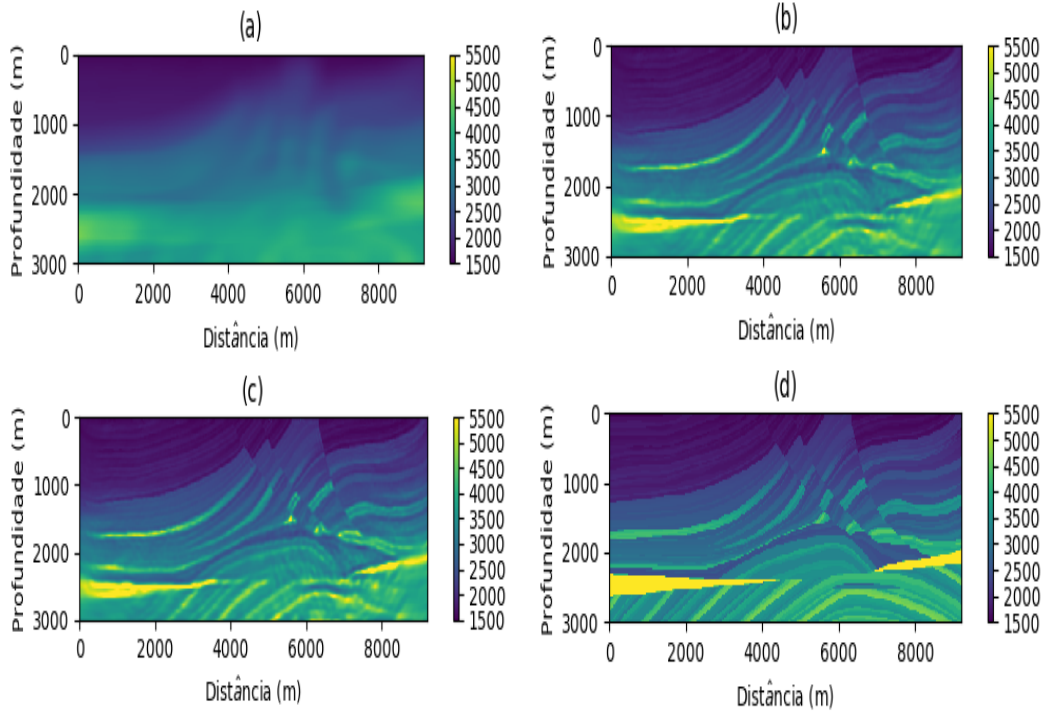


Figura 4.7: (a) Modelo inicial, (b) Reconstruído com $N_s = 10$ $N_I = 30$, (c) Reconstruído $N_s = 10$ $N_I = 40$ e (d) Modelo real. Fonte: elaborada pela autora.

4.2.1 Análise do erro

A Figura 4.9 mostra o comportamento da função erro variando de 2 em 2 unidades a quantidade de iterações. É possível notar mais uma vez que a quantidade de iterações utilizada não foi suficiente para encontrar o erro mínimo. Análogo ao que fizemos na seção anterior, mudaremos consideravelmente a quantidade de iterações, dessa vez, como mostra a Figura 4.10.

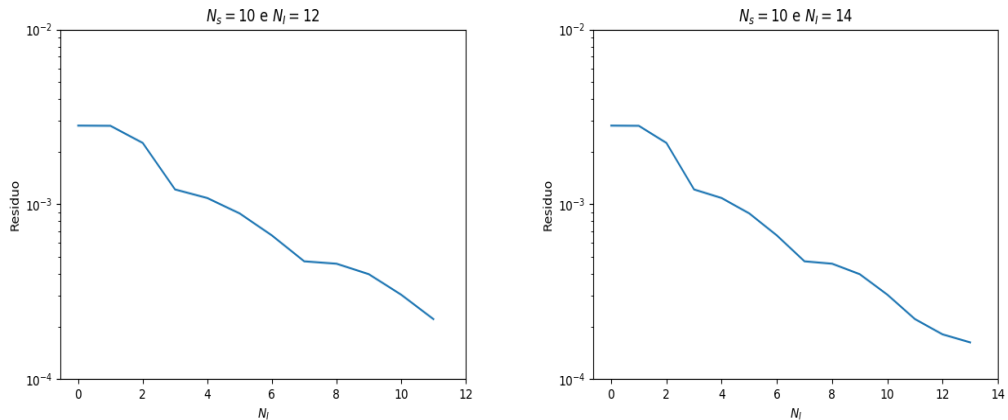


Figura 4.8: Gráfico do erro em função da quantidade de iterações, mantendo $N_s = 10$ e variando N_I . Fonte: elaborada pela autora

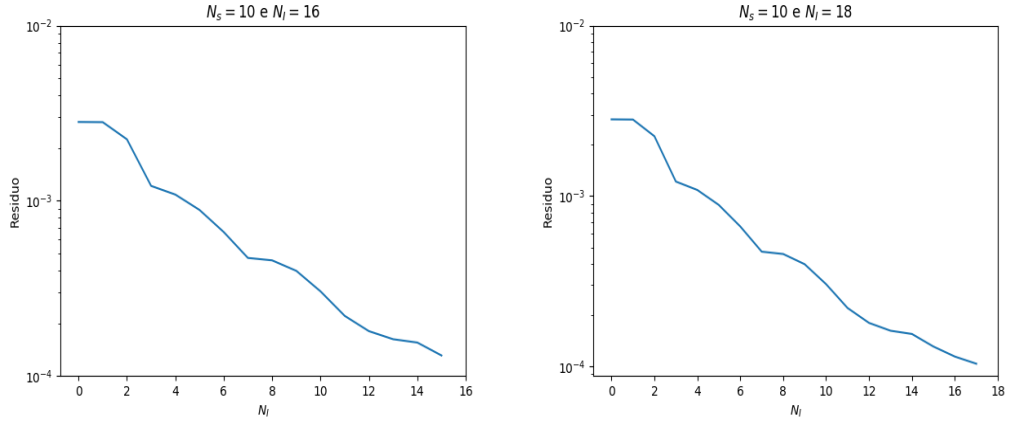


Figura 4.9: Gráfico do erro em função da quantidade de iterações, mantendo $N_s = 10$ e variando N_I . Fonte: elaborada pela autora.

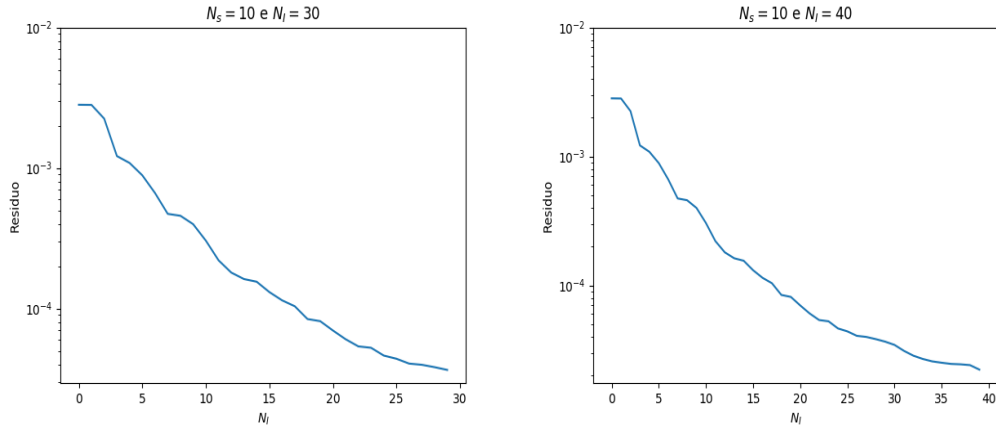


Figura 4.10: Gráfico do erro em função da quantidade de iterações, com $N_s = 10$ e $N_I = 30$ à esquerda e $N_I = 40$ à direita. Fonte: elaborada pela autora.

O erro da Figura 4.10 é o menor entre todas as simulações. Até então ele era da ordem de 10^{-3} , agora chegamos a 10^{-4} . Também é possível observar que a curva aparenta estar próxima de encontrar um mínimo, devido a sua inclinação. Esperamos conseguir realizar a simulação com $N_I = 50$ e $N_I = 60$, acreditamos que já seja possível observar o menor erro.

4.2.2 Análise do tempo de execução

A terceira análise desse conjunto é a do tempo de execução de cada simulação, que são apresentados na Tabela 4.3. Assim como na seção anterior, 4.1.2, percebemos que o tempo de execução é diretamente proporcional a quantidade de iterações, o que já era de se esperar. Tendo em vista que cada nova iteração é necessário processar e posteriormente guardar maior volume de dados.

Conjunto B	Tempo de execução total médio
$N_s = 10$ e $N_I = 12$	2h 21m
$N_s = 10$ e $N_I = 14$	2h 33m
$N_s = 10$ e $N_I = 16$	2h 49m
$N_s = 10$ e $N_I = 18$	3h 09m
$N_s = 10$ e $N_I = 20$	4h 11m

Tabela 4.3: Tempo de execução da simulações com $N_s = 10$ variando a quantidade de iterações.

4.3 Ponto ótimo

O grande objetivo de quem busca minimizar a função erro é encontrar os parâmetros que definem a solução m que minimiza a função objetivo. Tais parâmetros muitas vezes é chamado de **Ponto ótimo**. A análise abaixo retrata reconstruções que são muito próximas do que seria um ponto ótimo, como mostra a Figura 4.11.

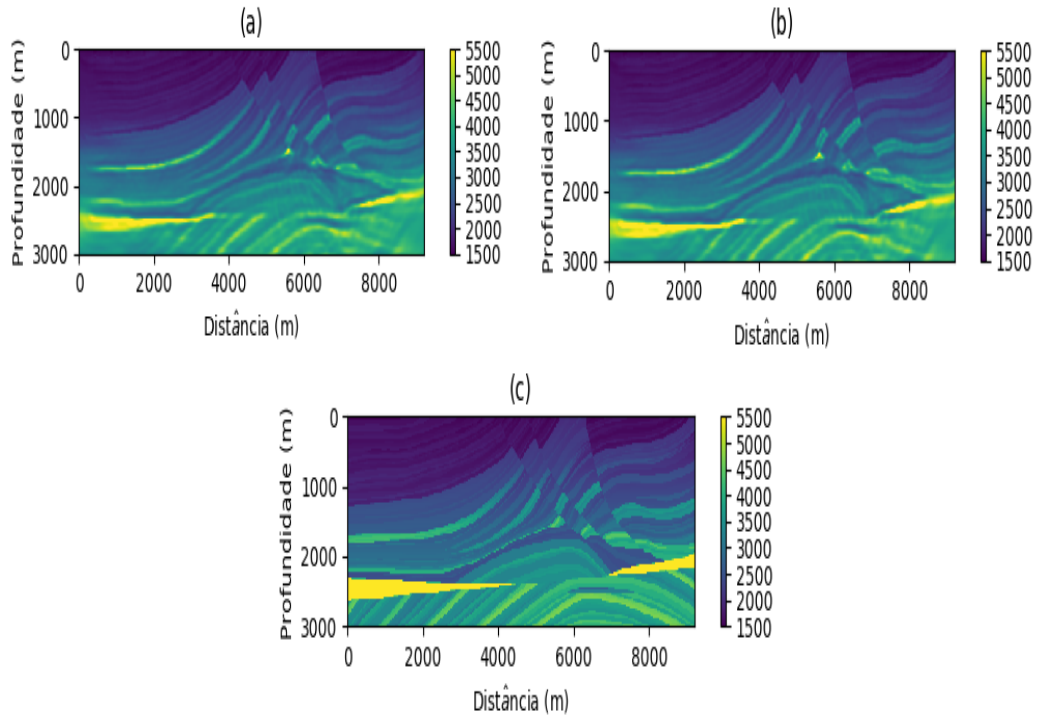


Figura 4.11: (a) Modelo reconstruído com 20 disparos e 20 iterações (b) Modelo reconstruído com 20 disparos e 30 iterações (c) Modelo real. Fonte: elaborada pela autora.

É possível notar que as imagens reconstruídas em 4.11 são muito próximas do modelo real. Conseguimos notar todas as camadas, as falhas geológicas, assim como os mergulhos. Prosseguiremos com a análise do resíduo para observar de outra forma o resultado perante a variação do número de iterações.

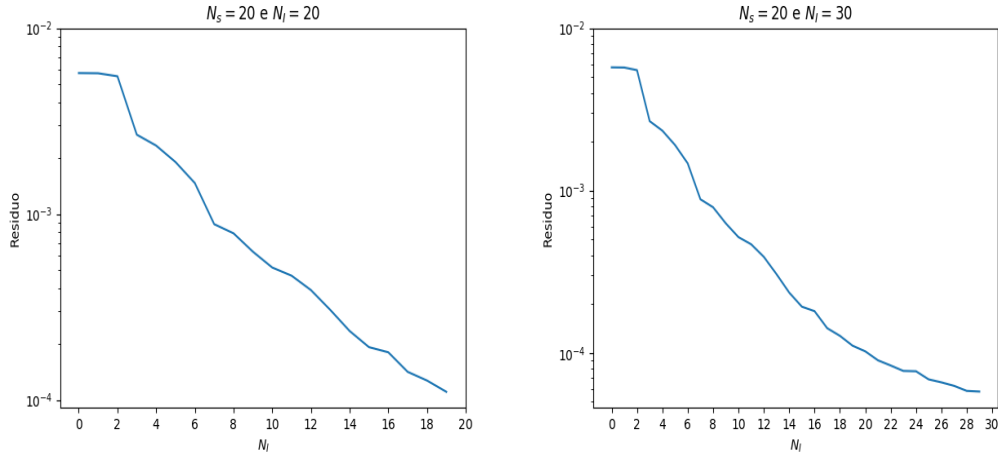


Figura 4.12: Gráfico do erro e função do número de iterações, para 20 disparos e 20 iterações à esquerda, e 20 disparos e 30 iterações à direita. Fonte: elaborada pela autora.

4.3.1 Análise do erro

A Figura 4.12 mostra que para a simulação com $N_s = 20$ e $N_I = 30$ encontramos um ponto onde o erro aparentemente é mínimo. O objetivo é aumentar a quantidade de iterações para ter certeza que encontramos a solução m que é solução para o problema de minimização.

4.3.2 Análise do tempo de execução

Conjunto C	Tempo de execução total médio
$N_s = 20$ e $N_I = 20$	7h 15m
$N_s = 20$ e $N_I = 30$	11h 25m

Tabela 4.4: Tempo de execução das simulações com $N_s = 20$ com $N_I = 20$ e $N_I = 30$ iterações, respectivamente.

Com base nos tempos de execução da Tabela 4.4, podemos notar que o custo computacional para processar essa quantidade de dados já é muito elevado. Porém, percebemos em várias das análises feitas até aqui, que a quantidade de iterações utilizadas não foram suficientes para encontrar a solução do problema de minimização, com exceção das simulações com $[N_s = 20; N_I = 30]$, $[N_s = 12; N_I = 10]$ e $[N_s = 14; N_I = 10]$. O próximo objetivo deste trabalho é encontrar para cada configuração testada, os parâmetros exatos que definem o ponto ótimo (análise quantitativa).

Conclusões e Perspectivas

Com base em todas as análises feitas neste trabalho, concluímos que:

- Pequenas variações na quantidade de disparos na grade gera pouca melhora na resolução da imagem reconstruída. Nossa análise consistiu em mudar esse parâmetro até 50 disparos, o que ainda não foi suficiente para obter o ponto ótimo. Embora algumas configurações deste conjunto tenham apresentado um possível ponto de mínimo, a imagem reconstruída ainda está distante do que seria um modelo real. O que nos leva a crer que haja alguma interferência (ruído) no resultado do resíduo.
- Pequenas variações na quantidade de iterações também gera pouca melhora na resolução da imagem reconstruída. Em nossa análise variamos N_I até 40, que embora seja um resultado animador, ainda não é o ideal. Pelo menos mantendo fixo 10 disparos.
- Para se ter um resultado ótimo é necessário dispor de máquinas capazes de processar grandes volumes de dados. Também é necessário encontrar os valores exatos de N_s e N_s que tragam a melhor reconstrução possível.
- O método FWI é uma técnica poderosa de processamento, tendo em vista que com poucas iterações e disparos já é possível obter bons resultados.
- A programação paralela é essencial neste tipo de trabalho, pois tornam o resultado viável. Não adianta ter uma boa técnica de imagear e muito difícil de implementar.

Fica como perspectivas futuras:

- Aumentar a quantidade de iterações em busca do modelo que minimiza o resíduo. Tendo em vista que muitas das análises feitas não chegaram no ponto ótimo.
- Desenvolver técnicas de resolver o problema de minimização de forma mais eficiente.
- Fazer outras análises, como a análise de memória consumida, análise do método em outros domínio entre outras.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREO-CARRILLO, S.-A., RAMIREZ, A.-B., REYES, O., ABREO-CARRILLO, D.-L., AND GONZALEZ-ALVAREZ, H. A PRACTICAL IMPLEMENTATION OF ACOUSTIC FULL WAVEFORM INVERSION ON GRAPHICAL PROCESSING UNITS. *CT&F - Ciencia, Tecnologia y Futuro* 6 (07 2015), 5 – 16.
- [2] BACON, M., SIMM, R., AND REDSHAW, T. *3-D Seismic Interpretation*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] BLEISTEIN, N., COHEN, J., AND STOCKWELL, J. *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration, and Inversion*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [4] DE ARAÚJO MARTINS, M. *Estratégia Para Inversão do Campo de Ondas Completo Associado a Fontes Sísmicas Reais e Virtuais*.
- [5] DE MENESES, M. D. S. *Inversão da Forma da Onda Acústica no Domínio do Tempo*. 2016.
- [6] DEMANET, L. *Waves and Imaging*. 2016.
- [7] DOS SANTOS BARBOSA, C. H. *Migração Reversa no Tempo em Meios Transversalmente Isotrópicos*. 2015.
- [8] EUGENIO, L. F. C. *Estudo e Aplicação da Migração Reversa no Tempo em Dados Sísmicos Sintéticos*. 2016.
- [9] JUNGKYUN SHIN, CHANGSOO SHIN, H. C. Laplace-domain waveform modeling and inversion for the 3D acoustic–elastic coupled media. *Journal of Applied Geophysics* (2016), 41–52.
- [10] JUNIOR, D. C. R. *Inversão Linearizada com Regularização Para Obtenção de Velocidades Intervalares*. 2013.
- [11] KEAREY, P., BROOKS, M., AND HILL, I. *Geofísica de exploração*. Oficina de Textos, 2009.
- [12] LAILLY, P., AND BEDNAR, J. The seismic inverse problem as sequence of before stack migration: Conference on Inversio Scattering, Theory and Application, Society for Industrial And Apllied Mathematics, Expanded Abstract . 206–220.

- [13] LIMA, I. P. D. *Implementação do Algoritmo (RTM) Para Processamento Sísmico em Arquiteturas não Convencionais*. 2014.
- [14] PLESSIX, R.-E. A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International* 167 (nov 006), 495–503.
- [15] PRATT, R. G., SHIN, C., AND HICK, G. J. Gauss–newton and full newton methods in frequency–space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International* 133, 2 (1998), 341–362.
- [16] TARANTOLA, A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *GEOPHYSICS* 49, 8 (1984), 1259–1266.