MÓDULO 7

Matemática

Limites e Continuidade de funções

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA - IEDA

Conteúdos

Acerca deste Módulo

MÓDULO 7

Como está estruturado este Módulo

A visão geral do curso

Este curso está dividido por módulos autoinstrucionais, ou seja, que vão ser o seu professor em casa, no trabalho, na machamba, enfim, onde quer que você deseja estudar.

Este curso é apropriado para você que já concluiu a 7ª classe mas vive longe de uma escola onde possa frequentar a 8ª, 9ª e 10ª classes, ou está a trabalhar e à noite não tem uma escola próxima onde possa continuar os seus estudos, ou simplesmente gosta de ser auto didacta e é bom estudar a distância.

Neste curso a distância não fazemos a distinção entre a 8ª, 9ª e 10ª classes. Por isso, logo que terminar os módulos da disciplina estará preparado para realizar o exame nacional da 10ª classe.

O tempo para concluir os módulos vai depender do seu empenho no auto estudo, por isso esperamos que consiga concluir com todos os módulos o mais rápido possível, pois temos a certeza de que não vai necessitar de um ano inteiro para conclui-los.

Ao longo do seu estudo vai encontrar as actividades que resolvemos em conjunto consigo e seguidamente encontrará a avaliação que serve para ver se percebeu bem a matéria que acaba de aprender. Porém, para saber se resolveu ou respondeu correctamente às questões colocadas, temos as resposta no final do seu módulo para que possa avaliar o seu despenho. Mas se após comparar as suas respostas com as que encontrar no final do módulo, tem sempre a possibilidade de consultar o seu tutor no Centro de Apoio e Aprendizagem – CAA e discutir com ele as suas dúvidas.

No Centro de Apoio e Aprendizagem, também poderá contar com a discussão das suas dúvidas com outros colegas de estudo que possam ter as mesmas dúvidas que as suas ou mesmo dúvidas bem diferentes que não tenha achado durante o seu estudo mas que também ainda tem.

Conteúdo do Módulo

Cada Módulo está subdividido em Lições. Cada Lição inclui:

- Título da lição.
- Uma introdução aos conteúdos da lição.
- Objectivos da lição.
- Conteúdo principal da lição com uma variedade de actividades de aprendizagem.
- Resumo da unidade.
- Actividades cujo objectivo é a resolução conjuta consigo estimado aluno, para que veja como deve aplicar os conhecimentos que acaba de adquerir.
- Avaliações cujo objectivo é de avaliar o seu progresso durante o estudo.
- Teste de preparação de Final de Módulo. Esta avaliação serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA.

Habilidades de aprendizagem

Estudar à distância é muito diferente de ir a escola pois quando vamos a escola temos uma hora certa para assistir as aulas ou seja para estudar. Mas no ensino a distância, nós é que devemos planear o nosso tempo de estudo porque o nosso professor é este módulo e ele está sempre muito bem disposto para nos ensinar a qualquer momento. Lembre-se sempre que " ***o livro é o melhor amigo do homem***". Por isso, sempre que achar que a matéria esta a ser difícil de perceber, não desanime, tente parar um pouco, reflectir melhor ou mesmo procurar a ajuda de um tutor ou colega de estudo, que vai ver que irá superar toas as suas dificuldades.

Para estudar a distância é muito importante que planeie o seu tempo de estudo de acordo com a sua ocupação diária e o meio ambiente em que vive.

Necessita de ajuda?

Ajuda

Sempre que tiver dificuldades que mesmo após discutir com colegas ou amigos achar que não está muito claro, não tenha receio de procurar o seu tutor no CAA, que ele vai lhe ajudar a supera-las. No CAA também vai dispor de outros meios como livros, gramáticas, mapas, etc., que lhe vão auxiliar no seu estudo.

Lição 1

Conceito de limite de uma função

Introdução

Você já definiu o limite de uma sucessão, quando **n** tende para infinito no módulo anterior, mas é aconselhavel revisitar este módulo para fazer uma pequena recapitulação.

Desta vez vamos estender o nosso estudo para o limite de uma função.por isso tratando-se de limites os conhecimentos que adquiriu no módulo anterior serão preciosos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

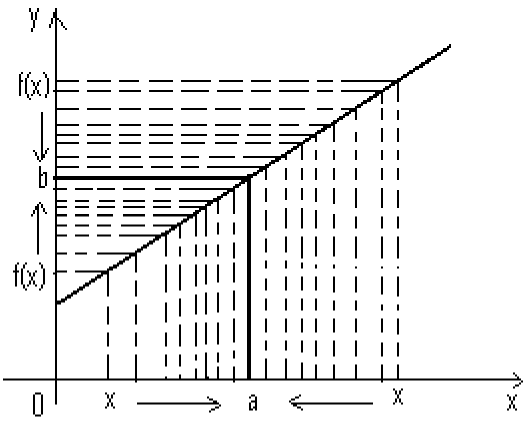
Objectivos

- Explicar a noção de limite de uma função com base na representação gráfica.
- Explicar a noção de limite de uma função segundo Cauchy.
- Calcular limite de uma função segundo a definição de Cauchy
- calcular limites laterais

Conceito de limite de uma função

Depois de recordar sobre conceito de limite de uma sucessão, vamos em conjunto definir o limite de uma função. É bastante simples porque você já domina o conceito de sucessão.

Consideremos no S.C.O ,valores de **x** cada vez mais perto de um dado número **a** , e investiguemos o comportamento duma função f(x) para esses valores de x isto significa ,considerar no domínio da função , uma sucessão convergente para o valor **a** e a partir daí, estudar o comportamento da sucessão das respectivas imagens.



Seja **a** um ponto de acumulação do domínio de uma função real de variável real $x \to f(x)$.

O limite de **f(x)**, quando **x** tende para **a**, é **b,** sse(se e somente se) qualquer que seja a sucessão (x_n) de valores do domínio da função f, tendente para **a**, por valores diferentes de **a**, a correspondente sucessão das imagens $(f(x_n))$ é convergente para **b.** Ou seja :

$$x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;,\ldots\ldots x_n \;,\ldots\ldots \to a$$
$$f(x_1),\; f(x_2),\; f(x_3),\ldots f(x_n),\;\ldots \to b$$

Simbolicamente:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall (x_n,), x_n \to a \;\wedge\; (x_n \in Df \setminus \{a\}, \forall n \in N) \Rightarrow f(x_n) \to b\end{array}}$$

No concre estamos nos referindo ao seguinte:

Dada $f(x) = x^2$.Investigar comportamento da função quando x tende para 2.

1°) passo

Escolhemos uma sucessão que tende para 2 seja

$$x: \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots\ldots, 2-\frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

2°) passo

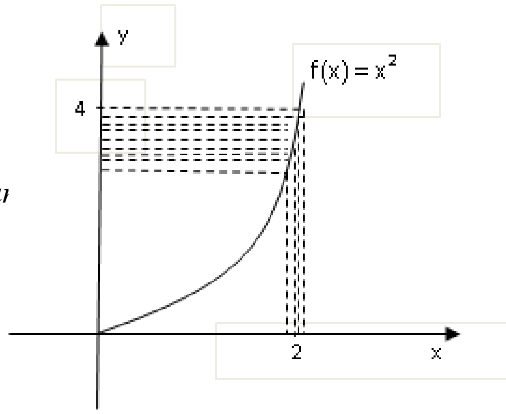
Ao fazer x assumir cada valor do dominio teremos a sucessão das imagens f(x) :

$$1, \frac{9}{4}, \frac{25}{9}, \ldots\ldots\ldots, \left(2-\frac{1}{n}\right)^2, \ldots\ldots\ldots$$

O termo geral desta sucessão

$$u_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)^2 = 4-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2} \rightarrow 4 \ quan$$

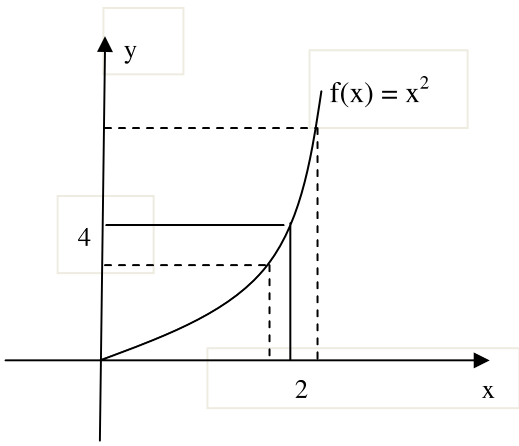
o que significa que ela converge para 4



Do mesmo modo,podemos verificar que escolhendo como domínio,uma sucessão convergente para 2 , a sucessão das imagens vai convergir para 4.

Olhando para o gráfico de f(x) , qualquer que seja a sucessão escolhida que converge para 2, a sucessão das imagens vai convergir para 4. portanto:

:



Conclusão

Podemos entender com muita facilidade que:

quando x tende 2 , f(x) tende para 4,diz-se que f(x) tem por limite 4 quando x tende para 2.E escreve-se:

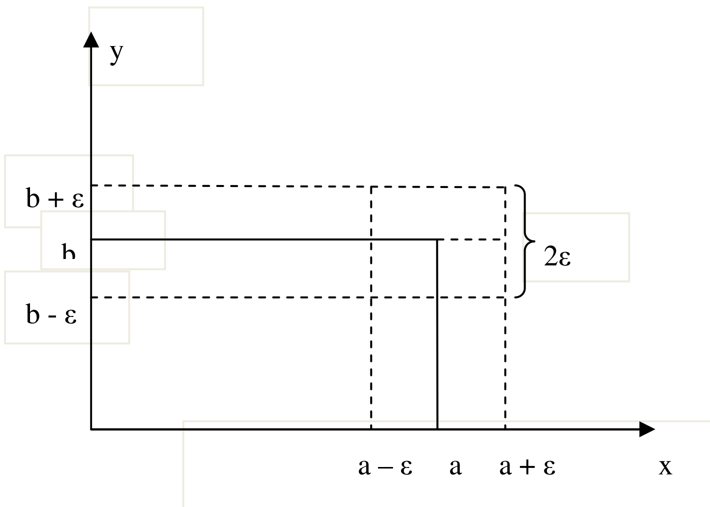
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

Historicamente há várias contribuições para a definição de limite , mas nós escolhemos a definição de Augustin-Louis Cauchy, por ter sido este Matemático Frances (1789-1857) o primeiro a provar o teorema de cálculo. Segundo **Cauchy**, o limite duma função é definido da seguinte maneira;

Definição

Seja dado um ponto **a** e uma função f definida num intervalo $]c;d[$ onde c < a < d . Diz-se que o número real **b** e o limite da função **f** quando **x** tende para **a** se dado qualquer ε positivo , existe pelo menos um δ também que depende de ε tal que para cada **x** satisfazendo a relação $|x-a| < \delta$ tem-se que

$|f(x)-b| < \varepsilon$.



Simbolicamente

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : |x - a| < 0 \Rightarrow |f(x) - b| < 0}$$

Exemplo :

Demonstre que $\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7$

Vamos aplicar a definição de limite de uma função apenas e chegamos à solução sem margem de dúvidas, preste atenção:

$$|3x+1-7| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x-6| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x-2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

facilmente, chegamos a seguinte conclusão : Temos o valor $\delta(\varepsilon)$ (

quer dizer , δ depende de ε) que é neste caso $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Logo : $-\frac{\varepsilon}{3} < x - 2 < \frac{\varepsilon}{3}$

Limites laterais

se considerarmos o limite apenas para os valores à esquerda do valor **a**, e depois para os valores à direita do valor **a** em separado estaremos a definir os **limites laterais**.vamos neste caso usar a designação: $x \to a - 0$ ou $x \to a^-$ para limite à esquerda $x \to a + 0$ ou $x \to a^+$ para limite à direita

Definição

Se $f(x) \to b_1$ quando $x \to a$ tomando apenas valores menores que **a**, então b_1 designa –se por **limite lateral a esquerda**

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a_-} f(x) = b_1$$

Definição

Se $f(x) \rightarrow b_2$, quando $x \rightarrow a$, tomando valores maiores que **a** , então b_2 designa-se por **limite lateral à direita**

Se f(x) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ *ou* $\lim\limits_{x \to a_+}$ f(x)= b_2

Definição

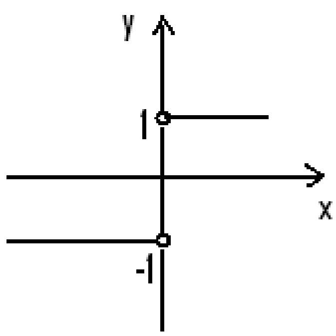
Se os limites laterais forem iguais entre si e iguais a um número finito **b**,quando x tende para **a**, o limite quando x tende para **a** de f(x) será igual a **b**.

$$\boxed{\text{Se } b_1 = b_2 = b \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b}$$

Significa que, no caso de existirem os limites laterais de uma função num ponto, o limite da função nesse ponto existe sse se verificar a igualdade dos limites laterais dessa função nesse ponto.

<u>Exemplo:1</u>

Consideremos a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ cujo gráfico está esboçado a seguir



Repare que a toda a sucessào de valores de x, tendente para zero, em que todos os termos são inferiores a zero,corresponde a uma sucessão de valores de f(x) tendente para -1. Por isso dizemos que f(x) tende para -1, quando x tende para zero à esquerda isto é:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Repare ainda que a toda a sucessão de valores de x, tendente para zero, em que todos os termos são maiores que zero, corresponde a uma sucessào de valores de f(x) tendente para 1. Por isso dizemos que f(x) tende para 1, quando x tende para zero à direita isto é:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Por isso podemos chegar a conclusão de que não existe limite da função quando x tende para 0 porque os dois limites laterais são diferentes.

Resumo da Lição

Resumo

Nesta unidade você aprendeu que:

Se **a** e **b** sao numeros reais, diz-se que a função real f(x) tem por limite **b** quando **x** tende para **a** , se e só se a toda sucessão de valores de x tendendo para **a** ,corresponder uma sucessão de valores de f(x) tendendo para **b**. O que simbolicamente escreve-se: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Quando é dado um ponto a e uma função f definida num intervalo $]c;d[$ onde c < a < d . Diz-se que o número real **b** e o limite da funcao **f** quando **x** tende para **a** se dado qualquer ε positivo , existe pelo menos um δ também que depende ε tal que para cada **x** satisfazendo a relação $|x-a| < \delta$ tem-se que $|f(x)-b| < \varepsilon$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b \Rightarrow \forall \varepsilon>0: |x-a|<0 \Rightarrow |f(x)-b|<0}$$

Aprendeu ainda sobre limites laterais que:

1.Se $f(x) \to b_1$ quando $x \to a$ tomando apenas menores que **a**, entao b_1 designa –se por limite lateral a esquerda

$$\lim_{x\leftarrow a-0} \text{f(x)} = b_1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a_-} \text{f(x)} = b_1$$

2.Se $f(x) \to b_2$, quando $x \to a$, tomando valores maiores que **a ,entao** b_2 designa-se por limite lateral à direita

$$\text{Se} \quad \text{f(x)} \ \lim_{x\to a+0} f(x)=b_2 \quad ou \quad \lim_{x\to a_+} \text{f(x)}= b_2$$

3. Se os limites laterais forem iguais entre si e iguais a um número finito **b**, quando x tende para **a**, o limite quando x tende para **a** de f(x) será igual a **b**.

$$\text{Se } \; b_1 = b_2 = b \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) \;=\; b$$

Actividades

Actividades

1.Demonstre que $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$

Aplicando a definição teremos:

$$\forall\,\varepsilon>0: |\,x-2\,|<0 \;\Rightarrow \left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<0$$

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2-4-(4x-8)}{x-2}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right|<\varepsilon$$

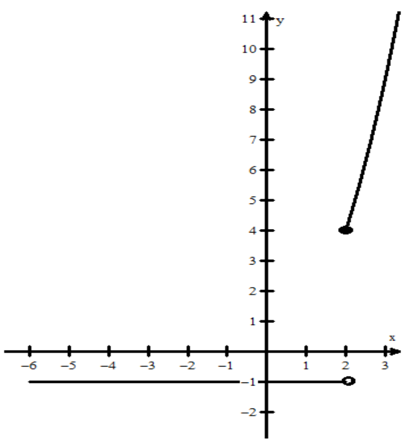
$$\Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \delta$$

$$\delta=\varepsilon$$

2.Dada a função $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{para } x \geq 2 \\ -1 & \text{para } x < 2 \end{cases}$

Calcular os limites laterais no ponto 2 e averiguar se existe, ou não limite de f(x) quando x tende para 2.

Construíndo em primeiro lugar o gráfico será fácil fazer a leitura.



Podemos reconhecer imediatamente que:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

Dado que os limites laterais são diferentes, não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

E pronto,você pode resolver os exercícios de auto-avaliação. Sem muitas dificuldades

Avaliação

Avaliação

1. Considere a função $\begin{cases} x+2 & para \quad x\le 3 \\ 2x+2 & para \quad x>3 \end{cases}$ Investigue o limite desta função quando x tende para 3.

2.Considere a função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se} \quad x<4 \\ 1 & \text{se} \quad x\ge 4 \end{cases}$

a) Represente a funçào e indique o seu domínio.

b)calcule,se existir:

$\lim_{x\to 5} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$; $\lim_{x\to 4} f(x)$

Lição 2

Cálculo de Limites

Introdução

Já definimos o limite de uma função na lição anterior , avancemos para o cálculo dos limites aplicando a regra prática,vamos ver também os teoremas sobre limites de funções que irão regular os nossos procedimentos durante os cálculos.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Outcomes

- *Calcular* o limite laterais.
- *Calcular* o limite de uma função
- *Identificar* as formas de limites de funções.
- *Aplicar* os teoremas sobre limites no cálculo de limites de funções.

Cálculo de Limites

Na lição número um você teve a oportunidade de investigar o comportamento de uma função partindo do seu gráfico, com vista à definição do limite de uma função, de calcular os limites laterais assim como as condições para existência de limite de uma função,

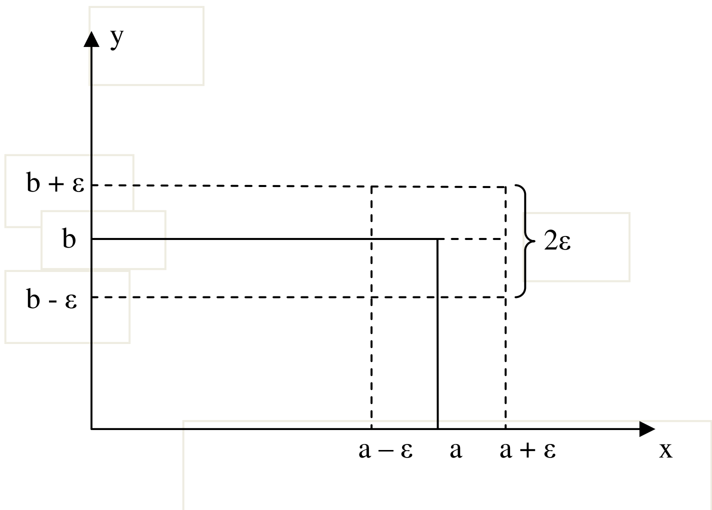
Estes conceitos serão bastante úteis ao longo das nossas lições, vamos em primeiro lugar rever as definições por forma a tornar os seus conhecimentos mais sólidos.

Definição de Cauchy

Seja dado um ponto **a** e uma função f definida num intervalo $]c;d[$ onde c <a < d . Diz-se que o número real **b** é o limite da função **f** quando **x** tende para **a** se dado qualquer ε positivo, existe pelo menos um δ também que depende ε tal que para cada **x** satisfazendo a relação $|x-a|<\delta$ tem-se que

$|f(x)-b|<\varepsilon$.

Limites laterais



Definição

Se $f(x)\to b_1$ quando $x\to a$ tomando apenas valores menores que **a**, entao b_1 designa –se por limite lateral a esquerda $\lim\limits_{x\leftarrow a-0}$ f(x) = b_1 ou $\lim\limits_{x\to a_-}$ f(x) = b_1

Definição

se $f(x)\to b_2$, quando $x\to a$, tomando valores maiores que **a** **,entao** b_2 designa-se por limite lateral à direita

Se f(x) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ ou $\lim\limits_{x\to a_+}$ f(x)= b_2

Se os limites laterais forem iguais entre si e iguais a um número finito b, quando $x \to a$, o limite quando $x \to a$ de f(x) será:

$$b_1 = b_2 = \text{b} \quad \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

Vamos agora ver como calcular o valor do limite de uma função

Cálculo de limite de uma função

Consideremos o limite $\lim_{x\to 2}(3x+1)$ podemos calcular o seu valor fazendo a substituição da variável x por 2 pois x tende para 2.

Muito simples,veja o procedimento:

1) $\lim_{x\to 2}(3x+1) = 3.2+1 = 7$

Trata-se de uma função simples, é claro que à medida que a função vai se tornando complexa a forma de calcular o seu limite também vai exigir mais atenção e cálculos.

Mais um exemplo:

2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3} = \dfrac{2^2+5}{2^2-3} = 9$

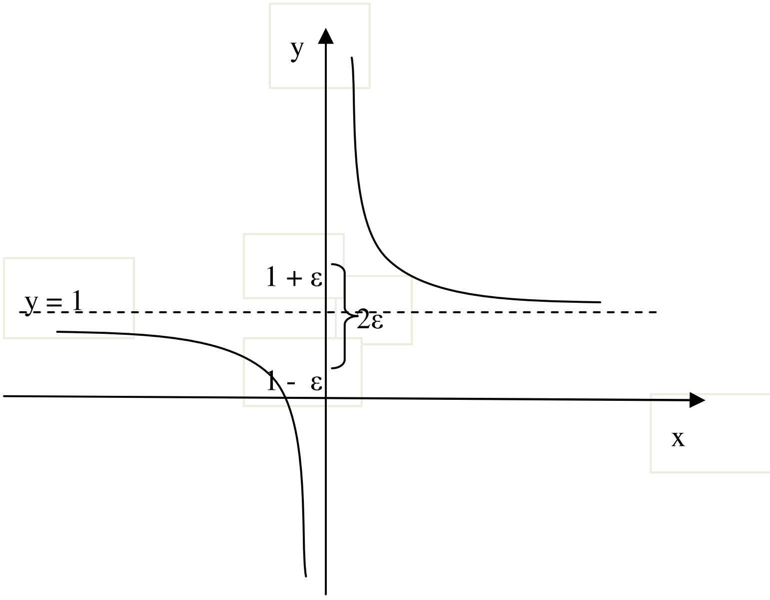
Fácil , mais lembre-se que existem diferentes tipos de função

Vamos considerar agora os limite de função quando x tende para ∞

Tomando como ponto de partida,a definição de limite quando x tende para um valor **a** podemos dar definição neste caso com muita facilidade

Definição

A função f(x) tende para o **b**, (quando x tende para ∞) , se para cada número ε positivo se pode indicar um número **n** também positivo tal que para todos os valores de x verificando a desigualdade $|x| > n$ *a* desigualdade $|f(x) - b| < \varepsilon$ é satisfeita.



Exemplo:

Podemos mostrar segundo Cauchy que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

$$\left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+1-x}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow 1<|x|.\varepsilon \Leftrightarrow$$
$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}=n(\varepsilon)$$

prossigamos

Existem regras (teoremas) para o cálculo de limite de uma função, mais a demonstração destas ficará para mais tarde nesta fase, vamos concentrar a nossa atenção à aplicação destes teoremas:

Teoremas dos limites de uma função

Atendendo à definição de limite de uma funçào num ponto podemos concluir imediatamente que:

1. O limite da funçào constante é a própria constante

$$\lim_{x \to a} k = k$$

se $\lim_{x\to a} f(x) = f$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = g$ vale afirmar que:

2. O limite da soma é igual a soma dos limites

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f + g$$

3. O limite da diferença é igual a diferença dos limites

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - 1\lim_{x\to a} g(x) = f - g$$

4. O limite do produto é igual o produto dos limites.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = 1\lim_{x\to a} f(x) \,.\, \lim_{x\to a} g(x) = f\,.\,g$$

5. O limite do quociente é igual ao quociente dos limites.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x): g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) : \lim_{x\to a} g(x)$$

Consideremos a seguir alguns exemplos de aplicação dos teoremas considerados

Exemplo1

a) $\lim_{x\to -1}\left(5x^3+2x^2-1\right) = \lim_{x\to -1}\left(5x^3\right) + \lim_{x\to -1}\left(2x^2\right) - \lim_{x\to -1} 1 =$

$= 5.\lim_{x\to -1}\left(5x^3\right) + 2\lim_{x\to -1}\left(2x^2\right) - \lim_{x\to -1} 1$

$= -5+2-1 = -4$

Exemplo2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^4+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-1\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^4+3\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(0)}{2.\lim\limits_{x\to 1}(x)^4+3}=\frac{1-1}{2.1+3}=\frac{0}{5}=0$$

Resumo da Lição

Resumo

Teoremas dos limites de uma função

Atendendo à definição de limite da função num ponto podemos concluir imediatamente que :

1. $\lim\limits_{x \to a} k = k$

2. se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f$ $\quad e \quad$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g$

$$\lim_{x \to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f + g$$

$$\lim_{x \to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = f - g$$

$$\lim_{x \to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = f.g$$

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) : g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) : \lim_{x \to a} g(x)$$

- Para calcular o limite de uma função quando x tende para um valor **a** ou ∞, basta substituir o valor da variável na função por a ou ∞.

Caso não seja possível determinar o valor do limite logo a primeira é necessário fazer transformações algébricas e depois voltar de novo à substituiçào da variável.

Repetir o processo sempre que for necessário para uma determinada função até que seja possível encontrar o valor do limite.

Actividade

Actividade

Calcule os seguintes limites :

1)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=\frac{2^2+5}{2^2-3}=9$$

Facílimo. É só substituir o x por 2 na expressão

2)

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+4}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+4}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-3}{\left(\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3}\right)^2+4}=\frac{3-3}{9+3+4}=\frac{0}{16}=0$$

Lindo, acertou usando o mesmo processo em (1)

3)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\frac{1^2-2.1+1}{1^3-1}=\frac{0}{0}$$

Desta vez o processo anterior leva na impossibilidade de solução, como já sabe

das classes anteriores que uma fracção só tem sentido se o denominador for diferente de zero. Mas temos outra via para evitar este problema, vamos simplificar a fracção decompondo os dois factores

(numerador e denominador). Teremos:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x^2-1)}=1\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=1\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1(1+1)}=\frac{0}{2}=$$

Viu como também foi fácil porque você já conhece o processo de factorização usando

casos notáveis. Assim chegamos a solução.

Mais um exemplo em será necessário simplificar a fracção racional recorrendo a

A factorização dos seus termos .

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x^2+3x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3}=\frac{-2(-2+1)}{-2-3}=-\frac{2}{5}$$

4)

Mais um exemplo.

5) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=$

$$\lim_{x\to1}\frac{-(x^2+x+1)+3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x-1+3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{(x^2+x+1)}=\frac{1+2}{1+1+1}=1$$

Você acertou em cheio, pois:

1˚) Reduziu as fracções ao mesmo denominador

2˚) reduziu os termos do numerdor donde resultou um trinómio do segundo grau

3˚)decompôs o numerador com base na regra de factorização do trinómio do

segundo grau

4˚) simplificou os factores iguais reduzindo assim a expressão para uma fracção

mais simples

5˚) fez a substituição de x por 1

E pronto, preparou-se muito bem para resolver os exercícios de auto-avaliação. A sua dificuldade pode residir nas fórmulas para decomposição de polinómios ,melhor é voltar a ler as lições sobre este assunto , pois esta matéria já foi tratada nos módulos anteriores.

Avaliação

Avaliação

Avaliação

Calcule:

1)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 + 5x + 1}$$

$$2)\lim_{x \to 1} = \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$$

$$3)\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$$

Lição 3

Cálculo de Limites

Introdução

Os teremas dos limites permitem o cálculo de limites de várias funções fazendo a substituiçào da variável. Porém, nem sempre é possível determinar o valor do limite para algumas funções usando este processo.

Vamos dedicar a nossa lição ao estudo destes casos, pois,existe possibilidade de contornar este tipo de situações.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Identificar* casos de indeterminação no cálcuo de limites de funções
- *Aplicar* transformações algébricas no levantamento de indeterminações

Objectivos

Cálculo de Limites

O limite de uma fução pode ser igual a um número finito, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

É importante definirmos antes de mais nada o limite no caso em que a função tem limite finito quando x tende para um valor infinito para mais tarde nào ficarmos limitados durante os nossos cálculos:

Definição

A função f(x) tende para o **limite b**, (quando x tende para ∞) , se para cada número ε positivo se pode indicar um número **n** também positivo tal que para todos os valores de x verificando a relação $|x| > n$ a desigualdade $|f(x) - b| < \varepsilon$ é satisfeita.

Simbolicamente :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n > 0 : |x| > n \quad \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

figura

Exemplo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \left| \frac{x+1-x}{x} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow 1 < |x| . \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} = n(\varepsilon)$$

<u>Exemplo;</u>

Este limite não será finito para x = 2 como você já sabe , mas os seus limites laterais podem ser determinados,veja

a seguir : $\lim_{x \to 2^+} = \frac{3x+2}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 2^+} 3x+2}{\lim_{x \to 2^+} x-2} = \frac{8}{0} = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x+2}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 2^-} 3x+2}{\lim_{x \to 2^{-}-} x-2} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

Formas Indeterminadas

Ao introduzirmos os valores $+\infty$ **ou** $-\infty$ para além de zero deparamos com várias situações em que não é possível termos a solução para o nosso problema, estas são as chamadas **formas indeterminadas.** Por isso**,** os teoremas que acabamos de ver não têm aplicação imediata em todos os casos de limites.

veja o exemplos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2-\lim_{x\to+\infty}2x=\infty-\infty=?$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^3+x}=\frac{\lim_{x\to0}x^3}{\lim_{x\to0}x^3+x}=\frac{0}{0}=?$$

$$\lim_{x\to+\infty}a^{-x}.x=\lim_{x\to+\infty}a^{-x}.\lim_{x\to+\infty}x=0.\infty=?$$

E agora? Não fique assustado, pois é possível eliminar a indeterminação, na lição passada você foi capaz de calcular limites de algumas funções em que por via de substituição da variável nào foi possível logo no primeiro passo. Mas, foi possível calcular valor desses limites usando outros processos. Você estava perante casos de indeterminação.

Estas formas indeterminadas não são únicas, podemos ter também formas como $\frac{\infty}{\infty}$, resumindo-se em:

$$\boxed{\frac{0}{0}\ ,\ \infty-\infty\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0.\infty}$$

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu que:

Existem formas indeterminadas a saber

$$\frac{0}{0}\ ,\ \infty-\infty\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0.\infty$$

Para os casos em que o cálculo do limite da função conduz nos a formas indeterminadas existem procedimentos específicos (transformações algébricas) para sairmos dessa indeterminação e ter valor de limite:

Vamos em conjunto realizar as seguintes actividades para mostrar como fazer essas transformações algébricas

Actividades

As trnasformações algébricas que são feitas dependem da forma que o limite apresenta, vejamos os casos que se seguem:

1.Consideremos a função:

$f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$ qual será o limite desta função quando x tende 2 ?

Quando x tende para 2, os polinómios têm o limite igual a zero. Logo temos a forma : $\frac{0}{0}$

Mas f(x) pode ser factorizada ficando na forma $f(x)=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}$ para

$$x\neq 2 \ , \ f(x)=\frac{(x+3)}{(x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x-1)}=\frac{2+3}{2-1}=5$$

E temos deste modo o valor de limite, a este processo se chama de <u>levantamento da indeterminação</u>

NB no cálculo de limites se ao substituir x por **a** deparamos com uma indeterminação então é necessário levantar essa indeterminação fazendo transformações algégricas.

Mais um exemplo.

2)
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\right)-\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}\right)=\frac{1}{1-1}-\frac{3}{1-1}=$$
$$=\frac{1}{0}-\frac{3}{0}=\infty-\infty$$

Temos uma forma indeterminada, vamos fazer transformações algébricas até conseguirmos determinar o valor do limite e isso é possível.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(x^2+x+1\right)+3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-x-1+3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{-x^2-x+2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{1+2}{1+1+1}=1$$

Voce acertou em cheio, pois:

1°) Reduziu as fracções ao mesmo denominador

2°) Reduziu os termos do numerdor donde resultou um trinómio do segundo grau

3°)Decompôs o numerador com base na regra de factorização do trinómio do segundo grau

4°) Simplificou os factores iguais reduzindo assim a expressão para uma fracção mais simples e consequentemente levantou a indeterminação

5°) Fez a substituição de x por 1

Avaliação

Avaliação

Calcule os seguintes limites

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-3x} \qquad b)\ \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2} \qquad c)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$$

Lição 4

Limite nos extremos

Introdução

Continuamos nesta lição a falar do cálculo de limites, desta vez, tomando valores do domínio a tender para o os extremos tanto à esquerda $-\infty$ como para à esquerda direita $+\infty$ do zero.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Calcular* o limite de x^n quando x tende para $\pm\infty$.
- *Calcular* o limite de $\frac{1}{x^n}$ quando x tende para . $\pm\infty$.
- *Calcular* o limite de um polinómio quando x tende para $\pm\infty$.

Limite nos extremos

Consideremos os casos que se seguem:

1. O limite de x^n quando x tende para $\pm\infty$

Ao aplicarmos o teorema relativo ao limite do produto verifica-se que:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

$$ex: \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad ;$$

2. O limite de $\frac{1}{x^n}$ quando x tende para $\pm\infty$

   Aplicando os teoremas obtemos

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & \text{se n é par} \\ 0^- & \text{se n é impar} \end{cases}$$

3. O limite de um polinómio quando x tende para $\pm\infty$

   O limite de um polinómio conduz-nos à indeterminação do tipo $\infty-\infty$,logo temos que recorrer a outro processo par calcular o limite:

Exemplo;

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x+1\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}\right) = 1$$

Pois você já sabe os termos $\frac{3}{2x}$ e $\frac{1}{2x^2}$ têm limite igual a zero (0) quando x tende $+\infty$ e $\frac{a}{\infty} = 0$.

O mesmo acontece quando x tende para $-\infty$. Daí a seguinte regra geral

Regra geral

Quando x tende para $\pm\infty$, o polinómio tem o mesmo limite que o seu **termo de mais alto grau.**

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_1x^n+a_2x^{n-1}+a_3x^{n-2}+\ldots\ldots\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_1x^n}$$

Atenção: A regra só é aplicada no caso em que x tente para $\pm\infty$ e não quando o x tende para um valor finito.

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu que :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & se \quad n \ par \\ -\infty & se \quad n \ e \ impar \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0^+$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & \text{se n é par} \\ 0^- & \text{se n é impar} \end{cases}$

- Quando x tende para $\pm\infty$, o polinómio tem o mesmo limite que

  O limite do seu termo de mais alto grau.

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + ...\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_1x^n}$$

Passemos à resolução em conjunto de alguns exercícios

Actividades

Actividades

Calcule o valor dos seguintes limites:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(-3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{-3}{3}=-1$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^4}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^3-\left(2x^4-x^2\right)}{4x^3-2x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(4-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=-$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{4}=-\frac{1}{4}$$

Muito simples, agora resolva no seu caderno os exercícios que se seguem para que possa medir o seu progresso.

Avaliação

Avaliação

Calcue o valor de:

1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

2) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$

3) $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$

Lição 5

Limites irracionais

Introdução

Continuando com o estudo de limites, as expressões irracionais dão origem às funções irracionais e daí surge a necessidade do cálculo de limites deste tipo de funções, este será o foco da nossa lição.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Calcular* limites de funções irracionais

Objectivos

Limites irracionais

Podemos definir limites irracionais como limite cuja função é irracional.

Importa agora procurar um processo para calcular o limite deste tipo de funções caso encontrarmos uma forma indeterminada ao substituir o valor de x na função dada.

No cálculo de limites de funções irracionais devemos nos apoiar nos princípios válidos para as expressões irracionais portanto, como proceder para tornar expressões irracionais em expressões racionais. Ao calcular limite deste tipo de funções podemos chegar a situação de indeterminação e para desta nos desembaraçar precisamos de fazer racionalização das expressões irracionais.

Recorde-se que a racionalização depende do tipo de expressão irracional por exemplo:

1. Quando temos uma expressão tipo $\frac{B}{\sqrt{A}}$ multiplica-se o numerador e o denominador pela pelo radical para racionalizar o denominador.

Exemplo: $\frac{x+1}{\sqrt{2x}}=\frac{(x+1)\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\,.\sqrt{2x}}=\frac{(x+1)\sqrt{2x}}{2x}$

2. Quando temos uma expressão tipo $\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ multiplica-se o numerador e o denominador pela pelo conjugado do denominador para racionalizar o denominador.

Note que, a racionalização pode ser tanto para o numerador como para o denomidor ou mesmo uma expressão com radicais que não seja fracção desde que haja necessidade para o efeito.

Já se lembrou de certeza como racionalizar as expressões irracionais

Vamos considerar agora, limites com expressões irracionais :

1. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\left(\frac{0}{0}\right)$

Como pode ver substituindo x por 9 na expressão, obtém-se uma indeterminação$\left(\frac{0}{0}\right)$, para levantar a indetrminação temos que multiplicar ambos factores da fracção pelo conjugado do numerador.assim:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-9}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$$

Observe que os conhecimentos que você tem sobre os produtos notáveis são importantes para racionalizaçõ destas expressões.

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\left(\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\left(\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{\cancel{n}^2}\right)}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{\cancel{n}^2}\right)}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(n\left(2+\frac{\cancel{3}}{\cancel{n}}\right)\right)\cancel{n}}{\cancel{n}}=\infty.2=\infty$$

Correcto, neste caso multiplicou ambos os factores da fracção pelo denominador porque a expressão “soma”está sob o sinal de radical ou seja constitui o radicando, logo não precisou de usar o seu conjugado

3. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

O levantamento da indeterminação consiste em multiplicar e dividir a expressão pela sua conjugada pois a substituição diecta do n por ∞ resultará uma indeterminação do tipo ∞-∞

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=(\infty-\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\infty}=0$$

Acertou em cheio pois, você é inteligente

4.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}$$

Exacto, multiplicou ambos factores da fracção pelo conjugado do numerador, simplificou a expressão e por último substituiu x por 5

5. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Vamos manter os passos do exercício porque a expressão tem a mesma forma

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Resposta}:\begin{cases}\text{para } x>0 \Rightarrow \lim \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\\[2ex] \text{para } x<0 \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\infty\end{cases}$$

Resumo da lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu que:

As expressões irracionais conduzem à funções irracionais e consequentemente, podemos ter o cálculo de limites destas funções.

O cálculo deste tipo de limites basea-se no processo de substituição da variável na função.

Tal como nos casos anteriores, existem casos de indeterminação e para levantar esta indeterminação há que considerar os procedimentos para a racionalização de expressões irracionais.

Vamos através da resolução dos exercícios que se seguem aplicar com que acaba de ler

Actividades

Actividades

Consideremos o seguinte exemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

Se substituirmos o x por 2 vamos encontrar uma indeterminacao do tipo $\frac{0}{0}$? como proceder? nao fique preocupado pois está preparado para resolver o problema. já estudou a racionalização de expressões irracionais. o processo será o mesmo.

para x $\neq 2$

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)}{(x-2)}\cdot\frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$=\frac{(x+2)-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}$$

Isso mesmo, voce acertou pois já sabe que:

Basta multiplicar os factores do quociente (numerador e denominador) pelo conjugado do radical.

logo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{4}$$

mais um exemplo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\left[\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-9\right]\left[\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right]}{\left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2\right]\left[\sqrt{2x+1}+3\right]}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-2-2)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\frac{2\left(\sqrt{4-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2.4+1}+3}=\frac{2.2\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Pronto ,siga sempre os mesmos passos ,e em cada fase dos cálculos investigue se substituindo o valor de x continua a indeterminação ou não , se sim , continue a fazer as transformações algébricas.

Se não , poderá de imediato fazer a substituição e obter logo o valor do limite conforme o seu objectivo.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1-x^2}+1\right]}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1-x^2}+1\right]}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x+x}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1-x^2}+1\right]}=\frac{1}{1.(1+1+1)}=\frac{1}{3}$$

Agora, tente resolver os exercícios que se seguem:

Avaliação

Avaliação

Determine os limites

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}$, 2) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x-b} - \sqrt{a-b}}{x^2 - a^2}$

Veja se acertou os dois exercicios, comparando as suas respostas com as que são dadas no final do módulo:

Lição 6

Limites Notáveis

Introdução

Já aprendemos como calcular limites que envolvem casos de indeterminação. Entretanto outros limites exigem o uso de recursos adicionais de limites previamente calculados que funcionam como igualdades aceites a priori e chamadas limites notáveis.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

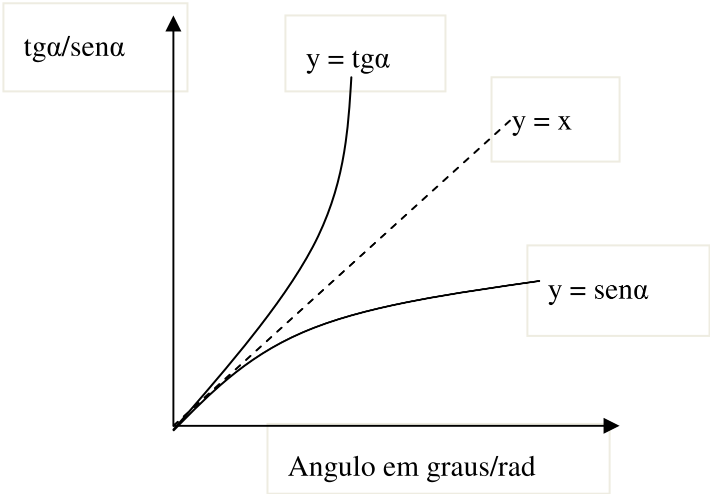
Objectivos

- *Identificar* limite notavel $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$
- *Aplicar* limite notavel $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ nos calculos com limites.

Limite notável

O seno e a tangente de um ângulo valores muito próximos (praticamente iguais), voce pode verificar isso na tabela trigonométrica ,mas só para ilustrar, consideremos a seguinte tabela de valores e o comportamento dos respectivos gráficos.

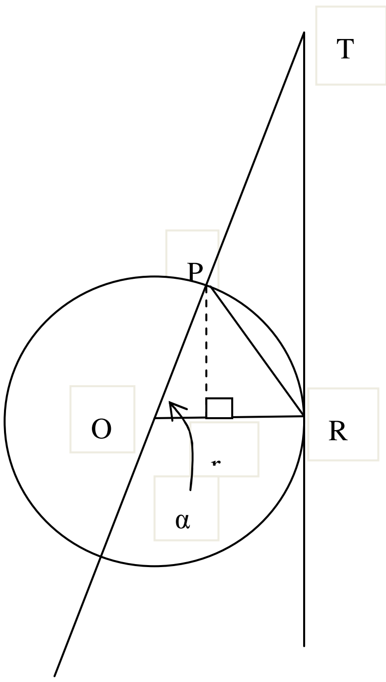
Angulo em graus	10°	5°	1°
Angulo em rad	0,1745329	0,0872665	0,0174533
tgα	0,1763270	0,0874887	0,0174551
senα	0,1736482	0,0871557	0,0174524



observe que: quando $\alpha \approx 0$ temos: $sen\alpha \approx \alpha \approx tg\alpha$

Analiticamente

Consideremos um circulo trigonométrico (de raio igual a 1)



α em radianos, $\alpha = \angle AOC$,

$$A_{\Delta AOB} < A_{\sec tor\ (AOC)} < A_{\Delta DOC}$$

$$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\ OB\ .\ AB = \frac{1}{2}OA\ \ sen\alpha = \frac{1}{2}sn\alpha$$

$$A_{\sec tor(AOC)} = \frac{1}{2}\ OC\ .AC = \frac{1}{2}\ \alpha$$

$$A_{\Delta DOC} = \frac{1}{2}\ OC\ .\ CD = \frac{1}{2}\ OC\ \ OA\ .\ tg\alpha = \frac{1}{2}tg\alpha$$

Substituindo :

$\frac{1}{2}\ sen\alpha < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}tg\alpha$ dividindo por $\left(\frac{1}{2}\right)$ **teremos**

$sen\alpha < \alpha < tg\alpha$ dividindo por $(sen\alpha > 0)$

$$\boxed{1 < \frac{\alpha}{sen\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow 1 > \frac{sen\alpha}{\alpha} > \cos\alpha}$$

(esta desigualdade e valida para todo o dominio R)

Agora, quando $\alpha \approx 0$, $\cos\ \alpha \approx 0$ entao $\frac{1}{\cos\alpha} \approx 1$ portanto

, $\frac{\alpha}{sen\alpha}$ estará entre o valor **1** e uma função que tende para **1** quando $\alpha \to 0$.

Assim: verifica-se que:

$\frac{\alpha}{sen\alpha} \to 1$ **para** $\alpha \to 0$., **ou** $\frac{sen\alpha}{\alpha} \to 1$ para $\alpha \to 0$.

Simbolicamente

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$ significa para $\alpha \to 0. \Rightarrow sen\alpha \to 0$

Chama-se limite notável

Note que o angulo α pode ter várias designações, o que importa é a forma que o limite apresenta. Neste caso a aplicação da propriedade sobre limite do quociente leva-nos a uma indeterminação $\left[\frac{0}{0}\right]$

Resumo da Lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu a identificar e usar o limite notável trigonométrico $\lim_{x \to 0} \frac{\text{senx}}{x} = 1$

Agora, vamos em conjunto realizar algumas actividades,é uma oportunidade para medir o seu nível de compreensão da matéria.

Actividades

Actividades

Actividades: calcular os seguintes limites

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}2x}{2x} \ .\ 2 = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}2x}{2x} = 2\ .1\ = 2$

Óptimo, voce acertou pois multiplicou o limite por 2 para poder encontrar a forma do limite notavel $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\,\alpha}{\alpha}=1$ que acabamos de deduzir e substituir o seu valor por 1

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\text{tg}\alpha}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\alpha} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha.\cos\alpha} = 1$

fácil, você obteve 1 porque substituiu cos 0 por 1 e identificou o limite notável , continua assim.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen3x}{sen2x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{sen3x}{3x} . \frac{2x}{sen2x}\ \frac{3}{2} \right) = 1.1.\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Isso mesmo você já sabe identificar os limites notáveis com muita facilidade, por isso ,bastou logo a primeira tornar a expressão do limite num produto de factores tendo em conta os limites notáveis para a seguir fazer as substituições e chegar ao resultado sem sobressaltos.

Chegou o momento de fazer a sua auto-avaliação, resolva os exercicios que se seguem

Avaliação

Avaliação

Calcule:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5x}{x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}ax}{\text{sen}bx}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}x}{\text{tg}x}$

Confira as suas resposta

Lição 7

Limites de notáveis (continuação)

Introdução

Dando continuidade ao estudo de limites notáveis, existem casos de limites de funções que não são trigonométricas mas conduzem à formulas que possam facilitar os cálculos com limites. Vamos demonstrar esta fórmula nesta lição e mostrar como ela pode ser aplicada nos cálculos com outros limites.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

Objectivos

- *Identificar* limite notável $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ nos cálculos com limites.
- Aplicar limite notável $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ nos cálculos com limites.

Limite notável

Pode se falar antes do número e mas não desta forma.

Definição

Chama-se numero e ao limite da variavel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando $n \to \infty$

simbolicamente

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Quando se tratar de funções , temos :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$; logo , o limite pode ser escrito como

$$\begin{cases} x \to \infty \Rightarrow \alpha \to 0 \\ \dfrac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l\,\underset{x\to 0}{im}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \\ \\ \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e \end{cases}$$

Resumo da Lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Quando se tratar de funções , temos :

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; logo , o limite pode ser escrito como

$$\begin{cases} x\to\infty \Rightarrow \alpha\to 0 \\ \dfrac{1}{x}=\alpha \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \end{cases}$$

Actividades

Actividades

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} . \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5} = e\ .\ 1 = e$$

fácil não é? primeiro transformou a expressão potência da soma num produto de potências com bases iguais,consequentemente obteve produto dos limites .em segundo lugar você identificou o limite notável

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ e fez logo a substituição por e ,por último substituiu **n** por ∞

obtendo assim o valor 1 pois $\frac{1}{\infty}=0$.

Agora tente resolver sozinho os seguintes exercicios

Avaliação

Avaliação

Avaliação

Calcule o seguinte limite

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

Lição 8

Exercicios sobre diferentes tipos de limites

Introdução

Estudamos limites de vários tipos de funções,vamos dedicar esta lição para resolução de exrcícios onde você próprio vai identificar o limite e fazer a escolha do método mais adequado para cada caso:

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- *Calcular* limites de diferentes tipos de funções

Objectivos

Cálculo de limite de uma função

Antes de mais nada vamos fazer o resumo de todas as propriedades que nos guiam no calculo de limites:

Resumo da Lição

Resumo

- A condição necessária e suficiente para que exista o limite de f(x) , é que de existam e sejam iguais os limites laterais de f(x) à esquerda e à direita de a $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

- Se f(x) $\to \lim b$, quando $x \to a$, tomando valores maiores que **a** **,então** b_2 designa-se por limite lateral a direita

  E escreve-se $\lim_{x\to a+0} f(x) = b_2$ *ou* $\lim_{x\to a_+}$ f(x)= b_2

- Se os limites laterais forem iguais entre si e iguais a um número b, quando $x \to a$, o limite quando $x \to a$ de f(x) será:

  $$b_1 = b_2 = \text{b} \quad \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

- **Teoremas dos limites de uma função**

se $\lim_{x\to a} f(x) = f$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = g$

$$\boxed{1)\ \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f + g}$$

O limite da soma é igual a soma dos limites

$$2)\ \lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - 1\mathop{\mathrm{im}}_{x\to a} g(x) = f - g$$

O limite da diferença é igual a diferença dos limites

$$3) \lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right] = 1\mathop{\mathrm{im}}_{x\to a} f(x)\ .\lim_{x\to a} g(x) = f.g$$

O limite do produto é igual o produto dos limites.

$$4)\ \lim_{x\to a}\left[f(x) : g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\ :\ \lim_{x\to a} g(x)$$

O limite do quociente é igual ao quociente dos limites.

Formas indeterminadas

$$\boxed{\frac{0}{0}\ ,\ \infty-\infty\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0.\infty}$$

1. O limite de x^n quando x tende para $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \ ; \ \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & se \quad n \ par \\ -\infty & se \quad n \ e \ impar \end{cases}$$

$$ex: \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad ;$$

2. O limite de $\frac{1}{x^n}$ quando x tende para $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+ \qquad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & se\, n\, e \quad par \\ 0^- & se \quad n \ e \ impar \end{cases}$$

limite de um polinómio quando x tende para $\pm\infty$.

Quando o limite de um polinómio conduz-nos à indeterminação do tipo $\infty-\infty$,logo temos que recorrer a outro processo par calcular o limite:

<u>Limites irracionais</u>

Quando a funcao é irracional é necessario racionaliza-la em_primeiro lugar para depois calcular o seu limite..

<u>Limites Notáveis</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,\alpha}{\alpha} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Depois de ler as propriedades sobre o calculo de varios tipos de limites, de certeza, voce ja se preparou para esta aula de exercicios. Vamos entao resolver juntos os exercicios que se seguem:

Actividades

Actividades

1.Calcule os limites laterais nos seguintes exercicios:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x-3}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$ c) $\lim_{x\to 7}\sqrt{3x+7}$

2.Determine os seguintes limites, levantando a indeterminacao ,caso exista:

$a)\ \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}$ $b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-3x}$

3 Calcule aplicando os varios processos que aprendeu

$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$ $b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ $d)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$

$e)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}$ $f)\ \lim_{x\to 0}\frac{senkx}{x}$

Resolução

O primeiro passo sempre e o mesmo para todos os limites de uma função .portanto , fazer a substituição na função de **x = a**.e verificar se o limite tem definicao para x = a.

vamos a isso:

a) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x+5}{x-3}=\frac{2+5}{2-3}=-7$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$; $\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{0^-}-\infty$ e $\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ não existe

c) $\lim_{x\to 7}\sqrt{3x+7}=\sqrt{3.7+7}=\sqrt{28}$

2. $a)\ \lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-3x}$

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}=\dfrac{-1+1}{(-1)^2+3(-1)+2}=\dfrac{0}{0}$ $\qquad (in\det er\min ado)$

temos uma indeterminação , mas podemos levantar esta indeterminação factorizando o denominador. Trata-se neste caso de um trinómio do 2º grau, basta aplicar a fórmula para o efeito $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

$x_1 \quad e \quad x_2$ podemos calcular atraves da fórmula resolvente para equação do 2º grau.

Assim, teremos :

bastante simples, pois você ja domina perfeitamente a decomposição de polinómios em factores,

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-3x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x^2(x-3)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x(x-3)}=\dfrac{0+1}{0(0-3)}=\dfrac{1}{0}=\infty$

Neste caso também se pode observar com muita facilidade que a substituição imediata de x por 0 leva-nos a indeterminação,logo recorremos decomposição dos factores do quociente, para depois fazer a simplicação da expressão.

Simplificada a expressão fazemos a substituição de **x** por **0**, e verificamos se a inderterminação se mantem. É claro que desta vez eliminamos esta indeterminação e calculamos o valor do limite.

Para calcular os limites quando **x** tende para infinito,convem usar o metodo de decomposição de polinómios colocando em evidência um factor. em caso de se verificar a indeterminação ao fazer a substituição imediata de **x** por **a**.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$ como $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{\infty}=0$ foi fácil chegar ao resultado.

Vamos usar o mesmo procedimento para alinea b porque também e um limite quando **x** tende para infinito.

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[5]{x^4+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}}{\sqrt[4]{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}+\sqrt[5]{x^5(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5})}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}}{x\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}+x\sqrt[5]{(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5})}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}}{\sqrt[4]{\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)}+\sqrt[5]{(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5})}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt[4]{1}}=1$$

Lindo, é so prestar atenção em cada passo, voce chega ao resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4x^2-x+1)}{x(3x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-x+1}{3x+2}=\dfrac{4.0-0+1}{3.0+2}=\dfrac{1}{2}$

De certeza que descobriu que depois de uma simplificação e necessário fazer a substituição de **x** por **a** para verificar se a indetermingão se mantem ou se foi eliminada.

d) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{3x+1}=\frac{2+5}{3.2+1}=1$

Optimo, voce esta a progredir muito bem, fez a decomposição dos factores do quociente usando a fórmula de factorização de trinómios do 2º grau com base na fórmula resolvente para o cálculo das raizes e a seguir fez as simplificações ate eliminar a indeterminação.

Nas alineas e) e f) estamos perante limites notáveis , então , e importante que você identifique o limite notável. A seguir faça transformações algébricas que permitam a aplicação do limite notável identificado.

e)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{4} = e^{4}$$

(Recorde-se da regra do calculo de potencia de uma potencia)

f) $\lim_{x\to 0}\frac{senkx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ksenkx}{kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{senkx}{kx}=\lim_{x\to 0}k\,.\lim_{x\to 0}\frac{senkx}{kx}=k\,.1=k$

Agora chegou a vez de medir o seu nivel de dominio da materia sobre limite de uma funcao.Resolva os exercicios que se seguem,e confire as suas respostas.

Avaliação

Avaliação

1.Calcule os limites das seguintes funções:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x+\frac{2}{x}\right)$; $(+\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; (1)

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen\pi x}{x}$; (π)

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$; $\left(e^2\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$; (0)

2.Calcule aplicando teoremas sobre limites

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-3x}$

$b)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

$c)\ \lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Limites de funções racionais para $x \to \pm\infty$

3.calcule o valor dos seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{2x-3}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x-x^2}{x^2+x+1}$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^3+2x^2+5}{x+1}$$

Lição 9

Conceito de continuidade de uma função

Introdução

Durante a lição dedicada ao estudo de funções,consideramos várias funções contínuas, mas porquê contínuas?

Intuitivamente associamos a continuidade de uma função à continuidade da sua representação gráfica, isto é,somos levados a considerar funções contínuas todas aquelas cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis da folha de papel.

A definição que vamos dar de função contínua corresponde a esta posição.

Embora para funções definidas em domínios diferentes de R se afaste já do simplismo da intuiçào. Terá oportunidade de estudar com detalhes este conceito de continuidade nesta lição.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

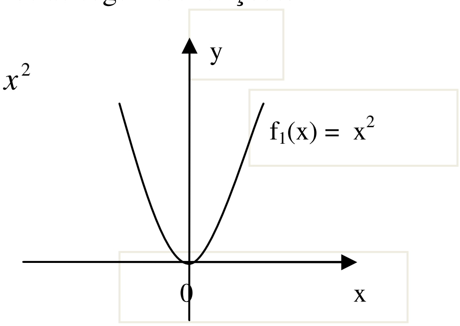
Objectivos

- *Explicar* o conceito de função continua num ponto.
- Explicar o conceito de função continua num intervalo.
- Identificar uma função continua dado o seu gráfico.

Conceito de Continuidade de uma função

Consideremos as seguintes funções:

1. $f_1(x) = x^2$

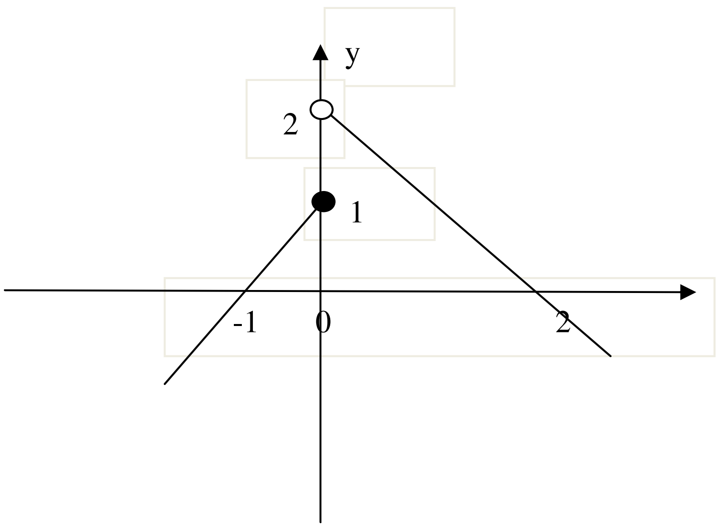


O gráfico desta função e uma parábola e para qualquer valor de x = a temos:

$$\lim_{x \to a^+} f_1(x) = \lim_{x \to a^-} f_1(x) = f_1(a) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f_1(x) = f_1(a)$$

2. $f_2(x) \quad \lim_{x \to 0^+} \quad \lim_{x \to 0^-}$

$$f_2(x) = \begin{cases} x+1 & para \quad x \le 0 \\ -x+2 & para \quad x > 0 \end{cases}$$



A função e definida no ponto x = 0, mas :

$\lim_{x \to 0^-} f_2(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = 2$ então não existe $\lim_{x \to 0} f_2(x)$

Podemos considerar mais casos tais como:

A função não é definida num ponto mas os limites laterias são iguais.

A partir destes exemplos podemos chegar a seguinte definição:

Continuidade num ponto

Definição

Uma função é continua no ponto x = a se e só se ;

1. f(a) é definida

2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(a)$

Por outro lado pode-se afirmar que uma função é continua quando o seu gráfico não tem interrupções Donde se pode concluir que todas funções polinmiais são continuas,bem como as funções seno e co-seno.

Se a função não obedece a situação dada na definição,então diz-se descontinua.

Continuidade num intervalo

Definicao

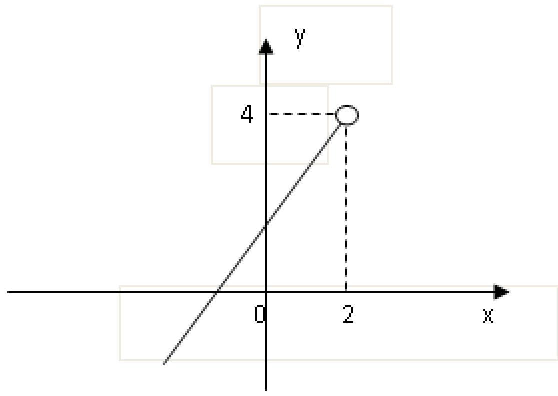
Uma funcao f(x) definida num intervalo diz-se continua neste intervalo se ela for continua em cada ponto deste intervalo.

No exemplo (2) $f_2(x) = \begin{cases} x+1 & para \quad x \leq 0 \\ -x+2 & para \quad x > 0 \end{cases}$ voce pode observar que esta função a volta do ponto zero (0) da um salto., isto significa que ela não e continua no intervalo que inclui zero como por exemplo $[-2\,;2]$ e diz-se que 0 é um ponto de descontinuidade . mas ela é continua em cada ponto do intervalo $]-\infty;0[$ e cada ponto do intervalo $]0;+\infty[$ por isso é continua nestes dois intervalos $]-\infty;0[$ e $]0;+\infty[$.

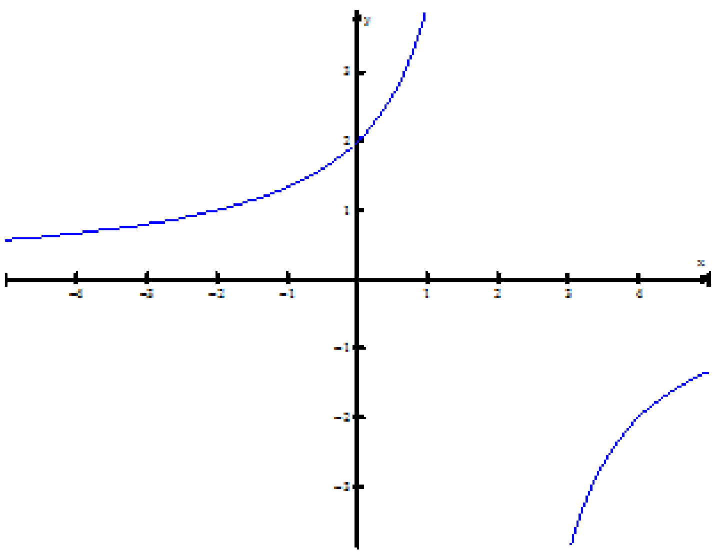
Definição

Uma função f(x) definida num intervalo que contém o ponto **a** , e que não é continua nesse ponto **a** , diz-se descontinua no ponto **a** ou diz-se que o ponto **a** é um ponto de descontinudade.

<u>Exemplo:</u> $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ esta função tem um ponto de descontinuidade no ponto x = 2



Este é ografico real



Resumo da Lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu que

- Temos **continuidade num ponto**

_Uma função é continua no ponto x = a se e só se ;

Primeiro: f(a) é definida

Segundo: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(a)$

- **Continuidade num intervalo**

Uma função f(x) definida num intervalo diz-se continua neste intervalo se ela for continua em cada ponto deste intervalo**.**

- **Discontinuidade num ponto**

Uma função f(x) definida num intervalo que contém o ponto **a** , e que não é continua nesse ponto **a** , diz-se descontinua no ponto **a** ou diz-se que o ponto **a** é um ponto de descontinudade.

Para aprofundar mais o conceito de continuidade vamos resolver alguns exercicios:

Actividades

Actividades

Calcular os limites laterais ,e diga se existe o limite no ponto a e se a função é continua nesse ponto. nos seguintes casos:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x+5}{x-2}$

1°passo definir o dominio da função dada isto e definir os valores de x que fazem com que ela tenha significado. Neste caso , a função não é definida para x = 2

2°passo calcular os limites laterais

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x+5}{x-2} = \frac{11}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{3x+5}{x-2} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

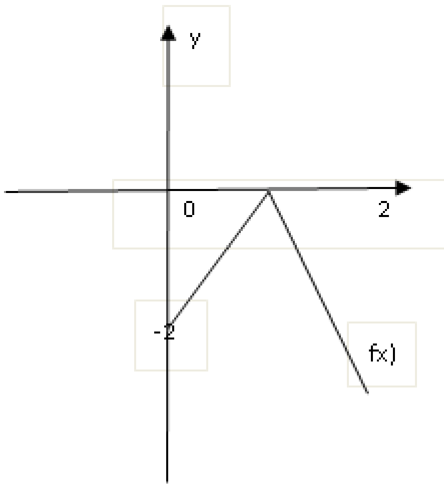
3°passo comparar os valores dos limites obtidos

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x+5}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{3x+5}{x-2}$$

conclusão : nao existe limite no ponto **a** e a função não é continua no **x=2**.

2. $\lim\limits_{x\to 2}$ f(x) , onde

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & para \;\; x<2 \\ 2-x & para \;\; x>2 \end{cases}$$



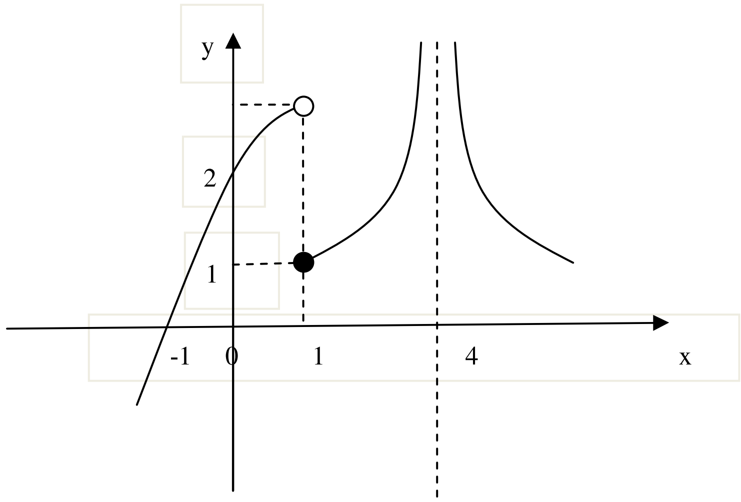
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-2) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2-x) = 0$$

logo $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0 = f(2);$

A função é definida no ponto x = 2,portanto f(x) é continua no ponto

x =2.



3. Do gráfico de f(x) que podemos ver que :

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Significa que f(x) não e continua no ponto x = 1

b) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$

Mas, f(x) não é definida quando x= 4 , portanto não é continua quando x = 4.

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = -------$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -------$

A partir do gráfico verifica-se que a continuidade de f(x) está assegurada para todo x diferente de 1 e de 4,entao, f(x) é continua nos intervalos

$]-\infty,+1[\ ,\ ]+1,+4[\ ,\ ]+4,+\infty[.$

Agora tente resolver sozinho os exercícios que se seguem

Avaliação

Calcule os limites laterais, diga se existe limite num ponto e se a função é continua nesse ponto.

Avaliação

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+7}{x+7}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4+x^2-1}{x^3+x+1}$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(2x+1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-1}{x-1}$ 5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \text{senx}$

Lição 10

Pontos de descontinuidade

Introdução

Uma das aplicações de limites é classificação dos pontos de descontinuidade de uma função.Nos capítulos anteriores, você definiu uma função contínua num ponto e contínua num intervalo, recorde-se também, que quando uma função não é contínua num ponto ou num intervalo diz-se descontínua nesse ponto ou nesse intervalo. A nossa tarefa nesta lição é sempre que estivermos numa situação de descontinuidade é de sermos capazes de classificar o tipo de descontinuidade. É bastante simples, bastando apenas dominar o cálculo de limites laterais de uma função bem como a definição de continuidade de uma função.

Ao concluir esta lição você será capaz de:

- Identificar os pontos descontinuidade numa função.
- *Classificar* os pontos de descontinuidade de uma função.

Objectivos

Classificação de continuidade

Nesta lição, vamos aprofundar o estudo de continuidade de funções.

Você deve se recordar perfeitamente da definição de continuidade de funções vimos na lição anterior.

Mesmo assim vamos repetir as definições

Uma função f(x) continua em todo o intervalo $[a,b]$ diz-se continua nesse intervalo.

Se a função f(x) esta definida no ponto x = a e se o limite quando $x \to a+0$ (

ou $x \to a^+$)de f(x) existe e e igual a f(a) diz-se que a função e continua à direita no ponto x = a.

Se a função f(x) é definida no ponto x=b e se o limite quando x tende

b - 0 de f(x) e igual a f(b) = b, diz-se que a função f(x) é continua à esquerda no ponto x =b

Se a função f(x) não está definida no ponto $x = x_0$ ou se o limite de f(x) não existe ou ainda se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ a função f(x) diz-se descontinua no ponto $x = x_0$.

Passemos agora a classificaçãao dos pontos de descontinuidade

Classificação dos pontos de descontinuidade

Definição

Se a função f(x) é continua à direita e à esquerda do ponto mas os limites laterais são diferentes ($\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$) ou se o valor da função é indeterminado no ponto_ $x = x_0$, Este ponto diz-se ponto de descontinuidade da (primeira)1ª especie.

Definição

Se pelo menos um dos limites laterais não existe ou e infinito no ponto $x = x_0$ diz-se que este ponto possui uma descontinuidae da (segunda) 2ª especie

Resumo da Lição

Resumo

Nesta lição voce aprendeu que:

- Se a função f(x) é continua à direita e à esquerda do ponto mas os limites_laterais são diferentes ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$) ou se o valor da função é indeterminado no ponto_ $x = x_0$, Este ponto diz-se <u>ponto de descontinuidade da (primeira)1ª especie.</u>

- Se pelo menos um dos limites laterais não existe ou e infinito no ponto $x = x_0$ diz-se que este ponto possui uma <u>descontinuidae da (segunda) 2ª especie.</u>

Analisemos os pontos de descontinuidade para as seguintes funcoes

Actividades

Actividades

Classifique os pontos de descontinuidade das seguintes funções:

1) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ 2) $f(x)=\begin{cases} 0 & se \quad x=0 \\ sen\frac{1}{x} & ; \; x\neq 0 \end{cases}$

<u>Resolução</u>

1) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

Conclusão: os limites são diferentes ,então temos descontinuidade de <u>1ª espécie.</u>

2) $f(x)=\begin{cases} 0 & se \; ; \; x=0 \\ sen\frac{1}{x} & ; \; x\neq 0 \end{cases}$;

$\lim_{x\to 0^+} sen\frac{1}{x}$ = (não existe)

$\lim_{x\to 0^-} sen\frac{1}{x}$ = (não existe)

Conclusão: os limites laterais não existem , então temos descontinuidade de <u>2ª especie.</u>

Agora,tente responder sozinho as questoes que se seguem

Avaliação

Avaliação

1. Analise a continuidade no ponto x = a e classifique os pontos de descontinuidade.

a) $f(x)=\begin{cases} -x^2-x & se \quad x\leq -2 \\ x+3\,, & se \quad x > -2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x-5 & se \quad x>2 \\ 7 & se \quad x \leq 2 \end{cases}$

2. Construa o gráfico de $\begin{cases} 1-2x \;, & x\geq 0 \\ x^2-2, & x<1 \end{cases}$

3. Dada a função:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-6x+5} \;, & se \quad x>1 \\ p-5 \;, & se \quad x\leq 1,\, p\in R \end{cases}$$

a) Determine domínio de g(x).

b) Determine p de modo que g(x) seja contínua em x = 1.

Soluções Modulo 7

Soluções do Modulo 7

Depois de resolver os exercícios,confira as suas respostas

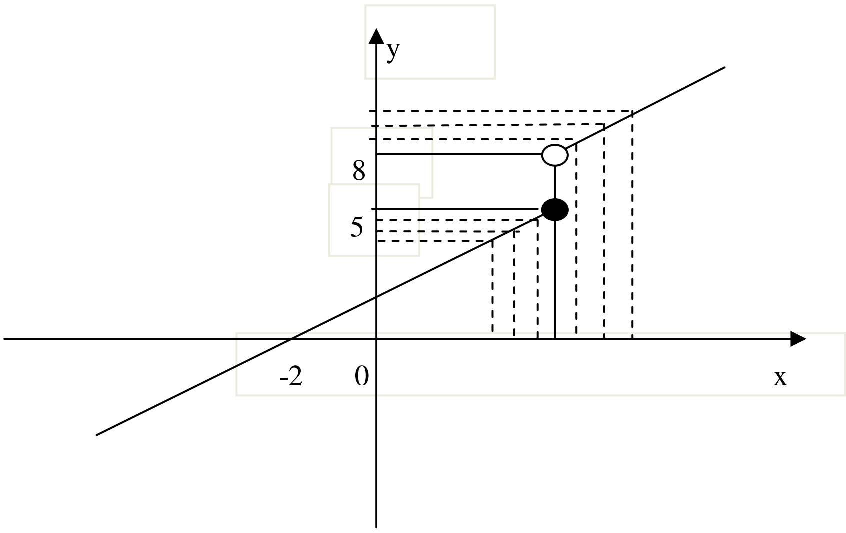
Lição 1

Resolução

1. Considere a função

$$\begin{cases} x+2 & para \quad x \leq 3 \\ 2x+2 & para \quad x > 3 \end{cases}$$

Investigue o limite desta função quando x tende para 3.



você pode com facilidade dar a resposta ao problema,bastando construir em primeiro lugar, o gráfico da função dada.

A resposta correcta será : O limite de f(x) quando $x \to 3^+$ $(a\, direita)$. é igual a 8. E o limite de f(x) quando $x \to 3^-$ $(a\, esquerda)$ é igual a 5.

2.considere a função

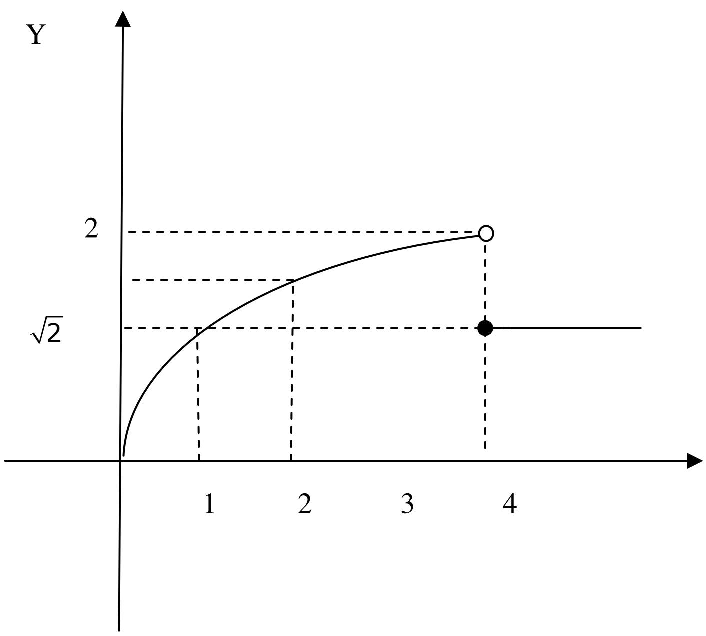
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{se} \quad x<4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4\end{cases}$$

a) Represente a funçào e indique o seu domínio.

b)calcule,se existir: $\lim_{x\to 5} f(x)$; $\lim_{x\to 1} f(x)$; $\lim_{x\to 4} f(x)$

Resolução

gráfico 2 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{se} \quad x<4 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 4\end{cases}$



$$D_f = [o; +\infty[$$

b) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)?$

Uma vez que à direita de 4 a função é definida por uma expressão

algébrica e à esquerda por outra, temos de calcular os limites

laterais:

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} 1 = 1; \quad \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{x} = 2$

Deste modo conclui-se que:

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

Logo:

$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ não existe porque os limites laterais são diferentes.

$$1) \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 + 5x + 1} = \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1}{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{8.\frac{1}{8} - 1}{\frac{6}{4} + \frac{5}{2} + 1} = \frac{0}{\frac{12}{4}} = 0$$

Lição 2

$$2) \lim_{x \to 1} = \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2-x}}{x+1} = \frac{\sqrt{2-1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{0-0+1}{-4}+1=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x^2-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-3}=\frac{0+1}{0^2-3}=-\frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4)=$$
$$=4.8=32$$

$$3)\ \lim_{x\to -1}=\frac{x+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{-1+2}=1$$

Lição 4

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$$

3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2+1}=\frac{-1}{\infty+1}=\frac{-1}{\infty}=0$$

Lição 5

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}$$

3)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}\right)}{\left(x^2-a^2\right)\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x\cancel{-b}-a\cancel{+b}}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2a\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}\right)}=\frac{1}{2a.2\sqrt{a-b}}=\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$$

Lição 6

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{x}\dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen5x}{x}\dfrac{x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen5x^2}{x^2} = 5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx^2}{x^2}5.1=5$ (divida os factores do quociente por x)

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senax}{senbx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senax}{senbx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senax}{senbx}\dfrac{bx}{ax}\dfrac{a}{b} = 1.1.\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{b}$ (divida os factores do quociente por x)

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{tgx} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{\dfrac{senx}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{senx}.\cos x =$

$=\lim\limits_{x\to 0}1.\cos x = \cos 0 = 1$

(aplique a regra trigonométrica $tgx = \dfrac{senx}{\cos x}$)

Lição 7

1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=$$
$$=e.\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{3}=e.(1+0)^{3}=e.1=e$$

Lição 8

1)

a) $$\lim_{x\to 0}\left(4x+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}4x+\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}=4.\infty+\frac{2}{\infty}=\infty+0=\infty\quad;$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)}{x}.\frac{\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\frac{0+1}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$
$$=\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{sen\pi x}{x}=\lim_{x\to 0}\pi\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\pi.1=\pi$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}=e^{2}$$

2.Calcule aplicando teoremas sobre limites

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x^2-3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2-3}=\frac{0+1}{0^2-3}=-\frac{1}{3}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4)=$$
$$=4.8=32$$

$$c)\ \lim_{x\to -1}=\frac{x+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{-1+2}=1$$

$$d)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2}{(x-3)\sqrt{x+1}+2}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1-4}{(x-3)\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{\sqrt{3+1}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Limites de funções racionais para $x\to\pm\infty$

3.calcule o valor dos seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{2x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}=\frac{4+\frac{1}{+\infty}}{2-\frac{3}{+\infty}}=\frac{4}{2}=2$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x-x^2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}-1}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3+2x^2+5}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-3x^2=-\infty$$

Lição 9

1) continua ; $\lim_{x\to 0}\frac{2x+7}{x+7}=1$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+x^2-1}{x^3+x+1}=-\infty$

3) não continua ; $\lim_{x\to 0}\left(2x+1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

4) não continua ; $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$

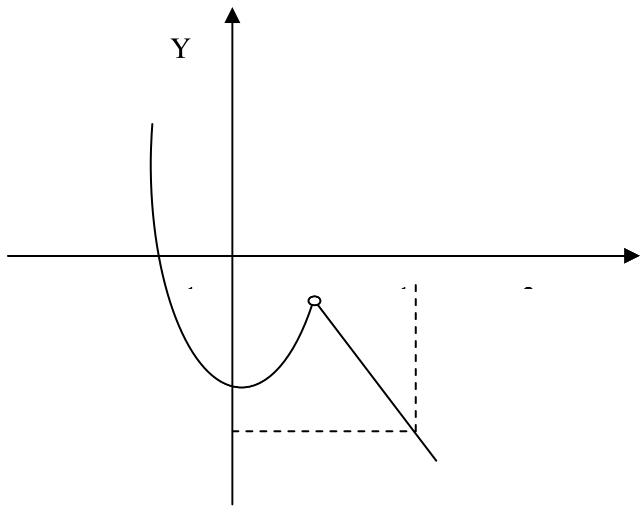
5) continua ; limite $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lição 10

1. a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -6$ *e* $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 1$ Temos descontinuidade com salto infinito.

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -3$ *e* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 7$ temos descontinuidade de 1°espécie.

2. f(x) = $\begin{cases} 1-2x \;, & x \geq 0 \\ x^2-2, & x < 1 \end{cases}$



3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-6x+5} \;, \; se & x > 1 \\ p-5 \;, \; se & x \leq 1, p \in R \end{cases}$

a) Uma expressão fraccionária em , deve ter o denominador diferente de zero para que tenha significado:

$$\{x \in R : x^2 - 6x + 5 \neq 0\} = R \setminus \{1,5\}$$
$$D_g = R \setminus \{1,5\} \cup \{1\} = R \setminus \{5\}$$

b) $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-5} = -\frac{1}{4}$

$g(x) = p-5$

Para que g seja contínua em x = 1, terá de ser .

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)}$$

Teremos: $p-5=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow p=5-\frac{1}{4}=\frac{19}{4}$

Logo se , $p=\frac{19}{4}$, g é contínua no ponto $x=1$,

porque $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$

Módulo 7 de Matemáica

Teste de Preparação de Final de Módulo

Error! Reference source not found.

Este teste, querido estudante, serve para você se preparar para realizar o Teste de Final de Módulo no CAA. Bom trabalho!

1. seja f(x) uma função real de variável real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{se } x<-2 \\ x & \text{se } x>1 \end{cases}$$

a) Represente f(x) graficamente

b) Indique o domínio e o contradomínio de f(x)

2. Considere a função definida em R, por $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\le 1 \\ 3\text{-}x & \text{se } x\ge 3 \end{cases}$

a) Indique o domínio de f(x)

b) Estude a continuidade desta função

3. Dadas as funções f, g, h e I definidas por :

$$f(x)=3x-x^2;\ g(x)=|x|$$

$$h(x)=\begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ 3+x & \text{se } x\le 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad i(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{se } x>0 \\ 2 & \text{se } x=0 \\ 1-x & \text{se } x<3 \end{cases}$$

a) Determine se existir o limite de cada uma das funções funções quando x tende para zero (0)

b) Averigue se as funções são contínuas para x = 0

c) Faça o esboço gráfico das funções dadas

4. Calcule :

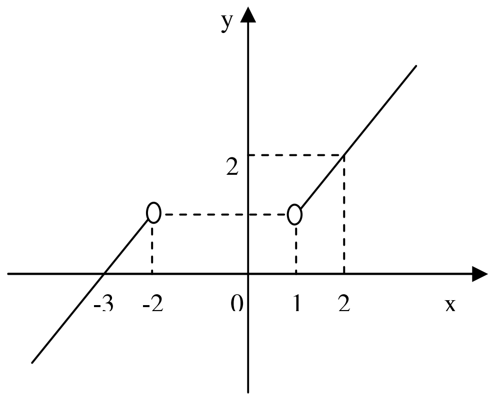
a) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \sqrt{1+3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x+1}{2x-3}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-x-x^2}{x^2+x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^3+2x^2+5}{x+1}$

Soluções do teste de preparação do Módulo 7

1. $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{se } x<-2 \\ x & \text{se } x>1 \end{cases}$

a) gráfico



b)

$D_f:\ x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

$D'_f = R\setminus\{1\}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\le 1 \\ 3-x & \text{se } x\ge 3 \end{cases}$

a) $D_f:\ x\in\left]-\infty;1\right]\cup\left[3;+\infty\right[$

b) A função é contínua no seu domínio.

3.Dadas as funções f, g, h e I definidas por :

$f(x)=3x-x^2;\ g(x)=|x|$

$$h(x)=\begin{cases} x & \text{se } x>0 \\ 3+x & \text{se } x\le 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad i(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{se } x>0 \\ 2 & \text{se } x=0 \\ 1\text{-}x & \text{se } x<3 \end{cases}$$

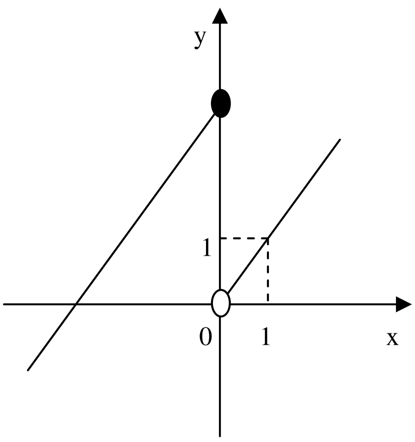
3.

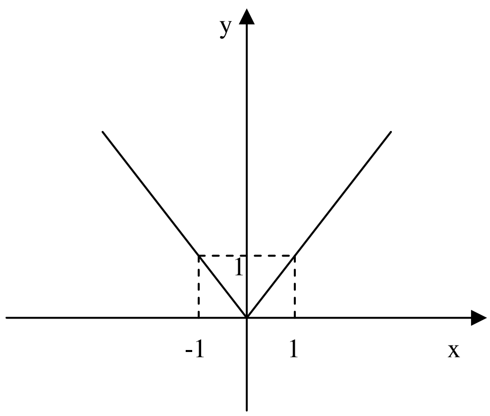
a)

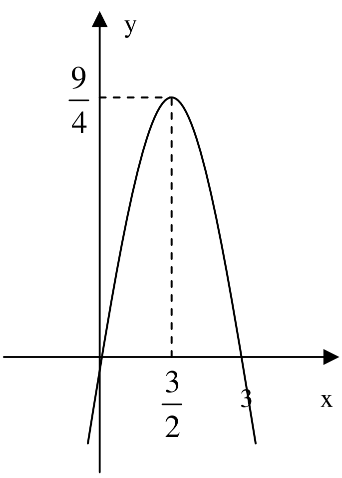
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0;\ \lim_{x\to 0} g(x)=0;$$
$$\lim_{x\to 0} h(x)=1;\ \lim_{x\to 0} i(x) \text{ nãoexiste}$$

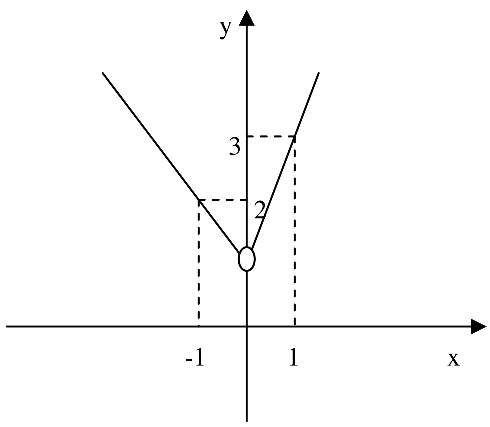
b) As funções f eg são contínuas para x = 0 . h e g são descontínuas

c)









4.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \sqrt{1+3x}$$

a) Domínio: $1+3x \geq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \sqrt{1+3x} = \sqrt{1+3.\left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{0} = 0$$

b)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)(x-3)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x}{x-3} = \frac{1^2-2.1}{1-3} = \frac{1}{2}$$

c)
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2^2}{(x-3)\sqrt{x+1}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\sqrt{x+1}+2} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

d)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{4x+1}{2x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)} = \frac{4+\frac{1}{+\infty}}{2-\frac{3}{+\infty}} = \frac{4}{2} = 2$$

e)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-x-x^2}{x^2+x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{+\infty}-\frac{1}{+\infty}-1}{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}} = \frac{-1}{1} = -1$$

f)
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^3+2x^2+5}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(-3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -3x^2 = -\infty$$