MECÂNICA GERAL I

Gilson Finotti

Jul/14 (r63)

OBSERVAÇÕES INICIAIS

Esta apostila é um mero resumo de aulas para auxiliar os alunos no estudo preliminar da disciplina. Foi baseada nos livros da Bibliografia adotada, principalmente no livro de Beer e Johnston (Referência 1) cuja simbologia procuramos adotar, a fim de facilitar as consultas dos alunos. Seu objetivo é minimizar a necessidade de anotações em aulas de forma a manter ao máximo a atenção dos alunos nas exposições da matéria.

Tratando-se de um mero resumo, evidencia-se a suas limitações, não eximindo, portanto, o aluno da necessidade do estudo dos livros indicados na Bibliografia adotada, os quais, enfaticamente recomendamos.

No texto optamos por simbolizar os vetores através de letras em negrito (***F***) em vez de uma letra sobreposta com uma seta $\left(\vec{F}\right)$. Esta foi adotada nas figuras e nas equações. O escalar da força é representado pela letra normal (F).

Gilson Finotti
Engenheiro Mecânico pela Escola de Engenharia da UFMG
Mestre em Engenharia Mecânica pela Escola Politécnica da USP

Bibliografia

[1] BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON Jr., E. Russell. **Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática.** 5ª Ed. São Paulo: Ed. Makron Books do Brasil, 1991, 793p

[2] HIBBELER, R. C**. Estática (Mecânica para engenharia).** 10 Ed. São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2006, 540p

[3] MERIAN, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica: Estática. Vol. 1.** Rio de Janeiro: LTC, 2004

[4] SHAMES, Iving Herman. **Estática: Mecânica para Engenharia – Vol 2.** 4 Ed. São Paulo: Editora Pearson Prentice Hall, 2002.

[5] HIGDON, Archie, et al. **Mecânica – Estática**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Ed. Prentice-Hall do Brasil Ltda. 1984

[6] SINGER, F. L. **Mecânica para Engenheiros.** São Paulo: Ed. Harper $ Row do Brasil Ltda. 1975

[7] McLEAN, W.G.: NELSON, E.W. **Mecânica – Coleção Schaum** São Paulo, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1972, 443p

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Quando estudamos a Física vimos que ela, para fins didáticos, está dividida em: Mecânica, Termologia, Acústica, Ótica, Eletrologia e Física Moderna.

A **Mecânica**, por sua vez é dividida em 3 partes:

Cinemática: estuda o movimento dos corpos sem considerar suas causas

Estática: estuda os corpos sólidos e fluidos em equilíbrio

Dinâmica: estuda o movimento dos corpos considerando suas causas.

No nosso curso de Mecânica Geral vamos estudar a Mecânica sob a ótica da **Estática dos corpos rígidos**, pois, a Mecânica, conforme as características dos corpos é subdividida em:

-Mecânica dos corpos rígidos

-Mecânica dos corpos deformáveis (Mecânica dos sólidos)

-Mecânica dos fluidos

2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Quantidades básicas: comprimento, tempo, massa e força.

A massa corresponde à quantidade de matéria do corpo, ou, é o valor da resistência que o corpo oferece para alterar sua velocidade (inércia).

A força é ação de empurrar ou puxar um corpo seja pela ação de outro corpo ou pela ação de efeitos naturais como a força da gravidade, forças magnéticas, etc. A força é caracterizada por módulo (ou intensidade), direção, sentido e ponto de aplicação.

2.1. Massa x peso

Enquanto a massa de um corpo corresponde à quantidade de matéria do corpo, ou, à medida de sua inércia, o peso é uma força cuja intensidade é determinada pela 2ª lei de Newton: P=m.g.

A massa (m) de um corpo permanece a mesma onde quer que ele esteja. Mas seu peso varia de acordo com a aceleração gravitacional(g). E a aceleração gravitacional diminui com a altitude.Ao nível do mar a aceleração gravitacional é $9{,}807\ m/s^2$, portanto, um corpo cuja massa é 1kg pesa 9,807N.

2.2. Partícula x corpo

Partícula (ou ponto material) é um corpo que possui massa, mas, tem dimensões desprezíveis.

O corpo é constituído por um conjunto de partículas, donde, além de massa ele possui dimensões não desprezíveis. O corpo é chamado de rígido se não sofre deformação quando sujeito a qualquer tipo de força. No estudo da Estática os corpos serão considerados como corpos rígidos. Os corpos deformáveis são estudados na Resistência dos Materiais.

2.3. Leis de Newton

1ª Lei (Princípio da Inércia): Se uma partícula está em repouso ou em movimento retilínio uniforme, ela permanecerá indefinidamente neste estado caso não venha atuar nela qualquer força ou cuja resultante das forças nela atuantes seja nula.

2ª Lei (Princípio fundamental da dinâmica): Se numa partícula de massa *m* atuar uma força **F** esta partícula adquire uma aceleração ***a*** na mesma direção e sentido da força, conforme a seguinte equação: $\vec{F} = m.\vec{a}$

3ª Lei (Princípio da ação e reação) A toda ação de uma força corresponde a uma força de reação com mesma intensidade, mesma direção e sentido contrário.

Lei da gravitação universal: dois corpos se atraem com forças proporcionais às suas massas e inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre seus centros.

Graças a esta lei, há em torno da terra uma região denominada campo gravitacional onde todos os corpos são atraídos para o centro da terra com uma força chamada força gravitacional a qual impõe ao corpo uma aceleração denominada de aceleração da gravidade, indicada por *g*.

Esta força gravitacional sobre um corpo de massa *m* é denominada de peso do corpo e é calculada por

$$P = m.g$$

2.4. Exercícios.

1. Um corpo tem massa 12kg. Qual é o peso (em N) deste corpo na Terra sabendo-se que a aceleração da gravidade é $9{,}81\,m/s^2$. Qual o peso deste mesmo corpo na Lua cuja aceleração da gravidade é $1{,}6\,m/s^2$?
   Respostas: $P_{Terra}=117{,}7N$, $P_{Lua}=19{,}2N$
2. Se a aceleração de um corpo de massa 3kg é $5m/s^2$, qual é a força resultante que atua no corpo?
   Resposta: $F = 15N$
3. Um bloco está apoiado num plano horizontal sem atrito. Duas forças horizontais colineares e de sentidos opostos, cujos módulos são respectivamente 23N e 17N atuam neste bloco. Sabendo-se que a aceleração adquirida pelo bloco foi de $3m/s^2$ qual é a massa do bloco?
   Resposta: $m = 2kg$
4. (EEM-SP) Um automóvel trafegando a 72km/h leva 0,5s para ser imobilizado numa freada de emergência.
   a) Que aceleração, suposta constante, foi aplicada ao veículo?
   b) Sabendo-se que a massa do automóvel é $1{,}6.10^3$ kg, qual a intensidade da força que foi a ela aplicada em decorrência da ação dos freios?

   Resposta: a) $a = -40m/s^2$ b) $F = 6{,}4.10^4 N$

3. SISTEMAS DE UNIDADES

3.1. Introdução

O sistema de unidades adotado no Brasil e na maioria dos países, exceto nos países de língua inglesa é o **Sistema Internacional de Medidas (SI)**. Baseado no sistema métrico suas unidades básicas são o metro o quilograma e o segundo. Por isto é chamado também de sistema MKS. A multiplicidade de suas unidades é feita na base 10.

Já no **Sistema Inglês: FPS** (Feet, Pounds, Second) a multiplicidade de suas unidades é feita de forma arbitrária. Ex.: 1pé=12pol

3.2. Sistema Internacional de Medidas (SI)

-Grandezas básicas (ou primárias) e derivadas (ou secundárias)
No SI as grandezas básicas são o comprimento, a massa, o tempo, a temperatura termodinâmica, etc. As grandezas derivadas são formadas pela combinação das grandezas básicas.

TABELA 2.1

Grandeza	**Nome da unidade**	**Símbolo da unidade**
Comprimento *	metro	m
Massa*	quilograma	kg
Tempo*	segundo	s
Temperatura abs.*	kelvin	K
Velocidade		m/s
Aceleração		m/s^2
Força	newton	$N = kg.m/s^2$
Peso	newton	$N = kg.m/s^2$
Trabalho	joule	$J = N.m$
Potência	watt	$W = N.m/s$
Pressão	pascal	$Pa = N/m^2$

* Grandezas básicas

3.3. Múltiplos e submúltiplos da unidade

TABELA 2.2

Prefixos	**Símbolo**	**Fator**	**Comprimento m**	**Massa g**	**Volume l**
giga	**G**	10^{9}	**Gm**	**Gg**	**Gl**
mega	**M**	10^{6}	**Mm**	**Mg**	**Ml**
quilo	**k**	10^{3}	**km**	**kg**	**kl**
hecto	**h**	10^{2}	**hm**	**hg**	**hl**
deca	**da**	**10**	**dam**	**dag**	**dal**
Unidade		**1**	**m**	**g**	**l**
deci	**d**	10^{-1}	**dm**	**dg**	**dl**
centi	**c**	10^{-2}	**cm**	**cg**	**cl**
mili	**m**	10^{-3}	**mm**	**mg**	**ml**
micro	**µ**	10^{-6}	**µm**	**µg**	**µl**
nano	**n**	10^{-9}	**nm**	**ng**	**nl**

3.4. Razão de conversão de unidades

Uma forma de fazermos a conversão de uma unidade para outra de mesma característica é utilizarmos o que se chama de razão de conversão unitária.

Por exemplo: Converter 3,5km para metros.

Como 1km=10^3m a razão de conversão pode ser $\frac{1km}{10^3 m} = 1$ ou seu inverso $\frac{10^3 m}{1km} = 1$

Pegamos então o valor a ser convertido e o multiplicamos pela razão de conversão que venha cancelar a unidade a ser alterada. No nosso caso fica:

$$3{,}5km.\frac{10^3 m}{km} = 3{,}5.10^3 m$$

3.5. Exercícios:

1) Converter 2380*cm* em *m*.
2) Converter 3,7*kg* em *mg*.
3) Converter 200mg em g
4) Converter 4735m em km
5) Converter 8,9dm em km
6) Converter 65km/h em m/s

Respostas:

1) 23,8m
2) $3{,}7.10^6$mg
3) 0,2g
4) 4,735km
5) $8{,}9.10^{-4}$km
6) 18,06m/s

3.6. Sistema técnico

Um sistema muito usado na engenharia é o sistema técnico que utiliza as mesmas unidades do SI, exceto no caso da força cuja unidade é o *kgf* em vez do newton (N); e da unidade de massa que é a *u.t.m* (unidade técnica de massa).

O *kgf* é a força que atuando num corpo cuja massa é 1*kg* provoca uma aceleração igual a aceleração da gravidade. Donde 1*kgf* = 9,81*N*

3.7. Sistema de unidades inglês (FPS)

TABELA 3.1

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo	Conversão para SI
Comprimento	pé (foot) polegada	*ft* *in*	$1ft = 0{,}3048m$ $1in = 25{,}4mm$
Massa	libra massa (slug)	*slug*	$1slug = 14{,}59kg$
Força	libra (pound)	*lb*	$1lb = 4{,}45N$
Pressão	libra por pol. quadrada	*psi*	$1psi = 6894{,}8Pa$

3.8. Homogeneidade dimensional

Não podemos somar quantidades que possuem unidades diferentes.
Exemplo: Não podemos somar 35kg+7m
Uma equação que não é dimensionalmente homogênea está errada.

3.9. Algarismos significativos

São aqueles que sabemos estarem corretos e mais um aproximado. Por exemplo, quando medimos uma distância com uma trena temos certeza da medida em centímetros, mas a visualização dos traços correspondentes aos milímetros não é exata, mas aproximada.

Dado o resultado de uma medição, os algarismos significativos são todos aqueles contados da esquerda para direita a partir do primeiro algarismo diferente de zero.

Exemplos:
2,85cm tem 3 algarismos significativos
0,00000285cm tem 3 algarismos significativos
2,850cm tem 4 algarismos significativos
46,3mm tem 3 algarismos significativos
46,30m tem 4 algarismos significativos

A quantidade de algarismos significativos no resultado de uma operação matemática não deve ser maior que o menor número de algarismos significativos presentes em qualquer dos números operados.

3.10. Notação científica

Deve-se dar preferência ao uso da notação científica, pois, ela simplifica o manuseio de números muito grandes ou muito pequenos. A notação científica é escrita como o produto de um número entre 1(inclusive) e 10 (exclusive) e de uma potência de 10. Ex. 150.000.000 deve ser escrito como $1{,}5\text{x}10^8$.

Uma grandeza física deve ser composta não só com um número que mede seu valor, mas, também com sua unidade. Nas operações de somas, subtrações, multiplicações, divisões, etc. as unidades devem ser tratadas como qualquer outra entidade algébrica. A vantagem de se incluir as unidades nas equações é que podemos conferir se o resultado teve a unidade correta.

3.11. Exercícios

1. Utilizando a razão de conversão unitária, fazer as seguintes conversões:
(a) 1,7*m* para polegadas, (b) 4*ft* para *mm* (c) 65*J* para *lb.ft* (d) $3{,}8.10^3$*psi* para *Pa*

2 Usando os símbolos de múltiplos e submúltiplos relacionados na TABELA 2.2 representar as seguintes grandezas:
(a) 50.000joules , (b) 0,007grama (c) 9.10^{-6} *metro* (d) 1.000.000 pascal

3. Escrever as seguintes grandezas eliminando os símbolos de múltiplos e submúltiplos:
(a) 18*MW* , (b) 5*mW* (c) 7,2*km*

4. Escrever em notação científica:
(a) 30.000, (b) 0,000070 (c) 634.000.000.000. (d) 0,000508

Respostas:
1.a) 66,93in 1.b) 1219,2mm 1.c) 47,9lb.ft 1.d) $26{,}2.10^6$Pa
2.a) 50kJ 2.b) 7mg 2.c) 9µm 2.d) 1Mpa
3.a) 18.10^6W 3.b) 5.10^{-3}W 3.c) 7200m
4.a) 3.10^4 4.b) $7{,}0.10^{-5}$ 4.c) $6{,}34.10^{11}$ 4.d) $5{,}08.10^{-4}$

4. REVISÃO DE TRIGONOMETRIA

4.1. Grau e radiano

Grau é a medida do ângulo θ entre duas retas o qual é medido utilizando-se como unidade o ângulo correspondente à divisão da circunferência em 360 partes.

Radiano é a medida do ângulo θ entre duas retas calculado pelo quociente entre o comprimento do arco entre as duas retas e o raio do arco (Figura 1)

Portanto o ângulo θ medido em radiano é definido como:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

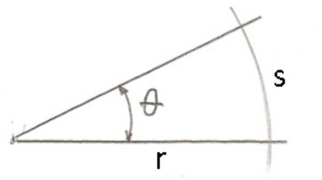


Figura 1

O radiano é uma grandeza adimensional

Relação de conversão entre graus e radianos:

$$360^{\circ} = 2.\pi\, rad$$

ou $$180^{\circ} = \pi\, rad$$

4.2. Exercícios:

1) Qual a medida em radianos de um ângulo de 45°? *Resp.:* $\pi/4$
2) Qual a medida em graus de um ângulo $\pi/3$ radianos? *Resp.: 60°*
3) Somar os ângulos 12°45’55” e 70°50’20” *Resp.: 83°36’15”*
4) Subtrair 10°47’12” do ângulo 30°28’32” *Resp.: 19°41’20”*
5) Transformar o ângulo 39°18’45” para o sistema decimal. *Resp.: 39,3125°*

4.3. Funções trigonométricas para o triângulo retângulo

Conforme o triângulo retângulo da Figura 2, temos

$$sen\theta = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$tg\theta = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{sen\theta}{\cos\theta}$$

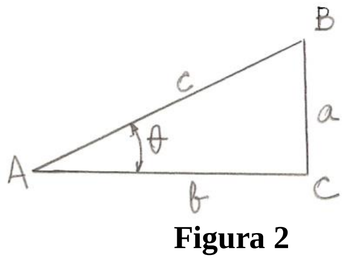


Figura 2

As outras três funções são definidas como as inversas destas funções:

$\sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta}$ $\quad$ $\cos ec\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{sen\theta}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{tg\theta}$

Relações importantes:

$a^2 + b^2 = c^2$ (Pitágoras)

$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Para ângulo θ pequeno e medido em radianos:

$tg\theta \approx sen\theta \approx \theta$

$\cos\theta = 1$

4.4. <u>Exercícios:</u>

1) Um triângulo retângulo tem os dois catetos iguais a 1. Calcular o seno o co-seno e a tangente de 45°.
2) Um triângulo retângulo ABC possui os lados a, b e c que são respectivamente opostos aos vértices A, B e C. Pede-se calcular o seno, co-seno e tangente de cada um dos ângulos correspondentes aos vértices A e B, sabendo-se que a=12cm e b=9cm são os catetos do triângulo ABC.
3) Os catetos de um triângulo retângulo medem 3m e 4m. Determinar o comprimento da hipotenusa, os senos, cosenos e tangentes dos ângulos não retos deste triângulo.
4) Num triângulo retângulo a hipotenusa mede 30cm e um dos ângulos mede 35°. Pede-se calcular os catetos.
5) Num triangulo retângulo um dos catetos mede 50m e seu ângulo oposto mede 30°. Calcular o outro cateto e a hipotenusa.

<u>Respostas:</u>

1) $sen45° = cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $tag45° = 1$
2) $senA = 0{,}80$ $\quad cosA = 0{,}60$ $\quad senB = 0{,}60$ $\quad cosB = 0{,}80$ $\quad tgA = 1{,}33$ $\quad tgB = 0{,}75$
3) $sen \propto = cos\beta = \frac{3}{5}$ $\quad cos \propto = sen\beta = \frac{4}{5}$ $\quad tg \propto = \frac{3}{4}$ $\quad tg\beta = \frac{4}{3}$
4) $a = 17{,}2$ $\quad b = 24{,}6$
5) $c = 100$ $\quad b = 86{,}6$

4.5. Relações entre lados e ângulos de um triângulo qualquer

Dado um triângulo qualquer como o da Figura 3 temos

Lei dos senos

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Lei dos cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

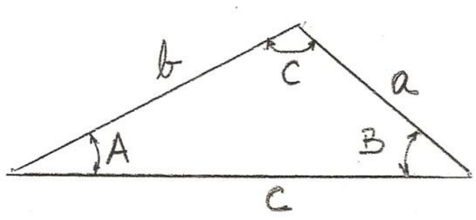


Figura 3

4.6. Exercício:

Determinar os ângulos de um triângulo sabendo-se que $a = 229m$, $b = 61m$ e $c = 232m$

Respostas: A = 79,6°, B = 15,2°, C = 85,2°

5. VETORES

5.1. Introdução

A quantidade de massa de um corpo é representada por um número seguido por sua unidade, por exemplo, 3,2kg. Este número que representa a quantidade de massa é chamado de escalar. O escalar pode ser também um número negativo, por exemplo, a temperatura média no cume de uma determinada montanha é -10°C. Portanto o escalar nos informa o valor ou a intensidade de uma determinada grandeza física. Se temos um conjunto de corpos de massas diferentes podemos obter a massa total deste conjunto bastando somar algebricamente suas grandezas individuais.

Entretanto determinadas grandezas físicas possuem características especiais onde não é possível simplesmente somar suas intensidades para obter o resultado final. É o caso, por exemplo, quando temos várias forças atuando sobre um determinado corpo. Neste caso temos de levar em conta, também, as direções e sentidos das forças aplicadas ao corpo.

Para representar entidades físicas como a força, a velocidade, a aceleração, etc. adotamos o ente matemático chamado vetor.

O vetor é a representação de uma grandeza física que possui intensidade (ou módulo), direção e sentido.

O vetor é representado através de uma seta cujo comprimento em escala nos fornece o seu módulo. A ponta da seta, que é a extremidade do vetor, nos informa o seu sentido. Sua direção (ou orientação) pode ser informada através das coordenadas das extremidades do vetor ou do ângulo formado por sua reta suporte (ou linha de ação) e um eixo de referência qualquer.

A Figura 4 nos mostra a representação de um vetor situado no plano *xy* de um sistema cartesiano de referência, onde sua direção é dada pelo ângulo de 35° em relação ao eixo x e seu módulo é a medida da seta que tem 3 unidades. A Figura 4 mostra também a origem e a extremidade do vetor, bem como a linha de ação ou reta suporte do vetor.

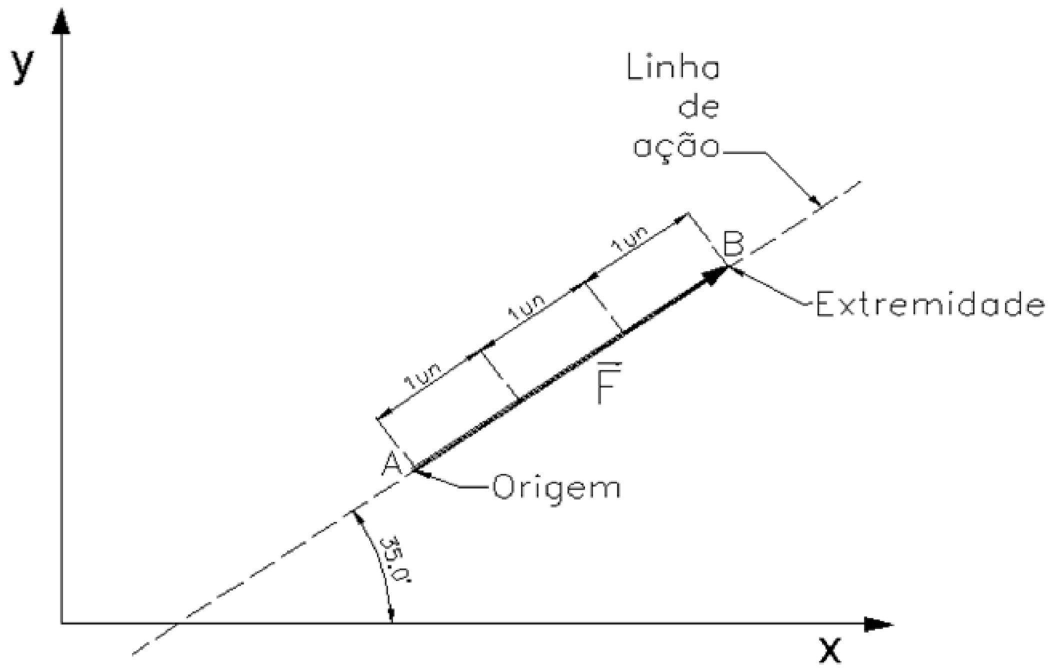


Figura 4

Como vemos na figura acima o símbolo que representa um vetor é constituído por uma letra com uma seta em cima ($\vec{F}$), muitas vezes é representado simplesmente por uma letra em negrito (**F**). O módulo é representado por $|\vec{A}|$ ou simplesmente por A seguido de sua unidade, que no caso da força no SI, é o newton (N).

5.2. <u>Tipos de vetores</u>

Vetor aplicado em um ponto é o vetor que atua em um ponto definido.

Vetor deslizante é o vetor cujo efeito é o mesmo qualquer que seja seu ponto de aplicação ao longo de sua linha de ação.

Vetor livre é o vetor cujo ponto de aplicação é indeterminado, isto é, possui o mesmo efeito quando deslocado paralelamente a si mesmo.

5.3. <u>Vetores iguais</u>

Dois ou mais vetores são iguais quando possuem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo. Ver Figura 5 (a). Vetores iguais podem ser representados pela mesma letra.

5.4. <u>Vetores opostos</u>

Dois vetores são opostos se possuem a mesma direção, mesmo módulo e sentidos diferentes. Ver Figura 5 (b). Neste caso o vetor oposto **G** pode ser representado por –**F**. A soma de dois vetores opostos dá como resultado um vetor nulo: **F**+**G** = **F**+(-**F**) = **0**

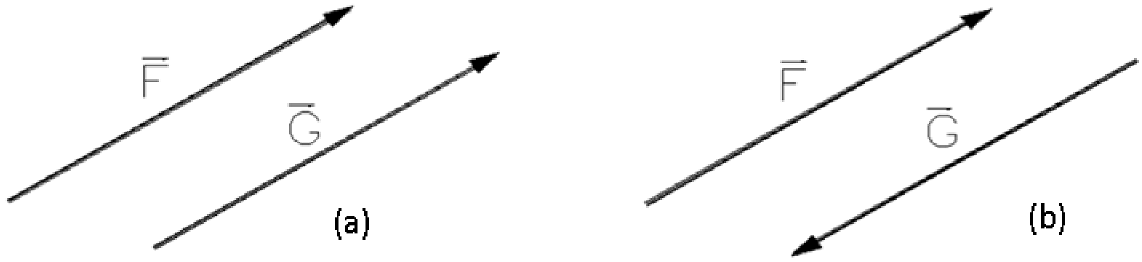


Figura 5

5.5. <u>Adição de vetores</u>

O resultado da soma de dois ou mais vetores é chamado de <u>resultante</u>. Isto é: **P** + **Q** = **R**
Para obtermos a soma (resultante) de dois vetores devemos usar a lei do paralelogramo. Para somarmos **P** + **Q** devemos colocar a origem dos dois vetores num mesmo ponto O e pela extremidade de cada vetor traçamos paralela ao outro vetor, formando, portanto, um paralelogramo. O vetor representado pela diagonal que passa pela origem O dos dois vetores é o vetor soma. Ver a Figura 6.

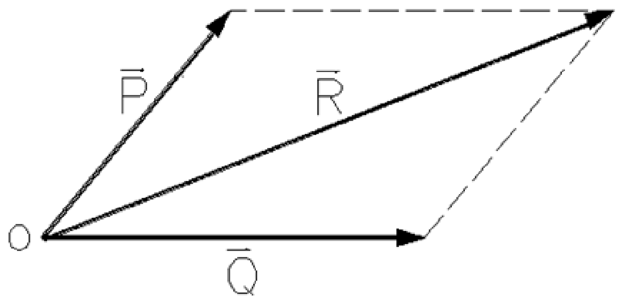


Figura 6

5.6. Subtração de vetores

A subtração entre os vetores **P** - **Q** pode ser obtida somando-se o vetor **P** com o vetor oposto de **Q**, isto é,

P – **Q** = **P** + (-**Q**)

A diferença entre os vetores **P** e **Q** da Figura 6 é determinada conforme a Figura 7.

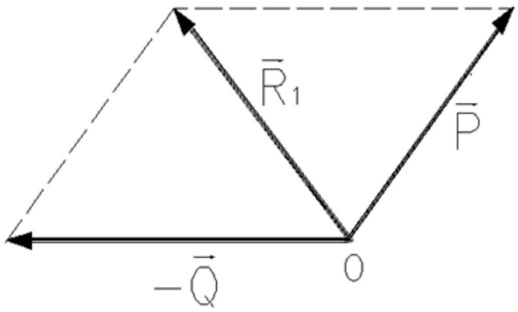


Figura 7

5.7. Adição ou subtração de vetores colineares

Vetores colineares são vetores que possuem a mesma linha de ação.

Se dois vetores são colineares e possuem o mesmo sentido então a soma dos vetores **P** + **Q** resultará num vetor de mesma direção e sentido dos vetores **P** e **Q**, e o módulo será a soma algébrica de seus módulos P+Q. Ver Figura 8 (a)

Se os dois vetores são colineares, porém, de sentidos contrários, a resultante será um vetor de direção igual à dos vetores, módulo igual à diferença dos módulos P-Q e sentido igual ao do vetorde módulo maior. Ver Figura 8 (b).

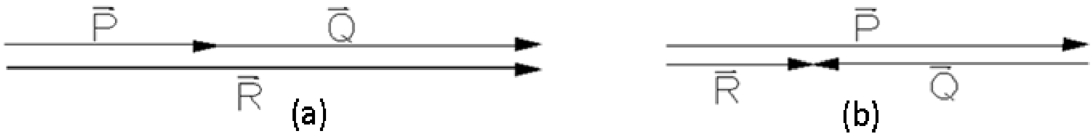


Figura 8

5.8. Produto (ou divisão) de um escalar por um vetor

A multiplicação do vetor **P** por um escalar *n* positivo resulta num vetor *n*.**P** de mesma direção mesmo sentido porem de módulo igual a $\left|n.\vec{P}\right|$. Se *n* for negativo o vetor resultado terá a mesma direção o mesmo módulo $\left|n.\vec{P}\right|$ porém sentido contrário a **P**.

A divisão de um vetor por um escalar é o produto do inverso do escalar pelo vetor.

5.9. Decomposição de vetores. Componentes retangulares de um vetor

Decompor um vetor em suas componentes é a operação inversa da operação de achar a resultante de dois vetores. Neste caso, são dados um vetor e as duas direções segundo as quais queremos determinar suas componentes. Achamos as componentes do vetor dado utilizando a lei do paralelogramo. Por exemplo, na Figura 9 vemos a decomposição do vetor **F** segundo as direções dos eixos cartesianos *x* e *y*. As componentes do vetor **F** são os vetores **F**x e **F**y. Neste caso as componentes são chamadas de componentes retangulares porque o paralelogramo é um retângulo.

Mais na frente veremos que a utilização de componentes retangulares facilitará a determinação da resultante de vários vetores.

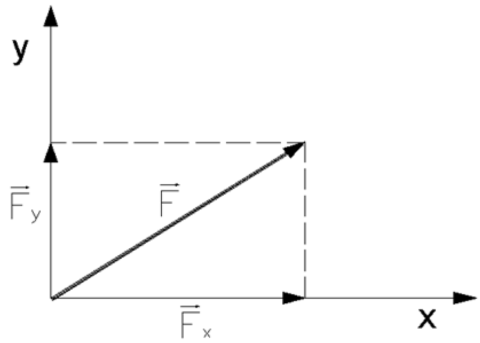


Figura 9

5.10. Vetor Força

Como a força é uma grandeza vetorial podemos usar as regras acima para lidar com as forças que atuam numa partícula (ou corpo). Basicamente os problemas de forças atuantes numa partícula poderão ser apresentados de duas formas: ou tem-se uma força e são pedidas as suas componentes segundo duas (ou três) direções, ou se conhece as várias forças atuantes na partícula e é pedida a resultante.

5.11. Componentes cartesianas de uma força. Vetores unitários cartesianos

Podemos representar as componentes de uma força em termos de vetores unitários cartesianos. Estas componentes são chamadas de componentes cartesianas.

Os vetores unitários cartesianos **i** e **j** são vetores de módulo unitário que possuem as direções e sentidos dos eixos *x* e *y* respectivamente (Figura 10). Assim sendo as componentes **F**x e **F**y de uma força poderão ser escritas na forma do produto de um escalar que é o módulo das componentes pelo vetor unitário correspondente. Os vetores unitários definirão a direção e o sentido da componente da força. Os vetores unitários cartesianos são perpendiculares entre si, pois, possuem a direção dos eixos cartesianos. Se o sentido do vetor unitário cartesiano for contrário ao do eixo cartesiano ele deverá ser precedido do sinal negativo.

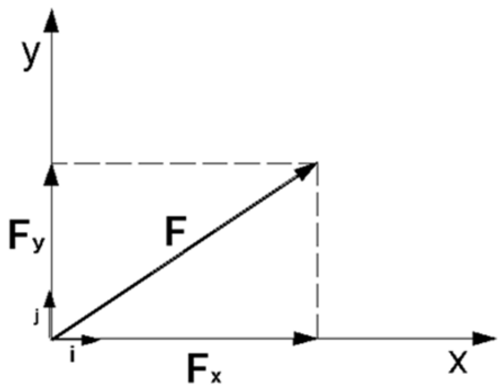


Figura 10

.

Na Fig. 4-7, o módulo de cada componente de **F** é *Fx* e *Fy*. Então a representação do vetor **F** como um vetor cartesiano é:

$$\mathbf{F} = Fx\,\mathbf{i} + Fy\,\mathbf{j}$$

O módulo do vetor **F** é calculado usando o teorema de Pitágoras, isto é,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

O módulo das componentes de **F** são calculadas por trigonometria

$$F_x = F.\cos\alpha \qquad F_y = F.sen\alpha$$

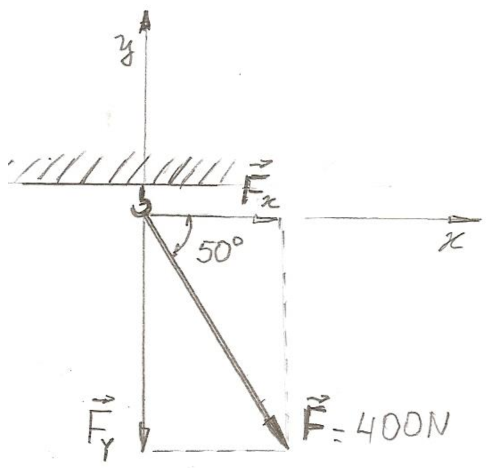
O ângulo α pode ser calculado por

$$\alpha = arctg\,\frac{F_y}{F_x}$$

Obs.: O estudo da força no espaço tridimensional será feito adiante no capítulo Estática da Partícula no Espaço.

5.12. Exercícios resolvidos

1) Um gancho fixado ao teto suporta uma força de 400N conforme mostrado na figura. Determinar as componentes horizontal e vertical da força. Escrever o vetor da força na forma cartesiana.



Solução:

Colocando a origem dos eixos de coordenadas no ponto de aplicação da força no gancho e decompondo a força **F** segundo as direções *x* e *y*, podemos observar que **F**x é positivo, pois tem a mesmo sentido do eixo x mas **F**y é negativo, pois tem sentido contrário ao eixo y.

Os módulos das componentes da força são:

$F_x = F.\cos 50° = 257{,}1N$

$F_y = F.sen 50° = 306{,}4N$

Então suas componentes são

Fx = 257,1.**i**

Fy = - 306,4.**j**

A força **F** na forma cartesiana é escrita como segue:

F = (257,1N). **i** – **(**306,4N). **j**

2) Determinar o módulo da força **F**= (3kN).**i** + (4kN).**j** e o ângulo que ela forma com o eixo *x*.

Solução:

Módulo de **F**

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} \qquad \Rightarrow \qquad F = 5kN$$

Ângulo

$$\alpha = arctg\,\frac{F_y}{F_x} = arctg\,\frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 53{,}13°$$

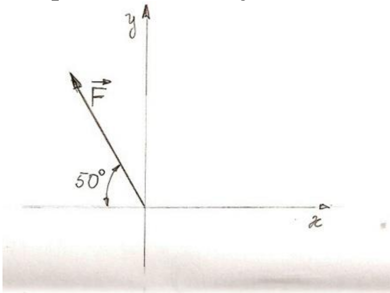
5.13. <u>Exercício</u>

1) A força F mostrada na figura tem módulo de 300N. Pede-se:

a) Determinar os módulos de suas componentes horizontal e vertical

b) Representar estas componentes em vetores cartesiano

c) Representar a força F em vetor cartesiano.



Respostas: a) $F_x = -192,8N, \quad F_y = 229,8N$

b) $\vec{F}_x = -(192,8N)\vec{i}, \quad \vec{F}_y = (229,8N)\vec{j}$

c) $\vec{F} = -(192,8N)\vec{i} + (229,8N)\vec{j}$

5.14. Resultante de forças concorrentes coplanares

Forças concorrentes são forças que possuem o mesmo ponto de aplicação (Figura 11)

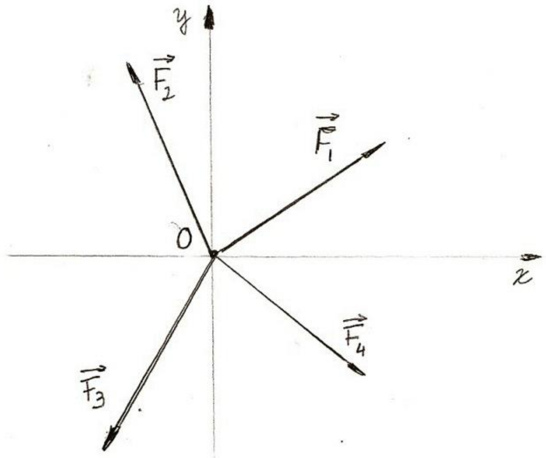


Figura 11

Forças coplanares são forças situadas no mesmo plano. No caso da Figura 11 estamos considerando que todas as forças estão contidas no plano determinado pelos eixos *x* e *y*.

A resultante de várias forças aplicadas no ponto O é a soma vetorial destas forças, isto é,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \ldots + \mathbf{F_n}$$

Chamando de F_{1x} o módulo da componente de $\mathbf{F_1}$ no eixo *x* e F_{1y} o módulo da componente no eixo *y* e, assim, sucessivamente para as demais forças, podemos escrever o vetor resultante destas forças da seguinte forma

$$\mathbf{R} = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}).\mathbf{i} + ((F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}).\mathbf{j}$$

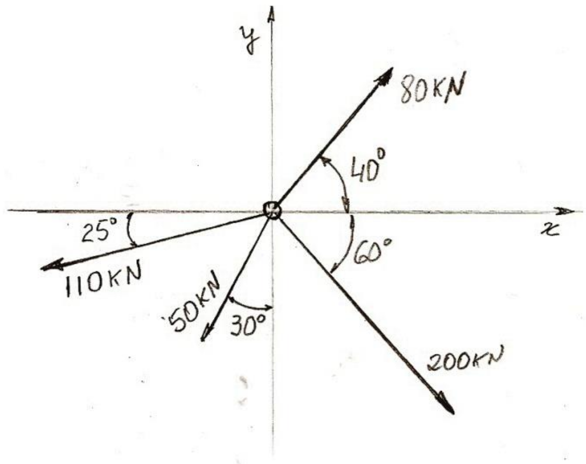
Generalizando

$$\mathbf{R} = \sum F_x .\mathbf{i} + \sum F_y .\mathbf{j} \qquad (4.1)$$

Ao aplicar esta equação devemos ficar atentos quanto ao sinal das componentes das forças., Elas serão positivas se possuírem o mesmo sentido do eixo cartesiano correspondente. Caso contrário, deverão ser lançadas na equação com o sinal negativo.

5.15. Exercício resolvido

Um anel está sujeito às forças indicadas na figura. Pede-se determinar a resultante das forças aplicadas.



Solução:

Soma das componentes das forças em *x* e em *y*

$$\sum F_x = 80.\cos 40° - 110.\cos 25° - 50.sen 30° + 200 \cos 60° = 36{,}6kN$$

$$\sum F_y = 80.sen40° - 110.sen25° - 50.\cos 30° - 200sen60° = -211{,}57kN$$

Resultante

$\mathbf{R} = \sum F_x\ \mathbf{.i} + \sum F_y\ \mathbf{.j} \quad \therefore$

R = (36,6kN).**i** –(211,57 kN).**j**

Módulo da resultante

$$R = \sqrt{36{,}6^2 + (-211{,}57)^2} = 214{,}7kN$$

5.16. Exercícios

1) Determinar os módulos das seguintes forças

a) $\vec{A} = -(300N)\vec{i} + (400N)\vec{j}$

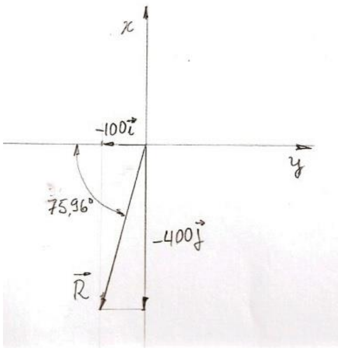
a) $\vec{B} = (200N)\vec{i} - (800N)\vec{j}$

Respostas*: A=500N* e *B= 824,6N*

2) Dados os vetores A e B do exercício anterior determinar:

a) O vetor resultante destas forças
b) O módulo da resultante
c) A direção da resultante

Respostas: a) $\vec{R} = -(100N)\vec{i} - (400N)\vec{j}$ b) *R=412,3N* c) $\alpha = 75{,}96°$ conforme a seguinte figura:



Recomendação de exercícios do livro do Beer [1]

(Excluir os problemas que pedem solução gráfica)

Problemas resolvidos 2.1, 2.2 e 2.3 (Pág. 26 e seguintes)

Problemas 2.4 a 2.33 (Pág. 32 e seguintes)

6. ESTÁTICA DAS PARTÍCULAS NO PLANO

6.1. Equilíbrio de uma partícula no plano

Partícula ou ponto material é um corpo cujas dimensões podem ser desprezadas de forma que as forças que lhe são aplicadas podem ser consideradas como se atuassem num único ponto.

Para que haja equilíbrio de uma partícula é necessário que a resultante das forças nela aplicadas seja nula (1ª lei de Newton). Com base nisto e utilizando a equação (4.1) que calcula a resultante podemos escrever

$$\sum F_x\,.\mathbf{i} + \sum F_y\,.\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Para que a resultante seja nula é preciso que os coeficientes dos vetores unitários **i** e **j** sejam nulos, isto é,

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad (5.1)$$

Estas são chamadas de *equações de equilíbrio da estática* para partículas no plano.

6.2. Diagrama de corpo livre

O diagrama de corpo livre é um esquema simplificado onde mostramos apenas os vetores das forças atuantes no corpo, com seus símbolos e valores, bem como, as dimensões e ângulos necessários para a solução do problema.

É chamado de corpo livre porque mostra somente as partes importantes e livre das partes supérfluas. Às vezes não há necessidade de desenharmos o diagrama de corpo livre e podemos aproveitar a própria figura dada no problema, desde que, ao desenharmos os vetores de solução, etc. sobre a figura dada, não ocorra falta de nitidez e clareza.

6.3. Exercício resolvido

Um bloco que pesa 70kN é pendurado por dois cabos AB e AC conforme mostra a Figura 12. Pede-se determinar as forças que atuam nos cabos AB e AC.

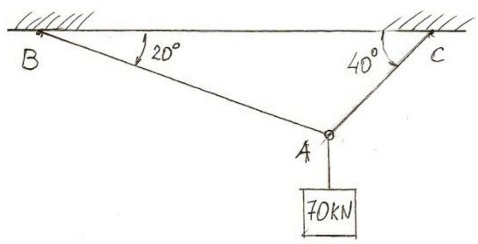


Figura 12

Solução

Vemos pela figura que o ponto A está em equilíbrio sujeito a três forças: o peso do bloco e as trações dos cabos AB e AC. Vamos então estudar o equilíbrio do ponto A, começando pela execução do seu diagrama de corpo livre. No diagrama de corpo livre (Figura 12) desenhamos os eixos de coordenadas *x* e *y* com origem no ponto A e desenhamos os vetores correspondentes ao peso do bloco e às forças dos cabos AB e AC sobre o ponto A, os quais denominamos de $\mathbf{F_B}$ e $\mathbf{F_C}$, respectivamente. É evidente que estes vetores têm as setas apontando para cima, pois, as ações dos cabos AB e AC sobre o ponto A é contrária ao peso do bloco, cujo vetor é para baixo. Os ângulos das direções destes vetores também são mostrados no diagrama.

Podemos agora escrever as equações de equilíbrio do ponto A, lembrando que as componentes das forças nos eixos devem ser lançadas na equação, respeitando a regra dos sinais: serão positivas se tiverem o mesmo sentido do eixo cartesiano, caso contrário, serão negativas.

$$\sum F_x = -F_B . \cos 20° + F_C . \cos 40° = 0$$

$$\sum F_y = F_B . sen 20° + F_C . sen 40° - 70 = 0$$

Resolvendo estas equações chegamos a $F_B = 62kN$ $F_C = 76{,}0kN$

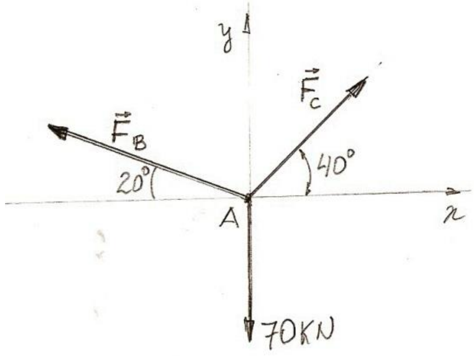


Figura 13

Os valores calculados são os módulos (ou intensidades) das forças. Como resultaram positivos isto indica que os sentidos dos vetores desenhados no diagrama estão corretos.

Em certos casos é difícil saber o sentido correto da força a ser calculada. Não devemos, entretanto, preocuparmos com isto, pois mesmo que tenhamos errado o sentido no diagrama a resposta do cálculo nos informará o sentido certo.

6.4. <u>Roteiro para determinação das forças de equilíbrio de uma partícula</u>

Vários tipos de estruturas e de aparelhos mecânicos podem ser calculados utilizando a teoria do equilíbrio de uma partícula, como fizemos no exercício do item precedente.

Podemos estabelecer o seguinte roteiro para solução destes problemas:

1) Definimos um ponto (partícula) da estrutura sobre o qual atuam as forças a serem determinadas. Neste ponto deverá ser colocada a origem do sistema de eixos de coordenadas.
2) Desenhamos o diagrama de corpo livre, substituindo as barras ou elementos da estrutura e cargas pelos vetores dos esforços que estes elementos exercem sobre a partícula. Alguns destes esforços são completamente conhecidos, mas, outros são as incógnitas a serem determinadas. Geralmente conhecemos suas direções, mas, desconhecemos seus sentidos e módulos. Seus vetores devem ser desenhados arbitrando-se um sentido qualquer. Os seus sentidos corretos serão conhecidos no final dos cálculos, pois, caso seu resultado for negativo o seu sentido correto é o contrário do que foi desenhado no diagrama. Além de desenhar os vetores devemos também adotar uma identificação ou um símbolo para cada um deles. Este símbolo é necessário pois será utilizado nas equações de equilíbrio.
3) Depois de desenharmos o diagrama de corpo livre com a definição e o desenho de todos os vetores que atuam na partícula, bem como seus módulos ou símbolos e seus ângulos em relação aos eixos de coordenadas, podemos escrever as equações de equilíbrio da estática: $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$. Mas para escrever estas equações precisamos respeitar a convenção de sinal para cada equação. Isto é, forças com o mesmo sentido dos eixos cartesianos serão positivas, caso contrário serão negativas. Por exemplo, na equação $\sum F_x = 0$ devemos lançar no primeiro membro da equação todas as forças horizontais

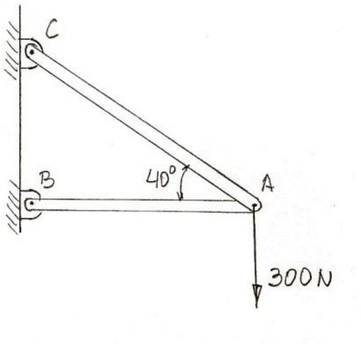
ou componentes horizontais das forças inclinadas, com o sinal positivo se a força tem o sentido para direita, se não, será lançada com o sinal negativo.

4) Escritas as duas equações teremos então um sistema de duas equações e duas incógnitas que resolvido nos fornecerá os valores das forças desconhecidas. Logicamente se houver mais de duas incógnitas o sistema não poderá ser resolvido. Sistemas deste tipo são chamados de hiperestáticos e sua solução foge do escopo de nosso curso.

A solução de problemas de forças no plano é mais simples, pois, podemos resolvê-los adotando somente a formulação escalar. No caso de sistemas tridimensionais, no entanto, é mais conveniente a formulação vetorial, como veremos mais adiante.

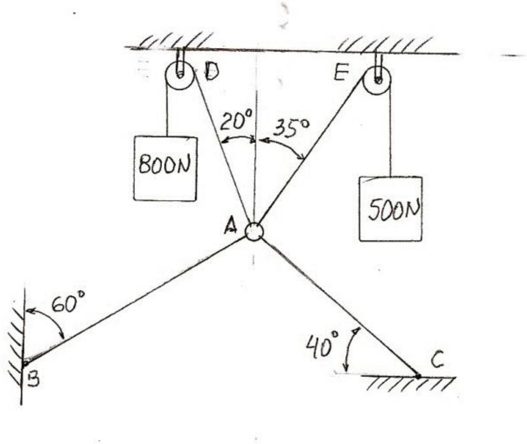
6.5. Exercícios

1) Determinar as forças que atuam nas barras AB e AC da figura seguinte.



Respostas: $F_{AB} = 357{,}5N$ (Compressão); $F_{AC} = 466{,}7N$ (Tração)

2) O anel A amarrado a dois cabos AB e AC suporta os pesos de 800N e 500N através dos cabos que passam pelas roldanas D e E. Sabendo-se que o sistema está em equilíbrio, pede-se determinar as intensidades das forças nos cabos AB e AC.



Respostas: $F_{AB} = 956{,}2N$ (Tração); $F_{AC} = 1063{,}3N$ (Tração)

Recomendação de exercícios do livro do Beer [1]
Problemas resolvidos 2.4, 2.5 e 2.6 (Pág. 52 e seguintes)
Problemas 2.34 a 2.53 (Pág. 57 e seguintes)

7. ESTÁTICA DAS PARTÍCULAS NO ESPAÇO

7.1. Força no espaço. Representação cartesiana

No espaço tridimensional temos de acrescentar a terceira dimensão através do eixo cartesiano *z* cujo vetor unitário é representado por **k.**

A Figura 14 mostra um sistema de coordenadas cartesianas *x y z* onde a força **F** está aplicada na origem O do sistema.

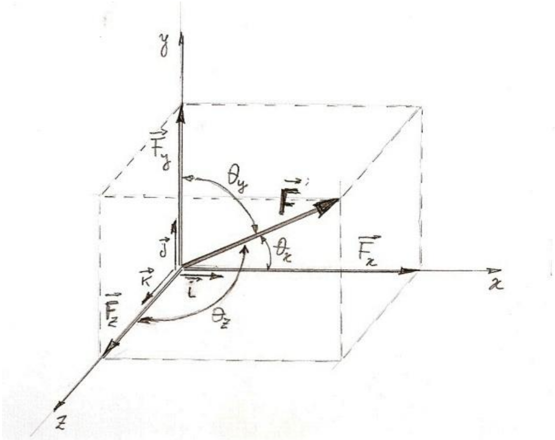


Figura 14

Chamando de θ_x, θ_y e θ_z os ângulos que a força **F** forma respectivamente com os eixos *x*, *y* e *z*, os módulos das componentes de **F** nestes eixos são:

$$F_x = F.\cos\theta_x$$

$$F_y = F.\cos\theta_y$$

$$F_z = F.\cos\theta_z \qquad (6.2)$$

Os ângulos θ_x, θ_y e θ_z são chamados de *ângulos diretores* da força **F**. Os cosenos destes ângulos são chamados de *cosenos diretores* de **F** e são calculados por:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \qquad (6.3)$$

Facilmente podemos deduzir que o módulo de **F** é determinado por

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (6.4)$$

A componente cartesiana da força **F** na direção *x* é $\mathbf{F_x} = F_x\,\mathbf{i}$, na direção *y* é $\mathbf{F_y} = F_y\,\mathbf{j}$ e na direção *z* é $\mathbf{F_z} = F_z\,\mathbf{k}$.

A representação da força **F** na forma cartesiana é feita somando-se suas componentes cartesianas, isto é,

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} \qquad (6.5)$$

Ou, considerando as equações (6.2)

$$\mathbf{F} = (F.\cos\theta_x)\,\mathbf{i} + (F.\cos\theta_y)\,\mathbf{j} + (F.\cos\theta_z)\,\mathbf{k}$$

Ou

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x.\vec{i} + \cos\theta_y.\vec{j} + \cos\theta_z.\vec{k}) \qquad (6.6)$$

Colocando

$$\vec{u} = \cos\theta_x.\vec{i} + \cos\theta_y.\vec{j} + \cos\theta_z.\vec{k} \qquad (6.7)$$

Este é o *vetor unitário* da linha de ação da força F. Substituindo na equação (6.6), temos

$$\mathbf{F} = F.\vec{u} \qquad (6.8)$$

Isto é, para obtermos o vetor da força **F** basta multiplicarmos o seu módulo pelo vetor unitário de sua linha de ação.

Pela equação acima o vetor unitário pode ser determinado por

$$\vec{u} = \frac{\vec{F}}{F} \qquad (6.9)$$

Pela equação (6.7) vemos que os módulos das componentes do vetor unitário **u** são

$$u_x = \cos\theta_x$$
$$u_y = \cos\theta_y \qquad (6.10)$$
$$u_z = \cos\theta_z$$

O módulo do vetor unitário **u** é logicamente 1, logo pela equação (6.4), temos

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

Ou

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \qquad (6.11)$$

7.2. Exercícios resolvidos

1) O vetor de uma força de 230N forma com os eixos cartesianos *x*, *y* e *z* , respectivamente, os ângulos de 40°, 130° e 90°. Pede-se determinar: a) Os módulos das componentes em *x*, *y* e *z*, desta força; b) Suas componentes cartesianas e c) O vetor cartesiano que representa a força.

Solução

a) Módulos das componentes

$$F_x = 230N.\cos 40° = 176{,}2N$$
$$F_y = 230N.\cos 130° = -147{,}8N$$
$$F_z = 230N.\cos 90° = 0$$

b) Componentes

$$\vec{F}_x = (176{,}2N).\vec{i}$$
$$\vec{F}_y = -(147{,}8N).\vec{j}$$
$$\vec{F}_z = 0.\vec{k}$$

c) Vetor da força

$$\vec{F} = (176{,}2\vec{\imath} - 147{,}8\vec{\jmath})N$$

2) Dada uma força $\vec{F} = -(130N).\vec{i} - (40N).\vec{j} + (80N).\vec{k}$ pede-se determinar: a) Seu módulo; b) Seus ângulos diretores e c) O seu vetor unitário.

Solução

a) Módulo

$$F = \sqrt{(-130N)^2 + (-40N)^2 + (80N)^2} = 157{,}8N$$

b) Ângulos diretores

$$\cos\theta_x = \frac{-130}{157{,}8} = -0{,}824 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_x = 145{,}5°$$

$$\cos\theta_y = \frac{-40}{157{,}8} = -0{,}253 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_y = 104{,}7°$$

$$\cos\theta_z = \frac{80}{157{,}8} = 0{,}507 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_x = 59{,}5°$$

c) Vetor unitário

$$\vec{u} = -0{,}824.\vec{i} - 0{,}253.\vec{j} + 0{,}507.\vec{k}$$

7.3. <u>Vetor posição</u>

O vetor posição ***r*** é um vetor que posiciona um ponto em relação a outro ponto.

Na Figura 15 o vetor posição do ponto $B(x_B, y_B, z_B)$ em relação ao ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ que representaremos por $\mathbf{r}_{AB}$ é um vetor que tem sua origem em *A* e extremidade em *B*. Sua representação na forma cartesiana é

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$$

Colocando $\quad \Delta_x = x_B - x_A, \quad \Delta_y = y_B - y_A, \quad \Delta_z = z_B - z_A$

Fica $\quad \vec{r}_{AB} = \Delta_x\,\vec{i} + \Delta_y\,\vec{j} + \Delta_z\,\vec{k} \qquad (6.12)$

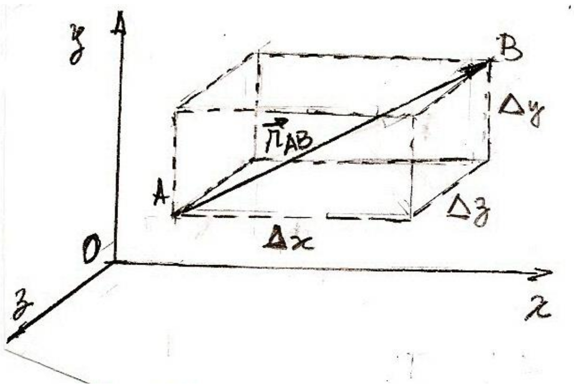


Figura 15

O vetor posição de um ponto $B(x\ ,y\ ,z\ )$ em relação à origem *O* do sistema cartesiano, conforme mostra a Figura 16, será então

$$\vec{r}_{OB} = x\,\vec{i} \;+ y\,\vec{j} \;+ z\,\vec{k}$$

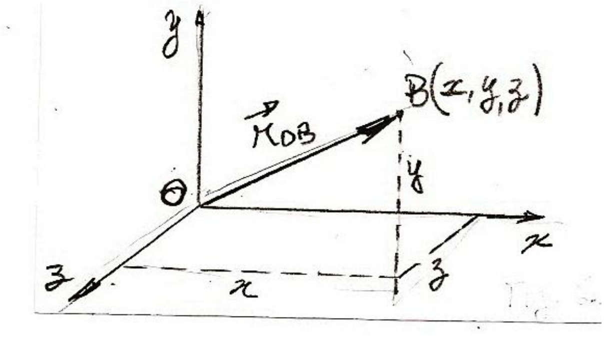


Figura 16

O <u>vetor unitário</u> de um vetor posição $\mathbf{r}_{AB}$ é calculado por

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1}{r_{AB}}\left(\Delta_x.\vec{i} + \Delta_y\,\vec{j} + \Delta_z\vec{k}\right) \qquad (6.13)$$

7.4. Determinação de uma força tendo-se dois pontos de sua linha de ação e seu módulo

Tendo-se os dois pontos A e B da linha de ação da força **F** podemos determinar o vetor posição $\mathbf{r}_{AB}$ utilizando a equação (6.12) e com a equação (6.13) determinamos o vetor unitário $\mathbf{u}_{AB}$ da reta AB.

Vimos anteriormente que uma força **F** é igual ao produto de seu módulo pelo vetor unitário de sua linha de ação (equação (6.8)), ou seja,

$$\mathbf{F} = F.\vec{u}_{AB} = \frac{F}{r_{AB}}\left(\Delta_x.\vec{i} + \Delta_y.\vec{j} + \Delta_z.\vec{k}\right) \qquad (6.14)$$

O módulo de $\mathbf{r}_{AB}$ que é a medida da distância entre os pontos A e B é determinado por (ver equação (6.4))

$$r_{AB} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2} \qquad (6.15)$$

Os ângulos diretores da força **F** são os mesmos do vetor posição $\mathbf{r}_{AB}$, portanto, podem ser calculados com as equações

$$\cos\theta_x = \frac{\Delta_x}{r_{AB}}$$
$$\cos\theta_y = \frac{\Delta_y}{r_{AB}} \qquad (6.16)$$
$$\cos\theta_z = \frac{\Delta_z}{r_{AB}}$$

7.5. Exercício resolvido

Dado o ponto A(3m, -4m, 5m) determinar: a) o vetor posição de A em relação a origem dos eixos cartesianos; b) o seu vetor unitário e c) os seus ângulos diretores.

Solução

a) Vetor posição

$$\vec{r}_{OA} = 3m.\vec{i} - 4m.\vec{j} + 5m.\vec{k}$$

b) Vetor unitário

$$r_{OA} = \sqrt{(3m)^2 + (-4m)^2 + (5m)^2} = 7{,}07m$$

$$\vec{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{OA}}{r_{OA}} = \frac{3}{7{,}07}\vec{i} + \frac{-4}{7{,}07}\vec{j} + \frac{5}{7{,}07}\vec{k} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{u}_{OA} = 0{,}424\vec{i} - 0{,}566\vec{j} + 0{,}707\vec{k}$$

c) Ângulos diretores

$$\cos\theta_x = 0{,}424 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_x = 64{,}9°$$
$$\cos\theta_y = -0{,}566 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_y = 124{,}45°$$
$$\cos\theta_z = 0{,}707 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_z = 45°$$

7.6. <u>Exercícios</u>

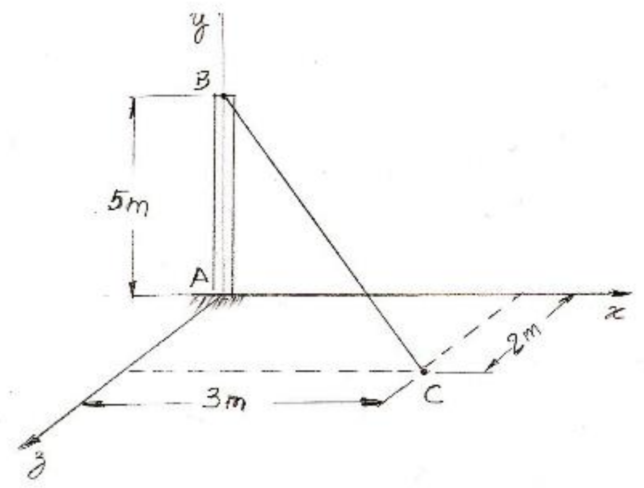
1) Dados os pontos A(0, 0, 6m) e B(12m, -8m, 30m) pede-se determinar: a) o vetor posição do ponto B em relação ao ponto A; b) a distância entre A e B; c) o vetor unitário da reta AB e seus ângulos diretores.

Respostas: a) $\vec{r}_{AB} = 12\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 24\,\vec{k}$, b) 28m, c) $\vec{u}_{AB} = 0{,}428\vec{i} - 0{,}286\vec{j} + 0{,}857\vec{k}$, $\theta_x = 64{,}62°$, $\theta_y = 106{,}6°$ $\theta_z = 31{,}01°$

2) A linha de ação de uma força F=400N passa pelos pontos A(5m; 0; -3m) e B(0; 2m; 0). Sabendo-se que força tem sentido de A para B, pede-se determinar o vetor cartesiano da força e seus ângulos diretores.

Respostas: $\vec{F} = -(324{,}8N).\vec{i} + (130N).\vec{j} + (194{,}8N).\vec{k}$, $\theta_x = 144{,}3°$, $\theta_y = 71{,}0°$, $\theta_z = 60{,}9°$

3) O cabo BC amarra a extremidade B do poste AB ao ponto C no piso, conforme a figura. Sabendo-se que este cabo está tracionado de 800N qual é o vetor cartesiano da força que atua no ponto C e quais seus ângulos diretores?



Respostas: $\vec{F} = \left(-405{,}6.\vec{i} + 676.\vec{j} - 135{,}2.\vec{k}\right)N$, $\theta_x = 120{,}5°$, $\theta_y = 32{,}3°$, $\theta_z = 99{,}7°$

7.7. Resultante de forças concorrentes no espaço

Para determinarmos a resultante de forças concorrentes no espaço agimos de forma idêntica à que fizemos para forças no plano, isto é, fazemos a soma dos vetores de todas as forças concorrentes. Chamando de $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \ldots \mathbf{F_n}$ as forças concorrentes, então a resultante é

$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \ldots + \mathbf{F_n}$$

Chamando de F_{1x} o módulo da componente de $\mathbf{F_1}$ no eixo x e F_{1y} o módulo da componente no eixo y e, assim, sucessivamente para as demais forças, podemos escrever o vetor resultante destas forças da seguinte forma

$$\mathbf{R} = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}).\mathbf{i} + ((F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}).\mathbf{j} + ((F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}).\mathbf{k}$$

Generalizando

$$\mathbf{R} = \sum F_x\,.\mathbf{i} + \sum F_y\,.\mathbf{j} + \sum F_z\,.\mathbf{k}$$

O módulo da resultante é calculado por

$$R = \sqrt{\left(\sum F_x\right)^2 + \left(\sum F_y\right)^2 + \left(\sum F_z\right)^2}$$

E os cosenos diretores são calculados por

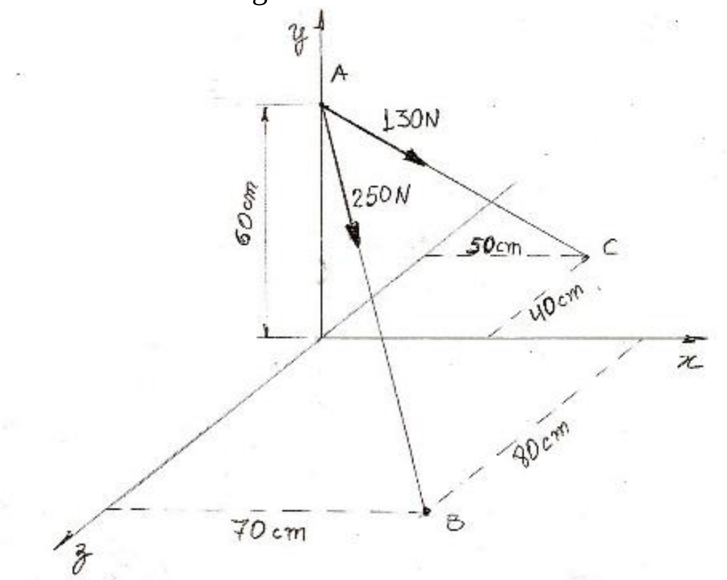
$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_y}{R}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\sum F_z}{R}$$

7.8. Exercício

Determinar o vetor cartesiano, o módulo e os ângulos diretores da resultante das forças 130N e 250N mostradas na figura.



Respostas: $\vec{R} = (217{,}3.\vec{i} - 211{,}6.\vec{j} + 104{,}7.\vec{k})N$, $R = 320{,}9N$, $\theta_x = 47{,}4°$, $\theta_y = 131{,}3°$, $\theta_z = 70{,}9°$

Recomendação de exercícios do livro do Beer [1]

Problemas resolvidos 2.7 e 2.8 (Pág. 71 e seguintes)

Problemas 2.54 a 2.73 (Pág. 76 e seguintes)

7.9. <u>Equilíbrio de uma partícula no espaço</u>

Já vimos que para que uma partícula esteja em equilíbrio é necessário que a resultante das forças a ela aplicadas seja nula, isto é,

$$\sum F_x \,.\mathbf{i} + \sum F_y \,.\mathbf{j} + \sum F_z \,.\mathbf{k} = \mathbf{0} \qquad (6.17)$$

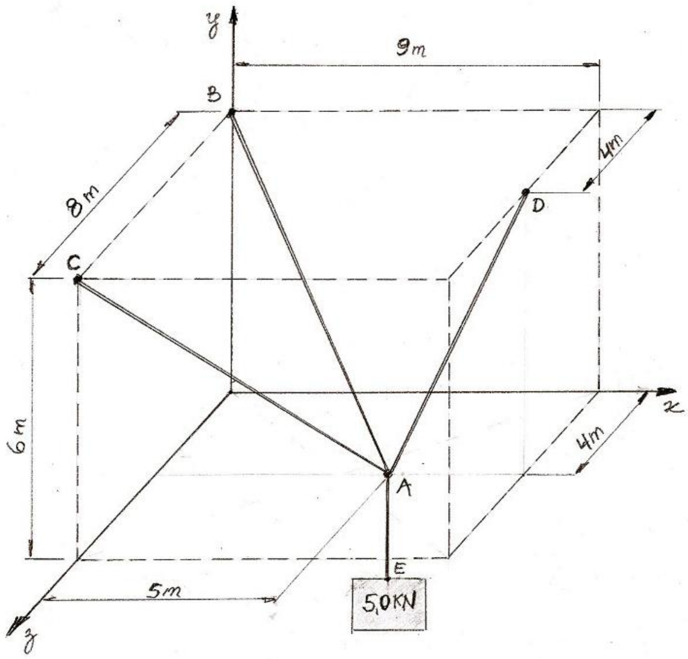
Para que a resultante seja nula é preciso que os coeficientes dos vetores cartesianos unitários **i, j** e **k** sejam nulos, isto é,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \qquad (6.18) \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned}$$

Estas são chamadas de *equações de equilíbrio da estática* para partículas no espaço.

7.10. <u>Exercício</u>

1) O bloco de 5kN é suportado pelos cabos AB, AC e AD conforme mostra a figura. Determinar os esforços nestes cabos.



Respostas: $F_{AB} = F_{AC} = 1{,}63kN$, $F_{AD} = 3{,}33kN$

Recomendação de exercícios do livro do Beer

Problemas resolvidos 2.9 e 2.8 (Pág. 81 e seguintes)

Problemas 2.74 a 2.94 (Pág. 83 e seguintes)

8. ESTÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS NO PLANO

Corpo rígido. O corpo é constituído por um conjunto de partículas, donde, além de massa ele possui dimensões não desprezíveis. O corpo é chamado de rígido se não sofre deformação quando sujeito a qualquer tipo de força. No nosso estudo da Estática os corpos serão considerados sempre rígidos. Os corpos deformáveis serão estudados na Resistência dos Materiais.

No caso da partícula, como vimos, o ponto de aplicação das forças era único, isto é, era a própria partícula. Portanto, as forças atuantes na partícula constituía um sistema de forças concorrentes. Entretanto no caso de um corpo, suas dimensões deverão ser levadas em conta e os pontos de aplicação das forças são normalmente distintos.

Princípio da tansmissibilidade: o efeito de uma força em um corpo rígido é o mesmo qualquer que seja o ponto de aplicação da força ao longo de sua linha de ação. Os vetores que representam este tipo de força são chamados de vetores deslizantes.

8.1. Forças internas e externas

Forças externas são as forças exercidas pelo meio ambiente ou pela ação de outros corpos sobre o corpo considerado. São forças que podem provocar o movimento ou o equilíbrio do corpo.

Forças internas são as forças que unem as partículas ou as partes constituintes do corpo.

Exemplo de forças externas:

Considere um guindaste como mostra a Figura 17.

As forças externas atuantes no guindaste são:

- O peso próprio do guindaste $\mathbf{P_1}$ e da lança $\mathbf{P_2}$ cujos pontos de aplicação são seus respectivos centros de gravidade.
- $\mathbf{R_A}$ e $\mathbf{R_B}$ são as reações do solo sobre as rodas do guindaste.
- Peso $\mathbf{W}$ da carga em içamento.

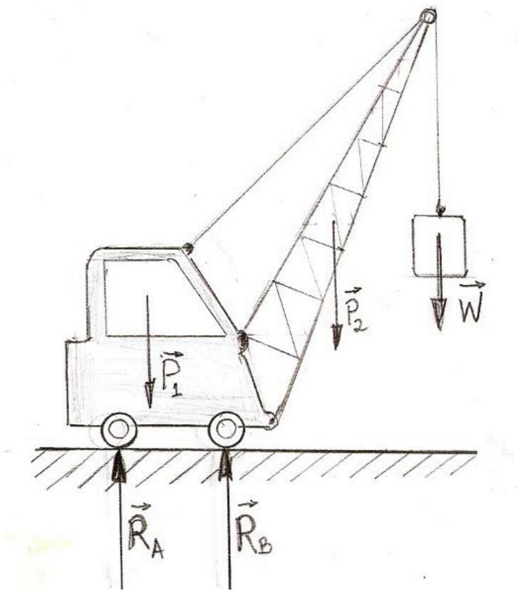


Figura 17

8.2. Equilíbrio de um corpo. Introdução

Vimos que uma partícula está em equilíbrio quando a resultante das forças que atuam sobre ela é nula.

No caso de um corpo esta condição não é suficiente conforme podemos ver pela Figura 18. Nesta figura temos uma barra sobre uma mesa horizontal (sem atrito) sujeita a duas forças de mesmo módulo e sentidos opostos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, mas, as forças não são colineares. Esta barra não está em equilíbrio estático, pois, a as forças $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ provocarão uma rotação na barra. Portanto além da resultante das forças atuantes no corpo ser nula é necessário que o momento resultante das forças seja nulo para que o corpo esteja em equilíbrio.

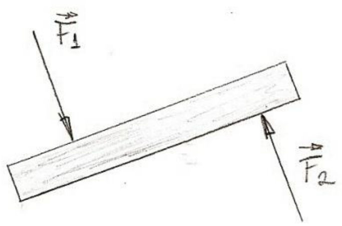


Figura 18

8.3. Momento de uma força (formulação escalar)

Seja um corpo em forma de uma placa plana tal que no ponto O existe um pino que permite a placa girar em torno do mesmo (Figura 19). Vamos aplicar uma força **F** que forma um ângulo θ com o vetor posição **r** que vai de O até o ponto de aplicação da força. Podemos decompor **F** nas componentes $\mathbf{F_1}$ perpendicular a **r** e $\mathbf{F_2}$ paralela a **r**. Seus módulos serão $F_1 = F.sen\theta$ e $F_2 = F.\cos\theta$. A componente paralela $\mathbf{F_2}$ não provoca rotação do corpo em torno do ponto O. Já a componente perpendicular $\mathbf{F_1}$ provoca uma rotação que depende do seu módulo e da distância desta força ao ponto O. Definimos como momento (ou torque) de uma força em relação ao ponto O ao produto vetorial (maiores detalhes serão dados posteriormente) $\mathbf{M_O}$ = **r** x **F** cujo módulo é $M_O = r.Fsen\theta$.

Portanto escalarmente podemos escrever $M_O = (F.sen\theta).r = F_1.r$

ou

$$M_O = F(r.sen\theta) = F.d$$

Donde, podemos dizer que **o módulo do momento de uma força em relação a um ponto é o produto do módulo da força pela distância da linha de ação da força ao ponto**.

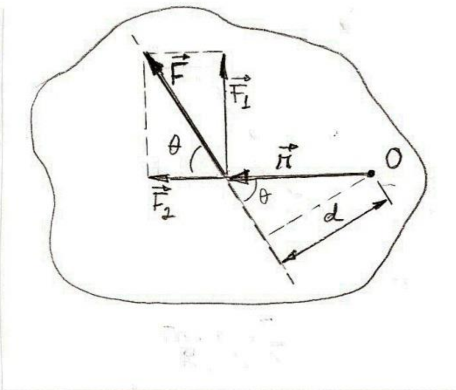


Figura 19

8.4. Equilíbrio de um corpo no plano

Para que um corpo rígido esteja em equilíbrio é necessário que a resultante das forças seja nula e que a soma dos momentos das forças em relação a um ponto qualquer também seja nula. Portanto, no caso de sistema de duas dimensões temos que ter

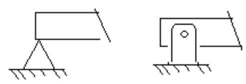
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_A = 0 \qquad\qquad (7.1)$$

onde A é qualquer ponto no plano da estrutura. Estas três equações permitem determinar, portanto, no máximo três incógnitas. O fato de adicionarmos mais uma equação, tomando-se o momentos das forças em relação a um outro ponto diferente de A, não adianta nada, pois, esta nova equação não é independente e não pode ser usada para determinar uma quarta incógnita.

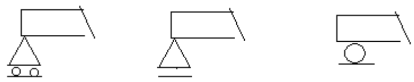
8.5. Tipos de apoios dos corpos

Os corpos podem ser vinculados a apoios de vários tipos:

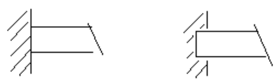
a) Apoio articulado fixo é o apoio A mostrado na Figura 20. Este apoio permite a rotação do corpo, mas, não permite seu deslocamento vertical ou horizontal. Portanto, a resultante da força que atua neste tipo de apoio pode ser decomposta em duas componentes: uma horizontal e outra vertical. Então a força de reação no apoio articulado fixo possui direção desconhecida.
Representação esquemática:



b) Apoio articulado móvel é o apoio mostrado no ponto B Figura 20. Este apoio permite a rotação do corpo e deslocamento horizontal mas não permite o deslocamento vertical (para o caso mostrado na Figura 20). Portanto, neste caso, este apoio só oferece reação na direção vertical. A reação de apoio neste tipo de apoio tem direção conhecida.
Representação esquemática:



c) Engastamento é o apoio mostrado á esquerda da viga na Figura 21, o qual é um apoio rígido, que não permite nem rotação e nem deslocamento em qualquer direção. Este apoio oferece reação em qualquer direção além de um momento de reação. Vínculos deste tipo provocam, portanto, reações constituídas por uma força de direção desconhecida e de um momento (ou binário).
Representação esquemática:



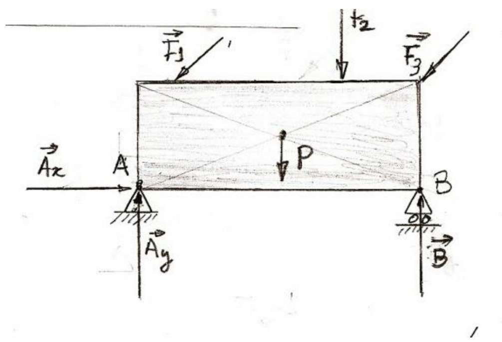


Figura 20

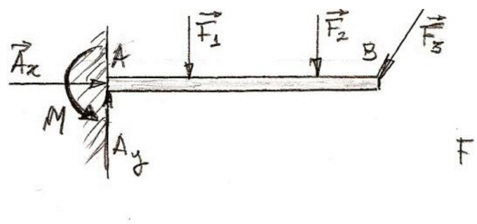


Figura 21

8.6. <u>Convenção de sinais</u>

As equações (7.1) são chamadas de <u>equações de equilíbrio da Estática</u> e para sua utilização correta devemos estabelecer uma convenção de sinais para as forças e momentos e utilizá-la para todas as forças e momentos atuantes no corpo até o término da equação. Para as forças convém utilizar como sentidos positivos os próprios sentidos positivos dos eixos de coordenadas. Para o sentido positivo dos momentos podemos escolher o sentido horário ou anti-horário.

O ponto de aplicação do momento pode ser qualquer um no plano da figura, porem, é conveniente escolher um ponto que resulte em maior simplificação da solução.

8.7. <u>Exercício resolvido</u>

1) Determinar todas as reações de apoio do corpo representado na figura.

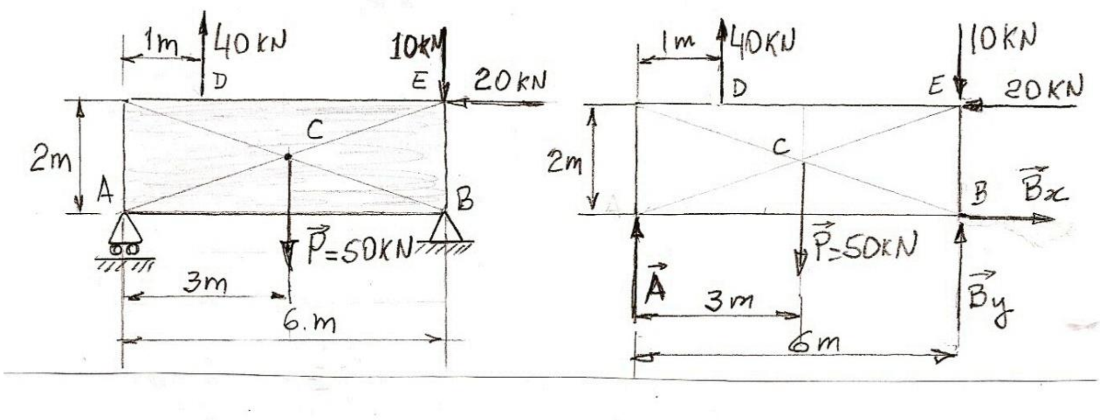


Diagrama de corpo livre

Solução:

1) Desenhamos o diagrama de corpo livre onde mostramos todas as forças e momentos atuantes no corpo inclusive seu peso próprio (caso não seja desprezível) e as reações de apoio, cujos sentidos acreditamos serem os corretos. No final dos cálculos se uma ou mais reação deu negativa isto quer dizer que seu sentido correto é o oposto ao escolhido no início.

2) Escrevemos as equações de equilíbrio da Estática respeitando a convenção de sinais que indicamos no início das equações. Para ponto de aplicação dos momentos vamos escolher o ponto B, pois, para este ponto, eliminamos os momentos das forças de 10kN, $\boldsymbol{B_x}$ e $\boldsymbol{B_y}$ simplificando a equação.

$\xrightarrow{+}$ $\sum F_x = B_x - 20kN = 0$ (1)

$\uparrow +$ $\sum F_y = A + 40kN - 50kN - 10kN + B_y = 0$ ou seja,

$\sum F_y = A - 20kN + B_y = 0$ (2)

$\curvearrowleft +$ $\sum M_B = A.6m + 40kN.5m - 50kN.3m - 20kN.2m = 0$ ou seja,

$\sum M_B = A.6m - 10kN.m = 0$ (3)

Da eq. (1) obtemos

$B_x = 20kN$

Da eq. (3) obtemos

$A = 1{,}67kN$

Da eq. (2), substituindo A e B_x pelos seus valores acima, obtemos

$B_y = 20kN - 1{,}67kN = 18{,}33kN$

Obs. Como todos valores encontrados para as reações foram positivos isto quer dizer que os sentidos adotados na figura estão corretos

8.8. Reações estaticamente indeterminadas. Estruturas hiperestáticas

No exemplo anterior vimos que as reações de apoio podiam ser determinadas utilizando somente as equações de equilíbrio da Estática (Equações 7.1). As estruturas deste tipo são chamadas de estruturas isostáticas.

Porém se introduzirmos nestas estruturas mais um apoio (mais um vínculo), ou mais, as equações da Estática não serão suficientes para calcular as reações de apoio e neste caso teremos de lançar mão de equações que levam em conta a deformação da estrutura. Temos então reações estaticamente indeterminadas e estruturas deste tipo são chamadas de estruturas hiperestáticas (Figura 22). Este tipo de estrutura é estudado na Resistência dos Materiais.

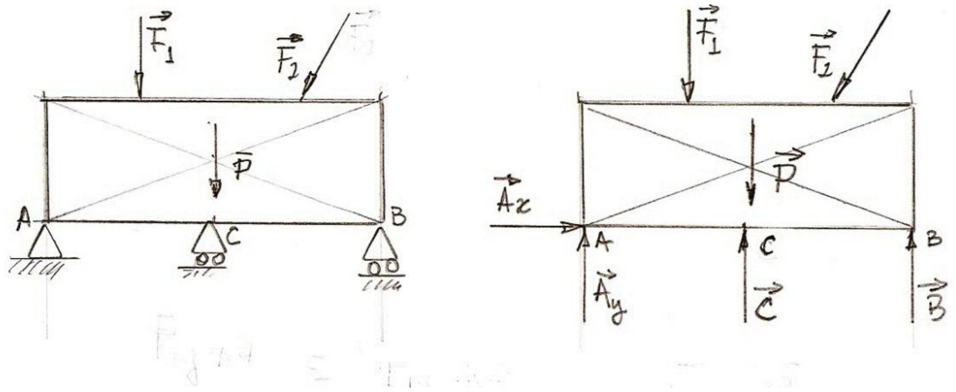


Figura 22

8.9. Estruturas hipostáticas. Estruturas com vinculação parcial

Nos exemplos anteriores vimos também que os tipos de vínculos usados eram tais que o corpo rígido (estrutura) não podia mover-se sob as cargas dadas ou sob quaisquer outras condições de carregamento. Em tais casos dizemos que o corpo rígido está completamente vinculado.

No caso da estrutura mostrada na Figura 23 vemos que a estrutura não está completamente vinculada e ela pode mover-se horizontalmente sob ação das forças. Portanto o equilíbrio da estrutura não pode ser mantido sob condições gerais de carregamento. Nesta estrutura vemos que só temos duas reações de apoio. Como são três as equações de equilíbrio, existem menos incógnitas que equações. Este tipo de estrutura é chamada de estrutura hipostática e sua utilização deve ser evitada, a não ser em condições especiais.

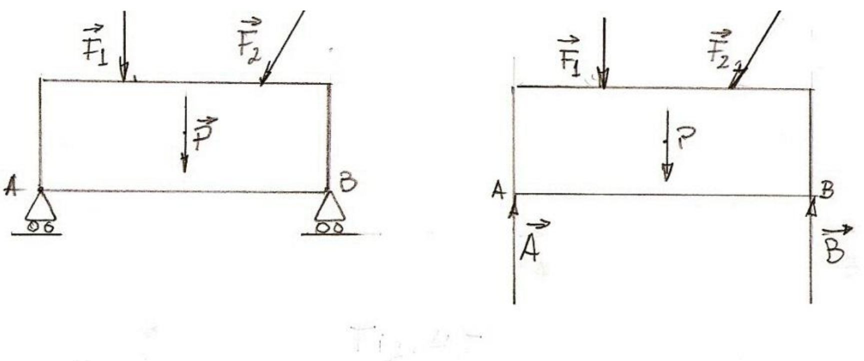
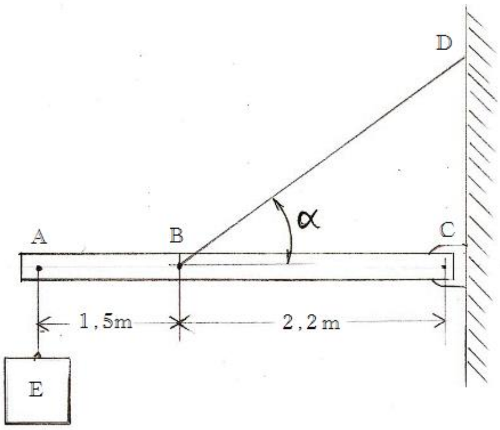


Figura 23

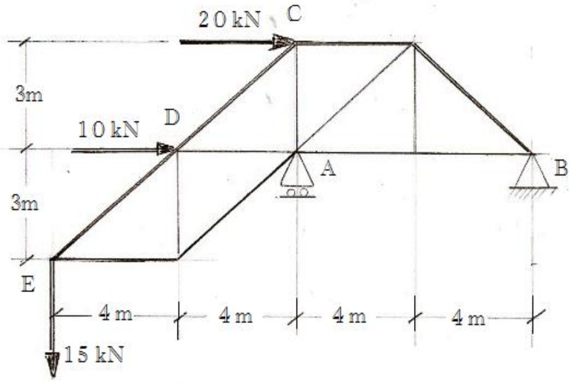
8.10. <u>Exercícios</u>

1) A barra AC da figura está articulada em C e suporta na extremidade A um bloco E que pesa 400N. O cabo flexível BD, que liga a barra à parede, forma um ângulo α = 40° com a horizontal. Determinara: a) a força de tração no cabo BD e b) a reação horizontal e vertical na articulação C.



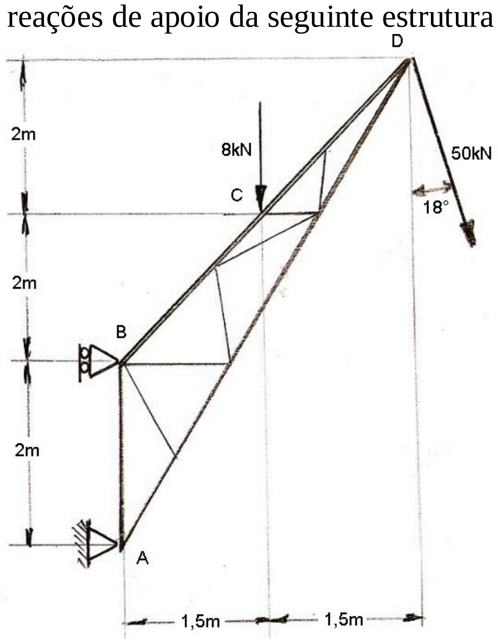
Respostas: F_{BD} = 1046N, C_x = 801N ← e C_y = 272N ↓

2) Determinar as reações de apoio da seguinte estrutura



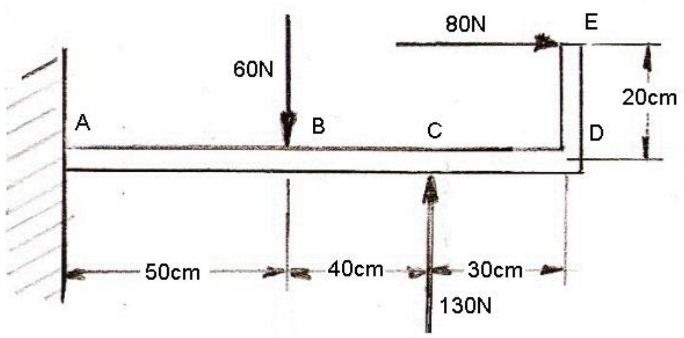
Respostas: A_y = 22,5kN ↑ B_x = 30kN ← B_y = 7,5kN ↓

3) Determinar as reações de apoio da seguinte estrutura



Respostas: A_x = 108,2kN → A_y = 55,5kN ↑ B_x = 123,7kN ←

4) Determinar as reações de apoio da seguinte estrutura.



Respostas: A_x = 80N ← A_y = 70N ↓ M = 7100Ncm

Recomendação de exercícios do livro do Beer [1]

Problemas resolvidos 4.1 a 4.4 (Pág. 225 e seguintes)

Problemas 4.1 a 4.41 (Pág. 234 e seguintes)

8.11. Forças concentradas e forças distribuídas

Até agora somente utilizamos as chamadas forças concentradas, isto é, forças que são aplicadas em um único ponto.

Existem, entretanto, as forças (ou cargas) que atuam ao longo de uma linha (situação plana) ou se distribuem numa superfície (situação espacial). Nosso estudo abordará somente o caso de forças no plano, portanto, forças distribuídas ao longo de um segmento de reta. Assim sendo, doravante chamaremos estas simplesmente de forças distribuídas.

A unidade de uma força distribuída é representada pela unidade de força dividida pela unidade de comprimento. Exemplo: N/m, kgf/m, N/cm, etc.

A força distribuída pode se apresentar de duas formas: Força uniformemente distribuída e força não uniformemente distribuída.

8.12. Força uniformemente distribuída

É a força que não varia ao longo de seu comprimento de distribuição. A Figura 24 (a) mostra a representação de uma força uniformemente distribuída q (N/m).

Para efeito do cálculo das reações de apoio transformamos a força distribuída por uma força concentrada no centro de gravidade da força distribuída e cuja intensidade é o valor total da força distribuída, como mostra a Fig. 7-9.b.

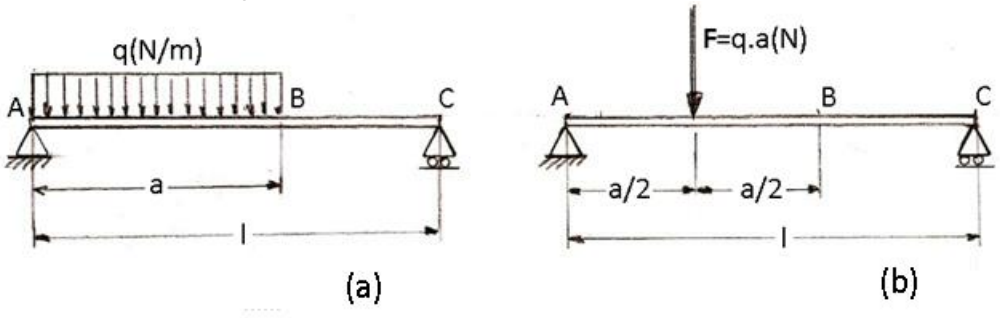


Figura 24

8.13. Força não uniformemente distribuída

Trata-se de força cuja intensidade varia ao longo da linha de distribuição. Um exemplo deste tipo de força é o caso da força cuja distribuição é triangular, isto é, que varia conforme a função $q=q_o.x/a$, onde a é o comprimento da distribuição e x é a posição do ponto considerado.

Para o cálculo das reações de apoio podemos substituir a força distribuída conforme mostrada na Figura 25 (a) pela força concentrada mostrada na Figura 25 (b). Se adotamos o SI a unidade de q e q_o será N/m.

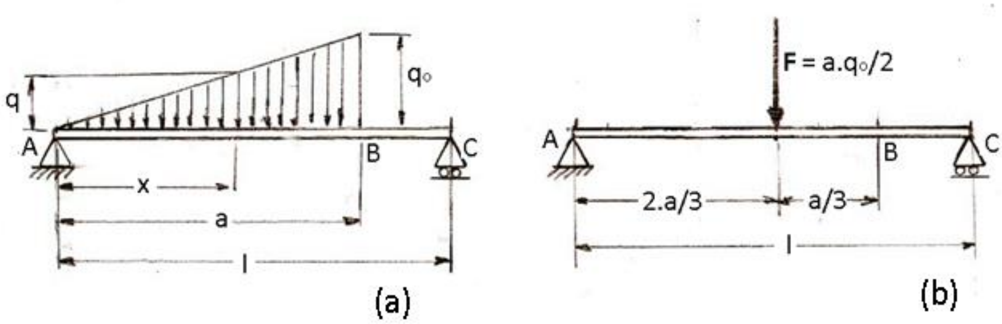
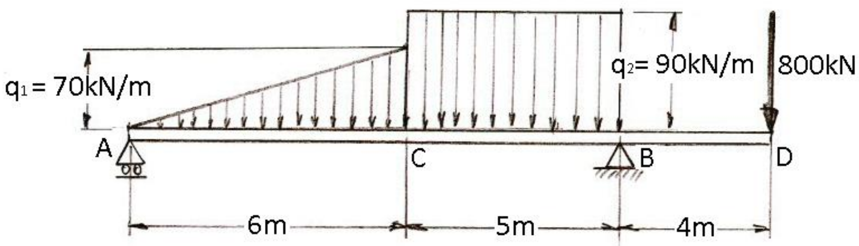


Figura 25

8.14. <u>Exercício</u>

Determinar as reações de apoio da seguinte viga



Respostas: A_y = 605kN ↓ B_y = 2065kN ↑

9. ESTÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS NO ESPAÇO

9.1. Produto Vetorial

O produto vetorial de dois vetores **P** e **Q** é uma operação vetorial que nos fornece um vetor **V** cuja linha de ação é perpendicular ao plano que contém os vetores **P** e **Q** e seu módulo é

$$V = P.Q.sen\theta \qquad (8.1)$$

sendo θ ($0° \leq \theta \leq 180°$) o ângulo formado pelos dois vetores P e Q.

O sentido de **V** é definido pela regra da mão direita (Figura 26): deve-se curvar os dedos da mão direita (exceto o polegar) de forma que as pontas dos dedos indiquem o sentido do vetor **P** para o vetor **Q** e o dedo polegar indicará o sentido de **V**.

O produto vetorial é representado por:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{V} \qquad (8.2)$$

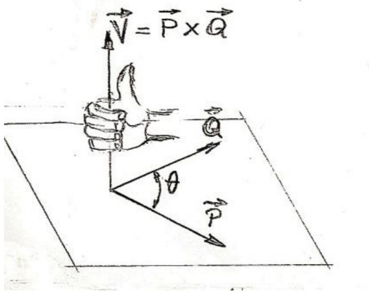


Figura 26

9.2. Propriedade das operações do produto vetorial

1) O produto vetorial **não** é comutativo, isto é,

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$$

Mas, podemos observar que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$

1) O produto vetorial **não** é associativo, isto é,

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \neq (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S}$$

2) Mas é distributivo, isto é,

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R}$$

9.3. Produto vetorial dos vetores unitários cartesianas

Vamos ver como ficam os produtos vetoriais entre os vetores cartesianos unitários (Figura 27).

$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$	$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$	$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$

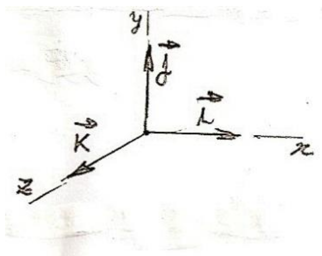


Figura 27

Podemos simplificar a determinação do sinal do produto vetorial de dois vetores unitários utilizando a circunferência mostrada na Figura 28:

O produto vetorial de dois vetores unitários será positivo se os vetores são vizinhos no sentido anti-horário. Se não, será negativo.

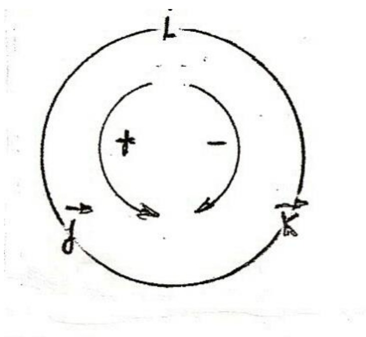


Figura 28

9.4. <u>Produto vetorial de dois vetores cartesianos</u>

Vamos ver agora como fica o produto vetorial de dois vetores cartesianos quaisquer

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\, \mathbf{i} + P_y\, \mathbf{j} + P_z\, \mathbf{k}) \times (Q_x\, \mathbf{i} + Q_y\, \mathbf{j} + Q_z\, \mathbf{k})$$

$$V = (P_y Q_z - P_z Q_y)\, \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z)\, \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x)\, \mathbf{k}$$

Que pode ser expresso na forma do determinante

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (8.3)$$

9.5. <u>Momento de uma força em relação a um ponto (formulação vetorial)</u>

O momento de uma força **F** em relação a um ponto *P* é o produto vetorial

$$\vec{M}_P = \vec{r} X \vec{F} \qquad (8.4)$$

Sendo **r** o vetor posição que tem a origem no ponto *P* e a extremidade em qualquer ponto sobre a linha de ação de **F** (Figura 29)

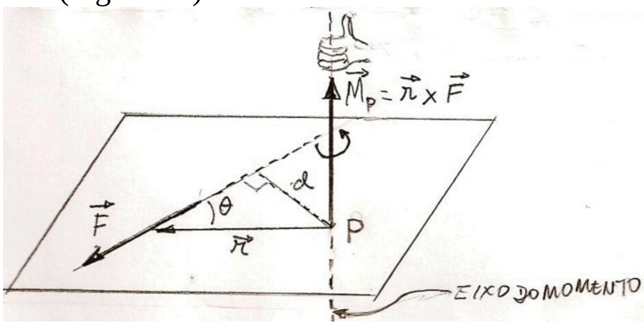


Figura 29

O momento $\mathbf{M}_P$ é um vetor perpendicular ao plano formado pela força **F** e o ponto *P*. Para determinar o seu sentido adotamos a *regra da mão direita*: Curvando-se os dedos da mão direita no sentido da rotação que **F** provoca em torno do ponto *P*, o polegar indicará o sentido de $\mathbf{M}_P$.

O módulo de $\mathbf{M}_P$ é determinado por: $M_P = r.F.sen\theta = F.d$

Onde θ é o ângulo entre as linhas de ação dos vetores **r** e **F** e *d* é a distância do ponto *P* à linha de ação de **F**.

Vemos que o módulo do momento mede o efeito da rotação provocada pela força **F** em tôrno do ponto *P*.

9.6. Componentes cartesianas do Momento

Vimos anteriormente que no caso de sistemas em duas dimensões (plano) pudemos calcular os momentos sem necessidade de usar vetores cartesianos (formulação escalar). Entretanto, para sistemas em três dimensões a utilização de vetores cartesianos (formulação vetorial) simplificará a sua solução.

9.7. Momento de uma força em relação à origem do sistema de coordenadas

Seja P(*x*,*y*,*z*) um ponto qualquer da linha de ação da força **F** (Figura 30). Neste caso o vetor posição $\mathbf{r_{OP}}$, como já vimos, pode ser representado pelo seguinte vetor cartesiano:

$$\vec{r}_{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Representando o vetor força por

$$\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k}$$

O momento de **F** em relação a O é $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} X \vec{F}$ (Equação (8.4))

Ou seja,
$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (8.5)$$

Desenvolvendo o determinante obtemos

$$\vec{M}_O = (y.F_z - z.F_y).\vec{i} + (z.F_x - x.F_z).\vec{j} + (x.F_y - y.F_x).\vec{k}$$

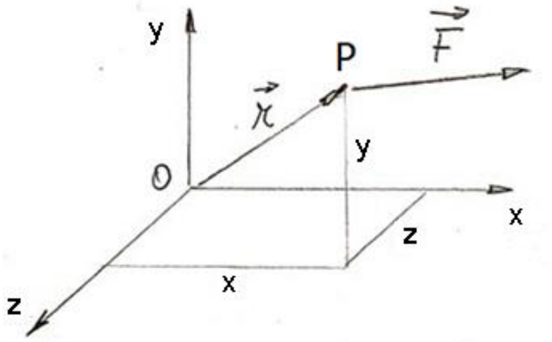


Figura 30

9.8. Momento de uma força em relação a um ponto qualquer A

Seja $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto qualquer e $B(x_B, y_B, z_B)$ um ponto qualquer da linha de ação da força **F** conforme a Figura 31. O momento desta força em relação ao ponto *A* é calculado por

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{r_{AB}} \times \vec{F} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (8.6)$$

Onde $\Delta_x = x_B - x_A, \quad \Delta_y = y_B - y_A, \quad \Delta_z = z_B - z_A$

Então

$$\overrightarrow{M}_A = (\Delta_y.F_z - \Delta_z.F_y).\vec{i} - (\Delta_x.F_z - \Delta_z.F_x).\vec{j} + (\Delta_x.F_y - \Delta_y.F_x).\vec{k}$$

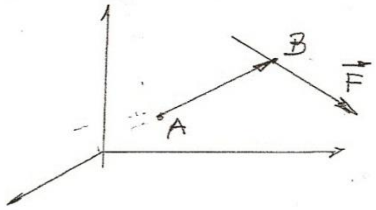


Figura 31

9.9. <u>Exercícios resolvidos</u>

1) Uma força $\vec{F} = 20N.\vec{i} + 10N.\vec{j} - 40N.\vec{k}$ é aplicada num ponto P(4m, 6m, -3m). Pede-se determinar o momento desta força em relação à origem do sistema de coordenadas.

Solução

A equação do momento é $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} X \vec{F}$ onde $\vec{r}_{OP}$ é o vetor posição do ponto P em relação à origem, isto é,

$$\vec{r}_{OP} = x\ \vec{i} \ + y\ \vec{j} \ + z\ \vec{k} = 4m.\vec{i} + 6m.\vec{j} - 3m.\vec{k}$$

Portanto temos

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4m & 6m & -3m \\ 20N & 10N & -40N \end{vmatrix}$$

Ou seja,

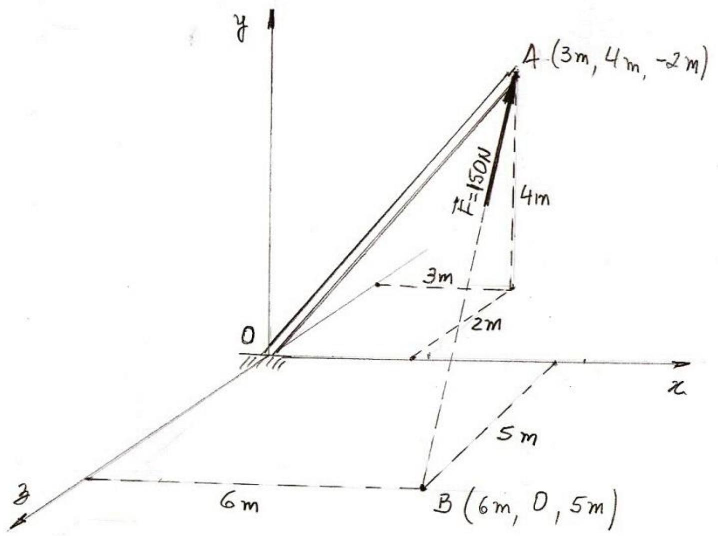
$$\vec{M}_O = (y.F_z - z.F_y).\vec{i} - (x.F_z - z.F_x).\vec{j} + (x.F_y - y.F_x).\vec{k}$$

$$= [6m.(-40N) - (-3m).10N].\vec{i} - [4m.(-40N) - (-3m).20N].\vec{j} + [4m.10N - 6m.20N)].\vec{k}$$

Então

$$\vec{M}_O = \left(-210.\vec{i} + 100.\vec{j} - 80.\vec{k}\right)N.m$$

2) Determinar o momento provocado pela força **F** = 150N no engastamento O da barra AO conforme mostra a figura.



Solução

a- Conforme mostra a figura o momento de $\vec{F}$ em relação ao ponto O é calculado por

$$\overrightarrow{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}\,.$$

b- Determinação do vetor posição $\vec{r}_{OA}$

$$\vec{r}_{OA} = x\ \vec{i}\ + y\ \vec{j}\ + z\ \vec{k} = (3m).\vec{i} + (4m).\vec{j} - (2m).\vec{k}$$

c- Determinação do vetor cartesiano de $\vec{F}$.

$$\vec{F} = F.\vec{u}_{BA}$$

Observe que o sentido da força é de B para A.

d- Vetor posição de A em relação a B

$$\vec{r}_{BA} = (3m - 6m).\vec{i} + (4m - 0).\vec{j} + (-2m - 5m).\vec{k}$$

$$\vec{r}_{BA} = -(3m).\vec{i} + (4m).\vec{j} - (7m).\vec{k}$$

$$r_{BA} = \sqrt{(-3m)^2 + (4m)^2 + (-7m)^2} = 8{,}6m$$

e- Vetor unitário $\vec{u}_{BA}$

$$\vec{u}_{BA} = \frac{\vec{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{1}{8{,}6m}\left[-(3m).\vec{i} + (4m).\vec{j} - (7m).\vec{k}\right]$$

$$u_{BA} = -0{,}349.\vec{i} + 0{,}465.\vec{j} - 0{,}814.\vec{k}$$

f- Vetor cartesiano $\vec{F}$

No nosso caso $\vec{F} = (1500N).\vec{u}_{BA}$

$$\vec{F} = 150N\left(-0{,}349.\vec{i} + 0{,}465.\vec{j} - 0{,}814.\vec{k}\right)$$

$$\vec{F} = -(52{,}35N).\vec{i} + (69{,}75N).\vec{j} - (122{,}1N).\vec{k}$$

g- Determinação do momento

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3m & 4m & -2m \\ -52{,}35N & 69{,}75N & -122{,}1N \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$\vec{M}_O = 348{,}90N.m.\vec{i} + 471N.m.\vec{j} + 418{,}65N.m.\vec{k}$$

O módulo é

$$M_O = \sqrt{(348{,}9N.m)^2 + (471N.m)^2 + (418{,}65N.m)^2} = 720{,}3N.m$$

9.10. Teorema de Varignon

O momento de várias forças concorrentes em relação a um dado ponto é igual ao momento da resultante destas forças em relação ao mesmo ponto (Figura 32 - a).

$$\vec{r}X\vec{F}_1 + \vec{r}X\vec{F}_2 + \ldots = \vec{r}X(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots) = \vec{r}X\vec{R}$$

(Ver a propriedade distributiva)

Utilizando este teorema é fácil concluir que *o momento de uma força em relação a um ponto é igual à soma dos momentos das componentes da força em relação ao ponto* (Figura 32 - b).

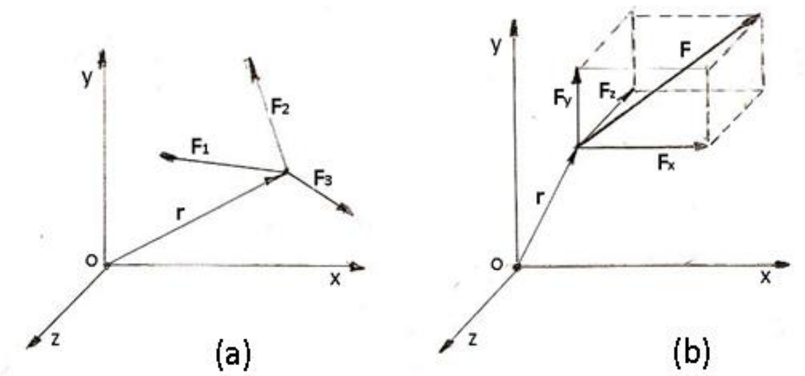
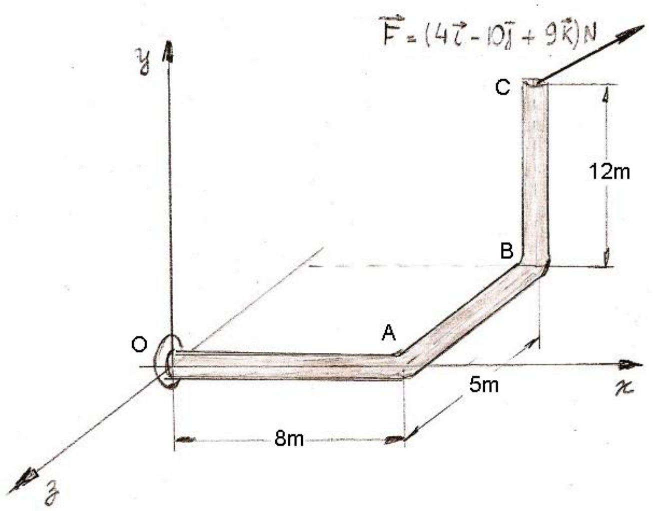


Figura 32

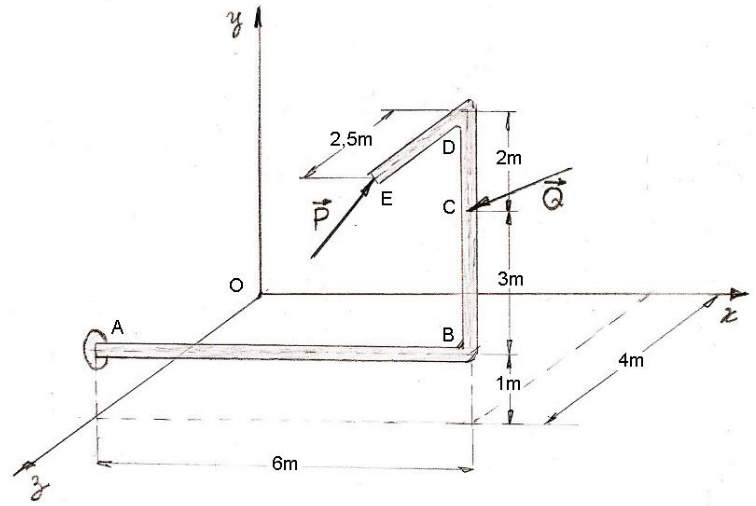
9.11. Exercícios

1) Determinar o vetor cartesiano e o módulo do momento da força **F** = (4**i**-10**j**+9**k**)N em relação ao ponto O, ponto de fixação da tubulação OABC.



Respostas: $\mathbf{M}_o$ = (58**i-92j**-128**k)**Nm e M_o = 168Nm

2) As forças **P =** (20**i**+30**j**-10**k**)N e **Q =** (-40i+50j+70k)N estão aplicadas, respectivamente nos pontos E e C da tubulação ABCDE. Pede-se determinar o vetor cartesiano e o módulo do momento destas forças no ponto de fixação A da tubulação.



Respostas: $\mathbf{M}_A$ = (25**i-310j**+480**k)**Nm e M_A = 572Nm

Recomendação de exercícios do livro do Beer [1]
Problema resolvido 3.4 (Pág. 123 e seguintes)
Problemas 3.1 a 3.25 (Pág. 125 e seguintes)

9.12. Produto escalar

O produto escalar entre dois vetores **P** e **Q** (Figura 33) é representado por **P.Q** e seu resultado é igual ao produto algébrico dos módulos de **P** e **Q** e o coseno do ângulo formado por eles, isto é,

$$\mathbf{P.Q} = P\,Q\cos\theta \qquad (8.7)$$

Sendo, $0° \leq \theta \leq 180°$

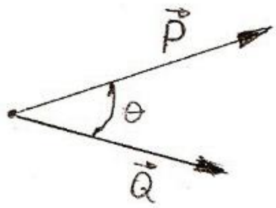


Figura 33

9.13. Propriedades das operações do produto escalar

1) È comutativo, ou seja, **P.Q** = **Q.P**
2) É distributivo, ou seja, **P.(Q + S) = P.Q + P. S**
3) A multiplicação por um escalar é associativa, ou seja, n (**A**.**B**) = (n **A**).B = **A**.(n **B**)

9.14. Produto escalar dos vetores unitários cartesianos

Pela definição do produto escalar podemos ver que

i . **i** = 1	**i** . **j** = 0	**i** . **k** = 0
j . **i** = 0	**j** . **j** = 1	**j** . **k** = 0
k . **i** = 0	**k** . **j** = 0	**k** . **k** = 1

9.15. Produto escalar de dois vetores cartesianos

Vamos fazer o produto escalar

$$\mathbf{P.Q} = (P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{k}).(Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j} + Q_z\,\mathbf{k})$$

então

$$\mathbf{P.Q} = P_x\,Q_x + P_y\,Q_y + P_z\,Q_z \qquad (8.8)$$

9.16. Utilizações do produto escalar

Podemos utilizar o produto escalar para determinar o ângulo de dois vetores ou para fazer a projeção de um vetor sobre uma determinada direção.

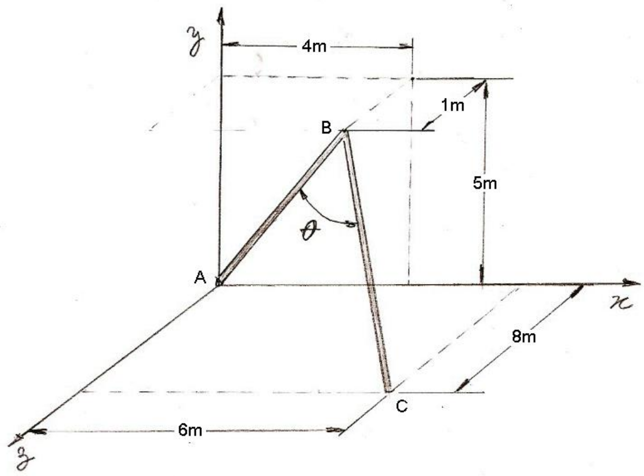
9.17. Determinação do ângulo formado por dois vetores

Utilizando as equações (8.7) e (8.8) acima podemos determinar o ângulo de dois vetores a seguir

$$cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P\ Q} = \frac{P_x\ Q_x + P_y\ Q_y + P_z\ Q_z}{P\ Q} \qquad (8.9)$$

9.18. Exercício resolvido

Determinar o ângulo formado pelas barras AB e BC.



Solução

A(0; 0; 0)m B(4; 5; 1)m C(6; 0; 8)m

$\overrightarrow{r_{BA}} = -4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 1\vec{k}$ $\overrightarrow{r_{BC}} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}$

r_{BA}=6,48 r_{BC}=8,83

$\overrightarrow{r_{BA}}.\overrightarrow{r_{BC}} = -8 + 25 - 7 = 10$

Donde $cos\theta = \frac{10}{6{,}48.8{,}83} = 0{,}174$ ∴ $\theta = 79{,}97°$

9.19. Determinação da projeção de um vetor sobre uma reta.

Se o vetor de uma força tem sua origem sobre uma reta, então a projeção deste vetor sobre a reta é o vetor localizado sobre a reta cujo comprimento vai desde a origem do vetor até a perpendicular baixada da extremidade do vetor à reta (Figura 34).

A determinação da projeção de um vetor **F** sobre uma determinada reta que passa por A e B e cujo vetor unitário é $\mathbf{u}_{AB}$ é feita pelo produto escalar deste vetor unitário pela força.

$$F_{AB} = \overrightarrow{u_{AB}}.\vec{F} = Fcos\theta$$

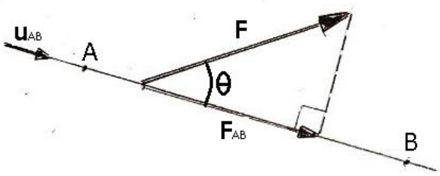
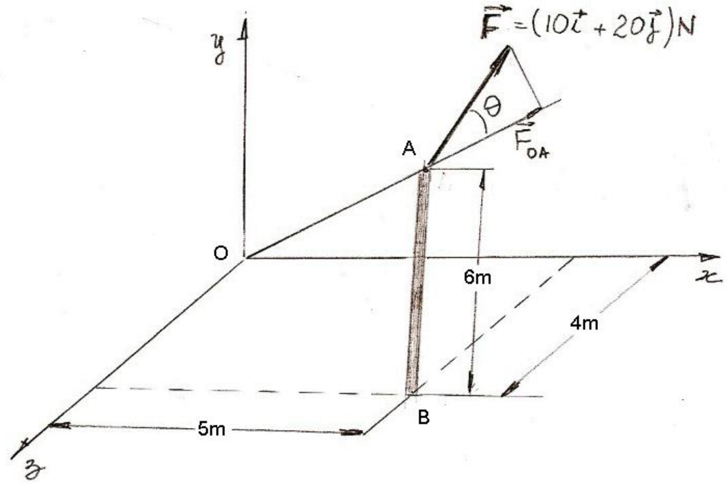


Figura 34

9.20. Exercício resolvido

Determinar a componente da força **F =** (10**i**+20**j**)N na direção do cabo OA



Solução:
A(5; 6; 4)m
$\overrightarrow{r_{OA}} = 5\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ r_{OA}=8,77m
$\overrightarrow{u_{OA}} = 0{,}570\vec{\imath} + 0{,}684\vec{\jmath} + 0{,}456\vec{k}$

$$F_{OA} = \overrightarrow{u_{OA}}.\vec{F} = 19{,}38N$$

9.21. Momento de uma força em relação a um eixo.

O momento de uma força **F** em relação a um eixo (reta) *w* é a projeção sobre este eixo, do momento da força **F** em relação a um ponto qualquer do eixo.

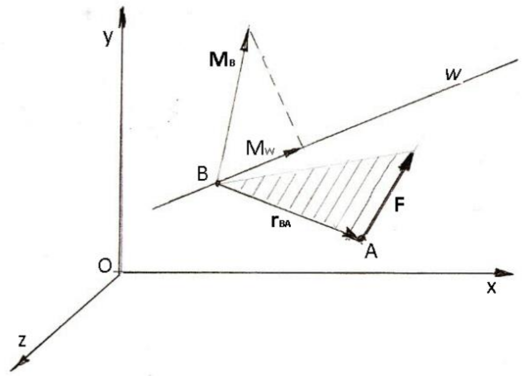


Figura 35

Conforme a Figura 35 o momento de **F** em relação ao ponto B do eixo *w* é

$$\overrightarrow{M_B} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

O vetor $\mathbf{M}_B$ é perpendicular ao plano formado pelo vetor **F** e o ponto B (área sombreada). A projeção do vetor $\mathbf{M}_B$ sobre o eixo *w* nos fornece o momento de **F** em relação ao eixo *w*. Isto é

$$M_w = \overrightarrow{u_w}.\overrightarrow{M_B}$$

Onde $\overrightarrow{u_w}$ é o vetor unitário do eixo *w*.

9.22. Momento de uma força em relação aos eixos cartesianos

Já vimos que o momento de uma força em relação à origem do sistema de coordenadas é $\overrightarrow{M_o} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$ o qual podemos representar na seguinte forma cartesiana

$$\overrightarrow{M_o} = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k}$$

Então M_x é o momento de **F** em relação ao eixo *x*, M_y é o momento de **F** em relação ao eixo *y*, etc.

9.23. Momento de uma força em relação a um eixo qualquer que passa pela origem do sistema de coordenadas

Seja o eixo w que passa pela origem do sistema de coordenadas (Figura 36).

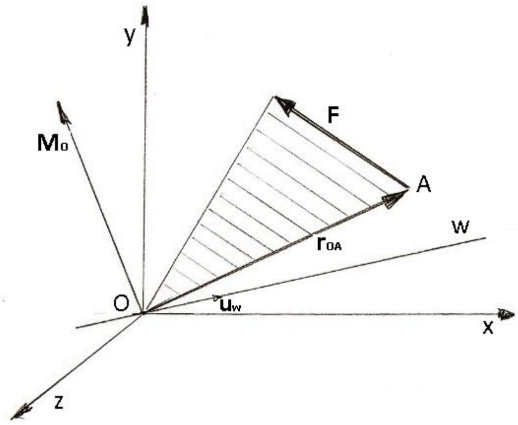


Figura 36

Sendo **Mo** o momento de **F** em relação à origem O, podemos determinar o momento de **F** em relação ao eixo w projetando **Mo** sobre este eixo, isto é,

$$M_w = \vec{u}_w.\vec{M}_O = \vec{u}_w.(\vec{r}_{OA} \times \vec{F}) \qquad (8.10)$$

Colocando $\vec{u}_w = u_x.\vec{\imath} + u_y.\vec{\jmath} + u_z.\vec{k}$ e $\vec{r}_{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z.\vec{k}$ então a equação acima, que é um produto misto, pode ser resolvida pelo determinante

$$M_w = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (8.11)$$

Como regra geral, podemos dizer que o momento de uma força em relação a um eixo, pode ser determinado pelo produto escalar do vetor unitário do eixo e o momento da força em relação a um ponto qualquer deste eixo.

9.24. Exercício resolvido

Uma força $\vec{F} = (25.\vec{\imath} - 82.\vec{\jmath} + 6.\vec{k})N$ está aplicada no ponto A(1,2; 0; -0,4)m. Pede-se determinar:

a) O momento da força $\vec{F}$ em relação à origem do sistema de coordenadas.
b) O módulo do momento da força $\vec{F}$ em relação ao eixo y
c) O módulo do momento da força $\vec{F}$ em relação a um eixo w que passa pela origem do sistema de coordenadas e o ponto B(4; 3; -7)m.
d) O vetor cartesiano do momento da força em relação ao eixo w

Solução

a) $\overrightarrow{M_O} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$, onde $\vec{r}_{OA} = 1{,}2.\vec{\imath} - 0{,}4.\vec{k}$ então

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1{,}2 & 0 & -0{,}4 \\ 25 & -82 & 6 \end{vmatrix}$$

Resposta: $\vec{M}_O = (-32{,}8\,\vec{\imath} - 17{,}2\,\vec{\jmath} - 98{,}4\,\vec{k})Nm$

b) Resposta: 17,2Nm

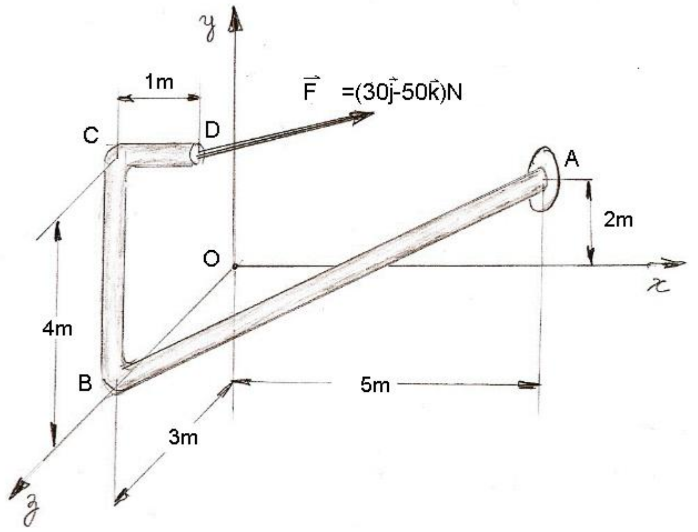
c) $\vec{r}_{OB} = 4\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} - 7\,\vec{k}$ então seu módulo é r_{OB}=8,6 e seu vetor unitário é $\vec{u}_{OB} = 0{,}465\vec{\imath} + 0{,}349\vec{\jmath} - 0{,}814\vec{k}$.

O momento é calculado por
$M_{OB} = \vec{u}_{OB}.\vec{M}_O = (0{,}465\vec{\imath} + 0{,}349\vec{\jmath} - 0{,}814\vec{k}).(-32{,}8\vec{\imath} - 17{,}2\vec{\jmath} - 98{,}4\vec{k}) = 58{,}83Nm$

d) $\vec{M}_{OB} = 58{,}83(0{,}465\,\vec{\imath} + 0{,}349\,\vec{\jmath} - 0{,}814\vec{k})Nm = (27{,}35\vec{\imath} + 20{,}53\vec{\jmath} - 47{,}88\vec{k})Nm$

9.25. Exercício

1) O tubo ABCD está preso em A e na extremidade D atua a força $\vec{F} = (30j - 50k)N$. Pede-se determinar o módulo e o vetor cartesiano do momento da força dada em relação ao eixo AB.



Respostas: M_{AB}=*160N.m* e $\overrightarrow{M_{AB}} = (-129{,}8\vec{\imath} - 52{,}0\vec{\jmath} + 77{,}9\vec{k})Nm$

9.26. Binário

Binário (ou conjugado) é o conjunto de duas forças de mesmo módulo com direções paralelas, mas, de sentidos opostos e cujo efeito é provocar o giro do corpo sobre o qual está sendo aplicado.

A Figura 37 mostra um binário formado por duas forças $\vec{F}$ e $-\vec{F}$ cuja distância entre suas linhas de ação é *d*.

9.27. Momento de um binário

Seja $\vec{r}_{AB}$ o vetor posição que une um ponto A qualquer da linha de ação da força $-\vec{F}$, a um ponto qualquer B, da linha de ação da força $\vec{F}$ (Figura 37). O vetor que define o momento do binário é calculado pelo produto vetorial

$$\vec{M} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$$

A direção do vetor binário $\vec{M}$ (ver sua representação na Figura 37) é perpendicular ao plano das duas forças, seu sentido é definido pela regra da mão direita e seu módulo é calculado por

$$M = r_{AB}.F.sen\theta = F.d$$

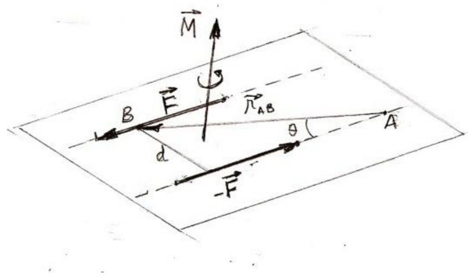


Figura 37

Para distinguir do vetor de uma força o vetor de um momento de binário é geralmente representado por uma seta com um arco orientado circundando a seta conforme a Figura 37.

9.28. Binários equivalentes

Dois binários são **equivalentes** quando possuem o mesmo momento, ou seja, seus vetores devem possuir o mesmo módulo, direção e sentido, mas, não precisam ter o mesmo ponto de aplicação. Binários equivalentes produzem o mesmo efeito.

9.29. Propriedades do binário

- O binário não provoca translação, mas, somente rotação.

- O vetor binário $\vec{M}$ é um vetor livre, ou seja, é um vetor que possui o mesmo efeito quando deslocado paralelamente a si mesmo. Por exemplo, na barra engastada AD da Figura 38 não importa se o binário $\vec{M}$ é aplicado em B ou C que a reação de apoio no engastamento A será a mesma.

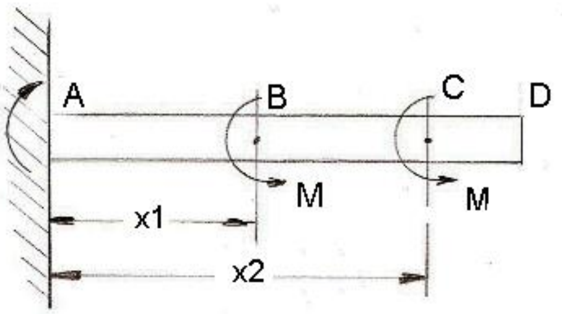


Figura 38

- O vetor binário, sendo um vetor, ele segue à lei de adição dos vetores. Portando, podemos achar a resultante de dois ou mais vetores binários usando a soma vetorial. Do mesmo modo podemos decompor um vetor binário em componentes, como fizemos para os vetores força. Por exemplo, podemos decompor um vetor binário $\vec{M}$ em suas componentes nas direções dos eixos de coordenas, ou seja,

$$\vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z$$

- Binários que tem o mesmo momento e que atuem em planos paralelos são equivalentes. Portanto podemos deslocar um vetor binário de um plano para outro plano paralelo que o efeito é o mesmo. Por exemplo, na Figura 39 o momento M=18kN.m aplicado no plano A ou no B produz a mesma reação de apoio no engastamento.

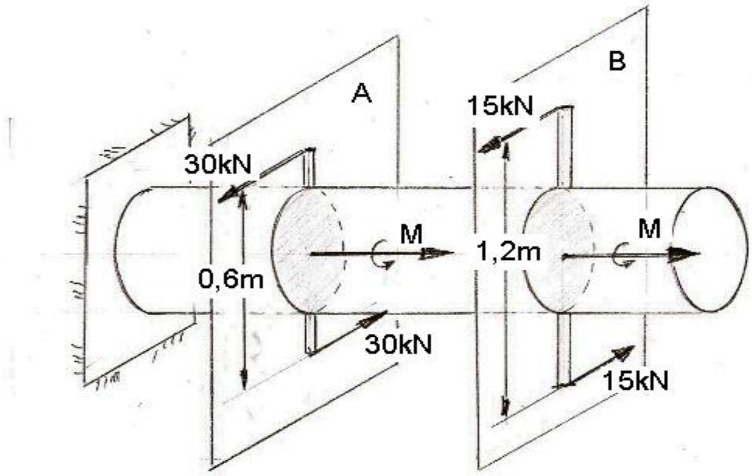


Figura 39

- Pela Figura 39 vemos que binários constituídos de forças diferentes podem ter o mesmo momento, dependendo das distâncias entre as forças, e desde que estejam em planos paralelos ou no mesmo plano, e que tenham mesmo sentido.

- O momento de uma força depende da distância de sua linha de ação ao ponto em relação ao qual estamos calculando o momento. No caso do binário o seu momento depende da distância entre suas linhas de ação. Portando o momento das forças de um binário em relação a um ponto qualquer não depende da posição deste ponto, ou seja, é invariável qualquer que seja a posição do ponto.

9.30. <u>Mudança do ponto de aplicação de uma força sobre um corpo</u>

Se uma força **F** está aplicada em um ponto A de um corpo, podemos aplicá-la em um ponto B do corpo, desde que acrescentemos um binário cujo momento seja igual ao momento de **F** em relação ao ponto B.

9.31. Equilíbrio de um corpo rígido no espaço

Equações vetoriais de equilíbrio de um corpo.

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \text{e} \qquad \sum \overrightarrow{M_P} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

Onde $\sum \vec{F}$ é a soma vetorial de todas as forças externas atuantes no corpo e $\sum \overrightarrow{M_P}$ é a soma dos momentos de todas as forças externas em relação a um ponto qualquer P.

Podemos escrever as equações vetoriais na forma

$$\sum \vec{F} = \sum F_x.\vec{i} + \sum F_y.\vec{j} + \sum F_z.\vec{k} = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_P} = \sum M_x.\vec{i} + \sum M_y.\vec{j} + \sum M_z.\vec{k} = 0$$

As equações escalares são obtidas se igualarmos a zero os coeficientes dos vetores unitários, isto é,

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad \sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

Temos, portanto, 6 equações as quais permitem determinar seis incógnitas. Se existem mais incógnitas que equações temos um sistema hiperestático. Neste caso o corpo tem mais vínculos que o necessário para mantê-lo em equilíbrio. Se o número de reações for menor que o de equações, isto quer dizer que o corpo está parcialmente vinculado, ou seja o sistema é hipostático.

Pode ocorrer casos onde o número de equações é igual ao numero de incógnitas mas o corpo não está adequadamente vinculado. Isto ocorre quando todas as forças de reação interceptam um eixo comum ou quando elas são todas paralelas.

Recomendação de exercícios do livro do Beer [1]

Problemas resolvidos 4.7 a 4.10 (Pág. 259 e seguintes)

Problemas 4.62 a 4.103 (Pág. 267 e seguintes)