Procesos estocásticos I

Tarea: Procesos a tiempo continuo

José Alberto Márquez Luján, 187917

Verano 2022

1. Demuestre que un proceso de Poisson $N(\cdot)$ tiene trayectorias continuas no decrecientes, es decir,

$$P[N(t) \geq N(s)] = 1 \quad \forall t > s \geq 0.$$

Solución.

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq N(s)) &= P(N(t) - N(s) \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s+t-s) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s+h) - N(s) = k). \end{aligned}$$

Como estamos hablando de incrementos estacionarios con $h = t - s$, y sabemos que se distribuyen como una variable aleatoria Poisson, entonces

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq N(s)) &= P(N(t) - N(s) \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^k}{k!} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Demuestre:

a) Si $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ es un PE con incrementos independientes, entonces el PE $Y(\cdot)$ definido por $Y(t) := X(t) - X(0)$, para $t \geq 0$, tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned} Y(t_1) - Y(t_0) &= [X(t_1) - X(0)] - [X(t_0) - X(0)] \\ &= X(t_1) - X(t_0) \\ &\vdots \\ Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= [X(t_n) - X(0)] - [X(t_{n-1}) - X(0)] \\ &= X(t_n) - X(t_{n-1}) \end{aligned}$$

Por hipótesis, los incrementos de $X(\cdot)$ son independientes, por lo que los incrementos de $Y(\cdot)$ también lo son. Ahora bien, para $t = 0$,

$$Y(0) := X(0) - X(0) = 0.$$

b) Recíprocamente, sea $Y(\cdot) = \{Y(t), t \geq 0\}$ un PE con incrementos independientes y $Y(0) = 0$, y sea $X(0)$ una v.a. independiente de $Y(\cdot)$. Entonces el PE $X(\cdot)$ definido por $X(t) := Y(t) + X(0)$ para todo $t \geq 0$ tiene incrementos independietes y estado inicial $X(0)$.

Solución. Falta.

7. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson, y sea X_0 una v.a. independiente de $N(\cdot)$ y con distribución $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$. En este caso, el PE $X(\cdot)$ definido por

$$X(t) := X_0(-1)^{N(t)} \quad t \geq 0$$

se dice que es una señal telegráfica aleatoria. Calcule la media y la función de covarianza de $X(\cdot)$.

Solución.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_0(-1)^{N(t)}] \\ &\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[(-1)^{N(t)}]. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\mathbb{E}[X_0] = (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Por lo que $\mathbb{E}[X] = 0$.

Para la función de covarianza:

$$\begin{aligned} K_X(s,t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\ &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\ &= \mathbb{E}[(X_0(-1)^{N(s)})(X_0(-1)^{N(t)})] \\ &= \mathbb{E}[X_0^2(-1)^{N(s)+N(t)}] \\ &\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[X_0^2]\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}]. \end{aligned}$$

Calculamos el segundo momento:

$$\mathbb{E}[X_0^2] = (1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}] &= \mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)-N(s)+N(s)}]\\ &= \mathbb{E}[(-1)^{N(t)-N(s)}(-1)^{2N(s)}]\\ &= \mathbb{E}[(-1)^{N(t)-N(s)}],\end{aligned}$$

pues $2N(s)$ es par, por lo que $(-1)^{2N(s)} = 1$. Además, como $N(\cdot)$ es un proceso de Poisson,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}] &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(t-s)]^x e^{-\lambda(t-s)}}{x!}\\ &= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(t-s)]^x}{x!}\\ &= e^{-2\lambda(t-s)}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$K_X(s,t) = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

8. Calcule $\mathbb{E}[N(s)N(s+t)]$ para $s, t \geq 0$, donde $N(\cdot)$ es un proceso de Poisson con parámetro λ.

Solución. Sea $s < t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] &= \mathbb{E}\{N(s)[N(s+t) - N(s) + N(s)]\}\\ &= \mathbb{E}\{N(s)[N(s+t) - N(s)]\} + \mathbb{E}[N^2(s)]\\ &= \mathbb{E}\{[N(s) - N(0)][N(s+t) - N(s)]\} + \mathbb{E}[N^2(s)]\end{aligned}$$

Como son intervalos que no se traslapan,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] &= \mathbb{E}[N(s) - N(0)]\mathbb{E}[N(s+t) - N(s)] + \mathbb{E}[N^2(s)]\\ &= \lambda s \lambda(s+t-s) + \mathbb{E}[N^2(s)]\\ &= \lambda s \lambda t + (\mathrm{Var}(N(s)) + \mathbb{E}^2[N(s)])\\ &= \lambda s \lambda t + (\lambda s + \lambda^2 s^2)\\ &= \lambda s(1 + \lambda t + \lambda s).\end{aligned}$$

El caso en el que $t < s$ es análogo.

Generalizando,

$$\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] = \lambda \min\{s,t\}(1 + \lambda t + \lambda s).$$

9. Demuestre que si $N_1(\cdot)$ y $N_2(\cdot)$ son procesos de Poisson independientes con parámentros λ_1 y λ_2, entonces su suma $N_1(t)+N_2(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda_1+\lambda_2$. (Observación: la diferencia $N_1(t)-N_2(t)$ no es un proceso de Poisson).

Solución. Sea $Y(t) = N_1(t)+N_2(t)$. Primero vemos que $Y(\cdot)$ tenga incrementos independientes.

$$\begin{aligned}
Y(t_1)-Y(t_0) &= (N_1(t_1)+N_2(t_1)) - (N_1(t_0)+N_2(t_0)) \\
&= (N_1(t_1)-N_1(t_0)) + (N_2(t_1)-N_2(t_0)) \\
&\vdots \\
Y(t_n)-Y(t_{n-1}) &= (N_1(t_n)+N_2(t_n)) - (N_1(t_{n-1})+N_2(t_{n-1})) \\
&= (N_1(t_n)-N_1(t_{n-1})) + (N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})).
\end{aligned}$$

Como $N_1(\cdot)$ es un proceso de Poisson, entonces tiene incrementos independientes, por lo que $(N_1(t_1)-N_1(t_0)) \perp (N_1(t_2)-N_1(t_1))$. Además, como $N_1(\cdot)\perp N_2(\cdot)$, entonces $(N_1(t_1)-N_1(t_0))\perp(N_2(t_1)-N_2(t_0))$; este razonamiento se utiliza para todos los renglones y así tenemos que el proceso tiene incrementos independientes.

Ahora revisamos que el proceso tenga incrementos estacionarios. Sean $t, s \geq 0$ y $h > 0$.

$$\begin{aligned}
Y(t+h)-Y(t) &= (N_1(t+h)+N_2(t+h)) - (N_1(t)-N_2(t)) \\
&= N_1(t+h)-N_1(t)+N_2(t+h)-N_2(t),
\end{aligned}$$

y sabemos que $N_1(t+h)-N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 h)$ y $N_2(t+h)-N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 h)$. Así pues, como $N_1 \perp N_2$, $Y(t+h)-Y(t) \sim \text{Poisson}((\lambda_1+\lambda_2)h)$. Análogamente, $Y(s+h)-Y(s) \sim \text{Poisson}((\lambda_1+\lambda_2)h)$ y por lo tanto $Y(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios.

10. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson con intensidad media λ, y sea T na v.a. positiva independiente de $N(\cdot)$. Calcule $\mathbb{E}[N(T)]$ y $\text{Var}(N(T))$ en cada uno de los siguientes casos en los que T tiene distribución:

a) exponencial con parámetro μ

Si $T \sim \text{Exp}(\mu)$, entonces $\mathbb{E}[T] = 1/\mu$ y $\text{Var}(T) = 1/\mu^2$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(T)] &\overset{\text{c)}}{=} \lambda \mathbb{E}[T] \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \\
\text{Var}(N(T)) &\overset{\text{c)}}{=} \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \text{Var}(T) \\
&= \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}.
\end{aligned}$$

b) uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$

Si $T \sim \text{Unif}(a,b)$, entonces $\mathbb{E}[T] = \frac{a+b}{2}$ y $\text{Var}(T) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Así pues,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(T)] &\overset{c)}{=} \lambda\mathbb{E}[T]\\ &= \lambda\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ \text{Var}(N(T)) &\overset{c)}{=} \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\text{Var}(T)\\ &= \lambda\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\lambda^2(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

c) continua arbitraria con densidad $f(t)$

Vemos que, como $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$,

$$\mathbb{E}[N(T) \mid T = t] = \lambda t,$$

por lo que

$$\mathbb{E}[N(T) \mid T] = \lambda T,$$

y, por propiedades de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(T)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(T) \mid T]]\\ &= \mathbb{E}[\lambda T]\\ &= \lambda\mathbb{E}[T].\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N^2(T) \mid T = t] &= \text{Var}(N(t)) + \mathbb{E}^2[N(t)]\\ &= \lambda t + \lambda^2 t^2\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[N^2(T) \mid T] = \lambda T + \lambda^2 T^2.$$

Por propiedades de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N^2(T)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N^2(T) \mid T]]\\ &= \mathbb{E}[\lambda T + \lambda^2 T^2]\\ &= \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\mathbb{E}[T^2].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Var}(N(T)) &= \mathbb{E}[N^2(T)] - \mathbb{E}^2[N(T)]\\ &= \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\mathbb{E}[T^2] - \lambda^2\mathbb{E}^2[T]\\ &= \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\text{Var}(T).\end{aligned}$$

11. Sea $N(\cdot)$ un proceso Poisson y sea 0 ¡ s ¡ t. Demuestre que la distribución condicional de $N(s)$, dado que $N(t) = n$, es la distribución $Bin(n,p)$ con $p = s/t$, es decir,

$$P[N(s) = k \mid N(t) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{para k = 0,1,...,n.}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
P(N(s)=k \mid N(t)=n) &= \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{P(N(s)-N(0)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \\
&\overset{\text{ind}}{=} \frac{P[N(s)-N(0)=k]P[N(t)-N(s)=n-k]}{P(N(t)=n)} \\
&= \frac{\left(\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!}\right)\left(\frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k e^{-\lambda t}e^{\lambda s}(\lambda(t-s))^{n-k}n!}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k s^k \lambda^{n-k}(t-s)^{n-k}}{\lambda^n t^n} \\
&= \binom{n}{k}\frac{s^k(t-s)^{n-k}}{t^k t^{n-k}} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(N(s)=k \mid N(t)=n) \sim \text{Bin}\left(n, \frac{s}{t}\right)$.

12.

Solución. ¿?

13. El número de personas que pasan frente a un restaurante se comporta como un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = 1000$ personas por hora. Suponga que cada persona tiene probabilidad $p = 0.01$ de entrar al restaurante, y sea Y el número de personas que entran en un periodo de 10 minutos. Calcule $\mathbb{E}[Y]$, $\text{Var}(Y)$ y $P(Y \geq 2)$. Sugerencia: use el ejercicio anterior.

Sea N el número de personas que pasa frente a un restaurante. Entonces, por hipótesis, $N(t) \sim Poisson(1000t)$, en donde $t = 10$ mins $= 1/6$ de hora. Así pues, $N(1/6) \sim Poisson(500/3)$.

Ahora, sea $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ el PE en el que $X(t)$ es el número de veces que una persona entra al restaurante en el intervalo $[0,t]$. Por el inciso anterior, $X(\cdot)$ es un proceso Poisson con parámetro $\lambda p = 10$; es decir, $X(t) \sim Poisson(10t)$.

Nótese que podemos definir a Y en términos de X, a saber:

$$Y = X(t+1/6) - X(t)$$

Pero $X(t+1/6) - X(t) \sim Poisson(5/3)$, ya que X tiene incrementos estacionarios. Así pues:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{5}{3}, \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{5}{3}, \quad \text{y} \\
P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) \\
&= 1 - P(Y \leq 1) \\
&= 1 - \left(\frac{e^{-5/3} \frac{5}{3}^0}{0!} + \frac{e^{-5/3} \frac{5}{3}^1}{1!} \right) \\
&= 0.4963
\end{aligned}$$

14. El puente de Poisson. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson con parámetro λ, y sea $N_p(t) := N(t) - tN(1)$, para $0 \leq t \leq 1$, el llamado "puente de Poisson". Calcule $\mathbb{E}[N_p(t)]$ y la función de covarianza de $N_p(\cdot)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_p(t)] &= \mathbb{E}[N(t) - tN(1)] \\
&= \mathbb{E}[N(t)] - t\mathbb{E}[N(1)] \\
&= \lambda t - t(\lambda) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{Np}(s,t) &= \mathbb{E}[N_p(s)N_p(t)] - \mathbb{E}[N_p(s)]\mathbb{E}[N_p(t)] \\
&= \mathbb{E}[N_p(s)N_p(t)] \\
&= \mathbb{E}[(N(s) - sN(1))(N(t) - tN(1)] \\
&= \mathbb{E}[(N(s)N(t) - sN(1)N(t) - t(N(1)N(s) + stN^2(1)] \\
&= \mathbb{E}[N(s)N(t)] - s\mathbb{E}[N(1)N(t)] - t\mathbb{E}[N(1)N(s)] + st\mathbb{E}[N^2(1)].
\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(N(s)N(t)] &= K_n(s,t) + \mathbb{E}[N(s)]\mathbb{E}[N(t)] \\
&= \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st \\
\mathbb{E}[N^2(1)] &= Var(N(1)) + E^2[N(1)] \\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
K_{N_p}(s,t) &= \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st - s(\lambda \min(1,t) + \lambda^2 t) - t(\lambda \min(1,s) + \lambda^2 s) + st(\lambda + \lambda^2) \\
&= \lambda \min(s,t) - s\lambda \min(1,t) - t(\lambda \min(1,s)) \\
&= \lambda \min(s,t) - s\lambda t - t\lambda s \\
&= \lambda \min(s,t) - 2\lambda st,
\end{aligned}$$

pues $t \leq 1$ y $s \leq 1$.

15. El puente browniano. Repita el ejercicio anterior pero para el "puente browniano" $W_p(t) := W(t) - tW(1)$, con $0 \leq t \leq 1$, en donde $W(\cdot)$ es un proceso de Weiner o movimiento browniano.

Solución.

$$\begin{aligned}
W(t) = W(t) - W(0) &= N(0, \sigma^2 t)\text{es un proceso de Weiner} \\
\mathbb{E}[W_p(t)] &= \mathbb{E}[W(t) - tW(1)] \\
&= \mathbb{E}[W(t)] - t\mathbb{E}[W(1)] \\
&= 0, \text{ pues es un proceso Weiner} \\
K_{Wp}(s,t) &= \mathbb{E}[W_p(s)W_p(t)] - \mathbb{E}[W_p(s)]\mathbb{E}[W_p(t)] \\
&= \mathbb{E}[W_p(s)W_p(t)] \\
&= \mathbb{E}[(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1)] \\
&= \mathbb{E}[(W(s)W(t) - sW(1)W(t) - t(W(1)W(s) + stW^2(1)]
\end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W(s)W(t)] &= K_w(s,t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\
&= \sigma \text{min(s,t)} \\
\mathbb{E}[stW^2(1)] &= Var(W(1)) + E^2[W(1)] \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{wp}(s,t) =& \sigma^2 \min(s,t) - \sigma^2 s \min(1,t) - \sigma^2 s \min(s,1) - \sigma^2 st \\
=& \sigma^2 \min(s,t) - \sigma^2 st - \sigma^2 st - \sigma^2 st \\
=& \sigma^2 \min(s,t) - \sigma^2 st \\
=& \sigma^2 (\min(s,t) - st)
\end{aligned}$$

16. Sea $X(t) = \{X(t), t \geq 0\}$ un PE que tiene incrementos independientes y función media $m(t) := \mathbb{E}[X(t)]$ finita para todo $t \geq 0$. Demuestre que si $0 \leq t_1 < \cdots t_n < t_{n+1}$, entonces

$$\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] = X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] &= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) + X(t_n) - X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&\quad + \mathbb{E}[X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n)] + X(t_n) \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1})] - \mathbb{E}[X(t_n)] + X(t_n) \\
&= X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).
\end{aligned}$$

Nota. En lo sejercicios siguientes, $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$.

17. Demuestre que $\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] = \sigma^2 \text{mín}(s-a, t-a)$ para todo $s, t \geq a \geq 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))] &= \mathbb{E}[W(s)W(t)-W(s)W(a)-W(t)W(a)+W^2(a)]\\ &= \mathbb{E}[W(s)W(t)]-\mathbb{E}[W(s)W(a)]-\mathbb{E}[W(t)W(a)]\\ &\quad +\mathbb{E}[W^2(a)].\end{aligned}$$

Recordemos que $K_W(s,t)=\operatorname{Cov}(W(s),W(t))=\mathbb{E}[W(s)W(t)]-\mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(s)W(t)] &= K_W(s,t)+\mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]\\ &= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t)+\mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]\\ &= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t),\end{aligned}$$

pues en clase vimos que $K_W(s,t)=\lambda \operatorname{mín}(s,t)$. Análogamente,

$$\mathbb{E}[W(s)W(a)]=\sigma^2 \operatorname{mín}(s,a) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[W(t)W(a)]=\sigma^2 \operatorname{mín}(t,a).$$

También sabemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W^2(a)] &= \operatorname{Var}(W(a))+\mathbb{E}^2[W(a)]\\ &= \sigma^2 a.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W(s)-W(a))(W(t)-W(a))] &= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t)-\sigma^2 \operatorname{mín}(s,a)-\sigma^2 \operatorname{mín}(a,t)+\sigma^2 a\\ &= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t)-\sigma^2 a-\sigma^2 a+\sigma^2 a\\ &= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t)-\sigma^2 a\\ &= \sigma^2[\operatorname{mín}(s,t)-a]\\ &= \sigma^2 \operatorname{mín}(s-a,t-a).\end{aligned}$$

18. Demuestre que $W(1)+\cdots+W(n)$ tiene distribución $N(0,s_n)$, en donde

$$s_n := \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sugerencia: use la independencia de los incrementos de $W(\cdot)$ y la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución. Sean $a_1=n, a_2=n-1,\ldots,a_{n-1}=2, a_n=1$. Con estos coeficientes, construimos una combinación lineal de incrementos independientes, a saber,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i(W(i)-W(i-1)) &= a_1(W(1)-W(0))+a_2(W(2)-W(1))+\cdots\\ &\quad + a_{n-1}(W(n-1)-W(n-2))+a_n(W(n)-W(n-1))\\ &= (a_1-a_2)W(1)+(a_2-a_3)W(2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)W(n-1)\\ &\quad + a_nW(n)\\ &= W(1)+W(2)+\cdots+W(n-1)+W(n).\end{aligned}$$

Así pues, es posible expresar a $W(1)+\cdots+W(n)$ como una combinación lineal de incrementos independientes y, además, como tratamos con un proceso de Wiener, entonces

$$W(i)-W(i-1)\sim N(0,\sigma^2),$$

tomando a $h=1$. Por lo tanto, como podemos expresar a $W(1)+\cdots+W(n)$ con una combinación lineal de componentes independientes y distribuidos normalmente, entonces $W(1)+\cdots+W(n)$ se distribuye normalmente, de manera que

$$W(1)+\cdots+W(n)=\sum_{i=1}^{n}a_i(W(i)-W(i-1))\sim N(0,\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2),$$

pero

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i^2&=\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$W(1)+\cdots+W(n)\sim N\left(0,\sigma^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

19. Demuestre que cada uno de los siguientes PEs es de Wiener:

a) $W_1(t):=a^{-1/2}W(at)$ para $t\geq 0$ (donde a es una constante)

Solución.

i) P.D. que $W_1(0)=0$ c.s.

$$\begin{aligned}W_1(0)&:=a^{-1/2}W(a0)\\&=a^{-1/2}W(0)\\&=0\quad\text{c.s.}\end{aligned}$$

pues $W(0)=0$ c.s. por ser proceso de Wiener.

ii) P.D. que $W_1(\cdot)$ tiene incrementos independientes. Sean $0\leq t_0<t_1<t_n$

$$\begin{aligned}W_1(t_1)-W_1(t_0)&=a^{-1/2}W(at_1)-a^{-1/2}W(at_0)=a^{-1/2}[W(at_1)-W(at_0)]\\W_1(t_2)-W_1(t_1)&=a^{-1/2}W(at_2)-a^{-1/2}W(at_1)=a^{-1/2}[W(at_2)-W(at_1)]\\&\vdots\\W_1(t_n)-W_1(t_{n-1})&=a^{-1/2}W(at_n)-a^{-1/2}W(at_{n-1})=a^{-1/2}[W(at_n)-W(at_{n-1})]\end{aligned}$$

Como $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener, tiene incrementos independientes, por lo que

$$[W(at_1)-W(at_0)]\perp[W(at_2)-W(at_1)]\perp\cdots\perp[W(at_n)-W(at_{n-1})]$$

y, por lo tanto, $W_1(\cdot)$ tiene incrementos independientes.

iii) P.D. que $W_1(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios con $W_1(t+h) - W_1(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$.

$$\begin{aligned} W_1(t+h) - W_1(t) &= a^{-1/2} W(a(t+h)) - a^{-1/2} W(at) \\ &= a^{-1/2}[W(a(t+h)) - W(at)] \\ &= a^{-1/2}[W(at+ah) - W(at)]. \end{aligned}$$

Pero $[W(at+ah) - W(at)] \sim N(0, \sigma^2 ah)$, por lo que

$$\begin{aligned} W_1(t+h) - W_1(t) &\sim a^{-1/2} N(0, \sigma^2 ah) \\ &= N(a^{-1/2} 0, (a^{-1/2})^2 \sigma^2 ah) \\ &= N(0, \sigma^2 h). \end{aligned}$$

Así, $W_1(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios distribuidos normalmente y, por lo tanto, es un PE de Wiener.

b) $W_2(t) := tW(1/t)$ para $t > 0$ y $W_2(0) := 0$

Solución.

i) $W_2(0) = 0$ por hipótesis.

ii) P.D. que $W_2(\cdot)$ tiene incrementos independientes. Sean $0 \leq t_0 < t_1 < t_n$

$$\begin{aligned} W_2(t_1) - W_2(t_0) &= t_1 W(1/t_1) - t_0 W(1/t_0) \\ W_2(t_2) - W_2(t_1) &= t_2 W(1/t_2) - t_1 W(1/t_1) \\ &\vdots \\ W_2(t_n) - W_2(t_{n-1}) &= t_n W(1/t_n) - t_{n-1} W(1/t_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener, tiene incrementos independientes, por lo que

$$[t_1 W(1/t_1) - t_0 W(1/t_0)] \perp [t_2 W(1/t_2) - t_1 W(1/t_1)] \perp \cdots \perp [t_n W(1/t_n) - t_{n-1} W(1/t_{n-1})]$$

y, por lo tanto, $W_2(\cdot)$ tiene incrementos independientes.

iii) P.D. que $W_2(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios con $W_2(t+h) - W_2(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$.

$$\begin{aligned} W_2(t+h) - W_2(t) &= (t+h) W(1/(t+h)) - tW(1/t) \\ &= -t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h)). \end{aligned}$$

Como estamos tratando con una combinación lineal de elementos independientes y distribuidos normalmente, entonces la combinación es distribuida normalmente. Es decir, sea

$$Y := -t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h)).$$

Entonces $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, en donde

$$\begin{aligned} \mu_y &= \mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}\{-t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h))\} \\ &= -t\mathbb{E}[W(1/t)] + t\mathbb{E}[W(1/(t+h))] + h\mathbb{E}[W(1/(t+h))] \\ &= -t0 + t0 + h0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \operatorname{Var}(Y) \\
&= \operatorname{Var}(-t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h))) \\
&= \operatorname{Var}(-t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + h[W(1/(t+h)) - W(0)]) \\
&\overset{\text{ind}}{=} t^2 \operatorname{Var}[W(1/t) - W(1/(t+h))] + h^2 \operatorname{Var}[W(1/(t+h)) - W(0)].
\end{aligned}
$$

Como $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener, entonces $W(1/t) - W(1/(t+h)) \sim N(0, \sigma^2(1/t - 1/(t+h)))$, por lo que

$$
\begin{aligned}
t^2 \operatorname{Var}[W(1/t) - W(1/(t+h))] &= t^2[\sigma^2(1/t - 1/(t+h))] \\
&= t^2\sigma^2 \frac{t+h-t}{t(t+h)} \\
&= \frac{t\sigma^2 h}{t+h}.
\end{aligned}
$$

Similarmente, $W(1/(t+h)) - W(0) \sim N(0, \sigma^2(1/(t+h)))$, por lo que

$$
h^2 \operatorname{Var}[W(1/(t+h)) - W(0)] = \frac{h^2\sigma^2}{t+h}.
$$

Así pues, sumando ambos resultados,

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 &= \frac{t\sigma^2 h}{t+h} + \frac{h^2\sigma^2}{t+h} \\
&= \sigma^2 h \left(\frac{t}{t+h} + \frac{h}{t+h} \right) \\
&= \sigma^2 h \left(\frac{t+h}{t+h} \right) \\
&= \sigma^2 h.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $W_2(t+h) - W_2(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$ y, así, $W_2(\cdot)$ es un PE de Wiener.

20. Calcule $\mathbb{E}[X(t)]$ y $\operatorname{Cov}(X(s), X(t))$ para cada uno de los siguientes procesos

a) $X(t) := W^2(t)$ para $t \geq 0$

Solución.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[W^2(t)] \\
&= \operatorname{Var}(W(t)) + \mathbb{E}^2[W(t)] \\
&= \sigma^2 t,
\end{aligned}
$$

pues $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ por ser PE de Wiener.

Ahora bien, si $s < t$,

$$\begin{aligned}
K_X(s,t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
&= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \sigma^2 s \sigma^2 t \\
&= \mathbb{E}[W^2(s)W^2(t)] - \sigma^4 st \\
&= \mathbb{E}[(W(s)W(t))^2] - \sigma^4 st \\
&= \mathbb{E}[(W(s)[W(t) - W(s) + W(s)])^2] - \sigma^4 st \\
&= \mathbb{E}[(W(s)(W(t) - W(s)) + W^2(s))^2] - \sigma^4 st \\
&= \mathbb{E}[W^2(s)(W(t) - W(s))^2 + 2W^3(s)(W(t) - W(s)) + W^4(s)] - \sigma^4 st \\
&= \mathbb{E}[W^2(s)(W(t) - W(s))^2] + 2\mathbb{E}[W^3(s)(W(t) - W(s))] + \mathbb{E}[W^4(s)] - \sigma^4 st \\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[W^2(s)]\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2] + 2\mathbb{E}[W^3(s)]\mathbb{E}[W(t) - W(s)] + \mathbb{E}[W^4(s)] - \sigma^4 st \\
&= (\sigma^2 s)[\sigma^2(t - s)] + \mathbb{E}[W^4(s)] - \sigma^4 st \\
&= \sigma^4 s(t - s) + 3\sigma^4 s^2 - \sigma^4 st \\
&= \sigma^4 st - \sigma^4 s^2 + 3\sigma^4 s^2 - \sigma^4 st \\
&= 2\sigma^4 s^2.
\end{aligned}$$

Análogamente, si $t < s$, $K_X(s,t) = 2\sigma^4 t^2$. Por lo tanto, $K_X(s,t) = 2\sigma^4(\text{mín}(s,t))^2$.

b) $X(t) := e^{-at}W(e^{2at})$ para $t \geq 0$, donde $a \geq 0$ es constante.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[e^{-at}W(e^{2at})] \\
&= e^{-at}\mathbb{E}[W(e^{2at})] \\
&= e^{-at}0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
K_X(s,t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
&= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\
&= \mathbb{E}[e^{-as}W(e^{2as})e^{-at}W(e^{2at})] \\
&= e^{-a(s+t)}\mathbb{E}[W(e^{2as})W(e^{2at})] \\
&= e^{-a(s+t)}(K_W(e^{2as}, e^{2at}) + \mathbb{E}[W(e^{2as})]\mathbb{E}[W(e^{2at})]) \\
&= e^{-a(s+t)}K_W(e^{2as}, e^{2at}) \\
&= e^{-a(s+t)}\sigma^2 \text{mín}(e^{2as}, e^{2at}).
\end{aligned}$$