Procesos estocásticos I

Tarea: Procesos a tiempo continuo

José Alberto Márquez Luján, 187917

Verano 2022

16. Sea $X(t) = \{X(t), t \geq 0\}$ un PE que tiene incrementos independientes y función media $m(t) := \mathbb{E}[X(t)]$ finita para todo $t \geq 0$. Demuestre que si $0 \leq t_1 < \cdots t_n < t_{n+1}$, entonces

$$\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] = X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] &= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) + X(t_n) - X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&\quad + \mathbb{E}[X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n)] + X(t_n) \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1})] - \mathbb{E}[X(t_n)] + X(t_n) \\
&= X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).
\end{aligned}$$

Nota. En lo sejercicios siguientes, $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$.

17. Demuestre que $\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] = \sigma^2 \operatorname{mín}(s - a, t - a)$ para todo $s, t \geq a \geq 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] &= \mathbb{E}[W(s)W(t) - W(s)W(a) - W(t)W(a) + W^2(a)] \\
&= \mathbb{E}[W(s)W(t)] - \mathbb{E}[W(s)W(a)] - \mathbb{E}[W(t)W(a)] \\
&\quad + \mathbb{E}[W^2(a)].
\end{aligned}$$

Recordemos que $K_W(s,t) = \operatorname{Cov}(W(s), W(t)) = \mathbb{E}[W(s)W(t)] - \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W(s)W(t)] &= K_W(s,t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\
&= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\
&= \sigma^2 \operatorname{mín}(s,t),
\end{aligned}$$

pues en clase vimos que $K_W(s,t) = \lambda \min(s,t)$. Análogamente,

$$\mathbb{E}[W(s)W(a)] = \sigma^2 \min(s,a) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[W(t)W(a)] = \sigma^2 \min(t,a).$$

También sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W^2(a)] &= \operatorname{Var}(W(a)) + \mathbb{E}^2[W(a)] \\
&= \sigma^2 a.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] &= \sigma^2 \min(s,t) - \sigma^2 \min(s,a) - \sigma^2 \min(a,t) + \sigma^2 a \\
&= \sigma^2 \min(s,t) - \sigma^2 a - \sigma^2 a + \sigma^2 a \\
&= \sigma^2 \min(s,t) - \sigma^2 a \\
&= \sigma^2 [\min(s,t) - a] \\
&= \sigma^2 \min(s-a, t-a).
\end{aligned}$$

18. Demuestre que $W(1) + \cdots + W(n)$ tiene distribución $N(0, s_n)$, en donde

$$s_n := \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sugerencia: use la independencia de los incrementos de $W(\cdot)$ y la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$