Procesos estocásticos I

Tarea: Procesos a tiempo continuo

José Alberto Márquez Luján, 187917

Verano 2022

1. Demuestre que un proceso de Poisson $N(\cdot)$ tiene trayectorias continuas no decrecientes, es decir,

$$P[N(t) \geq N(s)] = 1 \quad \forall t > s \geq 0.$$

Solución.

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq N(s)) &= P(N(t) - N(s) \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s+t-s) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s+h) - N(s) = k). \end{aligned}$$

Como estamos hablando de incrementos estacionarios con $h = t - s$, y sabemos que se distribuyen como una variable aleatoria Poisson, entonces

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq N(s)) &= P(N(t) - N(s) \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(t-s)}[\lambda(t-s)]^k}{k!} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Demuestre:

a) Si $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ es un PE con incrementos independientes, entonces el PE $Y(\cdot)$ definido por $Y(t) := X(t) - X(0)$, para $t \geq 0$, tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}
Y(t_1) - Y(t_0) &= [X(t_1) - X(0)] - [X(t_0) - X(0)] \\
&= X(t_1) - X(t_0) \\
&\vdots \\
Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= [X(t_n) - X(0)] - [X(t_{n-1}) - X(0)] \\
&= X(t_n) - X(t_{n-1})
\end{aligned}$$

Por hipótesis, los incrementos de $X(\cdot)$ son independientes, por lo que los incrementos de $Y(\cdot)$ también lo son. Ahora bien, para $t = 0$,

$$Y(0) := X(0) - X(0) = 0.$$

b) Recíprocamente, sea $Y(\cdot) = \{Y(t), t \geq 0\}$ un PE con incrementos independientes y $Y(0) = 0$, y sea $X(0)$ una v.a. independiente de $Y(\cdot)$. Entonces el PE $X(\cdot)$ definido por $X(t) := Y(t) + X(0)$ para todo $t \geq 0$ tiene incrementos independietes y estado inicial $X(0)$.

Solución. Falta.

7. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson, y sea X_0 una v.a. independiente de $N(\cdot)$ y con distribución $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$. En este caso, el PE $X(\cdot)$ definido por

$$X(t) := X_0(-1)^{N(t)} \quad t \geq 0$$

se dice que es una señal telegráfica aleatoria. Calcule la media y la función de covarianza de $X(\cdot)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_0(-1)^{N(t)}] \\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[X_0]\mathbb{E}[(-1)^{N(t)}].
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\mathbb{E}[X_0] = (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Por lo que $\mathbb{E}[X] = 0$.

Para la función de covarianza:

$$\begin{aligned}
K_X(s,t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
&= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\
&= \mathbb{E}[(X_0(-1)^{N(s)})(X_0(-1)^{N(t)})] \\
&= \mathbb{E}[X_0^2(-1)^{N(s)+N(t)}] \\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[X_0^2]\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}].
\end{aligned}$$

Calculamos el segundo momento:

$$\mathbb{E}[X_0^2] = (1)^2\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}] &= \mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)-N(s)+N(s)}]\\ &= \mathbb{E}[(-1)^{N(t)-N(s)}(-1)^{2N(s)}]\\ &= \mathbb{E}[(-1)^{N(t)-N(s)}],\end{aligned}$$

pues $2N(s)$ es par, por lo que $(-1)^{2N(s)} = 1$. Además, como $N(\cdot)$ es un proceso de Poisson,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}] &= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t-s)]^x e^{-\lambda(t-s)}}{x!}\\ &= e^{-\lambda(t-s)}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t-s)]^x}{x!}\\ &= e^{-2\lambda(t-s)}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$K_X(s,t) = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

8. Calcule $\mathbb{E}[N(s)N(s+t)]$ para $s, t \geq 0$, donde $N(\cdot)$ es un proceso de Poisson con parámetro λ.

Solución. Sea $s < t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] &= \mathbb{E}\{N(s)[N(s+t) - N(s) + N(s)]\}\\ &= \mathbb{E}\{N(s)[N(s+t) - N(s)]\} + \mathbb{E}[N^2(s)]\\ &= \mathbb{E}\{[N(s) - N(0)][N(s+t) - N(s)]\} + \mathbb{E}[N^2(s)]\end{aligned}$$

Como son intervalos que no se traslapan,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] &= \mathbb{E}[N(s) - N(0)]\mathbb{E}[N(s+t) - N(s)] + \mathbb{E}[N^2(s)]\\ &= \lambda s\lambda(s+t-s) + \mathbb{E}[N^2(s)]\\ &= \lambda s\lambda t + (\mathrm{Var}(N(s)) + \mathbb{E}^2[N(s)])\\ &= \lambda s\lambda t + (\lambda s + \lambda^2 s^2)\\ &= \lambda s(1 + \lambda t + \lambda s).\end{aligned}$$

El caso en el que $t < s$ es análogo.

Generalizando,

$$\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] = \lambda \min\{s,t\}(1 + \lambda t + \lambda s).$$

9. Demuestre que si $N_1(\cdot)$ y $N_2(\cdot)$ son procesos de Poisson independientes con parámentros λ_1 y λ_2, entonces su suma $N_1(t) + N_2(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$. (Observación: la diferencia $N_1(t) - N_2(t)$ no es un proceso de Poisson).

Solución. Sea $Y(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Primero vemos que $Y(\cdot)$ tenga incrementos independientes.

$$\begin{aligned}
Y(t_1) - Y(t_0) &= (N_1(t_1) + N_2(t_1)) - (N_1(t_0) + N_2(t_0)) \\
&= (N_1(t_1) - N_1(t_0)) + (N_2(t_1) - N_2(t_0)) \\
&\vdots \\
Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= (N_1(t_n) + N_2(t_n)) - (N_1(t_{n-1}) + N_2(t_{n-1})) \\
&= (N_1(t_n) - N_1(t_{n-1})) + (N_2(t_n) - N_2(t_{n-1})).
\end{aligned}$$

Como $N_1(\cdot)$ es un proceso de Poisson, entonces tiene incrementos independientes, por lo que $(N_1(t_1) - N_1(t_0)) \perp (N_1(t_2) - N_1(t_1))$. Además, como $N_1(\cdot) \perp N_2(\cdot)$, entonces $(N_1(t_1) - N_1(t_0)) \perp (N_2(t_1) - N_2(t_0))$; este razonamiento se utiliza para todos los renglones y así tenemos que el proceso tiene incrementos independientes.

Ahora revisamos que el proceso tenga incrementos estacionarios. Sean $t, s \geq 0$ y $h > 0$.

$$\begin{aligned}
Y(t+h) - Y(t) &= (N_1(t+h) + N_2(t+h)) - (N_1(t) - N_2(t)) \\
&= N_1(t+h) - N_1(t) + N_2(t+h) - N_2(t),
\end{aligned}$$

y sabemos que $N_1(t+h) - N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 h)$ y $N_2(t+h) - N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 h)$. Así pues, como $N_1 \perp N_2$, $Y(t+h) - Y(t) \sim \text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2)h)$. Análogamente, $Y(s+h) - Y(s) \sim \text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2)h)$ y por lo tanto $Y(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios.

10. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson con intensidad media λ, y sea T na v.a. positiva independiente de $N(\cdot)$. Calcule $\mathbb{E}[N(T)]$ y $\text{Var}(N(T))$ en cada uno de los siguientes casos en los que T tiene distribución:

a) exponencial con parámetro μ

Si $T \sim \text{Exp}(\mu)$, entonces $\mathbb{E}[T] = 1/\mu$ y $\text{Var}(T) = 1/\mu^2$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(T)] &\overset{\text{c)}}{=} \lambda \mathbb{E}[T] \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \\
\text{Var}(N(T)) &\overset{\text{c)}}{=} \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \text{Var}(T) \\
&= \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}.
\end{aligned}$$

b) uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$

Si $T \sim \text{Unif}(a, b)$, entonces $\mathbb{E}[T] = \frac{a+b}{2}$ y $\text{Var}(T) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(T)] &\overset{\text{c)}}{=} \lambda\mathbb{E}[T] \\
&= \lambda\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\text{Var}(N(T)) &\overset{\text{c)}}{=} \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\text{Var}(T) \\
&= \lambda\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\lambda^2(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

c) continua arbitraria con densidad $f(t)$

Vemos que, como $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$,

$$\mathbb{E}[N(T) \mid T = t] = \lambda t,$$

por lo que

$$\mathbb{E}[N(T) \mid T] = \lambda T,$$

y, por propiedades de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(T)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(T) \mid T]] \\
&= \mathbb{E}[\lambda T] \\
&= \lambda\mathbb{E}[T].
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N^2(T) \mid T = t] &= \text{Var}(N(t)) + \mathbb{E}^2[N(t)] \\
&= \lambda t + \lambda^2 t^2
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[N^2(T) \mid T] = \lambda T + \lambda^2 T^2.$$

Por propiedades de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N^2(T)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N^2(T) \mid T]] \\
&= \mathbb{E}[\lambda T + \lambda^2 T^2] \\
&= \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\mathbb{E}[T^2].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(N(T)) &= \mathbb{E}[N^2(T)] - \mathbb{E}^2[N(T)] \\
&= \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\mathbb{E}[T^2] - \lambda^2\mathbb{E}^2[T] \\
&= \lambda\mathbb{E}[T] + \lambda^2\text{Var}(T).
\end{aligned}$$

16. Sea $X(t) = \{X(t), t \geq 0\}$ un PE que tiene incrementos independientes y función media $m(t) := \mathbb{E}[X(t)]$ finita para todo $t \geq 0$. Demuestre que si $0 \leq t_1 < \cdots t_n < t_{n+1}$, entonces

$$\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] = X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] &= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) + X(t_n) - X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&\quad + \mathbb{E}[X(t_n) \mid X(t_1), \ldots, X(t_n)] \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n)] + X(t_n) \\
&= \mathbb{E}[X(t_{n+1})] - \mathbb{E}[X(t_n)] + X(t_n) \\
&= X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).
\end{aligned}$$

Nota. En lo sejercicios siguientes, $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$.
17. Demuestre que $\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] = \sigma^2 \text{mín}(s-a, t-a)$ para todo $s, t \geq a \geq 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] &= \mathbb{E}[W(s)W(t) - W(s)W(a) - W(t)W(a) + W^2(a)] \\
&= \mathbb{E}[W(s)W(t)] - \mathbb{E}[W(s)W(a)] - \mathbb{E}[W(t)W(a)] \\
&\quad + \mathbb{E}[W^2(a)].
\end{aligned}$$

Recordemos que $K_W(s,t) = \text{Cov}(W(s), W(t)) = \mathbb{E}[W(s)W(t)] - \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W(s)W(t)] &= K_W(s,t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\
&= \sigma^2 \text{mín}(s,t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\
&= \sigma^2 \text{mín}(s,t),
\end{aligned}$$

pues en clase vimos que $K_W(s,t) = \lambda \, \text{mín}(s,t)$. Análogamente,

$$\mathbb{E}[W(s)W(a)] = \sigma^2 \text{mín}(s,a) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[W(t)W(a)] = \sigma^2 \text{mín}(t,a).$$

También sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W^2(a)] &= \text{Var}(W(a)) + \mathbb{E}^2[W(a)] \\
&= \sigma^2 a.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] &= \sigma^2 \text{mín}(s,t) - \sigma^2 \text{mín}(s,a) - \sigma^2 \text{mín}(a,t) + \sigma^2 a \\
&= \sigma^2 \text{mín}(s,t) - \sigma^2 a - \sigma^2 a + \sigma^2 a \\
&= \sigma^2 \text{mín}(s,t) - \sigma^2 a \\
&= \sigma^2[\text{mín}(s,t) - a] \\
&= \sigma^2 \text{mín}(s-a, t-a).
\end{aligned}$$

18. Demuestre que $W(1) + \cdots + W(n)$ tiene distribución $N(0, s_n)$, en donde

$$s_n := \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sugerencia: use la independencia de los incrementos de $W(\cdot)$ y la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución. Sean $a_1 = n, a_2 = n-1, \ldots, a_{n-1} = 2, a_n = 1$. Con estos coeficientes, construimos una combinación lineal de incrementos independientes, a saber,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i(W(i) - W(i-1)) &= a_1(W(1) - W(0)) + a_2(W(2) - W(1)) + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}(W(n-1) - W(n-2)) + a_n(W(n) - W(n-1)) \\ &= (a_1 - a_2)W(1) + (a_2 - a_3)W(2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)W(n-1) \\ &\quad + a_n W(n) \\ &= W(1) + W(2) + \cdots + W(n-1) + W(n).\end{aligned}$$

Así pues, es posible expresar a $W(1) + \cdots + W(n)$ como una combinación lineal de incrementos independientes y, además, como tratamos con un proceso de Weiner, entonces

$$W(i) - W(i-1) \sim N(0, \sigma^2),$$

tomando a $h = 1$. Por lo tanto, como podemos expresar a $W(1) + \cdots + W(n)$ con una combinación lineal de componentes independientes y distribuidos normalmente, entonces $W(1) + \cdots + W(n)$ se distribuye normalmente, de manera que

$$W(1) + \cdots + W(n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(W(i) - W(i-1)) \sim N(0, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2),$$

pero

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$W(1) + \cdots + W(n) \sim N\left(0, \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$