

Procesos estocásticos I

Tarea: Procesos a tiempo continuo

José Alberto Márquez Luján, 187917

Verano 2022

1. Demuestre que un proceso de Poisson $N(\cdot)$ tiene trayectorias continuas no decrecientes, es decir,

$$P[N(t) \geq N(s)] = 1 \quad \forall t > s \geq 0.$$

Solución.

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq N(s)) &= P(N(t) - N(s) \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s + t - s) - N(s) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s + h) - N(s) = k). \end{aligned}$$

Como estamos hablando de incrementos estacionarios con $h = t - s$, y sabemos que se distribuyen como una variable aleatoria Poisson, entonces

$$\begin{aligned} P(N(t) \geq N(s)) &= P(N(t) - N(s) \geq 0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^k}{k!} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Demuestre:

- a) Si $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ es un PE con incrementos independientes, entonces el PE $Y(\cdot)$ definido por $Y(t) := X(t) - X(0)$, para $t \geq 0$, tiene incrementos independientes y $Y(0) = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 Y(t_1) - Y(t_0) &= [X(t_1) - X(0)] - [X(t_0) - X(0)] \\
 &= X(t_1) - X(t_0) \\
 &\vdots \\
 Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= [X(t_n) - X(0)] - [X(t_{n-1}) - X(0)] \\
 &= X(t_n) - X(t_{n-1})
 \end{aligned}$$

Por hipótesis, los incrementos de $X(\cdot)$ son independientes, por lo que los incrementos de $Y(\cdot)$ también lo son. Ahora bien, para $t = 0$,

$$Y(0) := X(0) - X(0) = 0.$$

b) Recíprocamente, sea $Y(\cdot) = \{Y(t), t \geq 0\}$ un PE con incrementos independientes y $Y(0) = 0$, y sea $X(0)$ una v.a. independiente de $Y(\cdot)$. Entonces el PE $X(\cdot)$ definido por $X(t) := Y(t) + X(0)$ para todo $t \geq 0$ tiene incrementos independientes y estado inicial $X(0)$.

Solución. Falta.

7. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson, y sea X_0 una v.a. independiente de $N(\cdot)$ y con distribución $P(X_0 = 1) = P(X_0 = -1) = 1/2$. En este caso, el PE $X(\cdot)$ definido por

$$X(t) := X_0(-1)^{N(t)} \quad t \geq 0$$

se dice que es una señal telegráfica aleatoria. Calcule la media y la función de covarianza de $X(\cdot)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_0(-1)^{N(t)}] \\
 &\stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[X_0] \mathbb{E}[(-1)^{N(t)}].
 \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\mathbb{E}[X_0] = (1) \left(\frac{1}{2}\right) + (-1) \left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Por lo que $\mathbb{E}[X] = 0$.

Para la función de covarianza:

$$\begin{aligned}
 K_X(s, t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
 &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\
 &= \mathbb{E}[(X_0(-1)^{N(s)})(X_0(-1)^{N(t)})] \\
 &= \mathbb{E}[X_0^2(-1)^{N(s)+N(t)}] \\
 &\stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[X_0^2] \mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}].
 \end{aligned}$$

Calculamos el segundo momento:

$$\mathbb{E}[X_0^2] = (1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + (-1)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}] &= \mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)-N(s)+N(s)}] \\ &= \mathbb{E}[(-1)^{N(t)-N(s)}(-1)^{2N(s)}] \\ &= \mathbb{E}[(-1)^{N(t)-N(s)}],\end{aligned}$$

pues $2N(s)$ es par, por lo que $(-1)^{2N(s)} = 1$. Además, como $N(\cdot)$ es un proceso de Poisson,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(-1)^{N(s)+N(t)}] &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(t-s)]^x e^{-\lambda(t-s)}}{x!} \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(t-s)]^x}{x!} \\ &= e^{-2\lambda(t-s)}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$K_X(s, t) = e^{-2\lambda(t-s)}.$$

8. Calcule $\mathbb{E}[N(s)N(s+t)]$ para $s, t \geq 0$, donde $N(\cdot)$ es un proceso de Poisson con parámetro λ .

Solución. Sea $s < t$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] &= \mathbb{E}\{N(s)[N(s+t) - N(s) + N(s)]\} \\ &= \mathbb{E}\{N(s)[N(s+t) - N(s)]\} + \mathbb{E}[N^2(s)] \\ &= \mathbb{E}\{[N(s) - N(0)][N(s+t) - N(s)]\} + \mathbb{E}[N^2(s)]\end{aligned}$$

Como son intervalos que no se traslapan,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] &= \mathbb{E}[N(s) - N(0)]\mathbb{E}[N(s+t) - N(s)] + \mathbb{E}[N^2(s)] \\ &= \lambda s \lambda (s+t-s) + \mathbb{E}[N^2(s)] \\ &= \lambda s \lambda t + (\text{Var}(N(s)) + \mathbb{E}^2[N(s)]) \\ &= \lambda s \lambda t + (\lambda s + \lambda^2 s^2) \\ &= \lambda s(1 + \lambda t + \lambda s).\end{aligned}$$

El caso en el que $t < s$ es análogo.

Generalizando,

$$\mathbb{E}[N(s)N(s+t)] = \lambda \min\{s, t\}(1 + \lambda t + \lambda s).$$

9. Demuestre que si $N_1(\cdot)$ y $N_2(\cdot)$ son procesos de Poisson independientes con parámetros λ_1 y λ_2 , entonces su suma $N_1(t) + N_2(t)$, $t \geq 0$, es un proceso de Poisson con parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$. (Observación: la diferencia $N_1(t) - N_2(t)$ no es un proceso de Poisson).

Solución. Sea $Y(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Primero vemos que $Y(\cdot)$ tenga incrementos independientes.

$$\begin{aligned} Y(t_1) - Y(t_0) &= (N_1(t_1) + N_2(t_1)) - (N_1(t_0) + N_2(t_0)) \\ &= (N_1(t_1) - N_1(t_0)) + (N_2(t_1) - N_2(t_0)) \\ &\vdots \\ Y(t_n) - Y(t_{n-1}) &= (N_1(t_n) + N_2(t_n)) - (N_1(t_{n-1}) + N_2(t_{n-1})) \\ &= (N_1(t_n) - N_1(t_{n-1})) + (N_2(t_n) - N_2(t_{n-1})). \end{aligned}$$

Como $N_1(\cdot)$ es un proceso de Poisson, entonces tiene incrementos independientes, por lo que $(N_1(t_1) - N_1(t_0)) \perp (N_1(t_2) - N_1(t_1))$. Además, como $N_1(\cdot) \perp N_2(\cdot)$, entonces $(N_1(t_1) - N_1(t_0)) \perp (N_2(t_1) - N_2(t_0))$; este razonamiento se utiliza para todos los renglones y así tenemos que el proceso tiene incrementos independientes.

Ahora revisamos que el proceso tenga incrementos estacionarios. Sean $t, s \geq 0$ y $h > 0$.

$$\begin{aligned} Y(t+h) - Y(t) &= (N_1(t+h) + N_2(t+h)) - (N_1(t) + N_2(t)) \\ &= N_1(t+h) - N_1(t) + N_2(t+h) - N_2(t), \end{aligned}$$

y sabemos que $N_1(t+h) - N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 h)$ y $N_2(t+h) - N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 h)$. Así pues, como $N_1 \perp N_2$, $Y(t+h) - Y(t) \sim \text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2)h)$. Análogamente, $Y(s+h) - Y(s) \sim \text{Poisson}((\lambda_1 + \lambda_2)h)$ y por lo tanto $Y(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios.

10. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson con intensidad media λ , y sea T na v.a. positiva independiente de $N(\cdot)$. Calcule $\mathbb{E}[N(T)]$ y $\text{Var}(N(T))$ en cada uno de los siguientes casos en los que T tiene distribución:

a) exponencial con parámetro μ

Si $T \sim \text{Exp}(\mu)$, entonces $\mathbb{E}[T] = 1/\mu$ y $\text{Var}(T) = 1/\mu^2$. Así pues,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(T)] &\stackrel{c)}{=} \lambda \mathbb{E}[T] \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \\ \text{Var}(N(T)) &\stackrel{c)}{=} \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \text{Var}(T) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}. \end{aligned}$$

b) uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $0 < a < b$

Si $T \sim \text{Unif}(a, b)$, entonces $\mathbb{E}[T] = \frac{a+b}{2}$ y $\text{Var}(T) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Así pues,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(T)] &\stackrel{c)}{=} \lambda \mathbb{E}[T] \\ &= \lambda \left(\frac{a+b}{2} \right) \\ \text{Var}(N(T)) &\stackrel{c)}{=} \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \text{Var}(T) \\ &= \lambda \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{\lambda^2 (b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

c) continua arbitraria con densidad $f(t)$

Vemos que, como $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$,

$$\mathbb{E}[N(T) \mid T = t] = \lambda t,$$

por lo que

$$\mathbb{E}[N(T) \mid T] = \lambda T,$$

y, por propiedades de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(T)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(T) \mid T]] \\ &= \mathbb{E}[\lambda T] \\ &= \lambda \mathbb{E}[T].\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N^2(T) \mid T = t] &= \text{Var}(N(t)) + \mathbb{E}^2[N(t)] \\ &= \lambda t + \lambda^2 t^2\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbb{E}[N^2(T) \mid T] = \lambda T + \lambda^2 T^2.$$

Por propiedades de la esperanza iterada,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N^2(T)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N^2(T) \mid T]] \\ &= \mathbb{E}[\lambda T + \lambda^2 T^2] \\ &= \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \mathbb{E}[T^2].\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Var}(N(T)) &= \mathbb{E}[N^2(T)] - \mathbb{E}^2[N(T)] \\ &= \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \mathbb{E}[T^2] - \lambda^2 \mathbb{E}^2[T] \\ &= \lambda \mathbb{E}[T] + \lambda^2 \text{Var}(T).\end{aligned}$$

11. Sea $N(\cdot)$ un proceso Poisson y sea $0 \leq s \leq t$. Demuestre que la distribución condicional de $N(s)$, dado que $N(t) = n$, es la distribución $\text{Bin}(n, p)$ con $p = s/t$, es decir,

$$P[N(s) = k \mid N(t) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ para } k = 0, 1, \dots, n.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
 P(N(s) = k \mid N(t) = n) &= \frac{P(N(s) = k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\
 &= \frac{P(N(s) - N(0) = k, N(t) - N(s) = n - k)}{P(N(t) = n)} \\
 &\stackrel{\text{ind}}{=} \frac{P[N(s) - N(0) = k]P[N(t) - N(s) = n - k]}{P(N(t) = n)} \\
 &= \frac{\left(\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k}{k!}\right) \left(\frac{e^{-\lambda(t-s)}(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}\right)}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} \\
 &= \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^k e^{-\lambda t} e^{\lambda s} (\lambda(t-s))^{n-k} n!}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n k! (n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\lambda^k s^k \lambda^{n-k} (t-s)^{n-k}}{\lambda^n t^n} \\
 &= \binom{n}{k} \frac{s^k (t-s)^{n-k}}{t^k t^{n-k}} \\
 &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(N(s) = k \mid N(t) = n) \sim \text{Bin}\left(n, \frac{s}{t}\right)$.

12.

Solución. ¿?

13. El número de personas que pasan frente a un restaurante se comporta como un proceso de Poisson con parámetro $\lambda = 1000$ personas por hora. Suponga que cada persona tiene probabilidad $p = 0.01$ de entrar al restaurante, y sea Y el número de personas que entran en un periodo de 10 minutos. Calcule $\mathbb{E}[Y]$, $\text{Var}(Y)$ y $P(Y \geq 2)$. Sugerencia: use el ejercicio anterior.

Solución.

Sean: $N = \#$ de personas que pasan frente a un restaurante,

$p =$ probabilidad de entrar $= 0.1$

$1 - p =$ probabilidad de no entrar $= 0.99$

$Y = \#$ de personas que entran en 10 minutos

Además $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ Sea $t = 10 \text{ mins} = \frac{1}{6}$ de hora

Entonces $N\left(\frac{1}{6}\right) \sim \text{Poisson}\left(\frac{1}{6}1000\right)$

Entonces $N\left(\frac{1}{6}\right) \sim \text{Poisson}\left(\frac{500}{3}\right)$ pues son incrementos independientes

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y] &= \frac{5}{3} \\
 \text{Var}(Y) &= \frac{5}{3} \\
 P(Y \geq 2) &= 1 - P(Y < 2) \\
 &= 1 - P(Y \leq 1) \\
 &= 1 - \left(\frac{e^{-5/3} \frac{5^0}{3^0}}{0!} + \frac{e^{-5/3} \frac{5^1}{3^1}}{1!} \right) \\
 &= 0.4963
 \end{aligned}$$

14. El puente de Poisson. Sea $N(\cdot)$ un proceso de Poisson con parámetro λ , y sea $N_p(t) := N(t) - tN(1)$, para $0 \leq t \leq 1$, el llamado “puente de Poisson”. Calcule $\mathbb{E}[N_p(t)]$ y la función de covarianza de $N_p(\cdot)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
 N(t) &= N(t) - N(0) = N(t) \sim \text{Poisson} \\
 \mathbb{E}[N_p(t)] &= \mathbb{E}[N(t) - tN(1)] \\
 &= \mathbb{E}[N(t)] - t\mathbb{E}[N(1)] \sim \text{Poisson} \\
 &= \lambda t - t(\lambda) \\
 &= 0 \\
 K_{N_p}(s, t) &= \mathbb{E}[N_p(s)N_p(t)] - \mathbb{E}[N_p(s)]\mathbb{E}[N_p(t)] \\
 &= \mathbb{E}[N_p(s)N_p(t)] \\
 &= \mathbb{E}[(N(s) - sN(1))(N(t) - tN(1))] \\
 &= \mathbb{E}[(N(s)N(t) - sN(1)N(t) - t(N(1)N(s) + stN^2(1))]
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(N(s)N(t))] &= K_n(s, t) + \mathbb{E}[N(s)]\mathbb{E}[N(t)] \\
 &= \lambda \min(s, t) - \lambda^2 st \\
 \mathbb{E}[stN^2(1)] &= \text{Var}(N(1)) + E^2[N(1)] \\
 &= \lambda - \lambda^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{N_p}(s, t) &= (\lambda \min(s, t) - \lambda^2 st) - (\lambda s \min(1, t) - \lambda^2 st) \\
 &\quad - (\lambda t \min(s, 1) - \lambda^2 st) + st(\lambda - \lambda^2)
 \end{aligned}$$

Por hipótesis $0 \leq s, t \leq 1$

$$\begin{aligned}
 K_{N_p}(s, t) &= (\lambda \min(s, t) - \lambda^2 st) - (\lambda st - \lambda^2 st) - (\lambda st - \lambda^2 st) + \lambda st - \lambda^2 st \\
 &= (\lambda \min(s, t) - st)
 \end{aligned}$$

15. El puente browniano. Repita el ejercicio anterior pero para el “puente browniano” $W_p(t) := W(t) - tW(1)$, con $0 \leq t \leq 1$, en donde $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener o movimiento browniano.

Solución.

$W(t) = W(t) - W(0) = N(0, \sigma^2 t)$ es un proceso de Wiener

$$\mathbb{E}[W_p(t)] = \mathbb{E}[W(t) - tW(1)]$$

$$= \mathbb{E}[W(t)] - t\mathbb{E}[W(1)]$$

$$= 0, \text{ pues es un proceso Wiener}$$

$$K_{W_p}(s, t) = \mathbb{E}[W_p(s)W_p(t)] - \mathbb{E}[W_p(s)]\mathbb{E}[W_p(t)]$$

$$= \mathbb{E}[W_p(s)W_p(t)]$$

$$= \mathbb{E}[(W(s) - sW(1))(W(t) - tW(1))]$$

$$= \mathbb{E}[W(s)W(t) - sW(1)W(t) - t(W(1)W(s) + stW^2(1))]$$

Cálculos auxiliares

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = K_w(s, t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]$$

$$= \sigma^2 \min(s, t)$$

$$\mathbb{E}[stW^2(1)] = \text{Var}(W(1)) + E^2[W(1)]$$

$$= \sigma^2$$

$$K_{wp}(s, t) = \sigma^2 \min(s, t) - \sigma^2 s \min(1, t) - \sigma^2 s \min(s, 1) - \sigma^2 st$$

$$= \sigma^2 \min(s, t) - \sigma^2 st - \sigma^2 st - \sigma^2 st$$

$$= \sigma^2 \min(s, t) - \sigma^2 st$$

$$= \sigma^2 (\min(s, t) - st)$$

16. Sea $X(t) = \{X(t), t \geq 0\}$ un PE que tiene incrementos independientes y función media $m(t) := \mathbb{E}[X(t)]$ finita para todo $t \geq 0$. Demuestre que si $0 \leq t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$, entonces

$$\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \dots, X(t_n)] = X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).$$

Solución.

$$\mathbb{E}[X(t_{n+1}) \mid X(t_1), \dots, X(t_n)] = \mathbb{E}[X(t_{n+1}) + X(t_n) - X(t_n) \mid X(t_1), \dots, X(t_n)]$$

$$= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n) \mid X(t_1), \dots, X(t_n)]$$

$$+ \mathbb{E}[X(t_n) \mid X(t_1), \dots, X(t_n)]$$

$$= \mathbb{E}[X(t_{n+1}) - X(t_n)] + X(t_n)$$

$$= \mathbb{E}[X(t_{n+1})] - \mathbb{E}[X(t_n)] + X(t_n)$$

$$= X(t_n) + m(t_{n+1}) - m(t_n).$$

Nota. En los ejercicios siguientes, $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener con parámetro $\sigma^2 > 0$.

17. Demuestre que $\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] = \sigma^2 \min(s - a, t - a)$ para todo $s, t \geq a \geq 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] &= \mathbb{E}[W(s)W(t) - W(s)W(a) - W(t)W(a) + W^2(a)] \\ &= \mathbb{E}[W(s)W(t)] - \mathbb{E}[W(s)W(a)] - \mathbb{E}[W(t)W(a)] \\ &\quad + \mathbb{E}[W^2(a)].\end{aligned}$$

Recordemos que $K_W(s, t) = \text{Cov}(W(s), W(t)) = \mathbb{E}[W(s)W(t)] - \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)]$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W(s)W(t)] &= K_W(s, t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\ &= \sigma^2 \min(s, t) + \mathbb{E}[W(s)]\mathbb{E}[W(t)] \\ &= \sigma^2 \min(s, t),\end{aligned}$$

pues en clase vimos que $K_W(s, t) = \lambda \min(s, t)$. Análogamente,

$$\mathbb{E}[W(s)W(a)] = \sigma^2 \min(s, a) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[W(t)W(a)] = \sigma^2 \min(t, a).$$

También sabemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W^2(a)] &= \text{Var}(W(a)) + \mathbb{E}^2[W(a)] \\ &= \sigma^2 a.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(W(s) - W(a))(W(t) - W(a))] &= \sigma^2 \min(s, t) - \sigma^2 \min(s, a) - \sigma^2 \min(a, t) + \sigma^2 a \\ &= \sigma^2 \min(s, t) - \sigma^2 a - \sigma^2 a + \sigma^2 a \\ &= \sigma^2 \min(s, t) - \sigma^2 a \\ &= \sigma^2 [\min(s, t) - a] \\ &= \sigma^2 \min(s - a, t - a).\end{aligned}$$

18. Demuestre que $W(1) + \dots + W(n)$ tiene distribución $N(0, s_n)$, en donde

$$s_n := \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sugerencia: use la independencia de los incrementos de $W(\cdot)$ y la fórmula

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución. Sean $a_1 = n, a_2 = n-1, \dots, a_{n-1} = 2, a_n = 1$. Con estos coeficientes, construimos una combinación lineal de incrementos independientes, a saber,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i(W(i) - W(i-1)) &= a_1(W(1) - W(0)) + a_2(W(2) - W(1)) + \dots \\ &\quad + a_{n-1}(W(n-1) - W(n-2)) + a_n(W(n) - W(n-1)) \\ &= (a_1 - a_2)W(1) + (a_2 - a_3)W(2) + \dots + (a_{n-1} - a_n)W(n-1) \\ &\quad + a_n W(n) \\ &= W(1) + W(2) + \dots + W(n-1) + W(n).\end{aligned}$$

Así pues, es posible expresar a $W(1) + \dots + W(n)$ como una combinación lineal de incrementos independientes y, además, como tratamos con un proceso de Wiener, entonces

$$W(i) - W(i-1) \sim N(0, \sigma^2),$$

tomando a $h = 1$. Por lo tanto, como podemos expresar a $W(1) + \dots + W(n)$ con una combinación lineal de componentes independientes y distribuidos normalmente, entonces $W(1) + \dots + W(n)$ se distribuye normalmente, de manera que

$$W(1) + \dots + W(n) = \sum_{i=1}^n a_i(W(i) - W(i-1)) \sim N(0, \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2),$$

pero

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$W(1) + \dots + W(n) \sim N\left(0, \sigma^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

19. Demuestre que cada uno de los siguientes PEs es de Wiener:

a) $W_1(t) := a^{-1/2}W(at)$ para $t \geq 0$ (donde a es una constante)

Solución.

i) P.D. que $W_1(0) = 0$ c.s.

$$\begin{aligned} W_1(0) &:= a^{-1/2}W(a0) \\ &= a^{-1/2}W(0) \\ &= 0 \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

pues $W(0) = 0$ c.s. por ser proceso de Wiener.

ii) P.D. que $W_1(\cdot)$ tiene incrementos independientes. Sean $0 \leq t_0 < t_1 < t_n$

$$\begin{aligned} W_1(t_1) - W_1(t_0) &= a^{-1/2}W(at_1) - a^{-1/2}W(at_0) = a^{-1/2}[W(at_1) - W(at_0)] \\ W_1(t_2) - W_1(t_1) &= a^{-1/2}W(at_2) - a^{-1/2}W(at_1) = a^{-1/2}[W(at_2) - W(at_1)] \\ &\vdots \\ W_1(t_n) - W_1(t_{n-1}) &= a^{-1/2}W(at_n) - a^{-1/2}W(at_{n-1}) = a^{-1/2}[W(at_n) - W(at_{n-1})] \end{aligned}$$

Como $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener, tiene incrementos independientes, por lo que

$$[W(at_1) - W(at_0)] \perp [W(at_2) - W(at_1)] \perp \dots \perp [W(at_n) - W(at_{n-1})]$$

y, por lo tanto, $W_1(\cdot)$ tiene incrementos independientes.

iii) P.D. que $W_1(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios con $W_1(t+h) - W_1(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$.

$$\begin{aligned} W_1(t+h) - W_1(t) &= a^{-1/2}W(a(t+h)) - a^{-1/2}W(at) \\ &= a^{-1/2}[W(a(t+h)) - W(at)] \\ &= a^{-1/2}[W(at+ah) - W(at)]. \end{aligned}$$

Pero $[W(at+ah) - W(at)] \sim N(0, \sigma^2 ah)$, por lo que

$$\begin{aligned} W_1(t+h) - W_1(t) &\sim a^{-1/2}N(0, \sigma^2 ah) \\ &= N(a^{-1/2}0, (a^{-1/2})^2 \sigma^2 ah) \\ &= N(0, \sigma^2 h). \end{aligned}$$

Así, $W_1(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios distribuidos normalmente y, por lo tanto, es un PE de Wiener.

b) $W_2(t) := tW(1/t)$ para $t > 0$ y $W_2(0) := 0$

Solución.

i) $W_2(0) = 0$ por hipótesis.

ii) P.D. que $W_2(\cdot)$ tiene incrementos independientes. Sean $0 \leq t_0 < t_1 < t_n$

$$\begin{aligned} W_2(t_1) - W_2(t_0) &= t_1 W(1/t_1) - t_0 W(1/t_0) \\ W_2(t_2) - W_2(t_1) &= t_2 W(1/t_2) - t_1 W(1/t_1) \\ &\vdots \\ W_2(t_n) - W_2(t_{n-1}) &= t_n W(1/t_n) - t_{n-1} W(1/t_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener, tiene incrementos independientes, por lo que

$$[t_1 W(1/t_1) - t_0 W(1/t_0)] \perp [t_2 W(1/t_2) - t_1 W(1/t_1)] \perp \cdots \perp [t_n W(1/t_n) - t_{n-1} W(1/t_{n-1})]$$

y, por lo tanto, $W_2(\cdot)$ tiene incrementos independientes.

iii) P.D. que $W_2(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios con $W_2(t+h) - W_2(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$.

$$\begin{aligned} W_2(t+h) - W_2(t) &= (t+h)W(1/(t+h)) - tW(1/t) \\ &= -t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h)). \end{aligned}$$

Como estamos tratando con una combinación lineal de elementos independientes y distribuidos normalmente, entonces la combinación es distribuida normalmente. Es decir, sea

$$Y := -t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h)).$$

Entonces $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, en donde

$$\begin{aligned} \mu_y &= \mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}\{-t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h))\} \\ &= -t\mathbb{E}[W(1/t)] + t\mathbb{E}[W(1/(t+h))] + h\mathbb{E}[W(1/(t+h))] \\ &= -t0 + t0 + h0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^2 &= \text{Var}(Y) \\
 &= \text{Var}(-t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + hW(1/(t+h))) \\
 &= \text{Var}(-t[W(1/t) - W(1/(t+h))] + h[W(1/(t+h)) - W(0)]) \\
 &\stackrel{\text{ind}}{=} t^2 \text{Var}[W(1/t) - W(1/(t+h))] + h^2 \text{Var}[W(1/(t+h)) - W(0)].
 \end{aligned}$$

Como $W(\cdot)$ es un proceso de Wiener, entonces $W(1/t) - W(1/(t+h)) \sim N(0, \sigma^2(1/t - 1/(t+h)))$, por lo que

$$\begin{aligned}
 t^2 \text{Var}[W(1/t) - W(1/(t+h))] &= t^2[\sigma^2(1/t - 1/(t+h))] \\
 &= t^2 \sigma^2 \frac{t+h-t}{t(t+h)} \\
 &= \frac{t\sigma^2 h}{t+h}.
 \end{aligned}$$

Similarmente, $W(1/(t+h)) - W(0) \sim N(0, \sigma^2(1/(t+h)))$, por lo que

$$h^2 \text{Var}[W(1/(t+h)) - W(0)] = \frac{h^2 \sigma^2}{t+h}.$$

Así pues, sumando ambos resultados,

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^2 &= \frac{t\sigma^2 h}{t+h} + \frac{h^2 \sigma^2}{t+h} \\
 &= \sigma^2 h \left(\frac{t}{t+h} + \frac{h}{t+h} \right) \\
 &= \sigma^2 h \left(\frac{t+h}{t+h} \right) \\
 &= \sigma^2 h.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $W_2(t+h) - W_2(t) \sim N(0, \sigma^2 h)$ y, así, $W_2(\cdot)$ es un PE de Wiener.

20. Calcule $\mathbb{E}[X(t)]$ y $\text{Cov}(X(s), X(t))$ para cada uno de los siguientes procesos

a) $X(t) := W^2(t)$ para $t \geq 0$

Solución.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[W^2(t)] \\
 &= \text{Var}(W(t)) + \mathbb{E}^2[W(t)] \\
 &= \sigma^2 t,
 \end{aligned}$$

pues $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ por ser PE de Wiener.

Ahora bien, si $s < t$,

$$\begin{aligned}
 K_X(s, t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
 &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \sigma^2 s \sigma^2 t \\
 &= \mathbb{E}[W^2(s)W^2(t)] - \sigma^4 st \\
 &= \mathbb{E}[(W(s)W(t))^2] - \sigma^4 st \\
 &= \mathbb{E}[(W(s)[W(t) - W(s) + W(s)])^2] - \sigma^4 st \\
 &= \mathbb{E}[(W(s)(W(t) - W(s)) + W^2(s))^2] - \sigma^4 st \\
 &= \mathbb{E}[W^2(s)(W(t) - W(s))^2 + 2W^3(s)(W(t) - W(s)) + W^4(s)] - \sigma^4 st \\
 &= \mathbb{E}[W^2(s)(W(t) - W(s))^2] + 2\mathbb{E}[W^3(s)(W(t) - W(s))] + \mathbb{E}[W^4(s)] - \sigma^4 st \\
 &\stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[W^2(s)]\mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2] + 2\mathbb{E}[W^3(s)]\mathbb{E}[W(t) - W(s)] + \mathbb{E}[W^4(s)] - \sigma^4 st \\
 &= (\sigma^2 s)[\sigma^2(t - s)] + \mathbb{E}[W^4(s)] - \sigma^4 st \\
 &= \sigma^4 s(t - s) + 3\sigma^4 s^2 - \sigma^4 st \\
 &= \sigma^4 st - \sigma^4 s^2 + 3\sigma^4 s^2 - \sigma^4 st \\
 &= 2\sigma^4 s^2.
 \end{aligned}$$

Análogamente, si $t < s$, $K_X(s, t) = 2\sigma^4 t^2$. Por lo tanto, $K_X(s, t) = 2\sigma^4(\min(s, t))^2$.

b) $X(t) := e^{-at}W(e^{2at})$ para $t \geq 0$, donde $a \geq 0$ es constante.

Solución.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X(t)] &= \mathbb{E}[e^{-at}W(e^{2at})] \\
 &= e^{-at}\mathbb{E}[W(e^{2at})] \\
 &= e^{-at}0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 K_X(s, t) &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)] \\
 &= \mathbb{E}[X(s)X(t)] \\
 &= \mathbb{E}[e^{-as}W(e^{2as})e^{-at}W(e^{2at})] \\
 &= e^{-a(s+t)}\mathbb{E}[W(e^{2as})W(e^{2at})] \\
 &= e^{-a(s+t)}(K_W(e^{2as}, e^{2at}) + \mathbb{E}[W(e^{2as})]\mathbb{E}[W(e^{2at})]) \\
 &= e^{-a(s+t)}K_W(e^{2as}, e^{2at}) \\
 &= e^{-a(s+t)}\sigma^2 \min(e^{2as}, e^{2at}).
 \end{aligned}$$