ДИСЦИПЛИНА	**Математическое моделирование прикладных задач** (полное наименование дисциплины без сокращений)
ИНСТИТУТ	**информационных технологий**
КАФЕДРА	**прикладной математики** (полное наименование кафедры)
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	**Материалы для практических/семинарских занятий** (в соответствии с пп.1-11)
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	**Даева Софья Георгиевна** (фамилия, имя, отчество)
СЕМЕСТР	**6, 2023-2024** (указать семестр обучения, учебный год)

Математическое моделирование прикладных задач.

Практика 4

Модель спутника

В данной модели рассмотрим расчёт величин I и II космических скоростей, высоты геостационарной орбиты, расстояние до Луны и количество спутников, необходимых для покрытия земной поверхности.

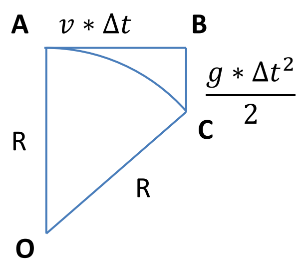
Дан радиус Земли – 6300 км, g (ускорение свободного падения)$\sim 10\,{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}$. Выведем связь I космической скорости с радиусом и g:

На тело, движущееся по окружности, действует центробежная сила: $F = \frac{m*v^2}{R}$. В данном случае она равна силе притяжения: $F = mg$. Тогда:

$$F = mg = \frac{m*v^2}{R} => g = \frac{v^2}{R} =>$$

$$v = \sqrt{R*g} \qquad (*)$$

Выведем формулу $(*)$ геометрически:



Спутник двинулся по горизонтали, и за малое время Δt преодолел расстояние $v*\Delta t$. В тот же момент он упал по вертикали на $\frac{g*\Delta t^2}{2}$. Обозначим эти отрезки AB и BC соответственно. Обозначим угол $\text{BAC} = \alpha$. Тогда угол $\text{BCA} = 90 - \alpha,$ и $\text{CAO} = 90 - \alpha =>$ $\text{ACO} = 90 - \alpha$ (так как треугольник OAC – равнобедренный). $=> \text{AOC} = 2\alpha$.

Длина дуги AC равна $l = R*2\alpha$. Ввиду малых величин можно приравнять длину дуги AC к длине гипотенузы AC. Тогда:

$(R*2\alpha)^2 = (v*\Delta t)^2 + (\frac{g*\Delta t^2}{2})^2$. Второй член суммы является величиной очень малой, поэтому можно сказать, что $R*2\alpha = v*\Delta t => \alpha = \frac{v*\Delta t}{2R}$.

$\sin(\alpha) = \frac{\text{BC}}{\text{AB}}$. При малых α верно $\sin(\alpha) \approx \alpha$. Тогда:

$$\alpha = \frac{\frac{g * \Delta t^2}{2}}{v * \Delta t} = \frac{v * \Delta t}{2R} => (v * \Delta t)^2 = R * g * \Delta t^2 => v = \sqrt{R * g}$$

Подставив значения, получим, $v \approx 8 \,{}^{\text{км}}/_{\text{с}}$.

Будем считать, что спутник летит на небольшой по сравнению с радиусом Земли высоте и g остаётся неизменным. Найдём время, за которое спутник облетит Землю:

Дана формула $v = \sqrt{R * g}$, и известна формула связи линейной скорости с угловой: $v = \omega * R$. Так же: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где Т – период обращения, ω – угловая скорость.

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T} => T = \frac{2\pi * R}{v} = \frac{2\pi * R}{\sqrt{R * g}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Подставив значения, получим $T \approx 83$ минуты.

Теперь рассмотрим геостационарный спутник – спутник, который находится над одной точкой Земли. Это означает, что его период обращения должен быть равен периоду обращения Земли – 24 часа. Такой спутник находится на значительном расстоянии от земной поверхности, в связи с этим надо определить значение ускорения свободного падения в зависимости от расстояния от Земли.

Будем считать g функцией от R. Тогда: $m * g(R) = \frac{m * v^2}{R}$. В силу закона всемирного притяжения на поверхности Земли сила притяжения: $m * g(R_З) = \gamma * \frac{m * M}{R_З^2}$, где γ – некий коэффициент, M – масса Земли, $R_З$ – радиус Земли. Тогда $g(R_З) = \gamma * \frac{M}{R_З^2}$. Эта величина известна, и примерно равна 10. Выразим из этой формулы массу Земли - $M = \frac{g * R_З^2}{\gamma}$. Для произвольного радиуса:

$$m * g(r) = \gamma * \frac{m * M}{r^2} => g(r) = \gamma * \frac{\frac{g * R_З^2}{\gamma}}{r^2} =>$$

$$g(r) = g * \frac{R_З^2}{r^2} \qquad (**)$$

Подставим формулу $(**)$ в $(*)$: $v(r) = \sqrt{R_З * g(r)} = \frac{R_З}{r} * \sqrt{R_З * g}$

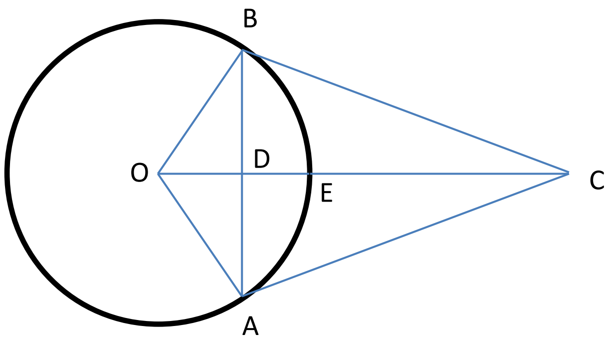
Тогда

$$\omega(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{2\pi}{T} => \frac{\frac{R_З}{r} * \sqrt{r * g}}{r} = \frac{2\pi}{T} => \frac{R_З * \sqrt{g}}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{T} => r = (\frac{T * R_З * \sqrt{g}}{2\pi})^{\frac{2}{3}} \qquad (***)$$

Подставляя значения получим, что $r = 42180942$ м. Вычитая значение радиуса Земли получим 35880 км над уровнем моря.

Период Луны составляет 27 дней. Подставляя это значение в формулу $(***)$ и вычитая радиус Земли получим 373328 км – расстояние от Земли до Луны.

Дальше рассчитаем – сколько требуется геостационарных спутников, чтобы покрыть поверхность Земли?



CB и CA – касательные к окружности, значит углы OBC и OAC равны 90 градусов. Ввиду очевидности равенства угла ODA 90 градусам, основываясь на равенстве углов выпишем равенство:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OA}{OC}$$

OC и OA нам известны – это расстояние до Луны (включающее радиус Земли) и радиус Земли соответственно. Тогда $OD = \frac{OA^2}{OC}$

Площадь сферического сегмента выражается $S = 2\pi * R * h$, где R – радиус Земли, а h - DE. Обозначим радиус Земли $R_З$ а расстояние от центра Земли до Луны – 379628 км - $R_л$ Выразим h:

$$h = OE - OD = R_З - \frac{R_З^2}{R_л}$$

Тогда площадь сектора $S_{сек} = 2\pi * R_З * \left(R_З - \frac{R_З^2}{R_л}\right)$, а площадь всей поверхности $S = 4\pi * R^2$. Подставляя значения получим, что $\frac{S}{S_{сек}} = 2.034 =>$ требуется 3 спутника для покрытия земной поверхности.

И наконец выведем значение II космической скорости. II космическая скорость – скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно покинуло поле притяжения Земли, вылетая вертикально с поверхности планеты. Работа, выполняемая силой тяжести равна $A = \int_{R_З}^{\infty} FdS$, где $F(r) = mg(r)$. Тогда:

$$A = m\int_{R_З}^{\infty} g(r)dr = mgR_З^2\int_{R_З}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr = mgR_З^2 * \left(-\frac{1}{r}\right)_{R_З}^{\infty} = mgR_З^2 * \frac{1}{R_З} = mgR_З$$

По закону сохранения энергии: $\frac{m*v^2}{2} = mgR_З => v = \sqrt{2gR_З} \approx 11.2\ ^{км}/_{с}$.

<u>Задание:</u>

1) Используя приведенные формулы написать программу расчета высоты геостационарного спутника Земли и количества таких спутников для покрытия земной поверхности.

2) Написать программу расчета высоты геостационарного спутника для Марса и Венеры.