

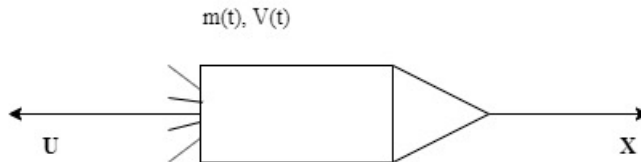
ДИСЦИПЛИНА	Математическое моделирование прикладных задач (полное наименование дисциплины без сокращений)
ИНСТИТУТ	информационных технологий
КАФЕДРА	прикладной математики (полное наименование кафедры)
ВИД УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА	Материалы для практических/семинарских занятий (в соответствии с пп.1-11)
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ	Даета Сопья Георгиевна (фамилия, имя, отчество)
СЕМЕСТР	6, 2023-2024 (указать семестр обучения, учебный год)

Математическое моделирование прикладных задач.

Практика 5

Модель ракеты

Формула Мещерского



По закону сохранения импульса во время t и время $t + \Delta t$:

$$m(t)V(t) = m(t + \Delta t)V(t + \Delta t) + (m(t) - m(t + \Delta t)) * (V(t) - U) \quad (1)$$

Разложим массу и скорость в ряд Тейлора, используя следующее соотношение:

$$m(t + \Delta t) = m(t) + \frac{dm(t)}{dt} * \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2)$$

Из только что нами представленного соотношения (2) и исходного (1) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} m(t + \Delta t)V(t + \Delta t) &= m(t)V(t) + m(t) * \frac{dV(t)}{dt} * \Delta t + \\ &+ V(t) * \frac{dm(t)}{dt} * \Delta t + \frac{dm(t)}{dt} * \frac{dV(t)}{dt} * \Delta t^2 + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в исходное выражение (1), пренебрегая членами с множителем Δt^2 и получим следующее соотношение:

$$m(t) * \frac{dV(t)}{dt} * \Delta t = -U * \frac{dm(t)}{dt} * \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (4)$$

Получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, в результате решения которого получаем формулу Мещерского:

$$m(t) \frac{dV(t)}{dt} = -U \frac{dm(t)}{dt}$$

$$\int_{V_0}^{V(t)} \frac{dV(t)}{U} = \int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm(t)}{m(t)}$$

$$\frac{V(t) - V_0}{U} = -\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$$

$$V(t) = V_0 - U * \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$$

В итоге получаем формулу Мещерского:

$$V(t) = V_0 + U * \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) \quad (5)$$

Одноступенчатая ракета

$$m_0 = m_p + m_f + m_e$$

$$m_s = \lambda(m_0 - m_p)$$

$$V(t) = U * \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right) =$$

$$= U * \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda(m_0 - m_p)}\right) =$$

$$= U * \ln\left(\frac{m_0}{\lambda m_0 + m_p(1 - \lambda)}\right)$$

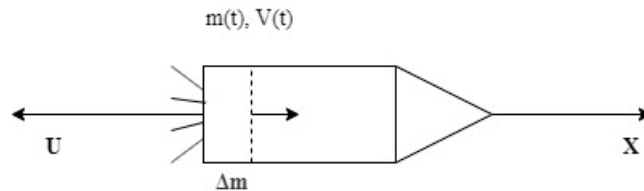
Если $m_p = 0$, $U \approx 3$ км/с, $\lambda \approx 0.1$, то

$$U * \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \approx 7 \text{ км/с}$$

$$V = \sqrt{gR_3} \approx 8 \text{ км/с}$$

Следовательно максимально достижимая скорость одноступенчатой ракеты меньше первой космической скорости и улететь с Земли на такой ракете мы не сможем.

Двухступенчатая ракета



Предположим, что вместе с топливом мы постепенно будем отбрасывать часть ракеты $\Delta m = m_s$. Тогда, по аналогии с соотношением (1) запишем уравнение по ЗСИ в моменты $t + \Delta t$:

$$m(t)V(t) = m(t + \Delta t)V(t + \Delta t) + \lambda * \frac{dm(t)}{dt} * \Delta t * V(t) + (1 - \lambda) * \frac{dm(t)}{dt} * \Delta t * (V(t) - U) \quad (6)$$

Используя разложение временных функций в ряд Тейлора из соотношения (2) и подставляя в (6), а также преобразовав данное уравнение получим следующее равенство:

$$V(t) = V_0 + (1 - \lambda) * U * \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right) \quad (7)$$

Если в данном равенстве $V_0 = 0$, $U \approx 3$ км/с, $\lambda \approx 0.1$ получим следующие оценки:

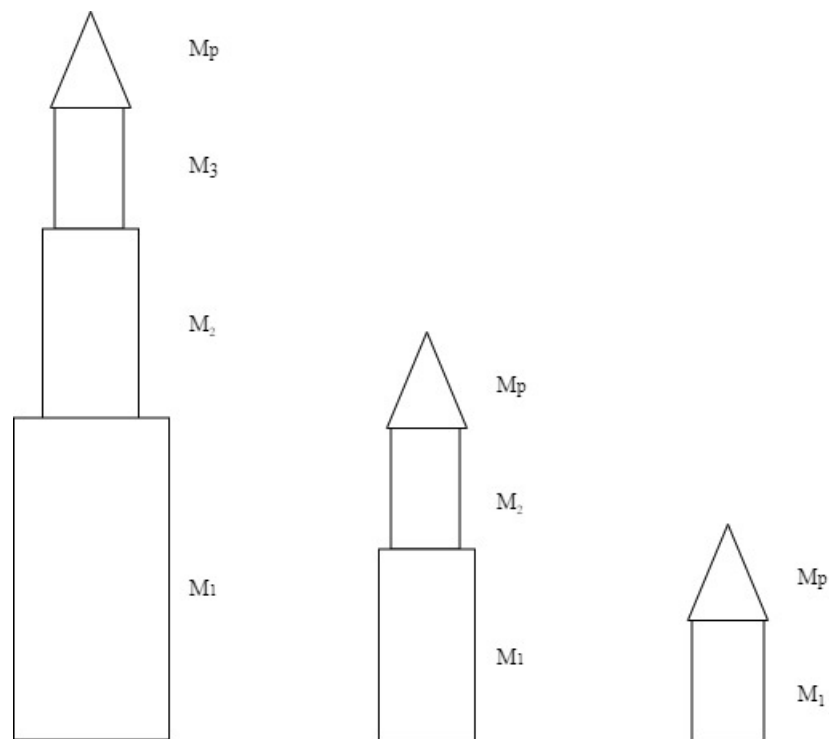
$$V(t) = (1 - \lambda) * \ln \left(\frac{m_0}{m_p} \right) * U$$

$$G = \frac{m_0}{m_p}$$

$$\frac{8}{3} \approx 0.9 * \ln(G)$$

$$G \approx 20$$
(8)

То есть отношение начальной массы ракеты должна быть больше полезной массы в 20 раз для того чтобы сравнять скорость ракеты с первой космической скоростью в 8 км/с.



Поскольку мы не имеем возможности постепенно отбрасывать части ракеты приходится использовать ступенчатый вид летательного аппарата. Для двухступенчатой ракеты уравнения принимают следующий вид:

$$V_1(t) = U * \ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_p}{\lambda * M_1 + M_2 + M_p}\right)$$

$$V_2(t) = V_1 + U * \ln\left(\frac{M_2 + M_p}{\lambda * M_2 + M_p}\right)$$

Используя для данных уравнений соответствующие оценки желаемых конечных скоростей мы можем рассчитать массы ступеней ракеты. Также по индукции можно вывести соотношения для произвольного числа ступеней.

Задание:

1) Написать программу расчета массы ступеней для двухступенчатой ракеты (положить $\mathbf{m}_p = \mathbf{m}_0/20$, $\mathbf{V}_2(t) = 8$ км/с, $U = 3$ км/с, $\mathbf{V}_1(t) = \mathbf{V}_2(t)/2$, $\lambda = 0.1$).

2) Вывести формулу для трехступенчатой ракеты. Написать программу расчета массы ступеней для трехступенчатой ракеты (положить $\mathbf{V}_3(t) = 8$ км/с, $\mathbf{V}_1(t) = \mathbf{V}_2(t)/2$, $\mathbf{V}_2(t) = \mathbf{V}_3(t)/2$).