Circuitos RC y RLC

Objetivo: Circuito RC: Estudiar el régimen transitorio de un circuito RC, tanto en la etapa de carga como de descarga del capacitor, determinando experimentalmente los tiempos característicos de evolución. **Circuito RLC:** Determinar experimentalmente la frecuencia de resonancia en un circuito RLC serie. Medir el desfasaje entre la tensión y la corriente en función de la frecuencia de operación del circuito.

Temáticas abordadas: Circuitos de corrientes variables en el tiempo, RC, carga y descarga de un capacitor, tiempo característico, circuito RLC serie, resonancia.

1. Circuito RC

1.1. Introducción

Considere el circuito RC mostrado en la Figura 1, en el cual el capacitor se encuentra completamente descargado inicialmente y la llave S, abierta. Al cerrarse esta última, la diferencia de potencial V impuesta por la fuente genera una corriente I en el circuito. Esta corriente tendrá el efecto de llevar cargas de signo opuesto a las caras del capacitor. Resulta intuitivo que esta corriente no será constante en el tiempo; en particular esperamos que la misma se anule cuando el capacitor se haya cargado.

Un capacitor de capacidad C conectado a una fuente de tensión V constante adquiere una carga $q = CV$. Esto nos permite conocer la caída de potencial sobre nuestro capacitor. Por otro lado, la ecuación circuital para el circuito RC resulta simplemente:

$$V = RI + \frac{q}{C}, \tag{1}$$

donde tanto la corriente I como la carga q están variando instante a instante, es decir que $I \equiv I(t)$ y $q \equiv q(t)$. Recordemos, por otro lado, que tanto la tensión V de la fuente, la resistencia R del resistor y la capacidad C del capacitor son constantes, dado que describen propiedades de cada uno de dichos elementos. Empleando ahora la definición de corriente,

$$I = \frac{dq}{dt},$$

podemos reescribir la última ecuación en términos de una única función incógnita, ya sea $q(t)$ o $I(t)$. Vamos a elegir reexpresarla en función de $q(t)$, de lo que se obtiene

$$V = R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{C}q(t). \tag{2}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de orden 1 para $q(t)$, cuya solución nos dará la evolución temporal (desde un instante inicial dado) de la carga en el capacitor. Para resolverla, debemos especificar además una condición inicial para la carga $q(t)$ en el capacitor. Dado que estamos considerando el caso en el que el mismo se encuentra inicialmente descargado, tenemos

$$q(t = 0) = 0, \tag{3}$$

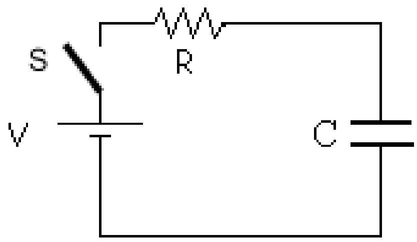

Figura 1. Esquema del circuito RC empleado.

como condición inicial para el proceso de carga.

La ecuación diferencial en derivadas totales para $q(t)$ dada por (2) tiene una solución general de la forma:

$$q(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + CV, \tag{4}$$

donde $\tau = RC$ es el tiempo característico del circuito RC, y la constante A se determina de las condiciones del problema particular que se esté considerando. Por ejemplo, si el capacitor esta inicialmente descargado, resulta fácil obtener que $A = -CV$, por lo que

$$q(t) = CV\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right),$$

por lo que la corriente en función del tiempo resulta

$$I(t) = \frac{V}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

En base a esto, plantee cómo serían las ecuaciones que describen la descarga del capacitor, reemplazando para ello la fuente por un cortocircuito.

1.2. Carga y descarga de un capacitor

En esta primera etapa se estudia el proceso de carga y descarga del capacitor.

1.2.1. Midiendo en forma manual con multímetro

De realizar la experiencia con cronómetro, se sugiere elegir valores de R y C de manera tal que el producto

RC sea igual o superior a 100 segundos. De esta forma los procesos de carga y descarga son lo sufientemente lentos como para poder tomar los datos manualmente.

1.2.2. Midiendo a través de la placa de adquisición SensorDAQ

En cualquiera de las dos modalidades que se elija medir, se busca responder las siguientes preguntas:

- Cuál es el tiempo característico (de carga y descarga) que se obtiene de las mediciones? Es el mismo para ambos procesos?
- Cuál es el valor de tensión que se alcanza al llegar al régimen estacionario?
- En el proceso de descarga, sobre que elemento disipativo se descarga el capacitor?
- Es posible estimar la resistencia interna del multímetro?

Repetir las mediciones utilizando otro valor de tensión de trabajo V' para la fuente. Observa cambios en el tiempo característico producto de esta modificación?

2. Circuito RLC serie

2.1. Introducción

Considere el circuito RLC mostrado en la Figura 2, en el cual un capacitor C, una inductancia L y una resistencia R, se encuentran conectados en serie a un generador de funciones G.

Aplicando las leyes de Kirchoff al circuito de la figura, tenemos:

$$V_G = V_L + V_R + V_C = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C}, \tag{5}$$

ecuación que podemos derivar nuevamente para obtener

$$\frac{dV}{dt} = L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}. \tag{6}$$

Si el voltaje suministrado por el generador G es sinusoidal, entonces el término a la izquierda de la última ecuación es

$$V(t) = V_m \sin(\omega t), \tag{7}$$

y la corriente circulante por el circuito estará dada por

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \phi), \tag{8}$$

siendo $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular, y f la frecuencia (medida en Hz) suministrada por el generador de funciones.

La impedancia Z del circuito es

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{9}$$

siendo j la unidad imaginaria, por lo que

$$V = IZ = I\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]. \tag{10}$$

Ahora bien, la tangente del ángulo de desfasaje entre tensión y corriente será igual al cociente entre las partes imaginaria y real de la impedancia Z, es decir:

$$\tan(\phi) = \frac{\mathrm{Im}Z}{\mathrm{Re}Z} = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{11}$$

y el módulo de la impedancia, resultará

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2. \tag{12}$$

El ángulo de desfasaje ϕ entre I y V puede ser positivo, en cuyo caso el circuito es capacitivo. Si, por el contrario, $\phi < 0$, se dice que el circuito es inductivo. Finalmente, si no hay desfasaje entre corriente y tensión, el circuito se denomina resistivo. En este último caso, tensión y corriente están en fase y la parte imaginaria de la impedancia es nula. Esta condición implica

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \tag{13}$$

condición que se cumple para la denominada *frecuencia de resonancia* ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{14}$$

Resulta fácil observar que, para este caso, la corriente circulante por el circuito alcanza su amplitud máxima. En este marco, definimos el *ancho de banda* $\Delta\omega$ como el intervalo de frecuencias para el que la potencia disipada disminuye exactamente a la mitad de la máxima potencia disipada. De acuerdo a nuestros resultados anteriores, el ancho de banda para el circuito RLC serie viene dado por

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}. \tag{15}$$

Definiendo ahora el *factor de calidad* o *mérito* Q mediante

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \tag{16}$$

obtenemos, para el caso del circuito que nos ocupa:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}. \tag{17}$$

2.2. Desarrollo de la experiencia

En esta parte de la práctica, se propone montar un circuito como el de la Figura 2. A continuación:

1. Estudie la variación de la tensión sobre la resistencia en función de la frecuencia de operación.

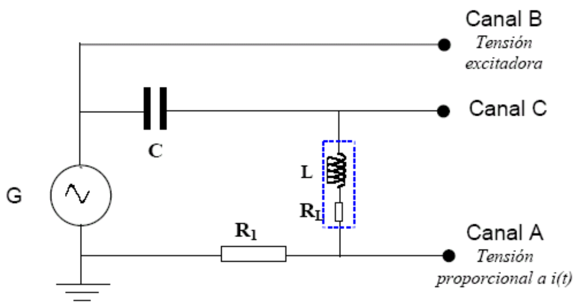

Figura 2. Esquema del circuito RLC serie.

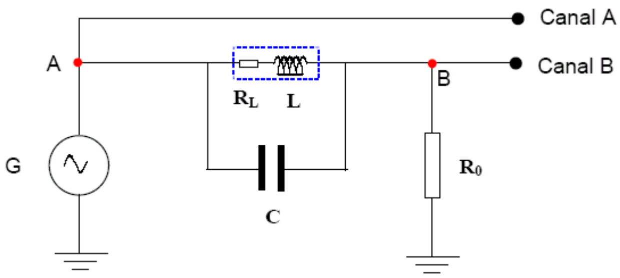

Figura 3. Esquema del circuito RLC paralelo.

2. A partir de las mediciones realizadas en el inciso anterior, encuentre la frecuencia de resonancia y el valor del factor de calidad. Recuerde que la inductancia tiene una resistencia propia (tal y como se muestra en la Figura 2) y, según corresponda, deberá ser considerada en la resistencia total del circuito.
3. Determine experimentalmente el desfasaje $\phi(\omega)$ en función de la frecuencia; para lo cual puede resultarle útil el *modo XY* del osciloscopio. Para más información, consulte el apunte acerca de *Cómo determinar el desfasaje entre dos señales.*

2.3. Desarrollo de la experiencia

Para esta segunda parte de la práctica, comience por montar el circuito de la Figura 2. A continuación:

1. Estudie la variación de la tensión sobre la resistencia en función de la frecuencia de operación.
2. A partir de las mediciones realizadas en el inciso anterior, encuentre la frecuencia de antiresonancia y el valor del factor de calidad.
3. Determine experimentalmente el desfasaje $\phi(\omega)$ en función de la frecuencia; para lo cual puede resultarle útil el *modo XY* del osciloscopio. Para más información, consulte el apunte acerca de *Cómo determinar el desfasaje entre dos señales.*
4. Compare los resultados de esta parte con aquellos obtenidos en el estudio del circuito RLC serie.

Referencias

1. M. Alonso and E.J. Finn. *Física: Campos y ondas*, volume 2 of *Física*. Editorial Pearson Educación, 1998.
2. E.M. Purcell. *Electricidad y magnetismo*, volume 2 of *Berkeley Physics Course*. Editorial Reverté, 1988.
3. J.R. Reitz, F.J. Milford, and R.W. Christy. *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Pearson Educación. Editorial Pearson Educación, 1996.
4. F.R. Trelles. *Temas de electricidad y magnetismo*. Ediciones previas. Editorial EUDEBA, 1984.