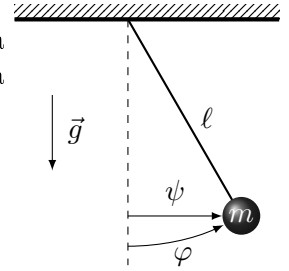


1. **Péndulo rígido ideal**

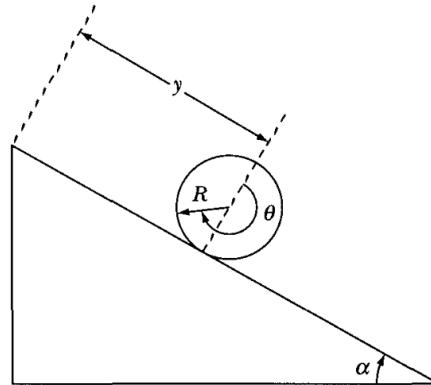
Calcule la tensión de la cuerda con el método de multiplicadores de Lagrange. La restricción es que la pesa se mantiene siempre en $\vec{r} = \ell \hat{\rho}$, ergo la función que expresa esto es $f(\rho) = \rho - \ell = 0$.



2. **Cilindro que rueda por un plano inclinado**

[Marion (e) ex. 7.5]

- Encuentre las ecuaciones de movimiento,
- la aceleración angular,
- y la fuerzas de ligadura.



3. **Doble máquina de Atwood** [Marion (e) ej. 7.8 y 7-37]

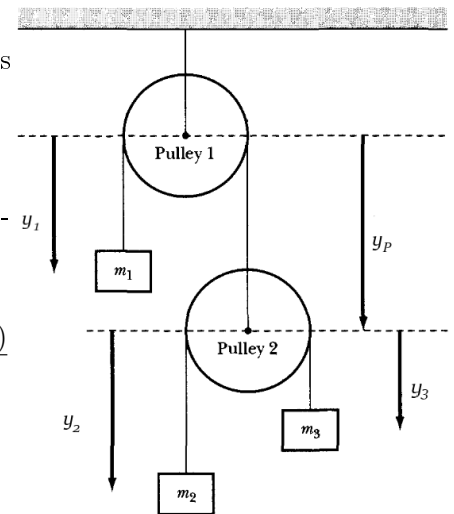
Utilice el sistema de coordenadas indicadas. Para este sistema de poleas determine:

- las ecuaciones de movimiento,
- y las tensiones de ambas cuerdas utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

Resultados:

$$Q_1 = \frac{g(32m_1m_2m_3 + 8m_1m_2m_p + 20m_1m_3m_p + 4m_1m_p^2 + 8m_2m_3m_p + 2m_2m_p^2 + 4m_3m_p^2 + m_p^3)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 6m_2m_p + 14m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$Q_2 = \frac{gm_3 \cdot (16m_1m_2 + 6m_1m_p + 4m_2m_p - m_p^2)}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 6m_2m_p + 14m_3m_p + 3m_p^2}$$



4. **Pesos enlazados por una cuerda** [Taylor 7.50]

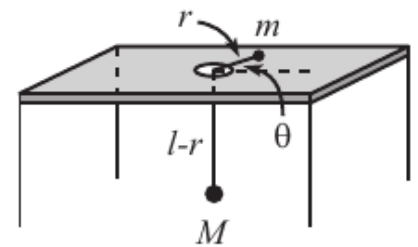
Una partícula de masa m posada sobre una mesa horizontal está atada a otra de masa M con una cuerda de longitud l que atraviesa un hueco en una mesa que no ofrece fricción. La última pende vertical con una distancia a la mesa $y = \ell - \rho$ función de la distancia de la primera al hueco ρ .

- Asumiendo que θ no es necesariamente constante obtenga las ecuaciones de Lagrange para ρ e y . Resultado:

$$-Mg + M\ddot{y} + \lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 - m\rho\dot{\theta}^2 + m\ddot{\rho} = 0$$

- Resuélva el sistema para ρ, y y el multiplicador de Lagrange λ_1 encontrando las fuerzas de tensión sobre ambas masas.

Resultado: $Q_\rho = \frac{Mm(g + \rho\dot{\theta}^2)}{M+m}$



5. **Partícula deslizando sobre una semi-esfera** [Marion (e) ex. 7.10]

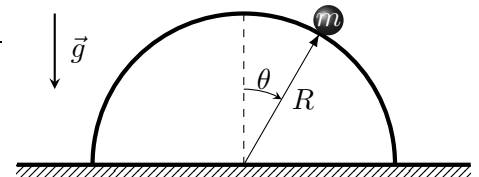
La partícula de masa m , considerada puntual, desliza sobre una semi-esfera de radio R sin fricción.

- Encuentre la fuerza de la ligadura.

Resultado: $F_\rho^{\text{ligadura}} = m(-R\dot{\theta}^2 + g \cos(\theta))$

- Calcule el ángulo en que la partícula se despega de la semi-esfera.

Resultado: $\approx 48,19^\circ$



Para llegar al ángulo de despegue debe resolver la ecuación diferencial a la que arribará tras resolver la problemática de las fuerzas de ligadura, que será $\ddot{\theta} = \frac{g \sin(\theta)}{R}$. Esta expresión es integrable para el recorrido que hace la partícula. Para facilitar esto se intercala por regla de la cadena derivaciones en función de θ en la definición de la aceleración.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

Como la partícula parte de $\theta(t=0) = 0$ con $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} d\dot{\theta} &= \frac{g}{R} \sin(\theta) d\theta \\ \int_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} \dot{\theta} d\dot{\theta} &= \frac{g}{R} \int_0^{\theta_{\text{despegue}}} \sin \theta d\theta \\ \frac{\dot{\theta}^2}{2} \Big|_0^{\dot{\theta}_{\text{despegue}}} &= \frac{g}{R} (-\cos \theta) \Big|_0^{\theta_{\text{despegue}}} \\ \frac{\dot{\theta}_{\text{despegue}}^2}{2} &= \frac{g}{R} (-\cos(\theta_{\text{despegue}}) + 1)\end{aligned}$$

Con esto hay que substituir $\dot{\theta}^2$ en una expresión de $F_{\rho}^{\text{ligadura}}$, que debe ser nula en el momento de despegue.