

# Mecánica Analítica Computacional

# Mecánica Newtoniana

*Víctor A. Bettachini*



$$\vec{r} = r\hat{r}$$

El vector  $\vec{r}$  tiene

- un módulo  $r = |\vec{r}|$ ,
- y una dirección y sentido denotado por un versor  $\hat{r}$ .

## Operación suma

$$\vec{a} = a_i \hat{i} + a_j \hat{j} + a_k \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i \hat{i} + b_j \hat{j} + b_k \hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i) \hat{i} + (a_j + b_j) \hat{j} + (a_k + b_k) \hat{k}$$

# Operando con vectores

## Operación suma

$$\vec{a} = a_i \hat{i} + a_j \hat{j} + a_k \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i \hat{i} + b_j \hat{j} + b_k \hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i) \hat{i} + (a_j + b_j) \hat{j} + (a_k + b_k) \hat{k}$$

## Operación producto

- por un escalar:  $c\vec{r} = cr_i \hat{i} + cr_j \hat{j} + cr_k \hat{k}$

# Operando con vectores

## Operación suma

$$\vec{a} = a_i \hat{i} + a_j \hat{j} + a_k \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i \hat{i} + b_j \hat{j} + b_k \hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i) \hat{i} + (a_j + b_j) \hat{j} + (a_k + b_k) \hat{k}$$

## Operación producto

- por un escalar:  $c\vec{r} = cr_i \hat{i} + cr_j \hat{j} + cr_k \hat{k}$
- escalar:  $\vec{r}\vec{s} = rs \cos(\theta) = r_i s_i + r_j s_j + r_k s_k$ 
  - así el módulo es  $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}$

# Operando con vectores

## Operación suma

$$\vec{a} = a_i \hat{i} + a_j \hat{j} + a_k \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i \hat{i} + b_j \hat{j} + b_k \hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i) \hat{i} + (a_j + b_j) \hat{j} + (a_k + b_k) \hat{k}$$

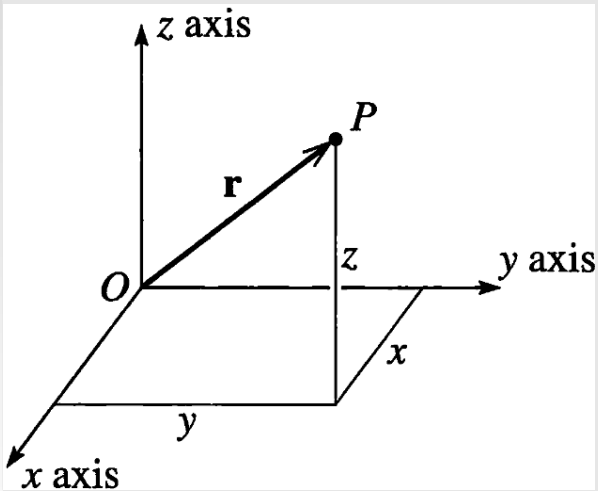
## Operación producto

- por un escalar:  $c\vec{r} = cr_i \hat{i} + cr_j \hat{j} + cr_k \hat{k}$
- escalar:  $\vec{r} \cdot \vec{s} = rs \cos(\theta) = r_i s_i + r_j s_j + r_k s_k$ 
  - así el módulo es  $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$

- vectorial:

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_i & r_j & r_k \\ s_i & s_j & s_k \end{vmatrix} = (r_j s_k - r_k s_j) \hat{i} + (r_k s_i - r_i s_k) \hat{j} + (r_i s_j - r_j s_i) \hat{k}$$

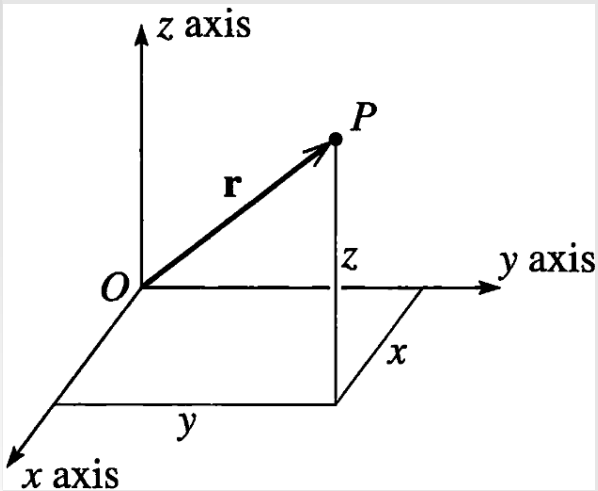
## Vector posición



En coordenadas  
cartesianas:  $x, y, z$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

## Vector posición



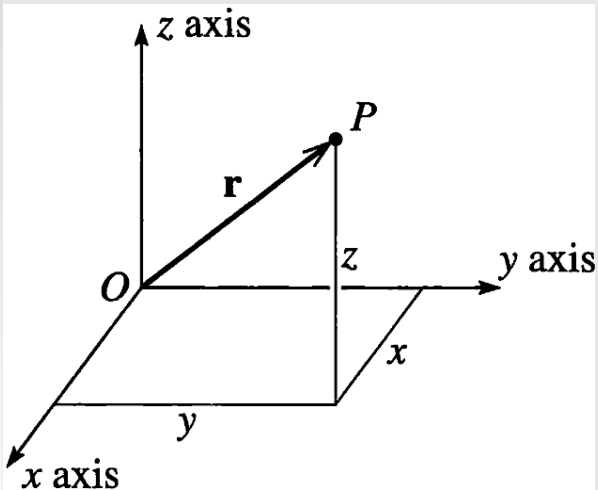
En coordenadas cartesianas:  $x, y, z$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

- $y$  componente de coordenada
- $\hat{y}$  versor de cada eje



## Vector posición



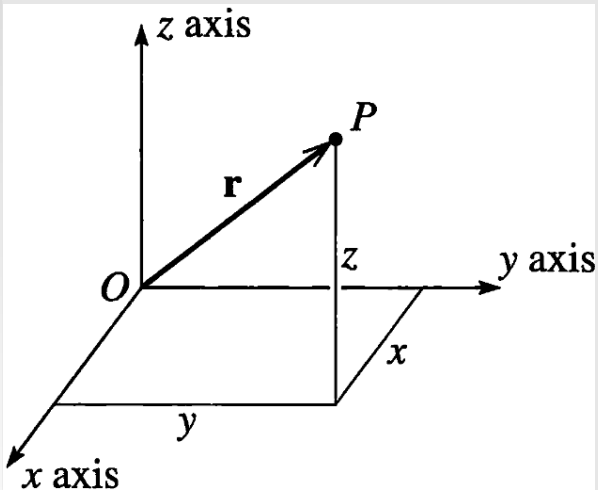
En coordenadas cartesianas:  $x, y, z$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

- $y$  componente de coordenada
- $\hat{y}$  versor de cada eje

A veces se sintetiza  
 $\vec{r} = (x, y, z)$

## Vector posición



En coordenadas cartesianas:  $x, y, z$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

- $y$  componente de coordenada
- $\hat{y}$  versor de cada eje

A veces se sintetiza

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

En general:  $\vec{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3$  con los  $\hat{e}_i$  de cilíndricas, esféricas, etc.

## Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\hat{r})$$

## Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \frac{dr_1}{dt}\hat{e}_1 + r_1\frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}\hat{e}_2 + r_2\frac{d\hat{e}_2}{dt} + \frac{dr_3}{dt}\hat{e}_3 + r_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

Tendríamos seis términos según la regla de la cadena.

## Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \frac{dr_1}{dt}\hat{e}_1 + r_1\frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}\hat{e}_2 + r_2\frac{d\hat{e}_2}{dt} + \frac{dr_3}{dt}\hat{e}_3 + r_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

Tendríamos seis términos según la regla de la cadena.

En el caso cartesiano  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  no varían con  $t$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

## Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \frac{dr_1}{dt}\hat{e}_1 + r_1\frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{dr_2}{dt}\hat{e}_2 + r_2\frac{d\hat{e}_2}{dt} + \frac{dr_3}{dt}\hat{e}_3 + r_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

Tendríamos seis términos según la regla de la cadena.

En el caso cartesiano  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  no varían con  $t$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

## Aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z}$$

## 1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas  $\sum \vec{F} = 0$  una partícula se mueve con  $\vec{v}$  constante.

## 1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas  $\sum \vec{F} = 0$  una partícula se mueve con  $\vec{v}$  constante.

## 2.a ley

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



## 1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas  $\sum \vec{F} = 0$  una partícula se mueve con  $\vec{v}$  constante.

## 2.a ley

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En términos del momento (ímpetu)  $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}} \quad (\dot{m} = 0)$$

## 1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas  $\sum \vec{F} = 0$  una partícula se mueve con  $\vec{v}$  constante.

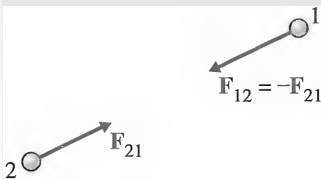
## 2.a ley

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En términos del momento (ímpetu)  $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}} \quad (\dot{m} = 0)$$

## 3.a ley: acción y reacción



Si 1 ejerce  $\vec{F}_{21}$  2 ejerce  $\vec{F}_{12}$  a 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

## 2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje  $\hat{x}$  sometido a  $\vec{F} = F_o \hat{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} &\implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dt = v_o + \frac{F_0}{m}t \\ &\implies x(t) = \int \dot{x}(t) dt = x_o + v_o t + \frac{F_0}{2m}t^2\end{aligned}$$

## 2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje  $\hat{x}$  sometido a  $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} &\implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dt = v_o + \frac{F_0}{m}t \\ &\implies x(t) = \int \dot{x}(t) dt = x_o + v_o t + \frac{F_0}{2m}t^2\end{aligned}$$

- Generando una ecuación diferencial para describir la dinámica, y conociendo  $x_0, v_0$  en  $t_0$ , se predican  $x(t), \dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$ .

## 2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje  $\hat{x}$  sometido a  $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} &\implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dt = v_o + \frac{F_0}{m}t \\ &\implies x(t) = \int \dot{x}(t) dt = x_o + v_o t + \frac{F_0}{2m}t^2\end{aligned}$$

- Generando una ecuación diferencial para describir la dinámica, y conociendo  $x_o, v_o$  en  $t_o$ , se predican  $x(t), \dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$ .
- Esta asignatura apunta a desarrollar la habilidad de modelar con ecuaciones diferenciales la dinámica de sistemas simples.

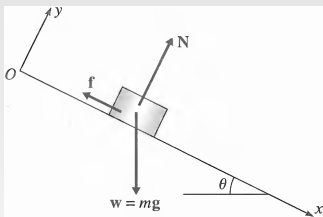
## 2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje  $\hat{x}$  sometido a  $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} &\implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t) dt = v_o + \frac{F_0}{m}t \\ &\implies x(t) = \int \dot{x}(t) dt = x_o + v_o t + \frac{F_0}{2m}t^2\end{aligned}$$

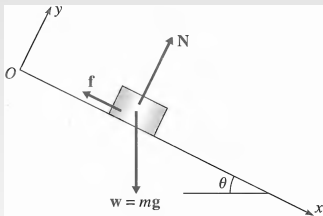
- Generando una ecuación diferencial para describir la dinámica, y conociendo  $x_o, v_o$  en  $t_o$ , se predican  $x(t), \dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$ .
- Esta asignatura apunta a desarrollar la habilidad de modelar con ecuaciones diferenciales la dinámica de sistemas simples.
- Posteriores asignaturas (e.g. Estática, Máquinas) aprovechan esta herramienta para el análisis de sistemas mecánicos.

## 2.a ley en cartesianas: un ejemplo trivial



$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \iff \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

## 2.a ley en cartesianas: un ejemplo trivial



$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \iff \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

$$0 = F_y = N - mg \cos \theta$$

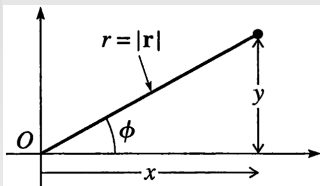
$$m\ddot{x} = F_x = w_x - f = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

$$\ddot{x} = g (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

$$x(t) = \frac{g}{2} (\sin \theta - \mu \cos \theta) t^2 \quad [\dot{x}(0) = 0, x(0) = 0]$$

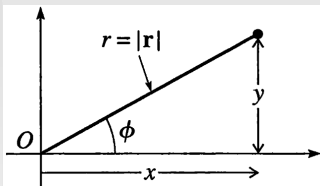


## Coordenadas polares



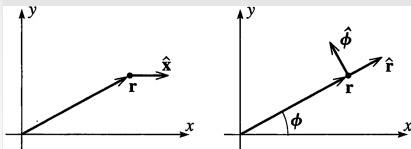
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{atan} \frac{y}{x} \end{cases}$$

## Coordenadas polares



$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{atan} \frac{y}{x} \end{cases}$$

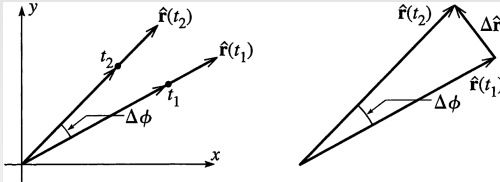
## Versor $\hat{r}$



$$\vec{r} = r\hat{r} \iff \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

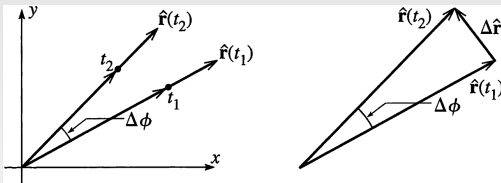
A diferencia de  $\hat{x}$  este versor cambia con el tiempo.

## Velocidad en polares



$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

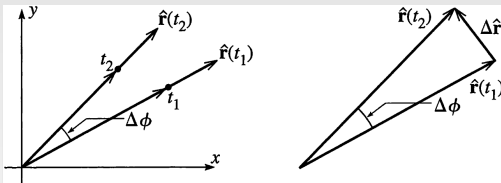
## Velocidad en polares



$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\Delta\hat{r} \sim \Delta\phi\hat{\phi} \sim \dot{\phi}\Delta t\hat{\phi}$$

## Velocidad en polares

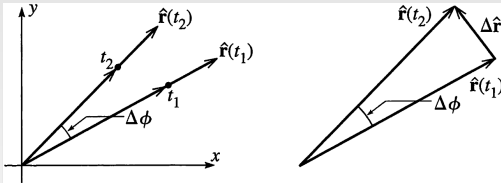


$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\Delta\hat{r} \sim \Delta\phi\hat{\phi} \sim \dot{\phi}\Delta t\hat{\phi}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

## Velocidad en polares

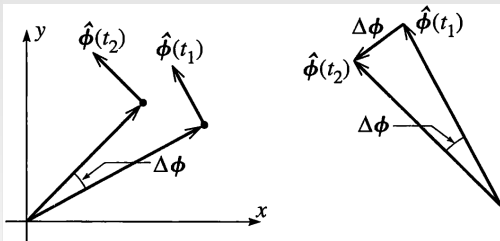


$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

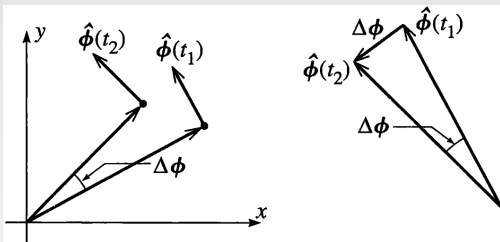
$$\Delta \hat{r} \sim \Delta \phi \hat{\phi} \sim \dot{\phi} \Delta t \hat{\phi}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{r}}{\Delta t} = \dot{\phi} \hat{\phi}$$

## Aceleración en polares



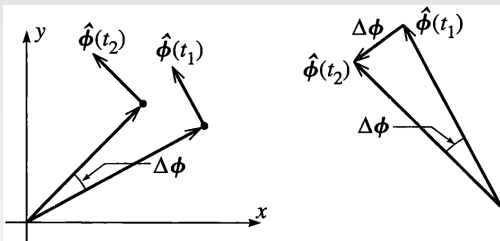
## Aceleración en polares



$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{\phi}}{\Delta t} = -\dot{\phi}\hat{r}$$



## Aceleración en polares

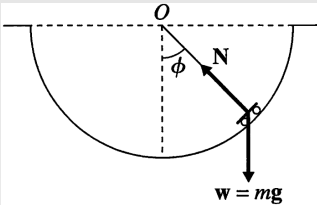


$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = -\dot{\phi}\hat{\phi}$$

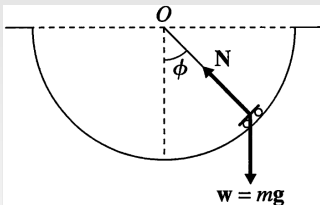
$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}\end{aligned}$$

## Dinámica de un movimiento circular

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \begin{cases} F_r = mg \cos \phi - N = -mR\dot{\phi}^2 \\ F_\phi = -mg \sin \phi = mR\ddot{\phi} \end{cases}$$



## Dinámica de un movimiento circular



$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \begin{cases} F_r = mg \cos \phi - N = -mR\dot{\phi}^2 \\ F_\phi = -mg \sin \phi = mR\ddot{\phi} \end{cases}$$

$$mR\ddot{\phi} = -mg \sin \phi$$

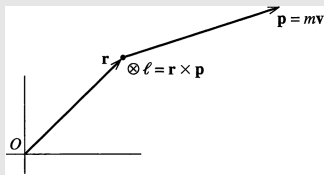
$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \sin \phi \simeq -\frac{g}{R} \phi \quad (\phi \simeq 0)$$

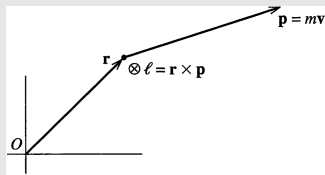
$$\phi(t) = A \sin \left( \sqrt{\frac{g}{R}} t \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{g}{R}} t \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \iff T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

## Momento angular (momento cinético)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$





## Momento angular (momento cinético)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

## Torque (momento, $\vec{N}$ )

$$\dot{\vec{L}} = \cancel{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

$$\text{pues } \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \implies \vec{p} \parallel \dot{\vec{r}} \implies \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$$

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

## Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

$v_\phi$ : velocidad tangencial

# Movimiento angular

## Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

$v_\phi$ : velocidad tangencial

## Momento de inercia

Para una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

# Movimiento angular

## Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

$v_\phi$ : velocidad tangencial

## Momento de inercia

Para una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

## Momento de inercia de sólidos

Para una  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$$I_{zz} = \iiint \rho(x, y, z) [x^2 + y^2] dV$$

Son los elementos diagonales del tensor de inercia  $I_{ij}$ .



# Movimiento angular

## Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

$v_\phi$ : velocidad tangencial

## Momento de inercia

Para una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

## Momento de inercia de sólidos

Para una  $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$$I_{zz} = \iiint \rho(x,y,z) [x^2 + y^2] dV$$

Son los elementos diagonales del tensor de inercia  $I_{ij}$ .

E.g. cilindro | si  $\vec{\omega} = \omega_z\hat{z}$  (eje)  $I_{zz} = \frac{m}{2}R^2$  | si  $\vec{\omega} = \omega_x\hat{x} \rightarrow I_{xx} = \frac{m}{12}l^2$