

CUERPO RÍGIDO | TENSORES DE INERCIA

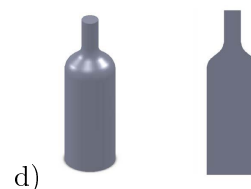
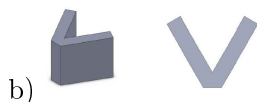
1. Componentes del tensor de inercia para una barra

Se tiene una barra de $m = 1 \text{ kg}$ de sección despreciable frente a $l = 1 \text{ m}$. De alinear un eje (\hat{z}) con ella,

- a) ¿cuales son sus momentos de inercia?, b) ¿existen los productos de inercia?

2. Ejes conveniente para el cálculo del momentos de inercia

Se dibujan vistas en perspectiva de diversos objetos. Sobre estos dibuje los ejes intersectando en el punto más conveniente para el cálculo de momentos de inercia, esto es, en el centro de masa. Haga lo mismo con los dos ejes que corresponden a la proyección en planta.

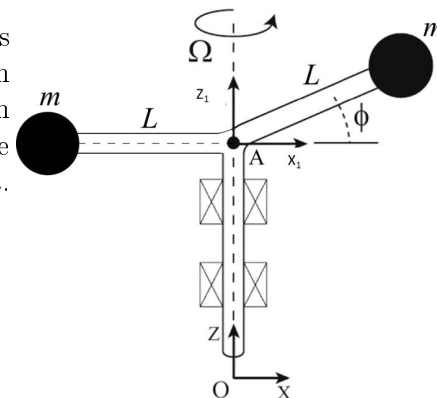


3. Péndulo de torsión desbalanceado

El sistema que se muestra en la ilustración para $t = 0$ presenta pesos en los extremos de dos brazos. La barra dispuesta verticalmente se mantiene en tal dirección con rulemanes que posibilitan que el eje rote sin fricción con velocidad angular Ω constante respecto el marco inercial O_{xyz} . Para este análisis la masa de brazos y ejes es despreciable frente a la de los pesos m . Calcule:

- a) tensor de inercia respecto a A en función del tiempo $\bar{I}_A(t)$

- b) momento angular $\vec{L}_A(t) = \bar{I}_A(t)\vec{\Omega}$ y torque $\vec{\tau}(t) = \dot{\vec{L}}(t)$.



Respuestas:

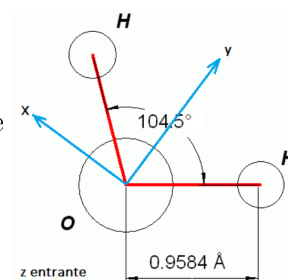
$$\bar{I}_A = \begin{bmatrix} \ell^2 m (-\cos^2(\phi) \cos^2(\Omega t) - \cos^2(\Omega t) + 2) & -\ell^2 m (\cos^2(\phi) + 1) \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) & \frac{\ell^2 m (\sin(\Omega t - 2\phi) - \sin(\Omega t + 2\phi))}{4} \\ -\ell^2 m (\cos^2(\phi) + 1) \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) & \ell^2 m (\sin^2(\phi) \sin^2(\Omega t) - 2 \sin^2(\Omega t) + 2) & -\frac{\ell^2 m (\cos(\Omega t - 2\phi) - \cos(\Omega t + 2\phi))}{4} \\ \ell^2 m (\cos^2(\phi) + 1) & -\frac{\ell^2 m (\cos(\Omega t - 2\phi) - \cos(\Omega t + 2\phi))}{4} & \ell^2 m (\cos^2(\phi) + 1) \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_A = \begin{bmatrix} \frac{\Omega \ell^2 m (\sin(\Omega t - 2\phi) - \sin(\Omega t + 2\phi))}{4} \\ -\frac{\Omega \ell^2 m (\cos(\Omega t - 2\phi) - \cos(\Omega t + 2\phi))}{4} \\ \Omega \ell^2 m (\cos^2(\phi) + 1) \end{bmatrix} \quad \vec{\tau}_A = \begin{bmatrix} \frac{\Omega^2 \ell^2 m (\cos(\Omega t - 2\phi) - \cos(\Omega t + 2\phi))}{4} \\ \frac{\Omega^2 \ell^2 m (\sin(\Omega t - 2\phi) - \sin(\Omega t + 2\phi))}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

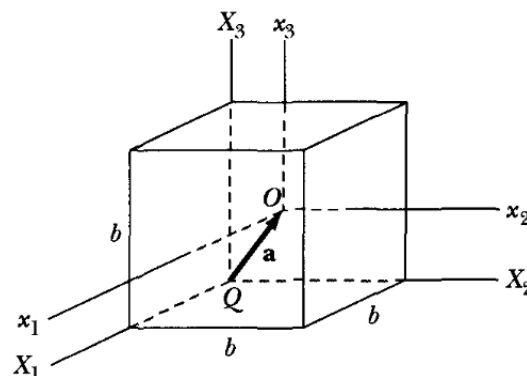
4. Molécula de agua

Calcule los momentos de inercia en el SI para una molécula de H_2O . En CNPT se abre con un ángulo de $104,5^\circ$ y median $95,84 \text{ pm}$ entre O y H. Respuesta:

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 1,02353565118967 \cdot 10^{-47} & 0 & 0 \\ 0 & 1,92240664746526 \cdot 10^{-47} & 0 \\ 0 & 0 & 2,94594229865493 \cdot 10^{-47} \end{bmatrix}$$

5. Cubo con arista b [Marion (e) ex. 11-3]

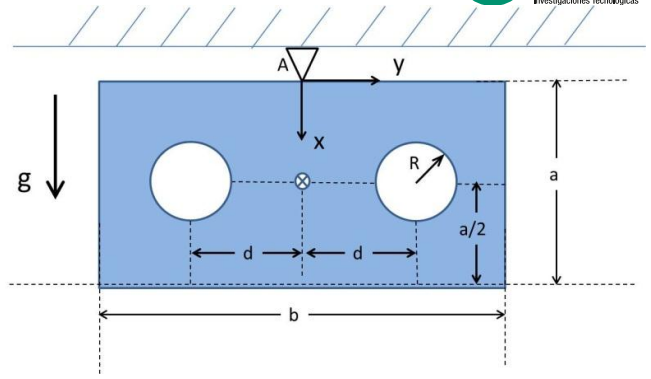
- a) Calcule el tensor de inercia desde el sistema de ejes x_i con origen en el centro de masa O .
- b) Use la forma general del teorema de ejes paralelos de Steiner para calcularlo en el sistema X_i con origen en el vértice Q



6. Planchuela metálica calada

En una planchuela metálica homogénea se calaron dos aberturas en forma simétrica. Suspendida desde el punto A *pendulea* en el plano x, y . Por eso es relevante conocer su momento de inercia I_{zz} desde ese punto. Cuenten con los datos disponibles en un taller: espesor e del material, dimensiones del plano y una m de pesada.

Se sugiere seguir esta secuencia:



- Calcular la densidad del metal de la planchuela contemplando el área faltante por los calados.
- Idém. I_{zz} de uno de los calados circulares como si fuera de este metal.
- ídem. I_{zz} de una planchuela sin calado desde su centro de masa.
- Trasladar con el teorema de Steiner los I_{zz} de ambos calados circulares al centro de la planchuela.
- Restando al I_{zz} de la planchuela sin calado el de los círculos obtenga el de la planchuela calada.
- Nuevamente con Steiner traslade el I_{zz} de la planchuela calada al punto de penduleo A.

Respuesta:

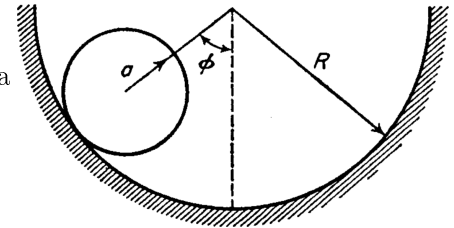
$$\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} \frac{m(6\pi R^4 + 24\pi R^2 d^2 - ab^3)}{12 \cdot (2\pi R^2 - ab)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(-3\pi R^4 - 3\pi R^2 a^2 + 2a^3 b)}{6(-2\pi R^2 + ab)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(-12\pi R^4 - 6\pi R^2 a^2 - 24\pi R^2 d^2 + 4a^3 b + ab^3)}{12(-2\pi R^2 + ab)} \end{bmatrix}$$

7. Cilindro rodando en semi-cilindro [Landau §32 6]

Hallar la energía cinética de un cilindro homogéneo de radio a que rueda en el interior de una superficie cilíndrica de radio R .

Resultado:

$$T = \frac{3m(R-a)^2 \dot{\phi}^2}{4}$$



8. Cono rodante sobre un plano [Landau §32 2e y Landau §32 7]

- En un sistema de ejes conveniente calcule el tensor de inercia de este cono homogéneo de altura h y radio en su base R .
- Obtenga Energía cinética de dicho cono rodando sobre el plano XY . El contacto instantáneo \overline{OA} forma un ángulo de θ con \hat{X} .

