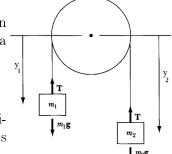
## LIGADURAS



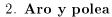
Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

## 1. Máquina de Atwood simple

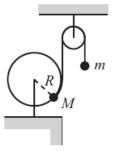
Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que cuelgan de una cuerda de longitud  $\ell$  que pasa por sobre una polea de radio  $R_p$  y masa  $m_p$ .



- a) Resuelva el caso en que se considera  $m_p$  irrelevante.
- b) Resuelva ahora considerando  $m_p$ , y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa m ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es  $(m/2)R^2$ .



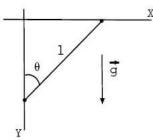
Una partícula de masa m pende de una sección de cuerda de longitud  $y_m$  que sobresale de una polea de radio  $R_p$  y masa despreciable. La cuerda tiene un longitud total  $\ell$ , su masa es despreciable y gira solidaria con la una polea. El otro extremo se ata con un nudo de masa M a un aro de masa  $m_a$ , enrollándose parcialmente en torno a éste. El centro de la polea está a una altura h por sobre el del aro de radio R que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia  $m_a R^2$ . Denomine el ángulo desde el centro hasta el nudo medido desde la horizontal con  $\theta$ .



- a) Escriba la posición de las partículas con masa con origen el centro del aro.
- b) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de  $\theta$ .
- c) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica. Resultado:  $R\left(-MR\ddot{\theta}+Mg\cos\left(\theta\right)-Rm\ddot{\theta}-Rm_a\ddot{\theta}+gm\right)=0$

## 3. Péndulo de pesas engarzadas y acopladas

Dos pesas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una barra rígida inextensible de longitud  $\ell$  y masa despreciable frente a las anteriores. La de  $m_1$  está engarzada en un eje horizontal y la de  $m_2$  en uno vertical.



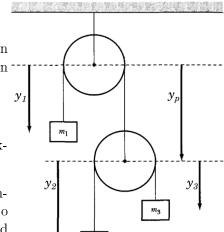
- a) Escriba las posiciones de ambas partículas en función de una única coordenada haciendo uso de la ligadura que impone la barra rígida. Hágalo para: 1) y, la coordenada para la pesa de  $m_2$ , 2)  $\theta$
- b) Obtenga las aceleraciones y responda: ¿cuál coordenada generalizada preferiría? Resultado:  $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 \left(\ell^2 y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 2\ell^2 m_2 y^2 m_1 y^4 + m_2 y^4} \qquad \ddot{\theta} = \frac{\left(\ell m_1 \cos\left(\theta\right) \dot{\theta}^2 \ell m_2 \cos\left(\theta\right) \dot{\theta}^2 g m_2\right) \sin\left(\theta\right)}{\ell \left(m_1 \cos^2\left(\theta\right) + m_2 \sin^2\left(\theta\right)\right)}$
- c) (\*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso  $m_1=m_2=m$ ?

## Mecánica Analítica Computacional



4. Maquina de Atwood compuesta [Marion (english) ex. 7.8]

a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura:  $y_i$  con i = 1, 2, 3, p.



- b) Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.
- c) Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones para expresarles en función de solo dos  $y_i$ .
- d) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del  $\dot{y}_i$  correspondiente.
- e) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
   Resultados:

$$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$$
  
$$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$$

f) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.

$$\ddot{y}_1 = \frac{4gm_1m_2 + 4gm_1m_3 + 2gm_1m_p - 16gm_2m_3 - 6gm_2m_p - 6gm_3m_p - 2gm_p^2}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{8gm_1m_2 - 8gm_1m_3 + 2gm_2m_p - 2gm_3m_p}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$