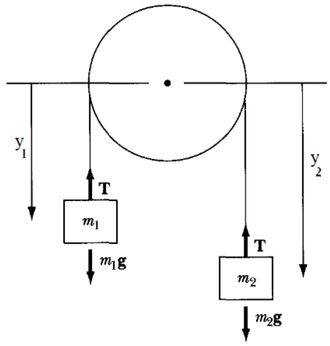
Ligaduras

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

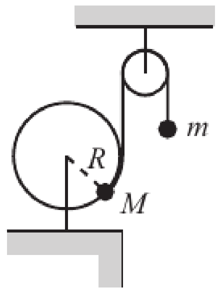
1. **Máquina de Atwood simple**
   Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas m_1 y m_2 que cuelgan de una cuerda de longitud ℓ que pasa por sobre una polea de radio R_p y masa m_p.



   a) Resuelva el caso en que se considera m_p irrelevante.

   b) Resuelva ahora considerando m_p, y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa m ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es $(m/2)R^2$.

2. **Aro y polea**
   Una partícula de masa m pende de una sección de cuerda de longitud y_m que sobresale de una polea de radio R_p y masa despreciable. La cuerda tiene un longitud total ℓ, su masa es despreciable y gira solidaria con la una polea. El otro extremo se ata con un nudo de masa M a un aro de masa m_a, enrollándose parcialmente en torno a éste. El centro de la polea está a una altura h por sobre el del aro de radio R que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia $m_a R^2$. Denomine el ángulo desde el centro hasta el nudo medido desde la horizontal con θ.

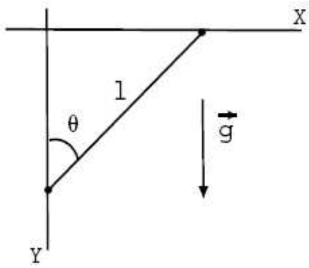


   a) Escriba la posición de las partículas con masa con origen el centro del aro.

   b) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de θ.

   c) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica.
   Resultado: $R\left(-MR\ddot{\theta} + Mg\cos(\theta) - Rm\ddot{\theta} - Rm_a\ddot{\theta} + gm\right) = 0$

3. **Péndulo de pesas engarzadas y acopladas**
   Dos pesas de masa m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida inextensible de longitud ℓ y masa despreciable frente a las anteriores. La de m_1 está engarzada en un eje horizontal y la de m_2 en uno vertical.

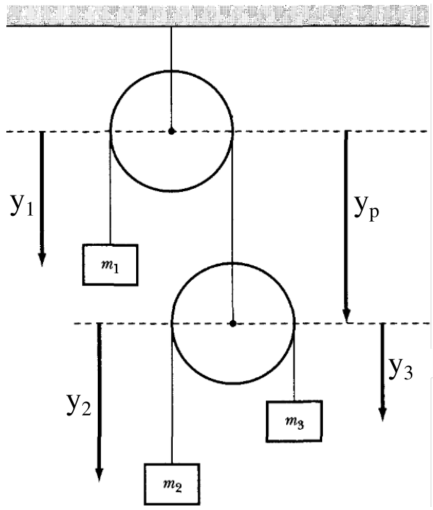


   a) Escriba las posiciones de ambas partículas en función de una única coordenada haciendo uso de la ligadura que impone la barra rígida. Hágalo para: 1) y, la coordenada para la pesa de m_2, 2) θ

   b) Obtenga las aceleraciones y responda: ¿cuál coordenada generalizada preferiría?
   Resultado: $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y\dot{y}^2 + g m_2\left(\ell^2 - y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$ $\qquad \ddot{\theta} = \frac{\left(\ell m_1\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - \ell m_2\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - g m_2\right)\sin(\theta)}{\ell\left(m_1\cos^2(\theta) + m_2\sin^2(\theta)\right)}$

   c) (*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso $m_1 = m_2 = m$?

4. **Maquina de Atwood compuesta** [Marion (english) ex. 7.8]



a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura: y_i con $i = 1, 2, 3, p$.

b) Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.

c) Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones para expresarles en función de solo dos y_i.

d) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del $\dot{y}_i$ correspondiente.

e) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
Resultados:
$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$
$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$

f) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.
Resultados:
$\ddot{y}_1 = \frac{4gm_1m_2+4gm_1m_3+2gm_1m_p-16gm_2m_3-6gm_2m_p-6gm_3m_p-2gm_p^2}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_2 = \frac{8gm_1m_2-8gm_1m_3+2gm_2m_p-2gm_3m_p}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_3 = -\frac{8gm_1m_2-8gm_1m_3+2gm_2m_p-2gm_3m_p}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_p = -\frac{4gm_1m_2+4gm_1m_3+2gm_1m_p-16gm_2m_3-6gm_2m_p-6gm_3m_p-2gm_p^2}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$

