fuerzasExternasEjemplos

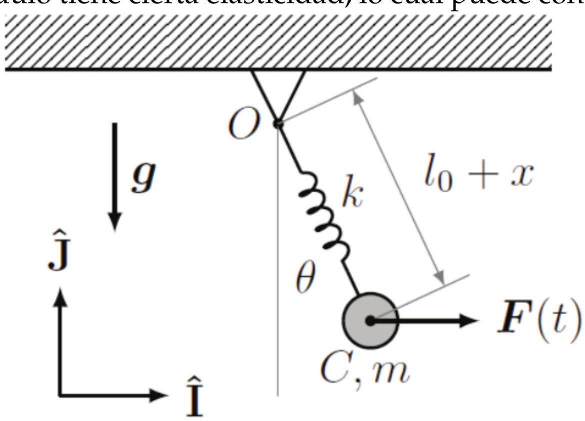
May 21, 2020

1 Euler-Lagrange: fuerzas externas | Ejemplos

l' 2020 Víctor A. Bettachini
Mecánica General
Departamento de Ingeniería e Investigación Tecnológica
Universidad Nacional de La Matanza

1.1 Ejemplo: péndulo con fuerza elástica

La cuerda de un péndulo tiene cierta elastícidad, lo cual puede contemplarse. Y sobre el centro de



la pesa C: $\vec{F} = F(t)\hat{I}$.

1.1.1 Calcular el trabajo virtual

- Desplazamiento virtual en función de coordenadas generalizadas

$$\delta\vec{r}_c = \delta x\hat{\rho} + (l_0 + x)\delta\theta\hat{\theta} = \delta x \left(\sin(\theta)\hat{I} - \cos(\theta)\hat{J}\right) + (l_0 + x)\delta\theta \left(\cos(\theta)\hat{I} + \sin(\theta)\hat{J}\right).$$

- Trabajo virtual a causa de la $\vec{F}$ aplicada en C

$$\begin{aligned} \delta W amp; &= \sum_i Q_i \delta q_i = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_C = F(t)\hat{I} \cdot \delta\vec{r}_c \\ amp; &= F(t)\sin(\theta)\delta x + F(t)(l_0 + x)\cos(\theta)\delta\theta \\ amp; &= Q_x \delta x + Q_\theta \delta\theta \\ amp; &\implies Q_x = F(t)\sin(\theta) \quad Q_\theta = F(t)(l_0 + x)\cos(\theta) \end{aligned}$$

1.1.2 Calculo directo de fuerzas generalizadas

- Escribimos $\vec{r}$ en el sistema geométrico de coordenadas

$$\vec{r}_C = (l_0 + x)\hat{\rho} = (l_0 + x)\left(\sin(\theta)\hat{I} - \cos(\theta)\hat{J}\right)$$

- Calcular para cada δq_i

$$\sum_i Q_i \delta q_i = \sum_j F_j \left(\frac{\partial r_j}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

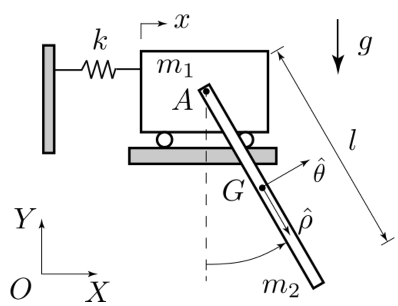
$\exists ! \vec{F} \implies Q_x \delta x = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}_C}{\partial x} \quad Q_\theta = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}_C}{\partial \theta}.$

$$Q_x = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}_C}{\partial x} = F(t)\hat{I}\cdot\left(\sin(\theta)\hat{I} - \cos(\theta)\hat{J}\right) = F(t)\sin(\theta)$$

$$Q_\theta = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}_C}{\partial \theta} = F(t)\hat{I}\cdot(l_0 + x)\left(\cos(\theta)\hat{I} + \sin(\theta)\hat{J}\right) = F(t)(l_0 + x)\cos(\theta)$$

1.2 Otro ejemplo: barra que pende de un carro

- Barra m_2, l (centro de masa en G) pende de (A) sujeta a $\vec{g}$.
- Carro m_1 unido a pared por un resorte de constante elástica k



1.2.1 Lagrangiano

Recorando que la fuerza elástica que ejerce el resorte es $\vec{F}_{\text{elástica}} = -kx\hat{x}$ y que el momento de inercia de una barra calculado desde el extremo $I = \frac{m}{12}l^2$, se puede calcular el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},\theta,\dot{\theta}) = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{12}l^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{2}x^2 - m_2 g\frac{l}{2}\left(1 - \cos(\theta)\right).$$

1.2.2 Dos ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} amp; - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$
$$m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} + \frac{m_2}{2}l\ddot{\theta}\cos(\theta) - \frac{m_2}{2}l\dot{\theta}^2\sin(\theta) amp; - (-kx) = 0$$
$$(m_1 + m_2)\,\ddot{x} + \frac{m_2}{2}l\cos(\theta)\ddot{\theta} - \frac{m_2}{2}l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 amp; + kx = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} amp;=0\\
\frac{m_2}{2}l\ddot{x}\cos(\theta)-\frac{m_2}{2}l\dot{x}\sin(\theta)\dot{\theta}+\frac{m_2}{4}l^2\ddot{\theta}+\frac{m_2}{12}l^2\ddot{\theta}\\
-\left(-m_2g\frac{l}{2}\sin(\theta)\right) amp;=0\\
\frac{m_2}{2}l\cos(\theta)\ddot{x}-\frac{m_2}{2}l\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta}+\frac{m_2}{3}l^2\ddot{\theta}+m_2g\frac{l}{2}\sin(\theta) amp;=0
\end{aligned}
$$

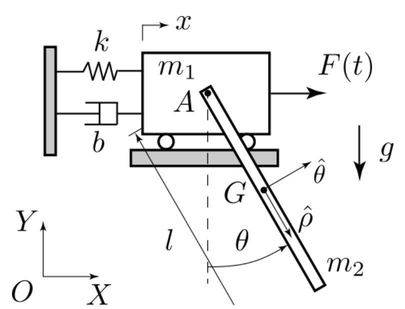
1.2.3 Dinámica

En defininitiva el sistema de ecuaciones que describe la dinámica es

$$
\begin{cases}
(m_1+m_2)\,\ddot{x}+\frac{m_2}{2}l\cos(\theta)\ddot{\theta}-\frac{m_2}{2}l\sin(\theta)\dot{\theta}^2+kx=0\\
\frac{m_2}{2}l\cos(\theta)\ddot{x}-\frac{m_2}{2}l\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta}+\frac{m_2}{3}l^2\ddot{\theta}+m_2g\frac{l}{2}\sin(\theta)=0
\end{cases}
$$

1.2.4 Ahora agregamos unas fuerzas no conservativas

Al sistema anterior se aplican dos fuerzas no conservativas: - una motríz externa $\vec{F}_{\text{motríz}}=F(t)\hat{x}$ - una de amortiguación proporcional a la velocidad $\vec{F}_{\text{amortiguación}}=-b\dot{x}\hat{x}$



Analizamos la variación de trabajos virtuales

$$
\begin{aligned}
\delta W^{\text{nc}} amp;=\sum_j\vec{F}_j^{\text{nc}}\cdot\delta\vec{r}_j=\sum_i Q_i\delta q_i\\
amp;=\left[-b\dot{x}+F(t)\right]\delta x+[0]\,\delta\theta\\
amp;\implies Q_x=-b\dot{x}+F(t)\quad Q_\theta=0
\end{aligned}
$$

Con esto el sistema de ecuaciones de la dinámica es

$$
\begin{cases}
(m_1+m_2)\,\ddot{x}+\frac{m_2}{2}l\cos(\theta)\ddot{\theta}-\frac{m_2}{2}l\sin(\theta)\dot{\theta}^2+kx=-b\dot{x}+F(t)\\
\frac{m_2}{2}l\cos(\theta)\ddot{x}-\frac{m_2}{2}l\sin(\theta)\dot{x}\dot{\theta}+\frac{m_2}{3}l^2\ddot{\theta}+m_2g\frac{l}{2}\sin(\theta)=0
\end{cases}
$$