g01e01

September 3, 2020

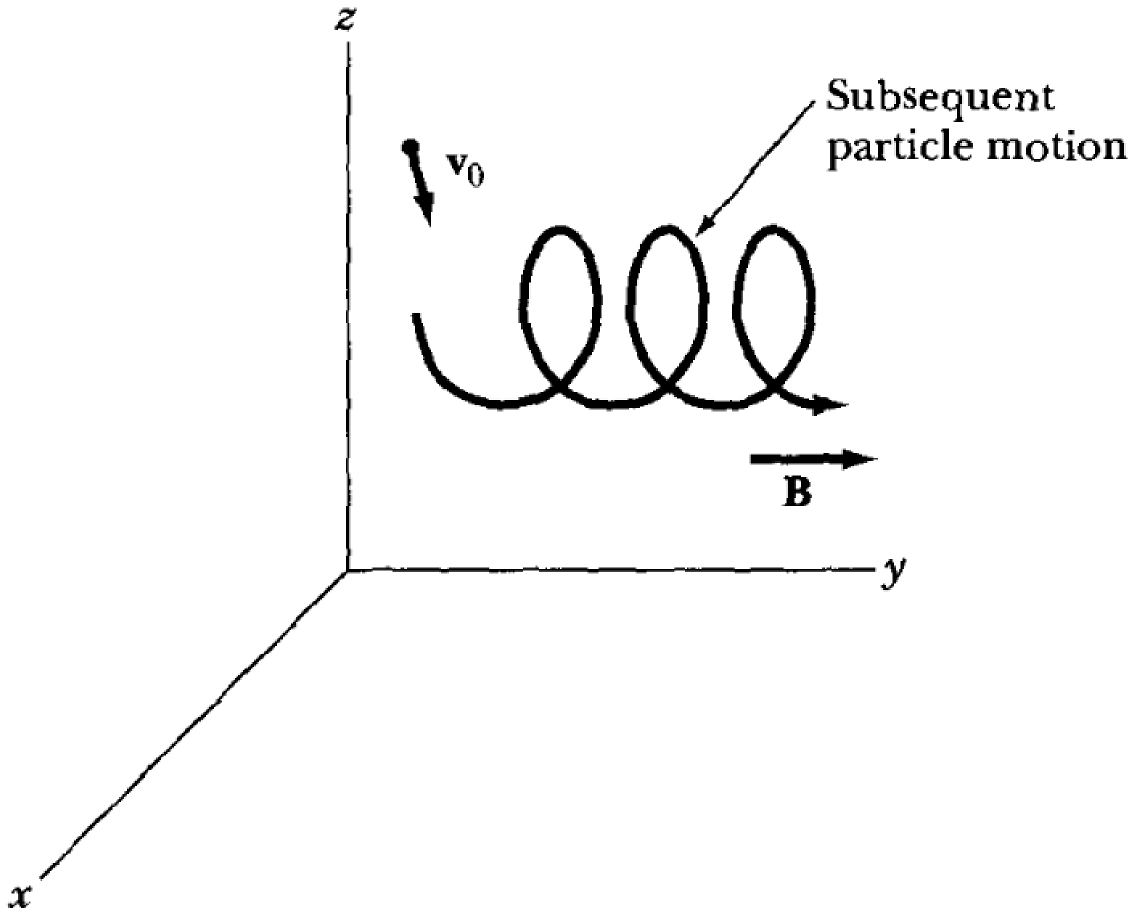
1 Cinemática y dinámica Newtoniana de la partícula puntual

Mecánica General
Departamento de Ingeniería e Investigación Tecnológica
Universidad Nacional de La Matanza

1.1 Ejercicio 1

Este ejercicio es el ejemplo 2.10 que se desarrolla completo en el libro
Jerry B. Marion. Dinámica clásica de las partículas y sistemas. 2.a. Reverté, 2003.

1.1.1 Enunciado



La fuerza de Lorentz es la ejercida a una particular de carga eléctrica q por un campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

La figura muestra esquemáticamente una trayectoria y las condiciones $\vec{v}_0, \vec{B} =$ cte. que le dieron lugar. Halle las ecuaciones de tal dinámica.

1.1.2 Resolución

Todo nos lleva a Newton... Para empezar planteamos la 2.a ley de la dinámica de Newton

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = m\vec{a}.$$

Desarrollando producto vectorial Para empezar calculamos el término que tiene el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, y para eso necesitamos una expresión de $\vec{v}$.

Si la posición es

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z},$$

entonces

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}.$$

Del dibujo veo que $\vec{B}$ solo tiene componente en $\hat{y}$, es decir $\vec{B} = B_0\hat{y}$, donde $B_0 = \text{cte}$. Por tanto el producto vectorial buscado es

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{z}B_0\hat{x} + \dot{x}B_0\hat{z}$$

Ahora si, fuerza es masa por aceleración, y entonces... Momento aún hay que obtener la aceleración

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}.$$

Como aquí no hay campo eléctrico, es decir $\vec{E} = 0$ la 2.a ley queda

$$\vec{F} = -q\dot{z}B_0\hat{x} + q\dot{x}B_0\hat{z} = m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z} = m\ddot{\vec{r}}$$

Resolveremos en cada eje. Empezamos por $\hat{y}$. Allí $m\ddot{y} = 0 \implies \dot{y} = \text{cte} = \dot{y}_0$. Para obtener la dinámica en esta variables, es decir $y = y(t)$ hay que resolver la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y &= \dot{y}_0 \\ \int \mathrm{d}y &= \dot{y}_0 \int \mathrm{d}t \\ y - y_0 &= \dot{y}_0\left(t - t_0\right), \end{aligned}$$

donde (y_0 = y(t_0) es una condición inicial que debe conocerse para determinar una trayectoria de todas las posibles.

Los ejes $\hat{x}, \hat{z}$ están entrelazados

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{q}{m}B_0\dot{z} \\ \ddot{z} = +\frac{q}{m}B_0\dot{x} \end{cases}$$

Podemos derivar una de ellas para luego sustituir una derivada en la otra. Por ejemplo si derivo la de x obtengo

$$\begin{aligned} \dddot{x} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{t}^3}x = -\frac{q}{m}B_0\ddot{z} = -\frac{q}{m}B_0\left(\frac{q}{m}B_0\dot{x}\right) &= -\left(\frac{q}{m}B_0\right)^2\dot{x} \\ \dddot{x} + \left(\frac{q}{m}B_0\right)^2\dot{x} &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que resolver esta ecuación diferencial: - lineal: polinomio de x o u sus derivadas, - homogénea: todos sus términos dependen de x o sus derivadas.

Propongo una solución $x = \mathrm{e}^{\gamma t}$, de modo que obtengo

$$\left[\gamma^3 + \left(\frac{q}{m}B_0\right)^2\gamma\right]\mathrm{e}^{\gamma t} = 0 \implies \gamma^2 = -\left(\frac{q}{m}B_0\right)^2 \implies \gamma = \pm i\frac{q}{m}B_0.$$

Como hoy dos posibles γ que dan dos soluciones distintas, la solución es una combinación lineal de ambas

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{+i\frac{q}{m}B_0 t} + B\,\mathrm{e}^{-i\frac{q}{m}B_0 t}\,.$$

Como habrán visto en cálculo avanzado, a través de la identidad de Euler puede escribirse tal solución como combinación lineal de armónicas

$$x(t) = a_1 \cos\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) + b_1 \sin\left(\frac{q}{m}B_0 t\right).$$

Evidentemente podríamos haber hecho lo mismo para z por lo que hubiera obtenido

$$z(t) = a_2 \cos\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) + b_2 \sin\left(\frac{q}{m}B_0 t\right),$$

con coeficientes a_2, b_2 en principio independientes de los de $x(t)$.

Dijimos que x y z están entrelazadas.. Recordemos que

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{qB_0}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = +\frac{qB_0}{m}\dot{x} \end{cases}$$

Esto nos es útil para encontrar relaciones entre los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2.

Si derivo dos veces en el tiempo las soluciones se obtienen las mismas multiplicadas por $-\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2$, e.g.

$$\ddot{x} = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x,$$

utilizo esto en la primer expresión anterior y reemplazo x y $\dot{z}$ con las expresiones de sus soluciones armónicas

$$\ddot{x}(t) = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 [x(t)] = -\frac{qB_0}{m}[\dot{z}(t)]$$

$$-\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 \left[a_1 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right] = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)\left[-\left(\frac{qB_0}{m}\right) a_2 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + b_2\left(\frac{qB_0}{m}\right)\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right]$$

$$\left[a_1 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right] = \left[-a_2 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) + b_2 \cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right].$$

Como esta igualdad ha de cumplirse $\forall t$, podemos usar distintos tiempos para encontrar las relaciones entre los coeficientes.

Así $t = 0 \implies \cos(0) = 1$ y $\sin(0) = 0 \implies a_1 = b_2$. En contrapartida habrá algún t para el cuál $\left(\frac{qB_0}{m}t\right) = \frac{\pi}{2} \implies \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies b_1 = -a_2$.

Esto permite escribir ambas soluciones armónicas $x(t), z(t)$ en función de los mismos coeficientes

$$\begin{cases} x(t) - x_0 = a_1 \cos\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) + b_1 \sin\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) \\ y(t) - y_0 = \dot{y}_0 t \\ z(t) - z_0 = -b_1 \cos\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) + a_1 \sin\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) \end{cases}$$

Para finalizar Para determinar una de todas las posibles trayectorias deberíamos conocer una condición inicial, tanto en posición como en velocidad. Si por ejemplo en $t = 0$ asumimos que se encuentra en el origen de coordenadas y solo hay velocidad en $\hat{z}$, tendremos que

$$\dot{x} = 0 \implies 0 = \left(\frac{qB_0}{m}\right) b_1 \implies b_1 = 0$$

y

$$\dot{z} = \dot{z}_0 = \left(\frac{qB_0}{m}\right) a_1 \implies \begin{cases} x(t) = \frac{m\dot{z}_0}{qB_0} \cos\left(\frac{qB_0}{m} t\right) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{m\dot{z}_0}{qB_0} \sin\left(\frac{q}{m} B_0 t\right) \end{cases}$$