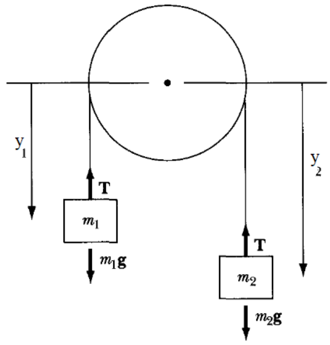
Ligaduras

Los problemas marcados con (*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

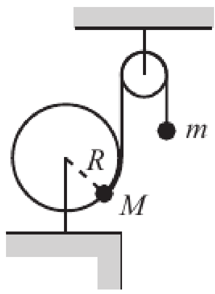
1. **Máquina de Atwood simple**
   Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas m_1 y m_2 que cuelgan de una cuerda de longitud ℓ que pasa por sobre una polea de radio R_p y masa m_p.



   a) Resuelva el caso en que se considera m_p irrelevante.

   b) Resuelva ahora considerando m_p, y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa m ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es $(m/2)R^2$.

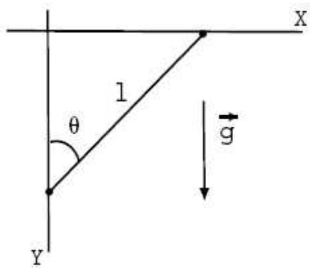
2. **Aro y polea**
   Una partícula de masa m pende del extremo de una cuerda de longitud ℓ que tiene una masa despreciable y está enrollada en torno a una polea de radio R_p, también de masa despreciable. El otro extremo se ata con un nudo de masa $M > m$ a un aro de masa m_a, enrollándose parcialmente en torno a éste. El radio del aro es R y puede rotar libremente, lo que hace que éste y el nudo presenten momentos de inercia $m_a R^2$ y MR^2 respectivamente.



   a) Describa la ligadura contemplando el ángulo de rotación del aro.

   b) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica.

3. **Péndulo de pesas engarzadas y acopladas**
   Dos partículas de masa m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida inextensible de longitud ℓ y masa despreciable frente a las anteriores. La de m_1 se mueve solo sobre el eje x y la de m_2 solo sobre el y.



   a) Despeje la aceleración en la ecuación de Euler-Lagrange para una única coordenada generalizada

$$1)\ y \quad 2)\ \theta$$

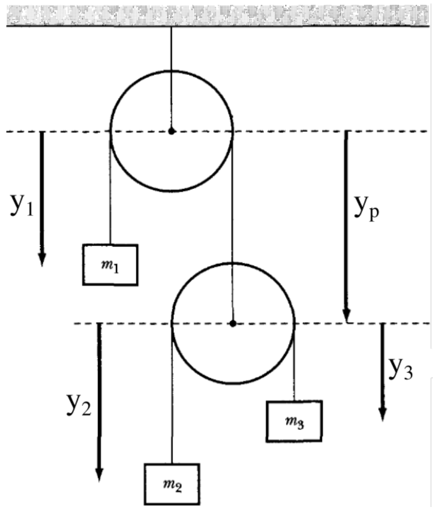
   Tras resolver ambos casos, ¿cuál preferiría para trabajar?
   Resultados:

$$\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 \left(\ell^2 - y^2\right)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(\ell m_1 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - \ell m_2 \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - g m_2\right)\sin(\theta)}{\ell\left(m_1 \cos^2(\theta) + m_2 \sin^2(\theta)\right)}$$

   b) (*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso $m_1 = m_2 = m$?

4. **Maquina de Atwood compuesta** [Marion (english) ex. 7.8]



a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura: y_i con $i = 1, 2, 3, p$.

b) Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.

c) Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones para expresarles en función de solo dos y_i.

d) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del $\dot{y}_i$ correspondiente.

e) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
Resultados:
$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$
$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$

f) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.
Resultados:
$\ddot{y}_1 = \frac{4gm_1m_2+4gm_1m_3+2gm_1m_p-16gm_2m_3-6gm_2m_p-6gm_3m_p-2gm_p^2}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_2 = \frac{8gm_1m_2-8gm_1m_3+2gm_2m_p-2gm_3m_p}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_3 = -\frac{8gm_1m_2-8gm_1m_3+2gm_2m_p-2gm_3m_p}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$
$\ddot{y}_p = -\frac{4gm_1m_2+4gm_1m_3+2gm_1m_p-16gm_2m_3-6gm_2m_p-6gm_3m_p-2gm_p^2}{4m_1m_2+4m_1m_3+2m_1m_p+16m_2m_3+8m_2m_p+8m_3m_p+3m_p^2}$

Actualizado al 3 de mayo de 2024