

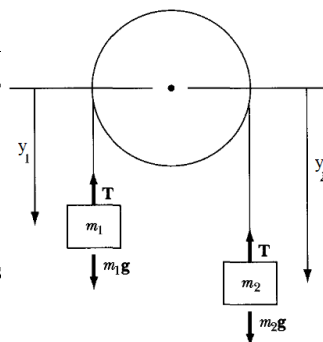
## LIGADURAS

Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

## 1. Máquina de Atwood simple

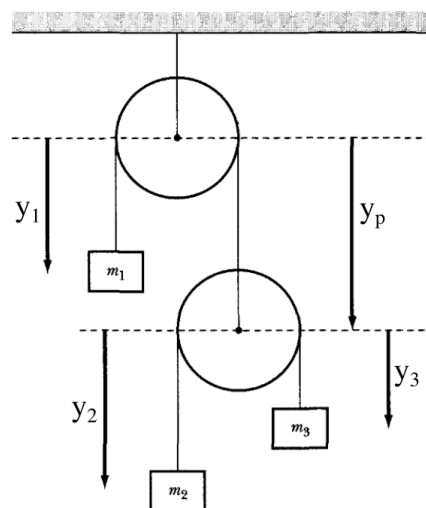
Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que cuelgan de una cuerda de longitud  $\ell$  que pasa por sobre una polea de radio  $R_p$  y masa  $m_p$ .

- Resuelva el caso en que se considera  $m_p$  irrelevante.
- Resuelva ahora considerando  $m_p$ , y que la polea presenta una sección cilíndrica. El momento de inercia de tal cilindro de masa  $m$  ante rotaciones en torno a su eje de simetría longitudinal es  $(m/2)R^2$ .



## 2. Máquina de Atwood compuesta [Marion (english) ex. 7.8]

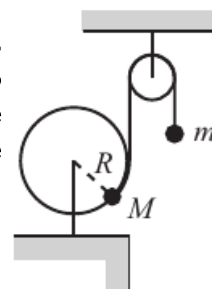
- Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura:  $y_i$  con  $i = 1, 2, 3, p$ .
- Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.
- Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones anteriores para que estas queden expresada en función de solo dos de las coordenadas.
- Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del  $y_i$  correspondiente
- Obtenga las correspondientes dos ecuaciones de Euler-Lagrange.
- Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.



## 3. Aro y polea

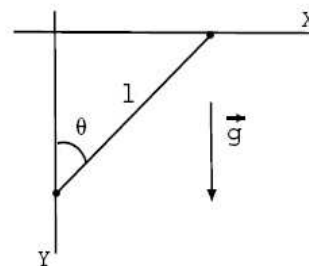
Una partícula de masa  $m$  pende de una polea de masa también despreciable colgada del techo al extremo de una cuerda de longitud  $\ell$  y masa despreciable. El otro extremo se ata con un nudo de masa  $M > m$  a un aro de masa  $m_a$ , enrollándose parcialmente en torno a éste. El radio del aro es  $R$  y puede rotar libremente, lo que hace que éste y el nudo presenten momentos de inercia  $m_a R^2$  y  $M R^2$  respectivamente.

- Describa la ligadura contemplando el ángulo de rotación del aro.
- Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica.



#### 4. Péndulo de pesas engarzadas y acopladas

Dos partículas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una barra rígida inextensible de longitud  $\ell$  y masa despreciable frente a las anteriores. La de  $m_1$  se mueve solo sobre el eje  $x$  y la de  $m_2$  solo sobre el  $y$ .



- a) Despeje la aceleración en la ecuación de Euler-Lagrange para una única coordenada generalizada

1)  $y$  2)  $\theta$

Tras resolver ambos casos, ¿cuál preferiría para trabajar?

- b) (\*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso  $m_1 = m_2 = m$ ?