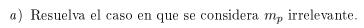
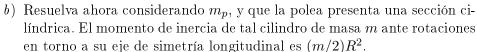
#### LIGADURAS

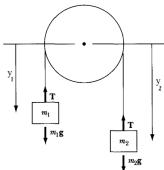
Los problemas marcados con (\*) tienen alguna dificultad adicional, no dude en consultar.

## 1. Máquina de Atwood simple

Obtenga a partir de la ecuación de Euler-Lagrange la aceleración que presentan las pesas de masas  $m_1$  y  $m_2$  que cuelgan de una cuerda de longitud  $\ell$  que pasa por sobre una polea de radio  $R_p$  y masa  $m_p$ .



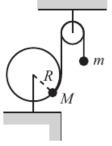




## 2. Aro y polea

Una pesa de masa m pende de una sección de cuerda de longitud  $\ell_{pesa}$  que sobresale a la derecha de una polea de radio  $R_{polea}$  y masa  $m_{poleo}$ . La cuerda tiene un longitud total  $\ell$ , su masa es despreciable y gira solidaria con la una polea.

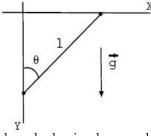
El otro extremo se ata con un nudo de masa  $M_{nude}$  a un aro de masa  $m_{aro}$ , enrollándose parcialmente en torno a éste. El centro de la polea está a una altura h por sobre el del aro de radio  $R_{aro}$  que como puede rotar libremente presenta un momento de inercia  $m_{aro}R_{aro}^2$ . Denomine el ángulo desde el centro hasta el nudo medido desde la horizontal con  $\theta$ . Recuerde que el sentido positivo para un ángulo es el antihorario.



- a) Escriba la posición de las partículas con masa con origen el centro del aro.
- b) Describa la función de ligadura y utilícela para expresar las posiciones en función de  $\theta$ .
- c) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange para la dinámica. Resultado:  $M_{nudo}R_{aro}^2\ddot{\theta}_{aro} + M_{nudo}R_{aro}g\cos(\theta_{aro}) + R_{aro}^2m_{aro}\ddot{\theta}_{aro} + \frac{R_{polea}^2m_{polea}\ddot{\theta}_{aro}}{2} = 0$

# 3. Péndulo de pesas engarzadas y acopladas

Dos pesas de masa  $m_1$  y  $m_2$  están unidas por una barra rígida inextensible de longitud  $\ell$  y masa despreciable frente a las anteriores. La de  $m_1$  está engarzada en un eje horizontal y la de  $m_2$  en uno vertical.



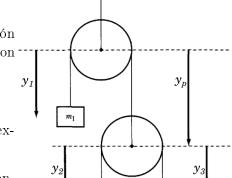
- a) Escriba las posiciones de ambas partículas en función de una única coordenada haciendo uso de la ligadura que impone la barra rígida. Hágalo para: 1) y, la coordenada para la pesa de  $m_2,$  2) heta
- b) Obtenga las aceleraciones y responda: ¿cuál coordenada generalizada preferiría? Resultado:  $\ddot{y} = \frac{-\ell^2 m_1 y \dot{y}^2 + g m_2 (\ell^2 - y^2)^2}{\ell^4 m_2 + \ell^2 m_1 y^2 - 2\ell^2 m_2 y^2 - m_1 y^4 + m_2 y^4}$   $\ddot{\theta} = \frac{(\ell m_1 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - \ell m_2 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - g m_2) \sin(\theta)}{\ell (m_1 \cos^2(\theta) + m_2 \sin^2(\theta))}$
- c) (\*) ¿Cuál es el período de movimiento de pequeñas oscilaciones para el caso  $m_1 = m_2 = m$ ?

### Mecánica Analítica Computacional



4. Maquina de Atwood compuesta [Marion (english) ex. 7.8]

a) Escriba la posición de las tres pesas y de la polea inferior en función de las cuatro coordenadas generalizadas indicadas en la figura:  $y_i$  con i=1,2,3,p.



- b) Modele las ligaduras que proveen las cuerdas en dos funciones.
- c) Haciendo uso de estas últimas reemplace en las posiciones para expresarles en función de solo dos  $y_i$ .
- d) Calcule energías potenciales y cinéticas contemplando los momentos de inercia de las poleas. Recuerde la relación entre el perímetro (circunferencia) de un círculo y su radio para escribir la velocidad angular en función del  $\dot{y}_i$  correspondiente.
- e) Obtenga las dos ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$-gm_1 + gm_2 + gm_3 + gm_p + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_1 - m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{3m_p\ddot{y}_1}{2} = 0$$
  
$$-gm_2 + gm_3 - m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_1 + m_3\ddot{y}_2 + \frac{m_p\ddot{y}_2}{2} = 0$$

f) Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener las dos correspondientes aceleraciones generalizadas y con estas escribir las aceleraciones de los cuatro cuerpos en cuestión.

$$\ddot{y}_1 = \frac{4gm_1m_2 + 4gm_1m_3 + 2gm_1m_p - 16gm_2m_3 - 6gm_2m_p - 6gm_3m_p - 2gm_p^2}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{8gm_1m_2 - 8gm_1m_3 + 2gm_2m_p - 2gm_3m_p}{4m_1m_2 + 4m_1m_3 + 2m_1m_p + 16m_2m_3 + 8m_2m_p + 8m_3m_p + 3m_p^2}$$