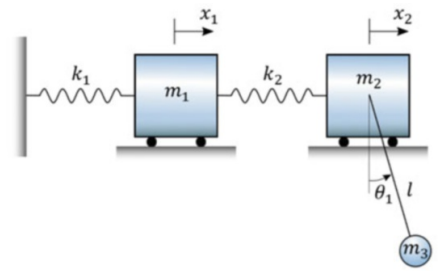


## VIBRACIONES EN SISTEMAS DISCRETOS | MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

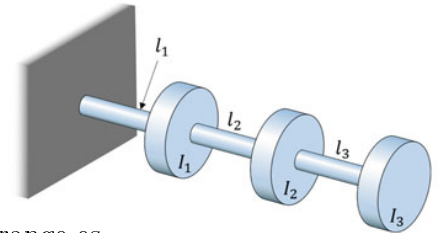
1. En el sistema de la figura  $l = 0,5\text{ m}$ ,  $k_1 = k_2 = k = 2 \times 10^3\text{ N m}^{-1}$  y  $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1\text{ kg}$ . Asumiendo pequeñas las oscilaciones en torno al cero de las coordenadas indicadas:

- obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange,
- escribálas en forma matricial (matrices  $M$ ,  $K$ ), y
- obtenga las frecuencias naturales de oscilación del sistema.



## 2. Péndulo de torsión compuesto

El sistema de la figura consiste en un eje atraviesa tres discos que tienen por momentos de inercia  $I_1, I_2$  e  $I_3$  todos de igual magnitud  $1 \times 10^3\text{ kg m}^2$ . El eje de acero tiene un diámetro  $d = 0,01\text{ m}$  y sus secciones longitudes de  $l_1 = l_2 = l_3 = 0,5\text{ m}$ .



Recordemos que para una coordenada angular  $\theta$  la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\Gamma \dot{\theta} + \kappa \theta + I \ddot{\theta} = \tau,$$

donde  $\Gamma$  es la fricción torsional,  $I$  el momento de inercia,  $\tau$  el torque aplicado.  $\kappa$  es la rigidez torsional (torsional stiffness) o coeficiente de torsión que responde al torque restitutivo que ejerce la pieza al ser torcida en un ángulo unidad,  $\tau_{\text{restitutivo}} = -\kappa \theta$  y su magnitud la determina

$$\kappa = \frac{GJ}{l},$$

donde  $l$  es la longitud de la pieza,  $G$  el módulo de cilladura (shear modulus) específico de cada material, y  $J$  es el módulo o momento de torsión de la sección geométrica transversal a la dirección de  $\vec{r}$ . Para una sección circular  $J$  es igual al segundo momento del área, o momento de inercia polar

$$J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Según el documento Mechanical Properties of Structural Steels publicado por National Institute of Standards and Technology estadounidense, para el acero estructural de las torres 1 y 2 del World Trade Center de Nueva York desaparecidas el año 2001,

$$\begin{aligned}
 G &= g_0 + g_1 T + g_2 T^2 + g_3 T^3 + g_4 T^4 + g_5 T^5 \\
 g_0 &= 80,005\,922\text{ GPa} \\
 g_1 &= -0,018\,303\,811\text{ GPa }^\circ\text{C}^{-1} \\
 g_2 &= -1,565\,028\,8 \times 10^{-5}\text{ GPa }^\circ\text{C}^{-2} \\
 g_3 &= -1,516\,092\,1 \times 10^{-8}\text{ GPa }^\circ\text{C}^{-3} \\
 g_4 &= -1,624\,291\,1 \times 10^{-11}\text{ GPa }^\circ\text{C}^{-4} \\
 g_5 &= 7,727\,754\,3 \times 10^{-15}\text{ GPa }^\circ\text{C}^{-5}
 \end{aligned}$$

Descartando la fricción rotacional  $\Gamma$ :

- obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange,
- escribálas en forma matricial (matrices  $M$ ,  $K$ ), y
- obtenga las frecuencias naturales de oscilación del sistema.