Mecánica Analítica Computacional

Mecánica Newtoniana

Víctor A. Bettachini

Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

El vector $\vec{r}$ tiene

- un módulo $r = |\vec{r}|$,
- y una dirección y sentido denotado por un versor $\hat{r}$.

Operando con vectores

Operación suma

$$\vec{a} = a_i\hat{i} + a_j\hat{j} + a_k\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i\hat{i} + b_j\hat{j} + b_k\hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)\hat{i} + (a_j + b_j)\hat{j} + (a_k + b_k)\hat{k}$$

Operando con vectores

Operación suma

$$\vec{a} = a_i\hat{i} + a_j\hat{j} + a_k\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i\hat{i} + b_j\hat{j} + b_k\hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)\hat{i} + (a_j + b_j)\hat{j} + (a_k + b_k)\hat{k}$$

Operación producto

- por un escalar: $m\vec{r} = mr_i\hat{i} + mr_j\hat{j} + mr_k\hat{k}$

Operando con vectores

Operación suma

$$\vec{a} = a_i\hat{i} + a_j\hat{j} + a_k\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i\hat{i} + b_j\hat{j} + b_k\hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)\hat{i} + (a_j + b_j)\hat{j} + (a_k + b_k)\hat{k}$$

Operación producto

- por un escalar: $m\vec{r} = mr_i\hat{i} + mr_j\hat{j} + mr_k\hat{k}$
- escalar: $\vec{r}\vec{s} = rs\cos(\theta) = r_is_i + r_js_j + r_ks_k$
  - así el módulo es $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}$

Operando con vectores

Operación suma

$$\vec{a} = a_i\hat{i} + a_j\hat{j} + a_k\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_i\hat{i} + b_j\hat{j} + b_k\hat{k}$$

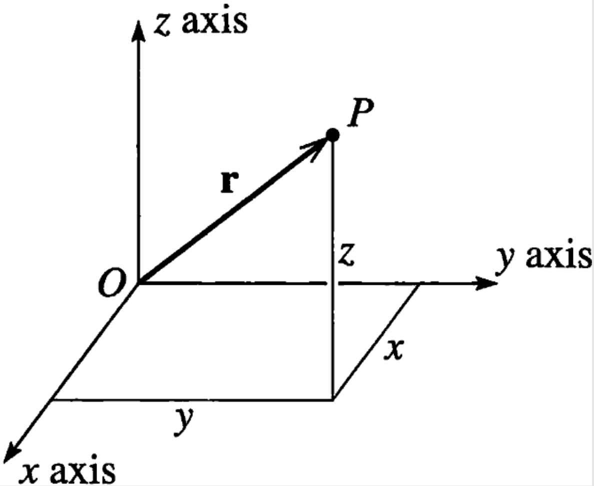
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)\hat{i} + (a_j + b_j)\hat{j} + (a_k + b_k)\hat{k}$$

Operación producto

- por un escalar: $m\vec{r} = mr_i\hat{i} + mr_j\hat{j} + mr_k\hat{k}$
- escalar: $\vec{r}\vec{s} = rs\cos(\theta) = r_is_i + r_js_j + r_ks_k$
  - así el módulo es $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\vec{r}}$
- vectorial:

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_i & r_j & r_k \\ s_i & s_j & s_k \end{vmatrix} = (r_js_k - r_ks_j)\hat{i} + (r_ks_i - r_is_k)\hat{j} + (r_is_j - r_js_i)\hat{k}$$

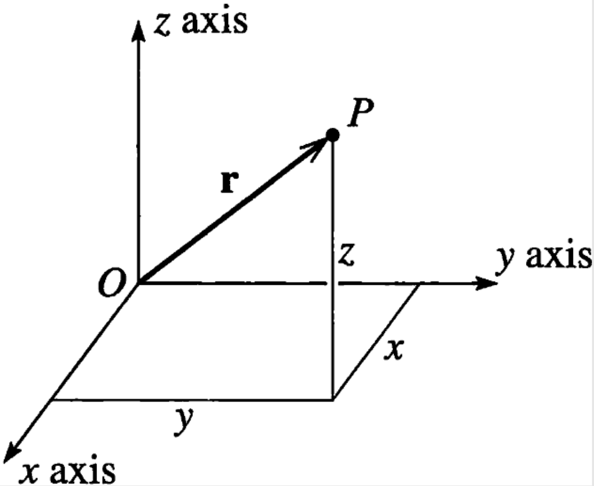
Vector posición



En coordenadas cartesianas: x, y, z

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Vector posición

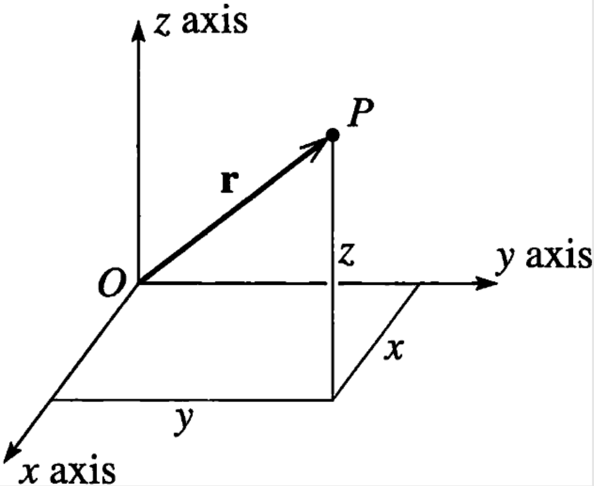


En coordenadas cartesianas: x, y, z

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

- y componente de coordenada
- $\hat{y}$ versor de cada eje

Vector posición



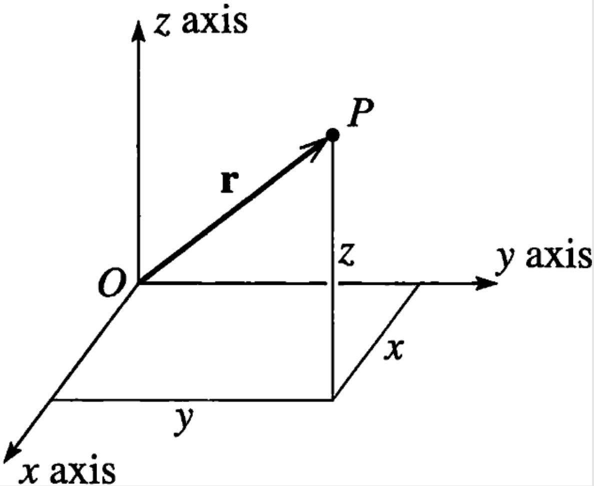
En coordenadas cartesianas: x, y, z

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

- y componente de coordenada
- $\hat{y}$ versor de cada eje

A veces se sintetiza $\vec{r} = (x, y, z)$

Vector posición



En coordenadas cartesianas: x, y, z

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

- y componente de coordenada
- $\hat{y}$ versor de cada eje

A veces se sintetiza $\vec{r} = (x, y, z)$

En general: $\vec{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3$ con los $\hat{e}_i$ de cilíndricas, esféricas, etc.

Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{r}\right)$$

Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{r}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}\hat{e}_1 + r_1\frac{\mathrm{d}\hat{e}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}\hat{e}_2 + r_2\frac{\mathrm{d}\hat{e}_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}\hat{e}_3 + r_3\frac{\mathrm{d}\hat{e}_3}{\mathrm{d}t}$$

Tendríamos seis términos según la regla de la cadena.

Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{r}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}\hat{e}_1 + r_1\frac{\mathrm{d}\hat{e}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}\hat{e}_2 + r_2\frac{\mathrm{d}\hat{e}_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}\hat{e}_3 + r_3\frac{\mathrm{d}\hat{e}_3}{\mathrm{d}t}$$

Tendríamos seis términos según la regla de la cadena.
En el caso cartesiano $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ no varían con t

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{z}$$

Velocidad

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{r}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}\hat{e}_1 + r_1\frac{\mathrm{d}\hat{e}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}\hat{e}_2 + r_2\frac{\mathrm{d}\hat{e}_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}t}\hat{e}_3 + r_3\frac{\mathrm{d}\hat{e}_3}{\mathrm{d}t}$$

Tendríamos seis términos según la regla de la cadena.
En el caso cartesiano $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ no varían con t

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{z}$$

Aceleración

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\hat{z}$$

1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas $\sum \vec{F} = 0$ una partícula se mueve con $\vec{v}$ constante.

1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas $\sum \vec{F} = 0$ una partícula se mueve con $\vec{v}$ constante.

2.a ley

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas $\sum \vec{F} = 0$ una partícula se mueve con $\vec{v}$ constante.

2.a ley

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En términos del momento (ímpetu) $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}} \qquad (\dot{m} = 0)$$

1.a ley: inercia

Si la suma de fuerzas $\sum \vec{F} = 0$ una partícula se mueve con $\vec{v}$ constante.

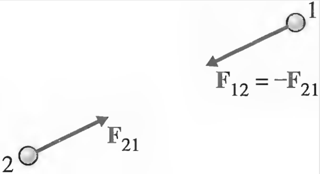
2.a ley

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

En términos del momento (ímpetu) $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}} \qquad (\dot{m} = 0)$$

3.a ley: acción y reacción



Si **1** ejerce $\vec{F}_{21}$ **2** este ejerce $\vec{F}_{12}$ a **1**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje $\hat{x}$ sometido a $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} &\implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)\,\mathrm{d}t = v_o + \frac{F_0}{m}t \\
&\implies x(t) = \int \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2
\end{aligned}$$

2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje $\hat{x}$ sometido a $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} \implies \dot{x}(t) &= \int \ddot{x}(t)\,\mathrm{d}t = v_o + \frac{F_0}{m}t \\
\implies x(t) &= \int \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2
\end{aligned}
$$

- Generando una ecuación diferencial para describir la dinámica, y conociendo x_0, v_0 en t_0, se predicen $x(t), \dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$.

2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje $\hat{x}$ sometido a $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$\ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} \implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)\,\mathrm{d}t = v_o + \frac{F_0}{m}t$$
$$\implies x(t) = \int \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2$$

- Generando una ecuación diferencial para describir la dinámica, y conociendo x_0, v_0 en t_0, se predicen $x(t), \dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$.
- Esta asignatura apunta a desarrollar la habilidad de modelar con ecuaciones diferenciales la dinámica de sistemas simples.

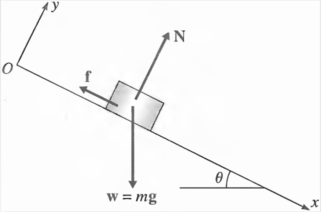
2.a ley: caso unidimensional

Para un objeto sobre el eje $\hat{x}$ sometido a $\vec{F} = F_o\hat{x}$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = \frac{F_0}{m} &\implies \dot{x}(t) = \int \ddot{x}(t)\,\mathrm{d}t = v_o + \frac{F_0}{m}t \\ &\implies x(t) = \int \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = x_0 + v_0 t + \frac{F_0}{2m}t^2 \end{aligned}$$

- Generando una ecuación diferencial para describir la dinámica, y conociendo x_0, v_0 en t_0, se predicen $x(t), \dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$.
- Esta asignatura apunta a desarrollar la habilidad de modelar con ecuaciones diferenciales la dinámica de sistemas simples.
- Posteriores asignaturas (e.g. Estática, Máquinas) aprovechan esta herramienta para el análisis de sistemas mecánicos.

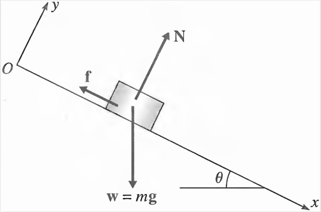
2.a ley en cartesianas: un ejemplo trivial



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \iff \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

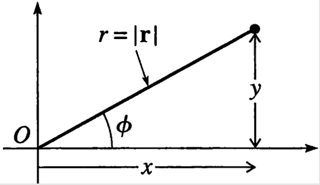
2.a ley en cartesianas: un ejemplo trivial

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \iff \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$



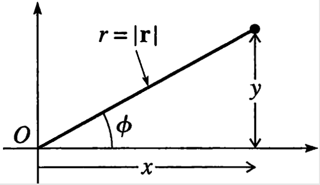
$$\begin{aligned} 0 &= F_y = N - mg\cos\theta \\ m\ddot{r} &= F_x = w_x - f = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \mu mg\cos\theta \\ \ddot{x} &= g\,(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta) \\ x(t) &= \frac{g}{2}\,(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)\,t^2\;[\dot{x}(0) = 0, x(0) = 0] \end{aligned}$$

Coordenadas polares



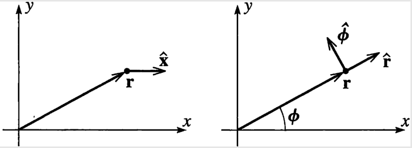
$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \operatorname{atan}\frac{y}{x} \end{cases}$$

Coordenadas polares



$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \mathrm{atan}\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

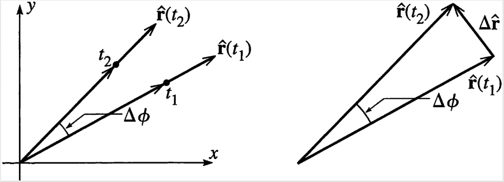
Versor $\hat{r}$



$$\vec{r} = r\hat{r} \iff \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

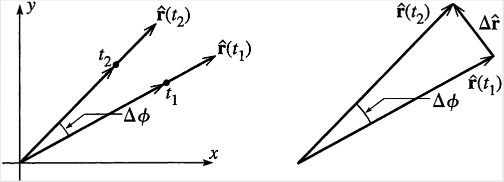
A diferencia de $\hat{x}$ este versor cambia con el tiempo.

Velocidad en polares



$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

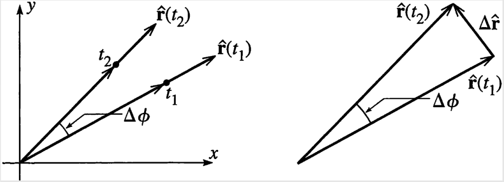
Velocidad en polares



$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Delta\hat{r} \sim \Delta\phi\hat{\phi} \sim \dot{\phi}\Delta t\hat{\phi}$$

Velocidad en polares

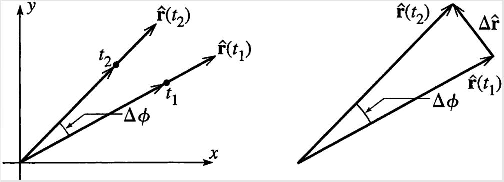


$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Delta\hat{r} \sim \Delta\phi\hat{\phi} \sim \dot{\phi}\Delta t\hat{\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

Velocidad en polares

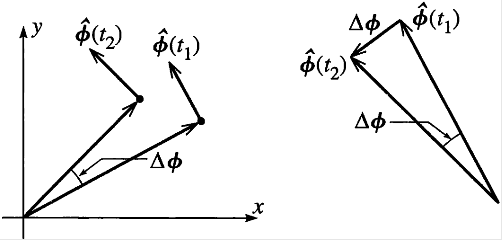


$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}}$$

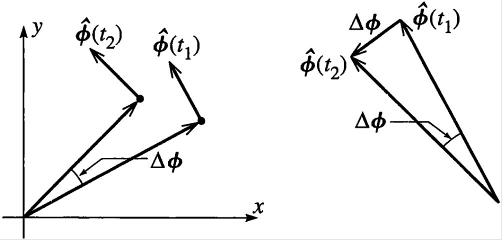
$$\Delta\hat{r} \sim \Delta\phi\hat{\phi} \sim \dot{\phi}\Delta t\hat{\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{r}}{\Delta t} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

Aceleración en polares

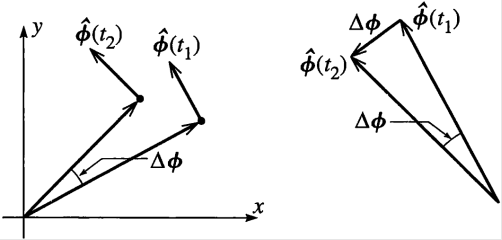


Aceleración en polares



$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\phi}}{\Delta t} = -\dot{\phi}\hat{r}$$

Aceleración en polares

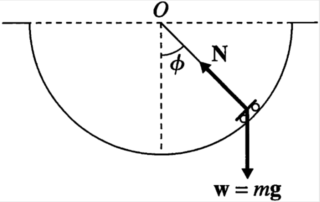


$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{\phi}}{\Delta t} = -\dot{\phi}\hat{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\vec{r}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}\right) \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}\right)\hat{\phi}\end{aligned}$$

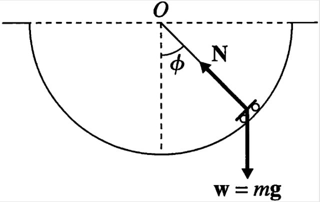
Dinámica de un movimiento circular

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \begin{cases} F_r = mg\cos\phi - N = -mR\dot{\phi}^2 \\ F_\phi = -mg\,\mathrm{sen}\,\phi = mR\ddot{\phi} \end{cases}$$

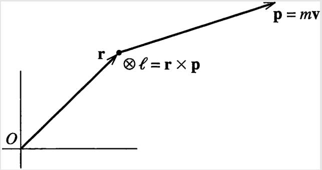


Dinámica de un movimiento circular

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \begin{cases} F_r = mg\cos\phi - N = -mR\dot{\phi}^2 \\ F_\phi = -mg\,\mathrm{sen}\,\phi = mR\ddot{\phi} \end{cases}$$



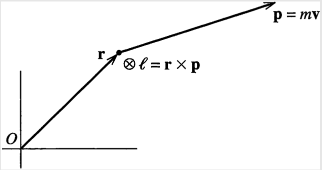
$$\begin{aligned} mR\ddot{\phi} &= -mg\,\mathrm{sen}\,\phi \\ \ddot{\phi} &= -\frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\phi \simeq -\frac{g}{R}\phi \; (\phi \simeq 0) \\ \phi(t) &= A\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{R}} \iff T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \end{aligned}$$



Momento angular (momento cinético)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Movimiento angular



Momento angular (momento cinético)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Torque (momento, $\vec{N}$)

$$\dot{\vec{L}} = \cancel{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

pues $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} \implies \vec{p} || \dot{\vec{r}} \implies \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

v_ϕ: velocidad tangencial

Movimiento angular

Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

v_ϕ: velocidad tangencial

Momento de inercia

Para una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

v_ϕ: velocidad tangencial

Momento de inercia

Para una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

Momento de inercia de sólidos

Para una $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$$I_{zz} = \iiint \rho(x,y,z)\left[x^2 + y^2\right] \mathrm{d}V$$

Son los elementos diagonales del tensor de inercia I_{ij}.

Velocidad angular

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

suele escribirse

$$v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r\dot{\phi} = r\omega$$

v_ϕ: velocidad tangencial

Momento de inercia

Para una partícula

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

Momento de inercia de sólidos

Para una $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$

$$I_{zz} = \iiint \rho(x,y,z)\left[x^2 + y^2\right] \mathrm{d}V$$

Son los elementos diagonales del tensor de inercia I_{ij}.
E.g. cilindro | si $\vec{\omega} = \omega_z\hat{z}$ (eje) $I_{zz} = \frac{m}{2}R^2$ | si $\vec{\omega} = \omega_x\hat{x} \ \rightarrow I_{xx} = \frac{m}{12}l^2$