ejesPotencial

September 22, 2020

1 Orientación de ejes y energía potencial

Mecánica General
Departamento de Ingeniería e Investigación Tecnológica
Universidad Nacional de La Matanza

1.1 La fuerza peso

Cuando un cuerpo algo tiene masa m y está en un campo gravitatorio que le imprime una aceleración $\vec{g}$, se ejerce sobre este una fuerza llamada peso

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Como bien sabemos el signo que tenga esta fuerza dependerá de como se haga la elección del sentido positivo para los ejes del sistema de coordenadas. Pero debe quedar claro que alejar esta m en contra del sentido de $\vec{g}$ insume hacer un trabajo sobre este cuerpo, es decir es positivo, y gana energía potencial. Por el contrario si dejamos que "caiga" espontáneamente este trabajo nos es devuelto, es decir un trabajo de signo negativo, y pierde energía potencial Y esto será así **sin importar como hayamos elegido el sentido de los ejes del sistema de coordenadas**.

1.2 Fuerzas conservativas y energía potencial

La relación de una fuerza conservativa y la función del potencial que describe al campo que la genera es

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V.$$

Trabajaremos en el **sistema de coordenadas cartesianas** por la que una posición será

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}.$$

Para calcular la fuerza debe usarse el operador divergencia $\vec{\nabla}$ para este sistema de coordenadas. Este operador vectorial se aplica sobre el potencial $V = V(x, y, z)$ que es una función escalar (es decir no vectorial)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right) V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\hat{z}.$$

1.3 Orientación de los ejes

Orientaremos el sistema de ejes de forma que las direcciones horizontales $\hat{x}$ y $\hat{y}$ sean paralelas a *un piso*.

Así para dirección vertical utilizaremos el versor $\hat{z}$. Y como trataremos un movimiento estríctamente vertical, donde no hay apartartamientos en lo horizontal, $x = 0$ e $y = 0\,\forall t$, la posición será

$$\vec{r} = (0, 0, z) = z\hat{z}.$$

Por esto solo nos interesa analizar la componente en este eje de la fuerza. Para obtener tal componente basta multiplicar por el versor $\hat{z}$

$$\vec{P}\hat{z} = \vec{F}\hat{z} = -\vec{\nabla}V\hat{z}\hat{z} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z},$$

donde se usa que $\hat{z}\hat{z} = 1$, ya que multiplicar cualquier versor por si mismo da 1.

1.3.1 Eje orientado hacia arriba

Si orientamos $\hat{z}$ *hacia arriba* esto hace que $\vec{g} = -g\hat{z}$, y entonces

$$\vec{P}\hat{z} = m\vec{g}\hat{z} = -mg = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}.$$

Para obtener el potencial hay que integrar

$$\begin{aligned} -mg &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \\ mg\mathrm{d}z &= \mathrm{d}V \\ mg\int \mathrm{d}z &= \int \mathrm{d}V \\ mg(z - z_0) &= V(z) - V(z_0). \end{aligned}$$

De aquí vemos que el potencial $V(z) = mg(z - z_0) + V(z_0)$ esta definido a partir de uno de referencia $V(z_0)$ evaluado en un nivel de referencia z_0. Si establecemos $z_0 = 0$ y $V(z_0) = 0$, es decir establecemos el potencial de referencia en el origen (i.e. el *cero de potencial en el piso*) llegamos a la expresión convencional

$$V(z) = mgz.$$

Es decir que **a medida que sube**, se incrementa z, **aumenta el potencial**.

1.3.2 Eje orientado hacia abajo

Si orientamos $\hat{z}$ *hacia abajo* esto hace que $\vec{g} = g\hat{z}$, y entonces

$$\vec{P}\hat{z} = m\vec{g}\hat{z} = mg = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}.$$

Para obtener el potencial hay que integrar

$$\begin{aligned} mg &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \\ mg\mathrm{d}z &= -\mathrm{d}V \\ mg\int \mathrm{d}z &= -\int \mathrm{d}V \\ mg(z - z_0) &= -V(z) + V(z_0). \end{aligned}$$

Si nuevamente establecemos $z_0 = 0$ y $V(z_0) = 0$ llegamos a

$$V(z) = -mgz,$$

y aquí **también a medida que sube**, se reduce z, **aumenta el potencial**.

[ ]: