

Redes (3): Prototipos de redes

A dark blue diagonal gradient bar that starts from the bottom left and extends towards the top right, covering the lower half of the slide.

Prototipos o modelos de redes

Uno de los objetivos de la ciencia de redes es generar modelos de redes que reproduzcan las propiedades de las redes reales

Con estos modelos puedo hacer intervenciones o inferencias que normalmente no podría hacer en la vida real

¿Qué procesos (históricos, naturales, de desarrollo, etc...) le dieron forma a la red que observamos hoy?

Prototipos o modelos de redes

Uno de los objetivos de la ciencia de redes es generar modelos de redes que reproduzcan las propiedades de las redes reales

¿Qué tan parecida es la red que observamos a otros prototipos de redes?

Es difícil comparar entre redes. Tenemos que enfocarnos en variables topológicas.

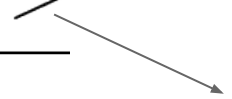
Grande o chico ¿comparado a qué?

Prototipos o modelos de redes

Uno de los objetivos de la ciencia de redes es generar modelos de redes que reproduzcan las propiedades de las redes reales

¿Qué tan parecida es la red que observamos a otros prototipos de redes?

A partir de un modelo nulo se genera un conjunto de redes sustitutas.

$$S = \frac{X_{medido} - \langle X_{sustitutas} \rangle}{\sigma_{sustitutas}}$$


población simulada

Prototipos o modelos de redes

Uno de los objetivos de la ciencia de redes es generar modelos de redes que reproduzcan las propiedades de las redes reales

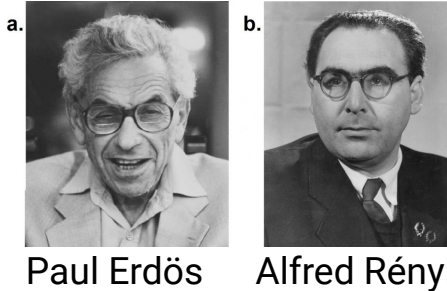
1. **Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network**
2. **Watts-Strogatz (1998) - Small-world networks**
3. **Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks**
4. **Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)**

Prototipos o modelos de redes

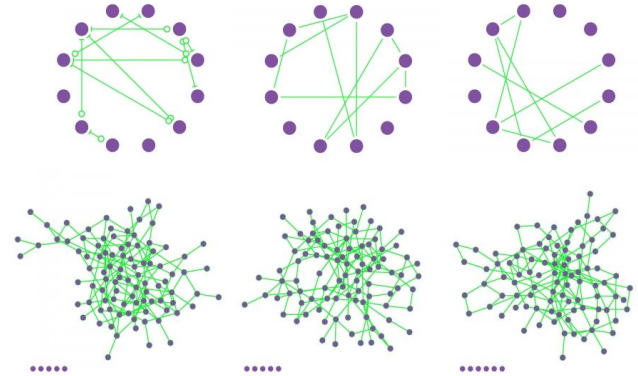
1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

$G(N,L)$ donde se tienen N nodos dados y se colocan L aristas al azar.

$G(N,p)$ donde se tienen N nodos dados y cada uno está conectado con otro con probabilidad p .



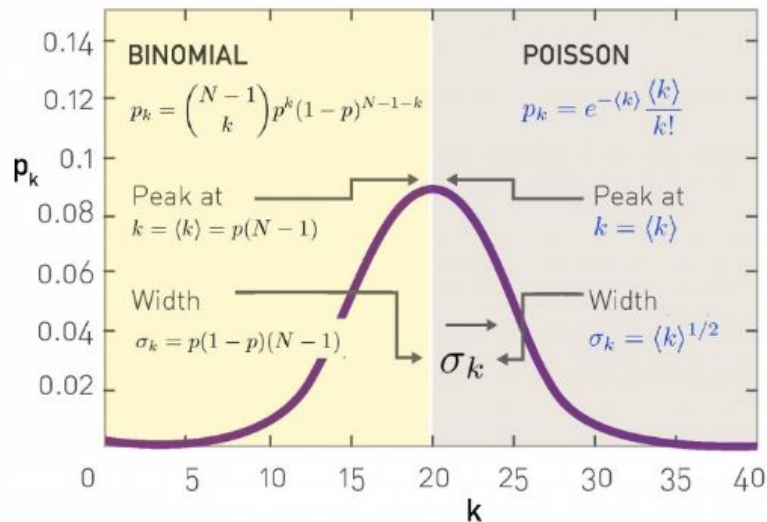
$$p = 1/6; N = 12$$



Prototipos o modelos de redes

1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

$G(N,p)$



Pasos:

1. N nodos aislados
2. Seleccionar par de nodos, generar un número aleatorio $m \in [0, 1]$

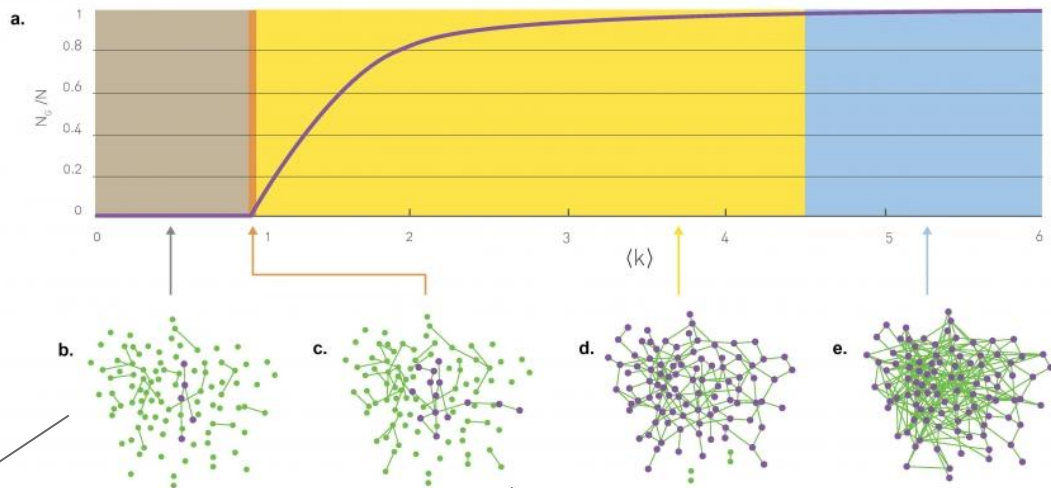
Si m es mayor que p , se genera un enlace entre nodos.

3. Repetir el paso (2) para todos los pares de nodos

Prototipos o modelos de redes

1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

$$\langle k \rangle = p(N-1)$$



Régimen subcrítico: $0 < \langle k \rangle < 1$

Para $\langle k \rangle < 1$ la componente gigante es un árbol de tamaño $N_G \sim \ln N$.

Por lo tanto $N_G/N \sim \ln N/N \rightarrow 0$ en el límite $N \rightarrow \infty$

Punto crítico: $\langle k \rangle = 1$

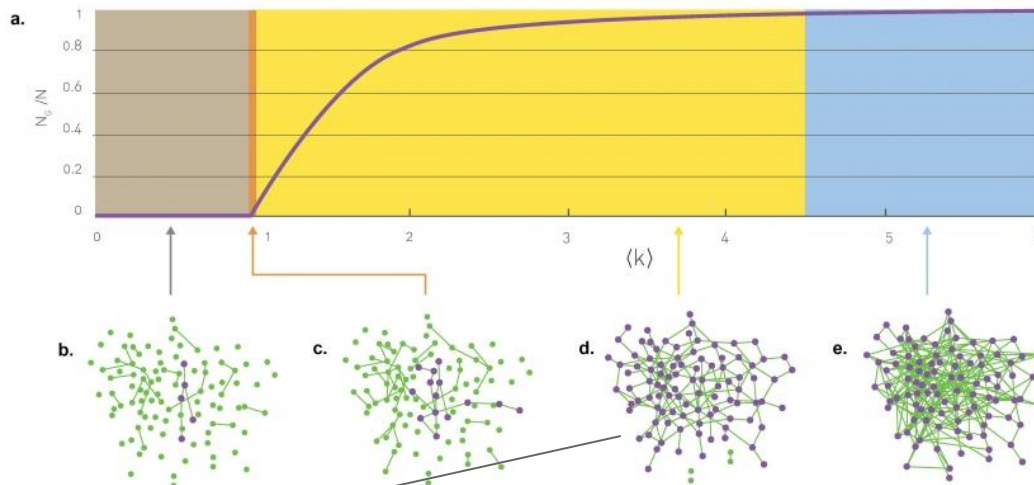
Aquí $N_G \sim N^{2/3}$. Por lo tanto, $N_G/N \sim N^{-1/3} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$ (pero órdenes de magnitud mayor que en subcrítico)

Distribución heterogénea (power-law) del tamaño de las componentes observadas

Prototipos o modelos de redes

1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

$$\langle k \rangle = p(N-1)$$



Régimen conectado: $\langle k \rangle > \ln N$
No hay nodos aislados
 $N_G \approx N$ y es una red densa

Régimen Supercrítico: $\langle k \rangle > 1$

Este es el régimen más relevante para redes reales: aparece una componente gigante “significativa”, y tiene bucles.
En la vecindad de $\langle k \rangle = 1$ tenemos $N_G/N \sim \langle k \rangle - 1$
por lo que $N_G \sim (p - p_c) N$ (donde $p_c \sim 1/N$) (la componente gigante tiene una fracción de los nodos totales)

Prototipos o modelos de redes

1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

Predicciones de grafos al azar supercríticos:

- Si $\langle k \rangle > 1$ entonces existe una componente gigante
- Todos los nodos integran la componente gigante solo si $\langle k \rangle > \ln N$.

OK

Mmm...

Network	N	L	$\langle K \rangle$	$\ln N$
Internet	192,244	609,066	6.34	12.17
Power Grid	4,941	6,594	2.67	8.51
Science Collaboration	23,133	94,437	8.08	10.05
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	13.46
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	7.61

¿La internet no está conectada?

Prototipos o modelos de redes

1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

De todas formas, los grafos al azar ya predicen algunas propiedades interesantes

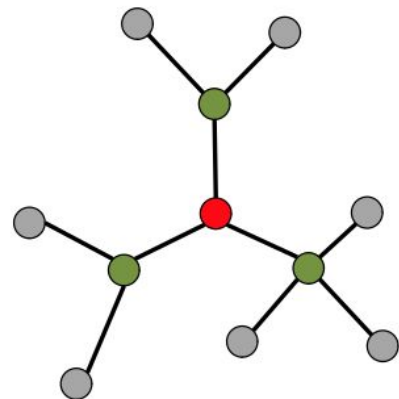
Los grafos al azar tienden a tener una estructura de árbol con un grado $\langle k_i \rangle \sim \langle k \rangle$

- $\langle k \rangle$ nodos a una distancia uno ($d=1$).
- $\langle k \rangle^2$ nodos a una distancia dos ($d=2$).
- $\langle k \rangle^3$ nodos a una distancia tres ($d=3$).
- ...
- $\langle k \rangle^d$ nodos a una distancia d .

Los k -vecinos aumentan en ley de potencias

Dada esta arborización, se puede demostrar que:

$$\langle d \rangle \approx \ln N / \ln \langle k \rangle$$



Prototipos o modelos de redes

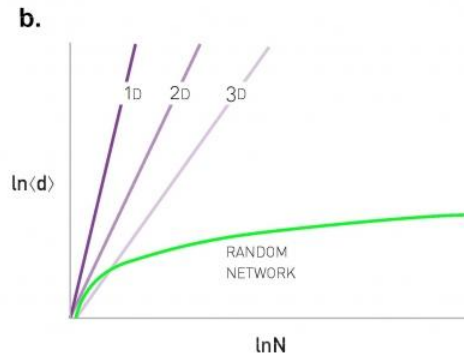
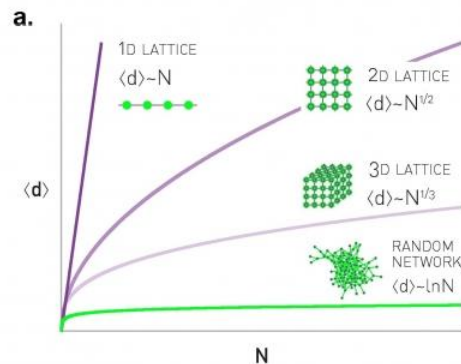
1. Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

De todas formas, los grafos al azar ya predicen algunas propiedades interesantes

$$\langle d \rangle \approx \ln N / \ln \langle k \rangle$$

Las distancias en redes al azar son órdenes de magnitud menores que el tamaño de la red ($\ln(N) \ll N$ para N grande)

Fenómeno de **mundo pequeño** (*small world*): La distancia promedio es “pequeña” porque depende logarítmicamente del tamaño del sistema.



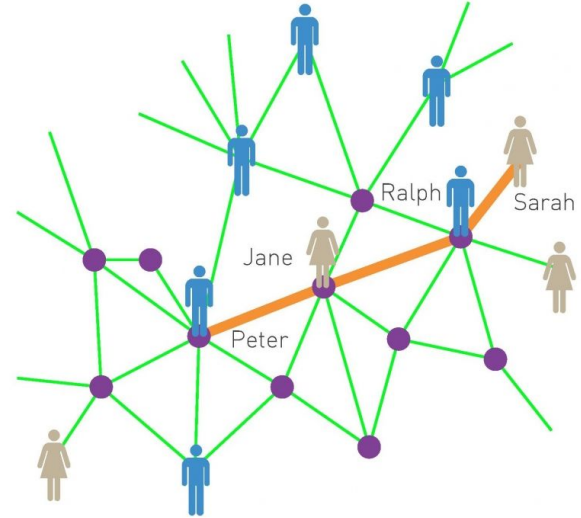
Si para la red social mundial ($N \approx 7 \times 10^9$) proponemos $\langle k \rangle \approx 10^3$, entonces $\langle d \rangle \approx 3.28$

Prototipos o modelos de redes

Redes de mundo pequeño en la vida real



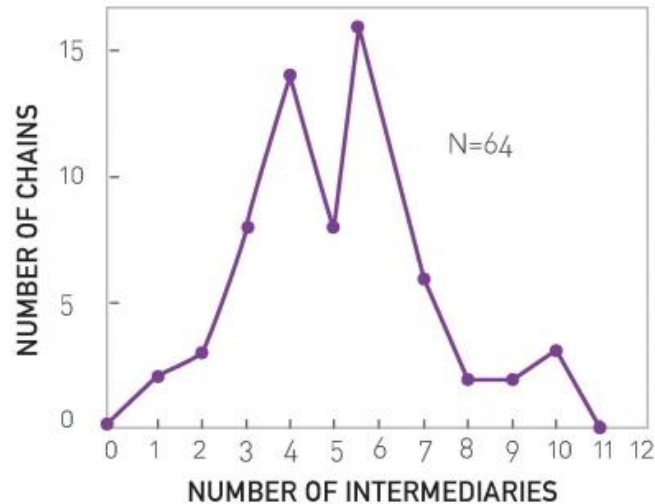
Stanley Milgram (1963)



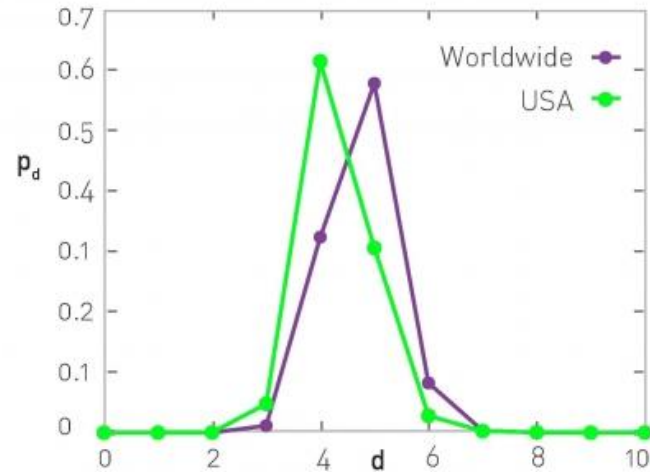
Prototipos o modelos de redes

Redes de mundo pequeño en la vida real

Milgram



Red de Facebook



Prototipos o modelos de redes

Redes de mundo pequeño en la vida real: ¿Lo podemos explicar por redes al azar?

Network	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	d_{\max}	$\ln N / \ln \langle k \rangle$
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26	6.58
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93	8.31
Power Grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46	8.66
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39	11.42
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18	18.4
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	5.35	15	4.81
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14	3.04
Citation Network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42	5.55
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8	4.04
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14	7.14

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}$$

¡Es una muy
razonable
predicción!

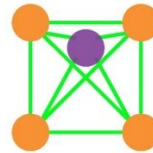
Prototipos o modelos de redes

Coeficiente de clustering en redes reales: desviaciones del modelo al azar

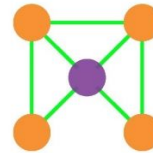
Coeficiente de clustering C_i del nodo i : la probabilidad que los primeros vecinos de i se conecten entre sí

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i-1)}$$

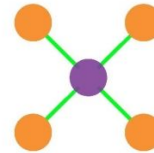
L_i pares de vecinos enlazados



$C_i=1$



$C_i=1/2$



$C_i=0$

Para redes al azar:

$$\langle L_i \rangle = p k_i(k_i-1)/2 \quad \Rightarrow \quad C_i = p = \langle k \rangle / N \quad \text{no depende del grado del nodo } i$$

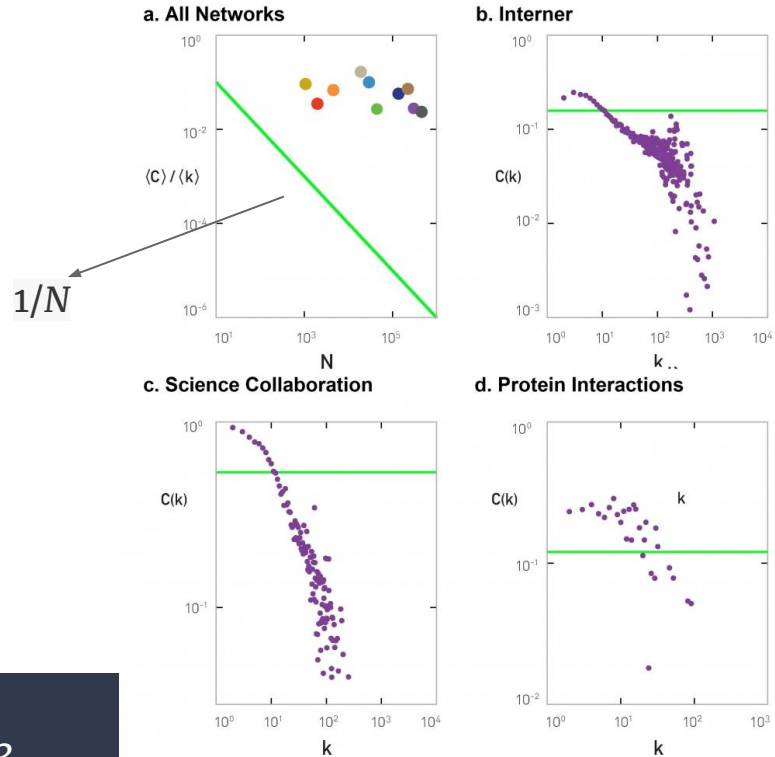
Prototipos o modelos de redes

Coeficiente de clustering en redes reales: desviaciones del modelo al azar

Para redes al azar:

$$C_i = p = \langle k \rangle / N$$

- no depende del grado del nodo i
- Además, $\langle C \rangle = C_i$
por lo que: $\langle C \rangle / \langle k \rangle = 1/N$



Prototipos o modelos de redes

2. Watts-Strogatz (1998) - Small-world networks

Es una “corrección” al modelo Erdos-Renyi para obtener redes que:

- Tienen camino mínimo medio pequeño (proporcional a $\log(N)$)
- Tener mayor coeficiente de clustering que las redes Erdos-Renyi

Idea:

“Interpolar entre una red regular (tipo grilla) que tiene alto clustering pero no es *small-world*, y una red al azar que tiene bajo clustering pero tiene propiedades *small-world*”

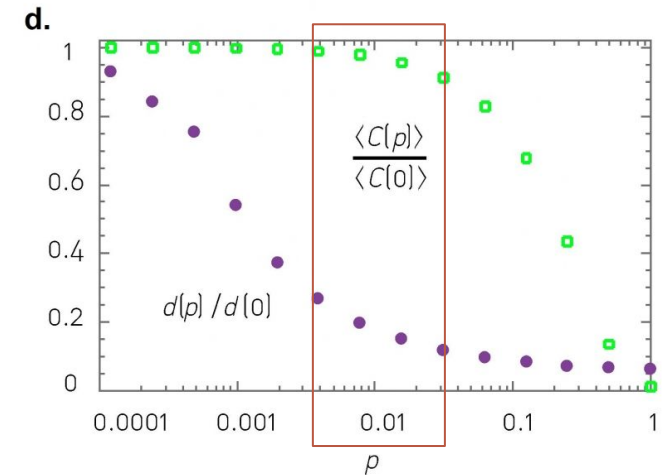
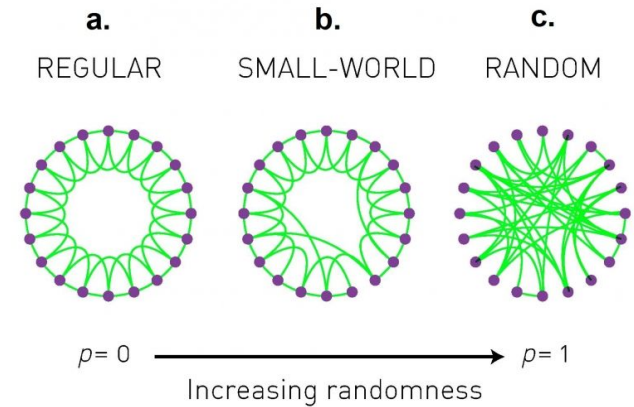
Prototipos o modelos de redes

2. Watts-Strogatz (1998) - Small-world networks

Pasos:

1. Anillo conectado con primeros y segundos vecinos ($p=0$); $\langle C \rangle = 3/4$
2. Dado una probabilidad p , un enlace es “recableado” a un nodo aleatorio.
3. Con una probabilidad $p=1$ todos los enlaces son recableados formando una red aleatoria.

Se generan atajos al azar



“Sweet spot”

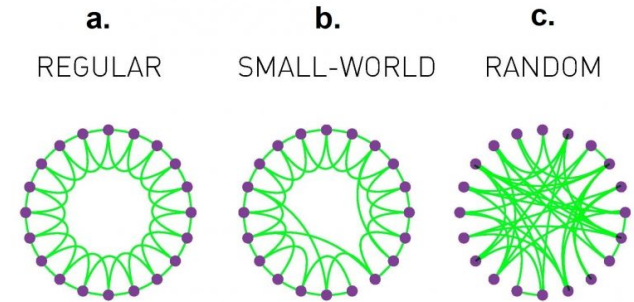
Prototipos o modelos de redes

2. Watts-Strogatz (1998) - Small-world networks

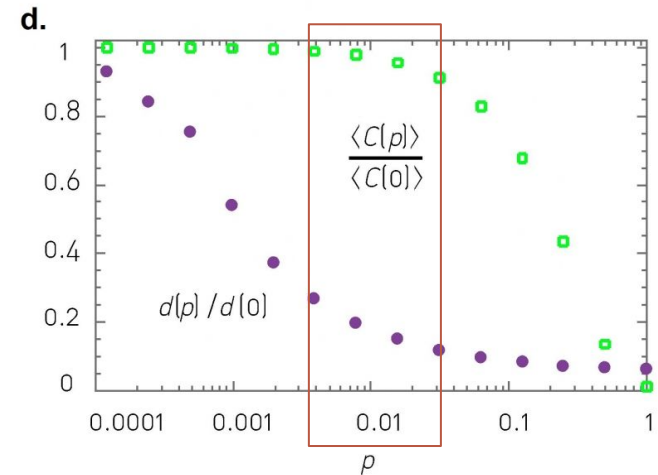
El modelo de Watts-Strogatz está basado en una perturbación de los modelos al azar:

- Predice una distribución de grado que tiende a Poisson. Por lo que no hay nodos de alto grado (hubs)
- Además, predice que C_i sigue siendo independiente de k_i

¿Cómo corregir esto?



$p=0$ $\xrightarrow{\text{Increasing randomness}}$ $p=1$



“Sweet spot”

Prototipos o modelos de redes

Redes libre de escala (*scale-free*)

La distribución de grados sigue una ley de potencias.

$$p_k \sim k^{-\gamma}$$

$$\log p_k \sim -\gamma \log k$$

Invariancia de escala: $f(\lambda x) = \lambda^\Delta f(x)$

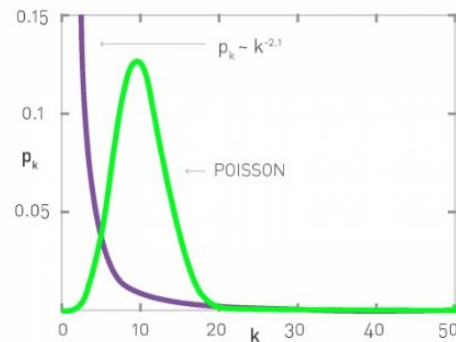
Random network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$
Scale: $\langle k \rangle$

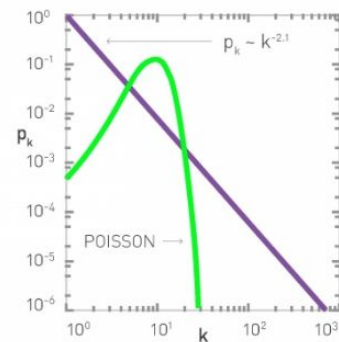
Scale-free network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$
 $\langle k \rangle$ is meaningless as 'scale'

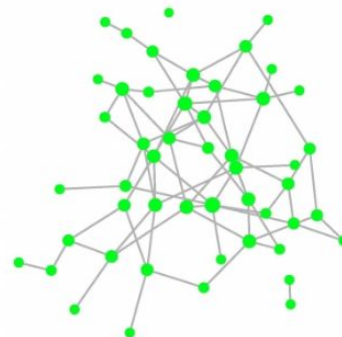
a.



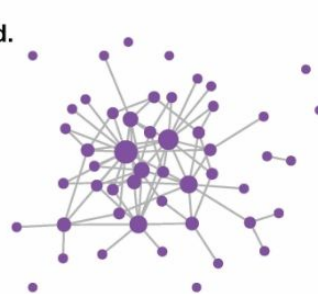
b.



c.



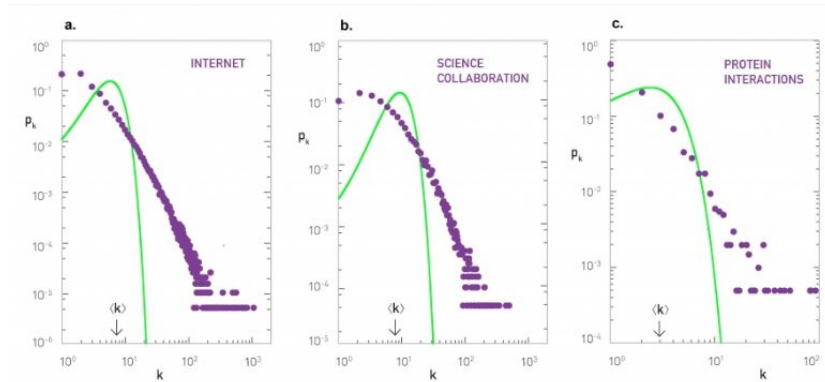
d.



Prototipos o modelos de redes

Redes libre de escala (*scale-free*) en la vida real

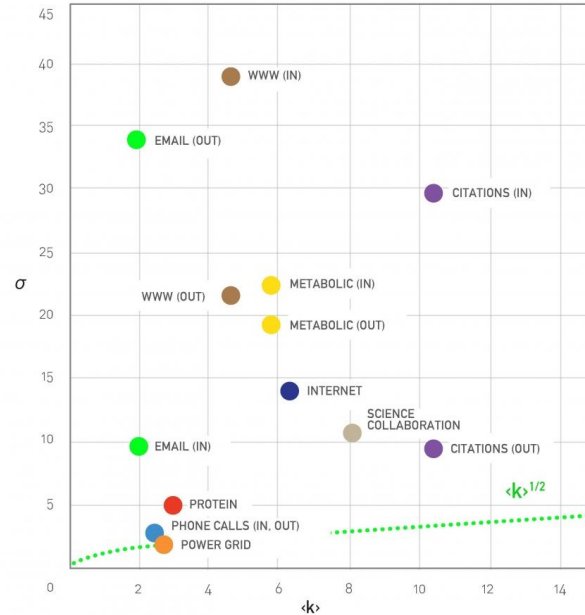
La distribución de grados sigue una ley de potencias.



Network	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	γ_{in}	γ_{out}	γ
Internet	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
Power Grid	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
Email	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	-	-	178.2	-	-	3.35*
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	-	-	47,353.7	-	-	2.12*
Citation Network	449,673	4,689,479	10.43	971.5	198.8	-	3.03*	4.00*	-
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	535.7	396.7	-	2.43*	2.90*	-
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	-	-	32.3	-	-	2.89*-

Prototipos o modelos de redes

Redes libre de escala (*scale-free*) en la vida real



Network	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle k_{in}^2 \rangle$	$\langle k_{out}^2 \rangle$	$\langle k^2 \rangle$	γ_{in}	γ_{out}	γ
Internet	192,244	609,066	6.34	-	-	240.1	-	-	3.42*
WWW	325,729	1,497,134	4.60	1546.0	482.4	-	2.00	2.31	-
Power Grid	4,941	6,594	2.67	-	-	10.3	-	-	Exp.
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	12.0	11.7	-	4.69*	5.01*	-
Email	57,194	103,731	1.81	94.7	1163.9	-	3.43*	2.03*	-
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	-	-	178.2	-	-	3.35*
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	-	-	47,353.7	-	-	2.12*
Citation Network	449,673	4,689,479	10.43	971.5	198.8	-	3.03*	4.00*	-
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	535.7	396.7	-	2.43*	2.90*	-
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	-	-	32.3	-	-	2.89*-

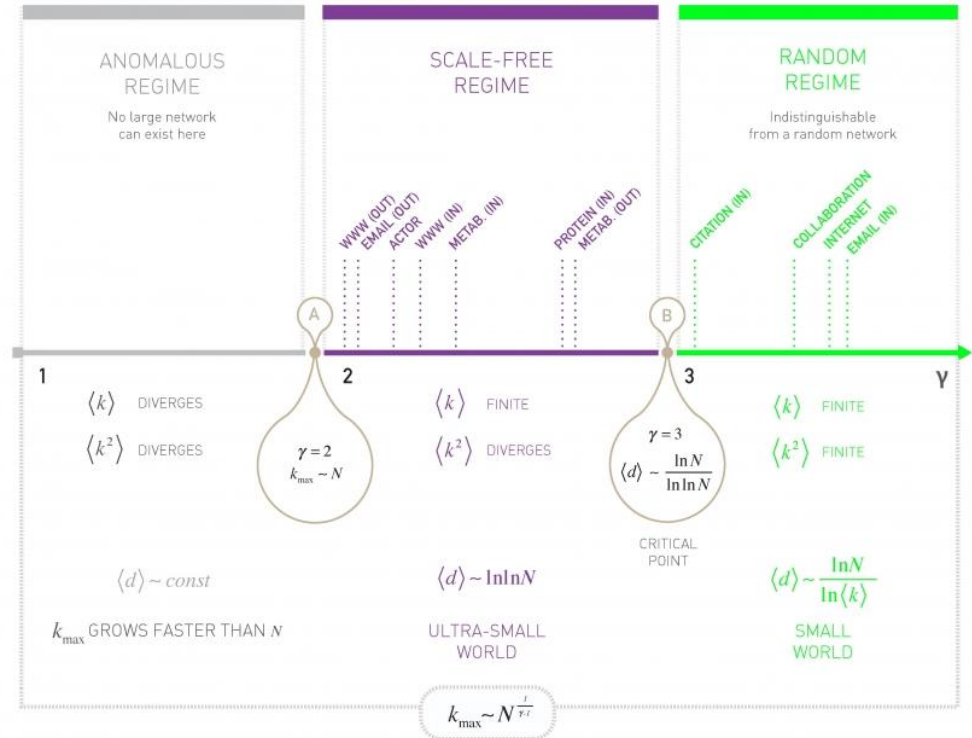
Prototipos o modelos de redes

Redes libre de escala (scale-free)

Para exponente $2 < \gamma < 3$ son “Ultra small world”

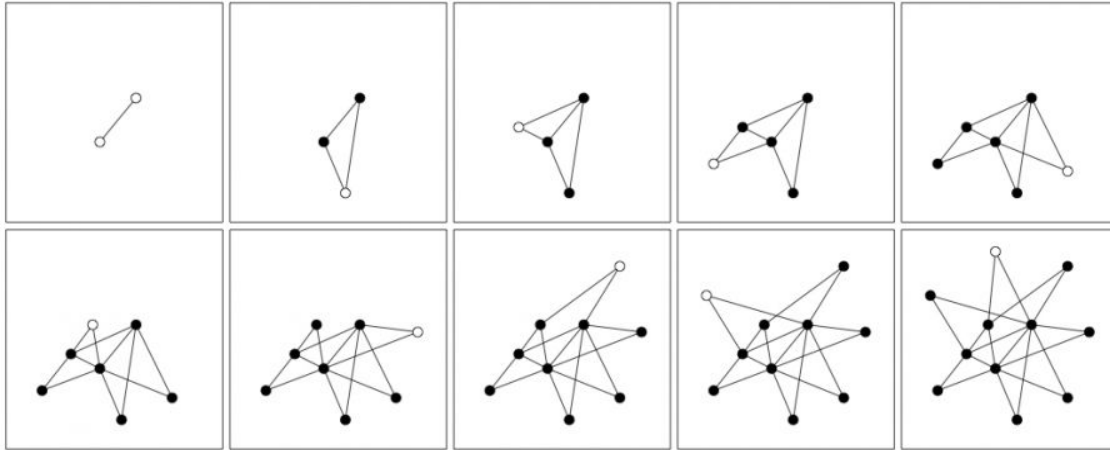
$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \gamma = 2 \\ \ln \ln N & 2 < \gamma < 3 \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3 \\ \ln N & \gamma > 3 \end{cases}$$

Hubs generan atajos importantes



Prototipos o modelos de redes

3. Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks



Pasos

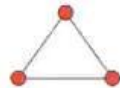
1. m_0 nodos, los enlaces se eligen de forma arbitraria de manera que cada nodo tenga al menos un enlace.
2. Se agrega un nodo de grado $m \leq m_0$

La probabilidad que ese nodo se enlace con nodos existentes depende del grado de cada nodo

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Prototipos o modelos de redes

3. Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks



Pasos

1. m_0 nodos, los enlaces se eligen de forma arbitraria de manera que cada nodo tenga al menos un enlace.
2. Se agrega un nodo de grado $m \leq m_0$

La probabilidad que ese nodo se enlace con nodos existentes depende del grado de

cada nodo $\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$

Prototipos o modelos de redes

Hay algoritmos para crear redes que tengan una distribución de grado específica $p(k)$:

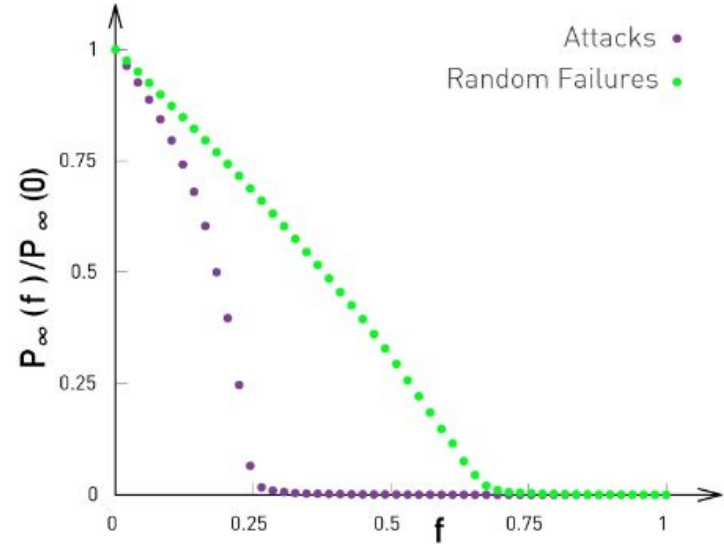
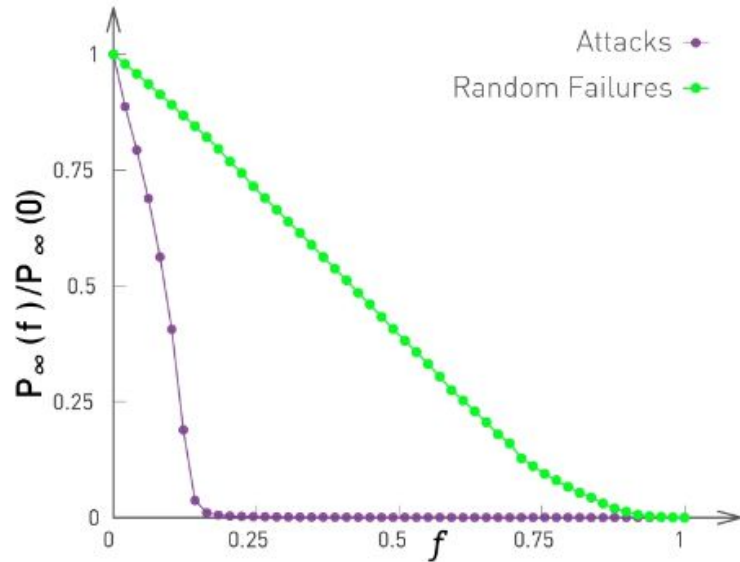
- configuration model
- degree-preserving randomization
- hidden parameter model

ver libro Barabasi

Prototipos o modelos de redes

Robustez: Ataques y Fallas

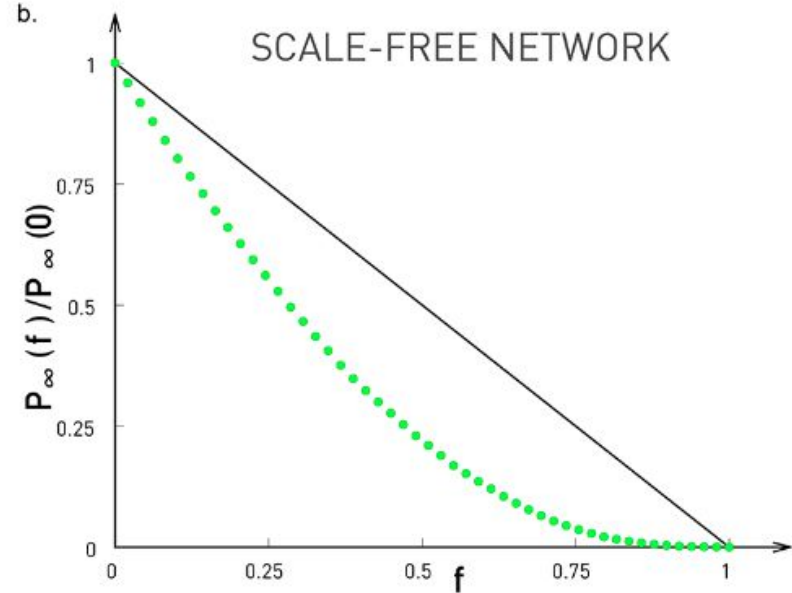
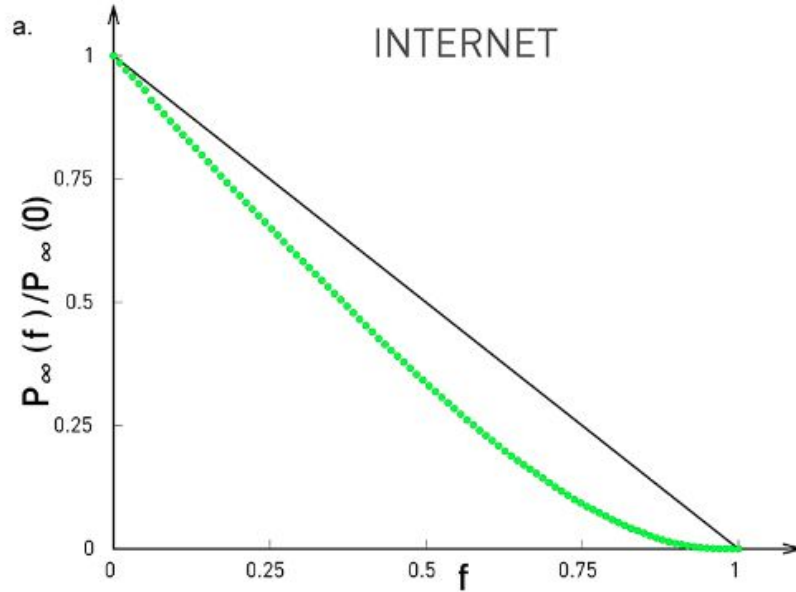
Barabási-Albert (1999) - Scale-free networks



Erdős-Rényi (1959) - ER model - Random network

Prototipos o modelos de redes

Robustez: Ataques y Fallas



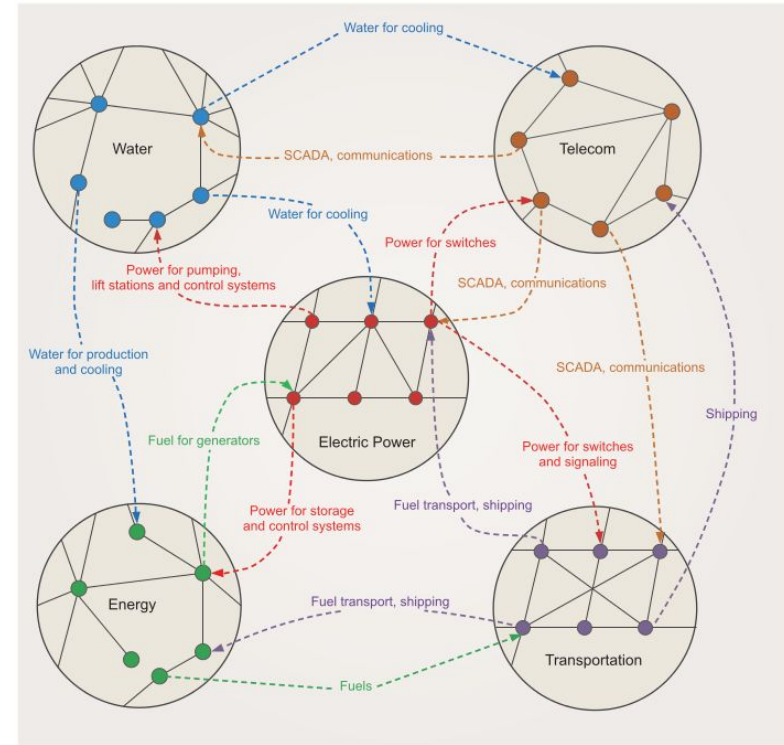
Prototipos o modelos de redes

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)

Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.

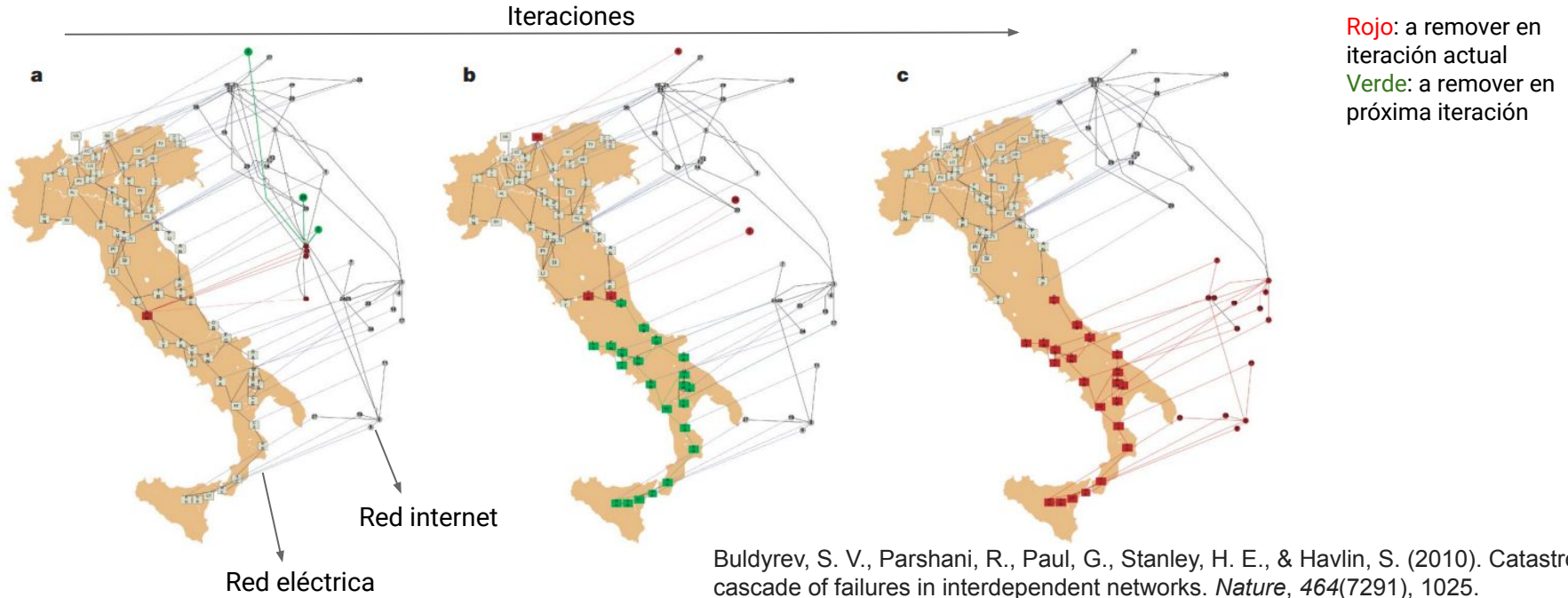
Gao, J., Buldyrev, S. V., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2012). Networks formed from interdependent networks. *Nature physics*, 8(1), 40.

Gao, J., Li, D., & Havlin, S. (2014). From a single network to a network of networks. *National Science Review*, 1(3), 346-356.



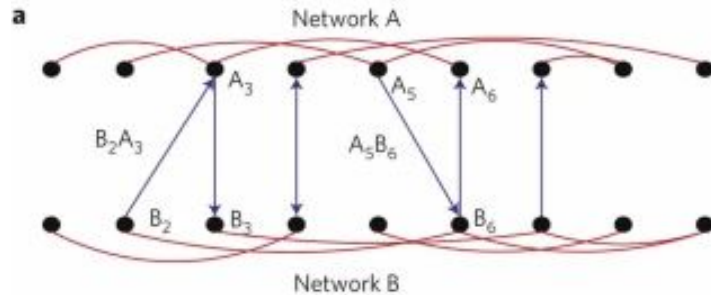
Prototipos o modelos de redes

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)

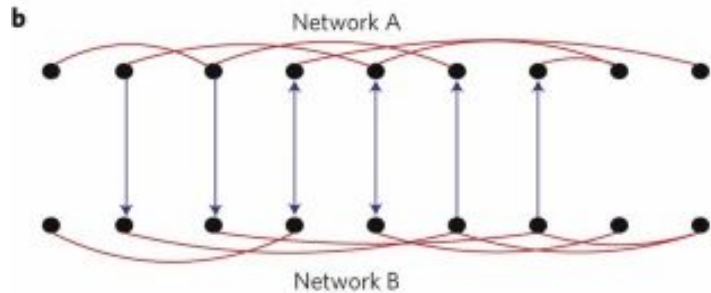


Prototipos o modelos de redes

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)



Con feedback

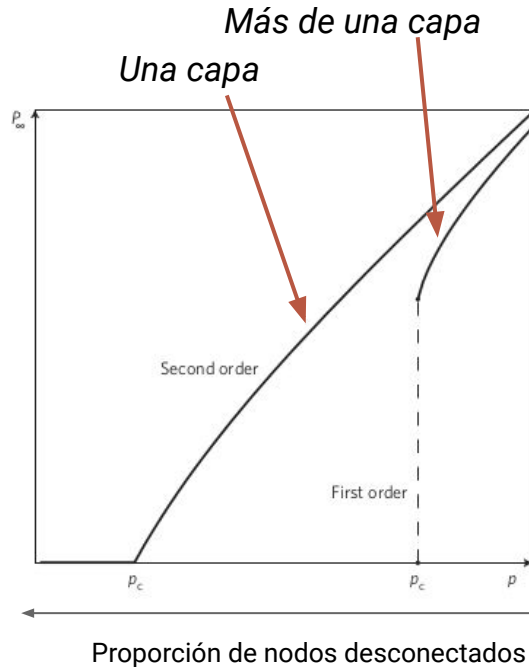


Sin feedback

Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.

Prototipos o modelos de redes

Havlin model (2010) - Network of Networks (NoN)



Desconexión catastrófica con modelos de más de una capa

Buldyrev, S. V., Parshani, R., Paul, G., Stanley, H. E., & Havlin, S. (2010). Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464(7291), 1025.

Redes (4): Labo

On human social intelligence

Linton C. Freeman, Sue C. Freeman and Alaina G. Michaelson

School of Social Sciences, University of California, Irvine, CA 92651, USA

Arguments for social intelligence in primates require that individuals be able to perceive and recall complex patterns of social relationships among the members of their communities. Indirect evidence suggests that non-human primates possess such ability, but, so far, little is known about the extent of human ability to process information about their social relationships. The present results show that, at least with regard to stable patterns of alliance and division in a community, humans are remarkable for their accuracy in processing such social information.

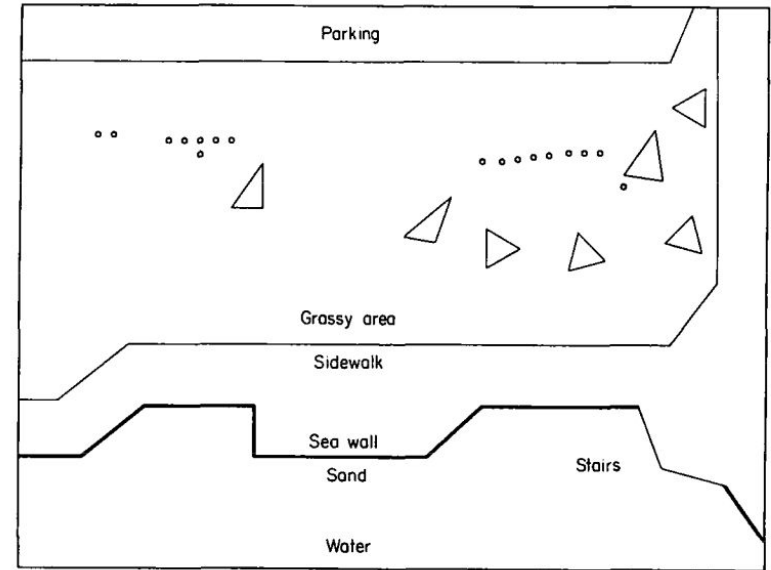


Fig. 1. Location of old group and new group on the beach at noon on 27 September

Comunidades

On human social intelligence

Linton C. Freeman, Sue C. Freeman and Alaina G. Michaelson

School of Social Sciences, University of California, Irvine, CA 92651, USA

Arguments for social intelligence in primates require that individuals be able to perceive and recall complex patterns of social relationships among the members of their communities. Indirect evidence suggests that non-human primates possess such ability, but, so far, little is known about the extent of human ability to process information about their social relationships. The present results show that, at least with regard to stable patterns of alliance and division in a community, humans are remarkable for their accuracy in processing such social information.

Red Observada: Observación durante 31 días.

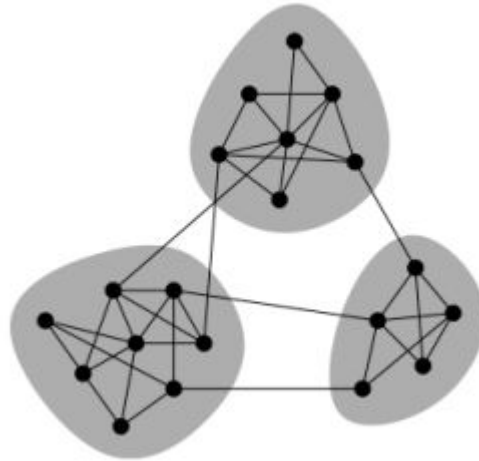
Red Percibida: Encuesta al final de los 31 días.

Pregunta: ¿Cuán buena es la percepción de grupo de los participantes?

Comunidades

¿Qué es una comunidad?

Cualitativamente: Un subconjunto de nodos que están más conectados entre sí que con el resto de los nodos.



Barabasi cap 9

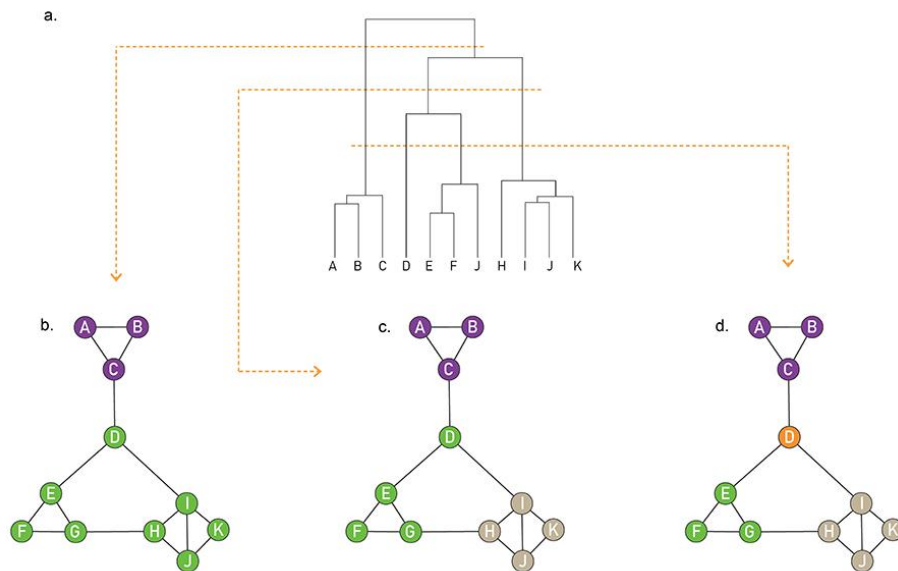
Detección de Comunidades

Girvan-Newman

División jerárquica según Link Betweenness

Ravasz

Agrupamiento jerárquico según Topological Overlap

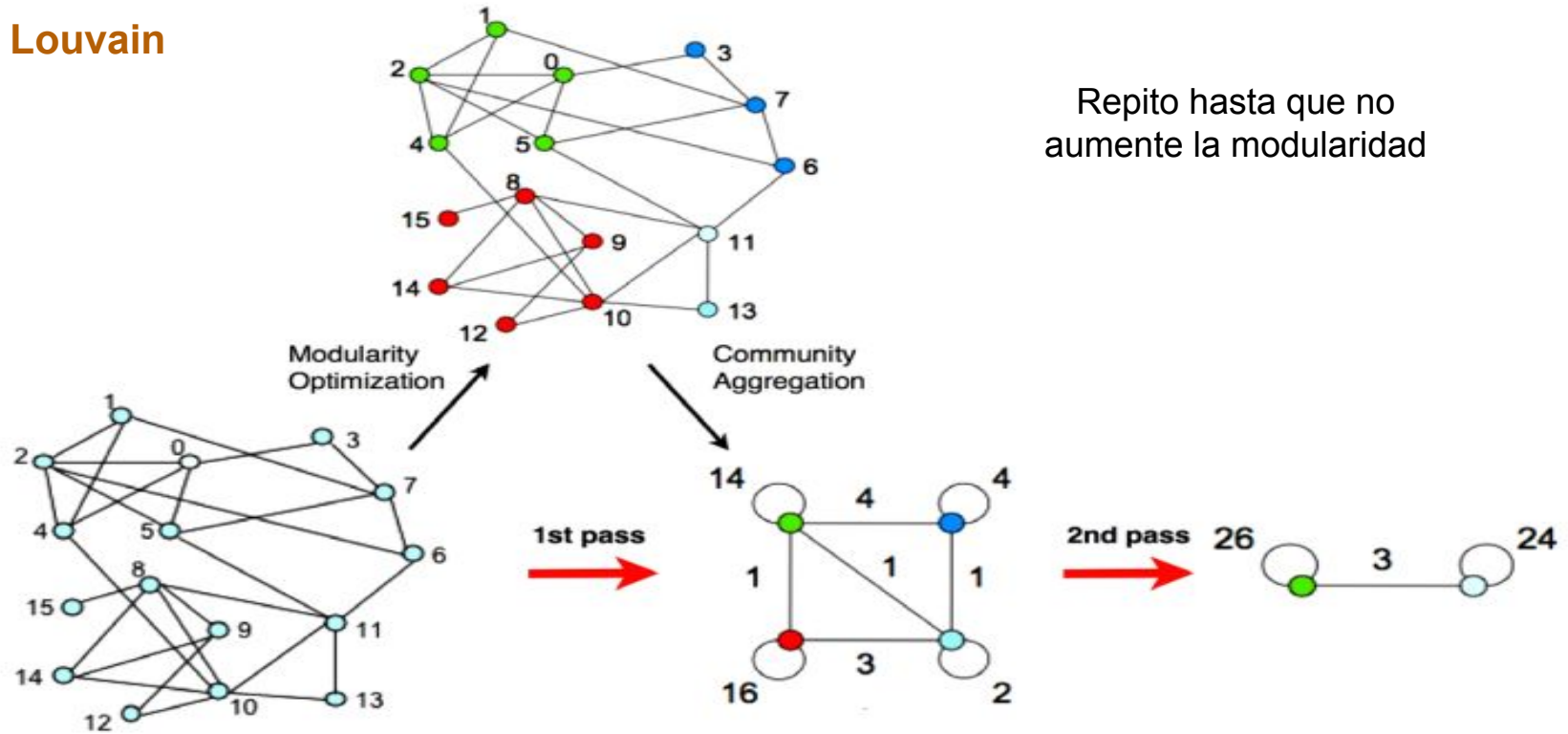


¿Dónde corto?

Solución:
Maximizar “modularidad”

Detección de Comunidades

Método Louvain



Detección de Comunidades

Modularidad

Dada una partición en módulos, medir el exceso de enlaces intra-modulares con respecto a una red al azar (Poissoniana)

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j}^N \left(A_{i,j} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta_{i,j}$$

m : número de links

A_{ij} : matriz de adyacencia

k : grado

$\delta_{i,j}$: 1 si i,j pertenecen al mismo comunidad, 0 si no.

Prob. que par de nodos de grado (k_i, k_j) tengan un enlace en una red al azar

Selecciona pares de nodos que pertenezcan a una misma comunidad

Barabasi cap 9

Detección de Comunidades

Modularidad

Dada una partición en módulos, medir el exceso de enlaces intra-modulares con respecto a una red al azar (Poissoniana)

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j}^N \left(A_{i,j} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta_{i,j}$$

m : número de links

A_{ij} : matriz de adyacencia

k : grado

$\delta_{i,j}$: 1 si i,j pertenecen al mismo comunidad, 0 si no.

Prob. que par de nodos de grado (k_i, k_j) tengan un enlace en una red al azar

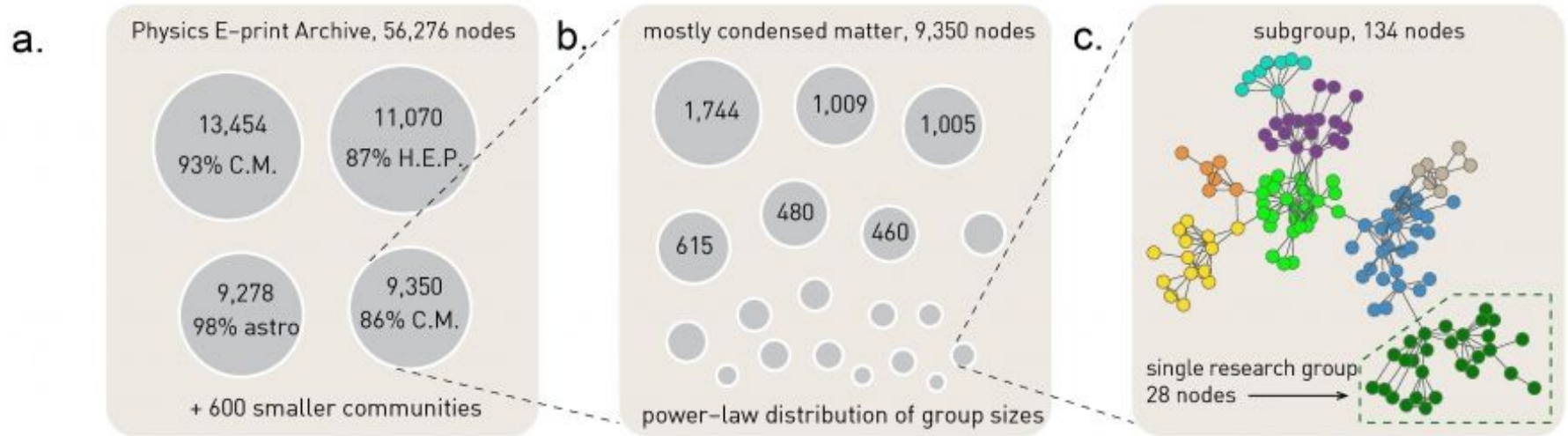
Selecciona pares de nodos que pertenezcan a una misma comunidad

Barabasi cap 9

Detección de Comunidades

Problema común a todos los métodos de Optimización de la Modularidad

Problema de “resolución” - se tiende a agrupar módulos en módulos cada vez más grandes



“Solución”: repetir análisis para cada uno de los grandes módulos, y analizar subdivisiones

Detección de Comunidades

Problema común a todos los métodos de Optimización de la Modularidad

Problema de “resolución” - se tiende a agrupar módulos en módulos cada vez más grandes

Se puede demostrar que si unimos comunidades A y B, el cambio en la modularidad es:

$$\Delta Q_{AB} = m_{AB}/m - k_A k_B / 2m^2$$

m_{ij} : total de enlaces en que unen comunidades i y j

k_i : grado total en comunidad i

Si $k_A k_B / 2m < 1$ y tengo al menos un enlace entre comunidades A y B ($m_{AB} > 0$), entonces $\Delta Q_{AB} > 0$

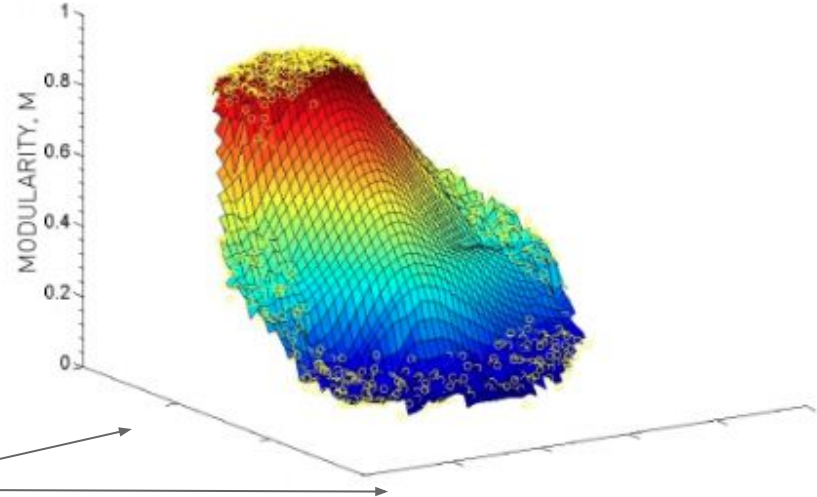
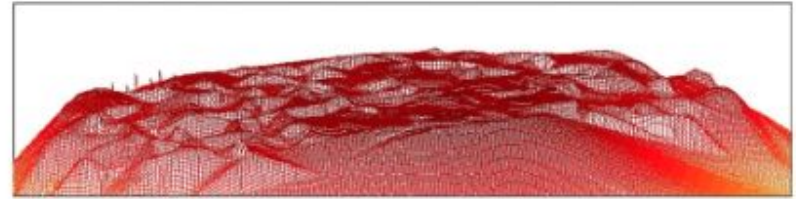
Si $k_A \sim k_B = k$, entonces si $k \leq \sqrt{2m}$ las comunidades A y B siempre van a ser combinadas, incluso si son comunidades diferentes

Optimización de Modularidad siempre va a fusionar comunidades que estén bajo el umbral $k \leq \sqrt{2m}$

Detección de Comunidades

Optimización de la Modularidad: Problema de Modularidad Máxima

Se observa una “meseta en altura” más que un máximo único, por lo que hay muchas particiones con modularidades similares.



embedding de todas las particiones encontradas