Redes: Introducción a grafos.
Definiciones.

Bibliografía

Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press.

http://networksciencebook.com/

NEWMAN, Mark. *Networks*. Oxford university press, 2018.

Librerías

Python: Networkx

Software for Complex Networks — NetworkX 3.1 documentation

Python y R: Igraph

https://igraph.org/r/

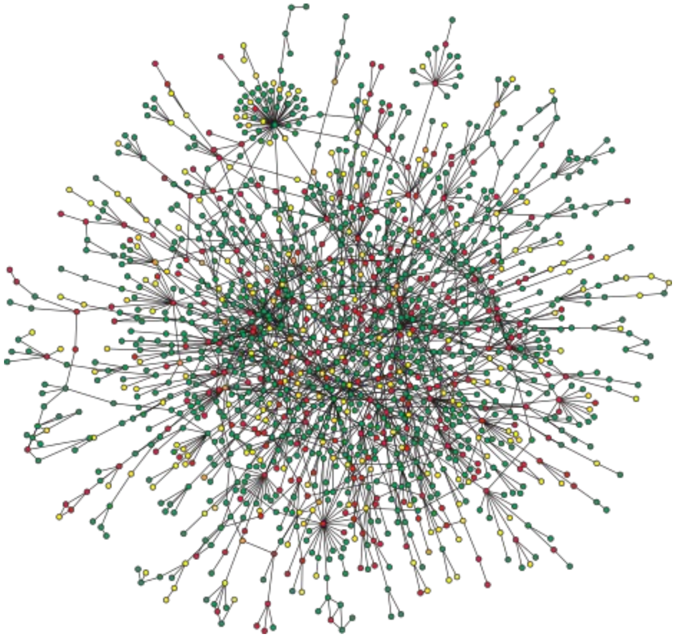
https://igraph.readthedocs.io/en/0.10.2/

Sistema complejos

“El **todo** es más que la suma de las **partes**”

Sistema complejos

"El **todo** es más que la suma de las **partes**"



Sistema complejos

complejo, ja

Del lat. *complexus,* part. pas. de *complecti* 'enlazar'.

1. adj. Que se compone de elementos diversos.

2. adj. **complicado** (‖ enmarañado, difícil).

3. m. Conjunto o unión de dos o más cosas que constituyen una unidad. *Complejo vitamínico.*

4. m. Conjunto de establecimientos industriales generalmente próximos unos a otros.

5. m. Conjunto de edificios o instalaciones agrupados para una actividad común.

6. m. *Psicol.* Conjunto de ideas, emociones y tendencias generalmente reprimidas y asociadas a experienciasdel sujeto, que perturban su comportamiento.

RAE

Sistema complejos

complejo, ja

Del lat. *complexus,* part. pas. de *complecti* 'enlazar'.

1. adj. Que se compone de elementos diversos.

2. adj. **complicado** (‖ enmarañado, difícil).

3. m. Conjunto o unión de dos o más cosas que constituyen una unidad. *Complejo vitamínico.*

4. m. Conjunto de establecimientos industriales generalmente próximos unos a otros.

5. m. Conjunto de edificios o instalaciones agrupados para una actividad común.

6. m. *Psicol.* Conjunto de ideas, emociones y tendencias generalmente reprimidas y asociadas a experienciasdel sujeto, que perturban su comportamiento.

RAE

Sistema complejos

Detrás de todo sistema complejo existe una red, que define la relación (enlace) entre sus componentes (nodos)

Sistema complejos

Detrás de todo sistema complejo existe una red, que define la relación (enlace) entre sus componentes (nodos)

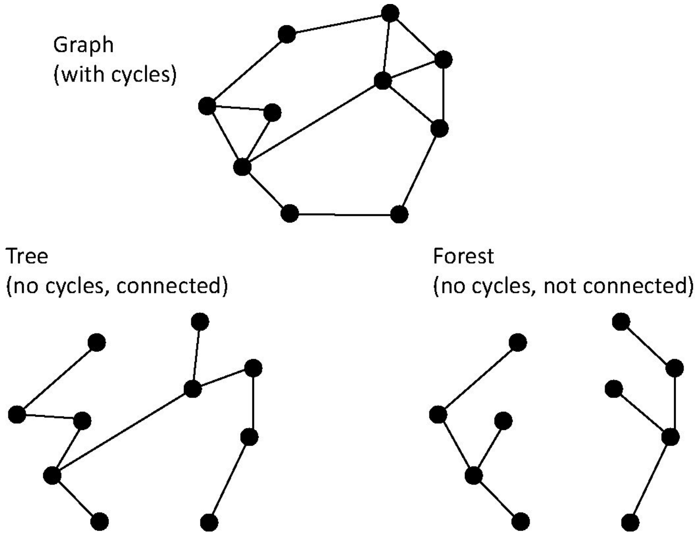
$\downarrow$

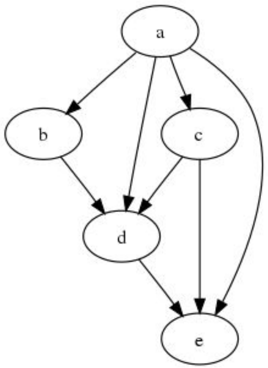
Un mapa que describa el "cableado" de interacciones en el sistema

En sistemas complejos la organización de dicho cableado es no trivial

Redes: representación abstracta y generalizable

- Matemáticas (Grafos)
- Ciencias de la Computación (Grafos)
- Física estadística (Redes complejas)
- Economía (Redes)
- Bioinformática (Redes)
- Epidemiología (Redes dinámicas)





Directed Acyclic Graph (DAGs)

Decision trees, random forests, ISOMAP, Google Maps, Google PageRank, Facebook, Product recommendations, etc…

Network science: Estudio de redes del mundo real

- Ubicuas: presentes en diferentes dominios
- No son regulares, pero tampoco aleatorias
- Estructura no trivial
- Propiedades universales

Insight: estudiando sus “topologías” entenderemos aspectos de su organización

Variedad de Redes

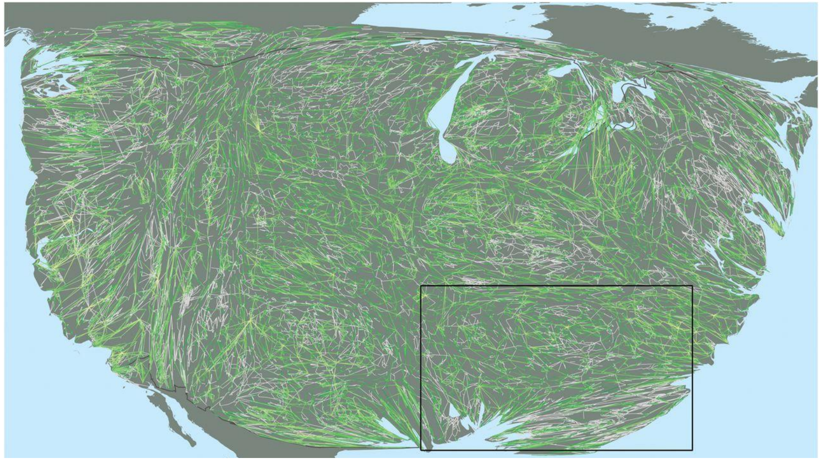
- Redes tecnológicas
- Redes de la información
- Redes sociales
- Redes biológicas

Network	Nodes	Links
Internet	Routers	Internet connections
WWW	Webpages	Links
Power Grid	Power plants, transformers	Cables
Mobile-Phone Calls	Subscribers	Calls
Email	Email addresses	Emails
Science Collaboration	Scientists	Co-authorships
Actor Network	Actors	Co-acting
Citation Network	Papers	Citations
E. Coli Metabolism	Metabolites	Chemical reactions
Protein Interactions	Proteins	Binding interactions

Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press.

Variedad de redes

- Redes tecnológicas

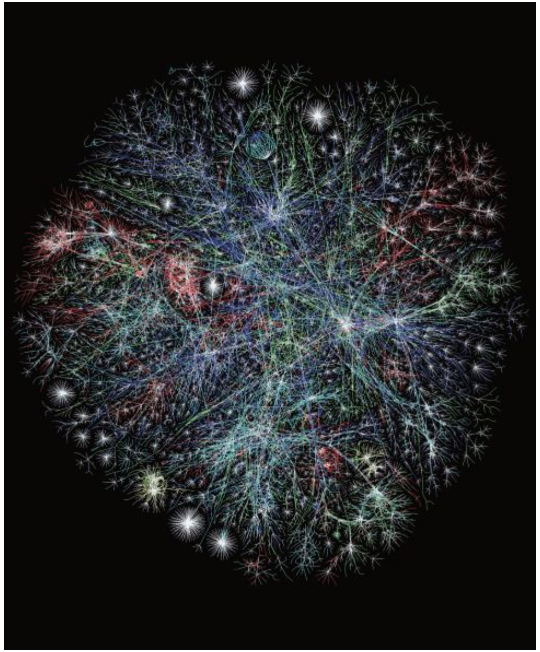


Red eléctrica

Yang, Nishikawa, Motter, (2017) Science

Variedad de redes

- Redes de la información



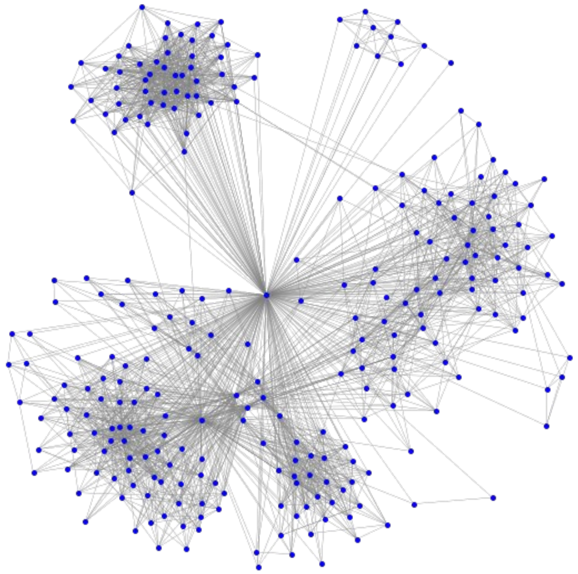
Tráfico de internet

Barret Lyon, 2003

Variedad de redes

- Redes sociales

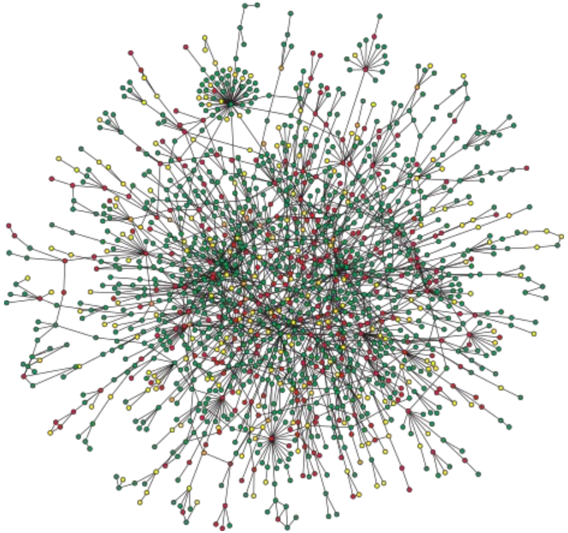
Amistades de Facebook



Variedad de redes

- Redes biológicas

Interacción de proteínas



By *Jure Leskovec*

STANFORD UNIVERSITY

SNAP

Stanford Large Network Dataset Collection

- Social networks : online social networks, edges represent interactions between people
- Networks with ground-truth communities : ground-truth network communities in social and information networks
- Communication networks : email communication networks with edges representing communication
- Citation networks : nodes represent papers, edges represent citations
- Collaboration networks : nodes represent scientists, edges represent collaborations (co-authoring a paper)
- Web graphs : nodes represent webpages and edges are hyperlinks
- Amazon networks : nodes represent products and edges link commonly co-purchased products
- Internet networks : nodes represent computers and edges communication
- Road networks : nodes represent intersections and edges roads connecting the intersections
- Autonomous systems : graphs of the internet
- Signed networks : networks with positive and negative edges (friend/foe, trust/distrust)
- Location-based online social networks : social networks with geographic check-ins
- Wikipedia networks, articles, and metadata : talk, editing, voting, and article data from Wikipedia
- Temporal networks : networks where edges have timestamps
- Twitter and Memetracker : memetracker phrases, links and 467 million Tweets
- Online communities : data from online communities such as Reddit and Flickr
- Online reviews : data from online review systems such as BeerAdvocate and Amazon
- User actions : actions of users on social platforms.
- Face-to-face communication networks : networks of face-to-face (non-online) interactions
- Graph classification datasets : disjoint graphs from different classes
- Computer communication networks : communications among computers running distributed applications
- Cryptocurrency transactions : transactions covering several cryptocurrencies and exchanges
- Telecom networks : relationships between users, packages, apps, and cells in a telecom network

SNAP networks are also available from SuiteSparse Matrix Collection by Tim Davis.

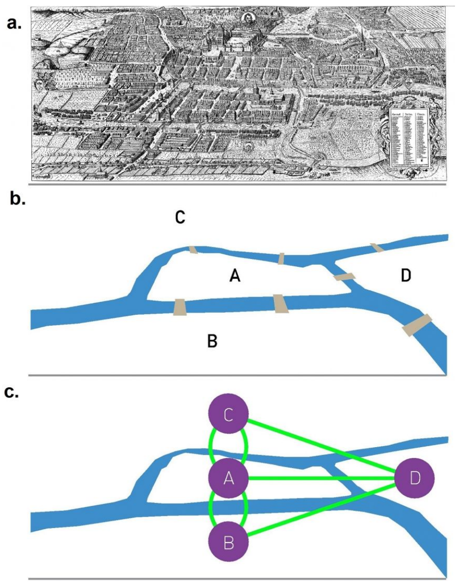
Teoría de Grafos: orígen

Los puentes de Königsberg

¿Se puede pasar por los 7 puentes sin pasar por el mismo dos veces?

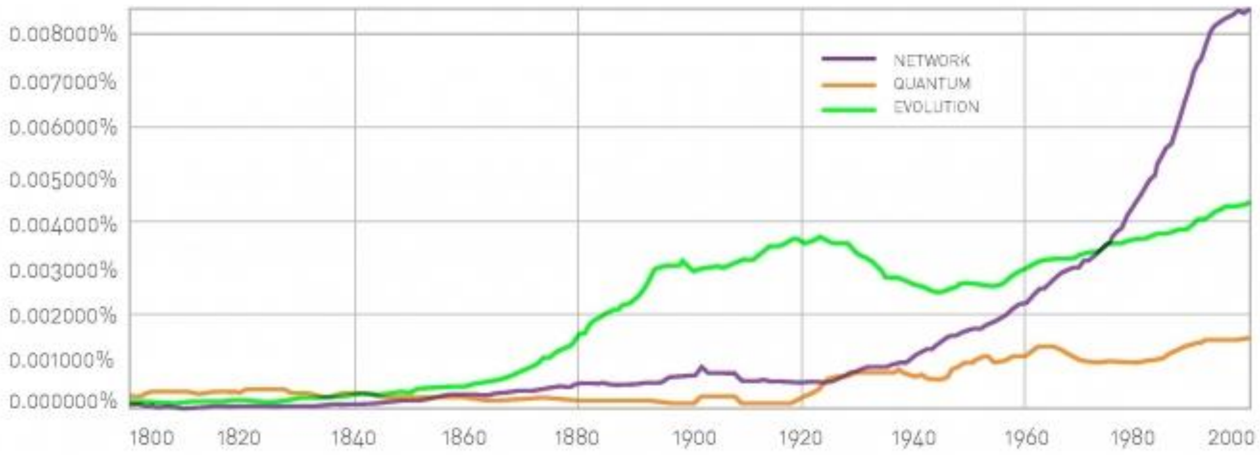
Euler (1735) realizó un diagrama para resolver la pregunta.

"Este tipo de camino no puede existir en un grafo con más de dos nodos que posean un número impar de enlaces. En Königsberg hay 4 nodos de este tipo, por lo tanto es imposible"



Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press.

Teoría de Grafos: presente



Barabási, A. L. (**2016**). *Network science.* Cambridge university press.

Definiciones y nomenclatura

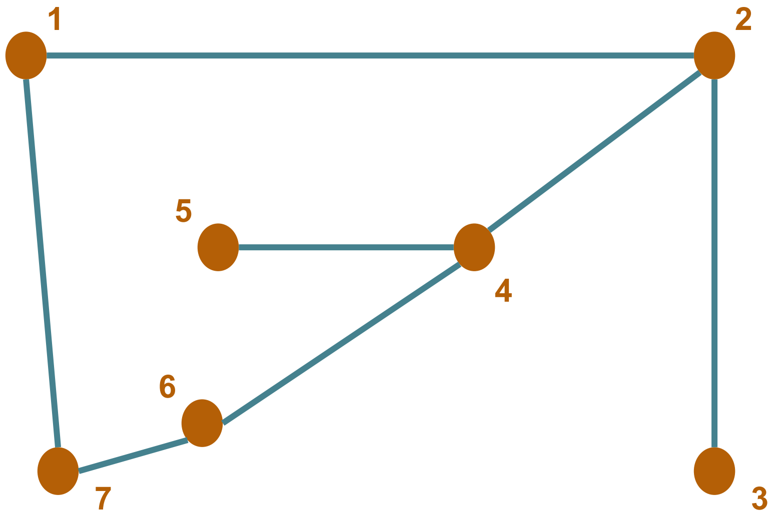
Red	Grafo
Nodos	Vértices
Enlaces	Aristas

Definiciones y nomenclatura

Grafo : **G = (V,E)**

V: Conjunto de nodos

E: Conjunto de enlaces

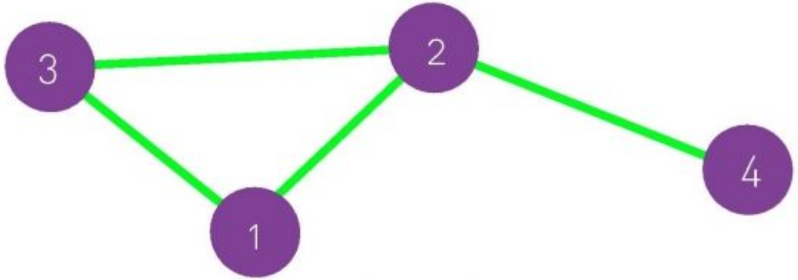


V = {1,2,3,4,5,6,7}

E = { (1,2), (2,3), (2,4), (4,5), (4,6), (6,7), (1,7) }

Tipos de grafos básicos

Grafos binarios simples.



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4)\}$$

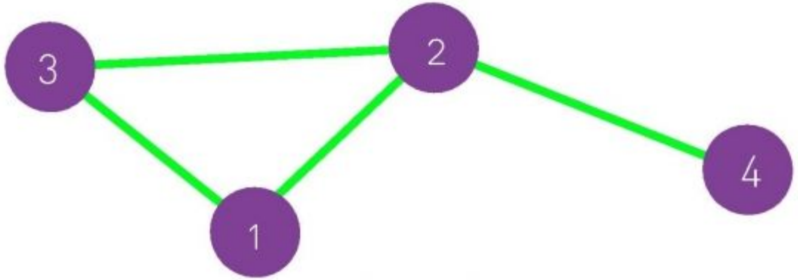
Matriz de adyacencia (A).

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; hay \; enlace \; entre \; los \; nodos \; ij \\ 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tipos de grafos básicos

Grafos binarios simples.



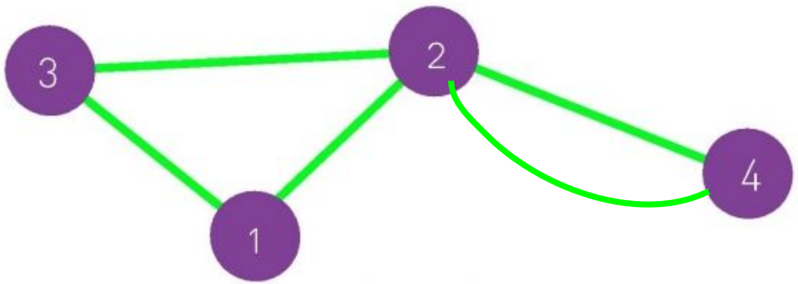
$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4)\}$$

Lista de adyacencia.

$$\begin{array}{ll} L_1 : & \{(1,2), (1,3)\} \\ L_2 : & \{(2,1), (2,3), (2,4)\} \\ L_3 : & \{(3,1), (3,2)\} \\ L_4 : & \{(4,2)\} \end{array}$$

Tipos de grafos básicos

Grafos binarios multigrafo.



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 4)\}$$

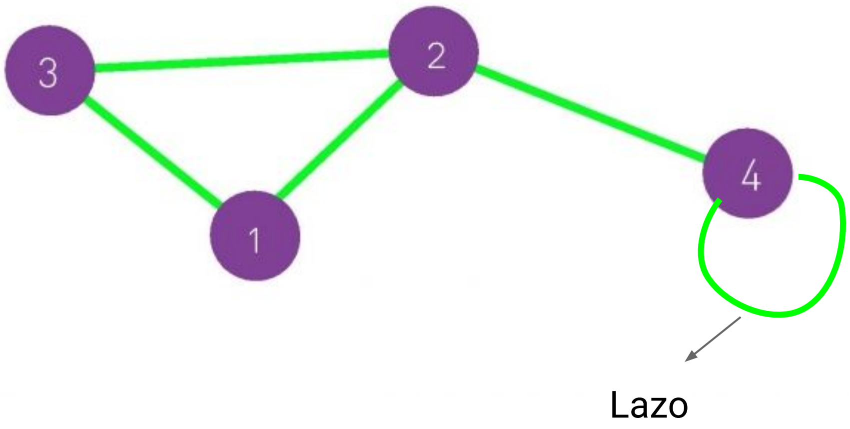
Matriz de adyacencia (A).

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; hay \; enlace \; entre \; los \; nodos \; ij \\ 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tipos de grafos básicos

Grafos binarios autoenlaces.



$$V = \{1,2,3,4\}$$
$$E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(4,4)\}$$

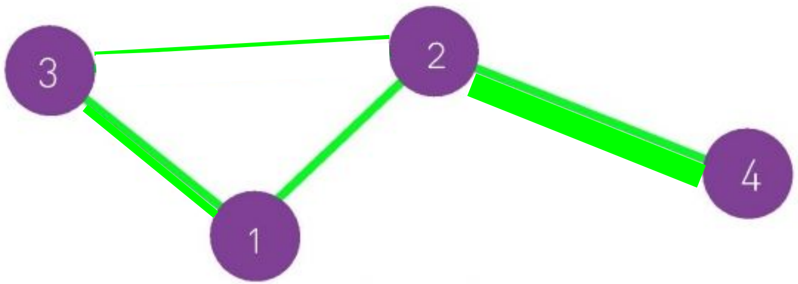
Matriz de adyacencia (A).

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \, si \, hay \, enlace \, entre \, los \, nodos \, ij \\ 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de grafos básicos

Grafos ponderados o pesados: grafos donde las conexiones tienen un peso.



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = \{\{\omega_{12}, (1, 2)\}, \{\omega_{13}, (1, 3)\}, \{\omega_{23}, (2, 3)\}, \{\omega_{24}, (2, 4)\}\}$$

Matriz de adyacencia (A).

$$A_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} \, si \, hay \, enlace \, entre \, los \, nodos \, ij \\ 0 \end{cases}$$

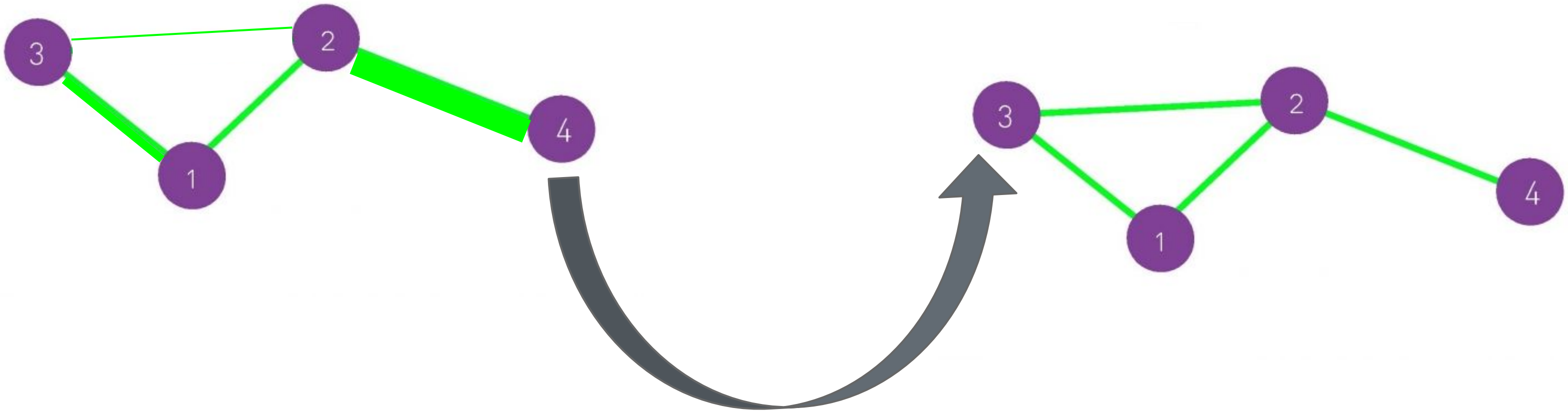
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ \omega_{12} & 0 & \omega_{32} & \omega_{24} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Permite representaciones probabilísticas que cuantifiquen certezas en los enlaces

Tipos de grafos básicos

Grafos ponderados

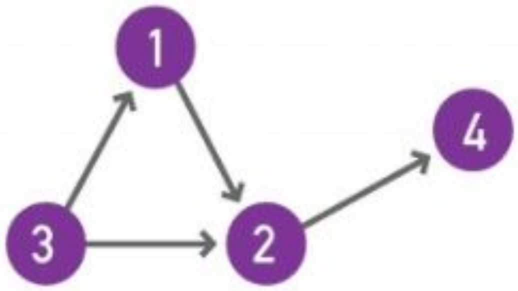
Grafos binarios



Muchas veces se aplica un criterio para quedarse con el grafo binario, es decir un *umbral fijo* o elegir las *N aristas de mayor peso*.

Tipos de grafos básicos

Grafos dirigidos: grafos donde las conexiones tienen un sentido



$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$E = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 4)\}$$

Matriz de adyacencia (A).

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; hay \, enlace \;\; desde \; el \; nodo \; j \, \text{hasta} \; i \\ 0 \end{cases}$$

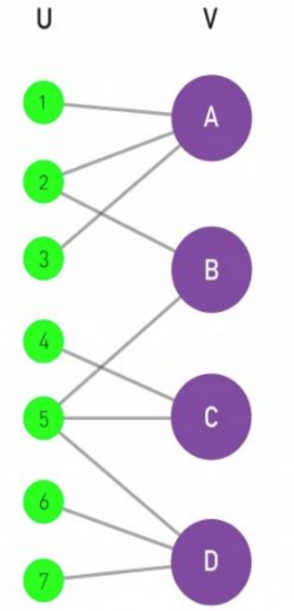
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

columna nodo origen, # fila nodo destino

Tipos de grafos básicos

Grafos bipartitos: es una red cuyos nodos se dividen en dos conjuntos disjuntos U y V. Cada enlace conecta un nodo de U con un nodo de V.

Por ej.:
U son los consumidores
V los productos



Matriz de incidencia (B).

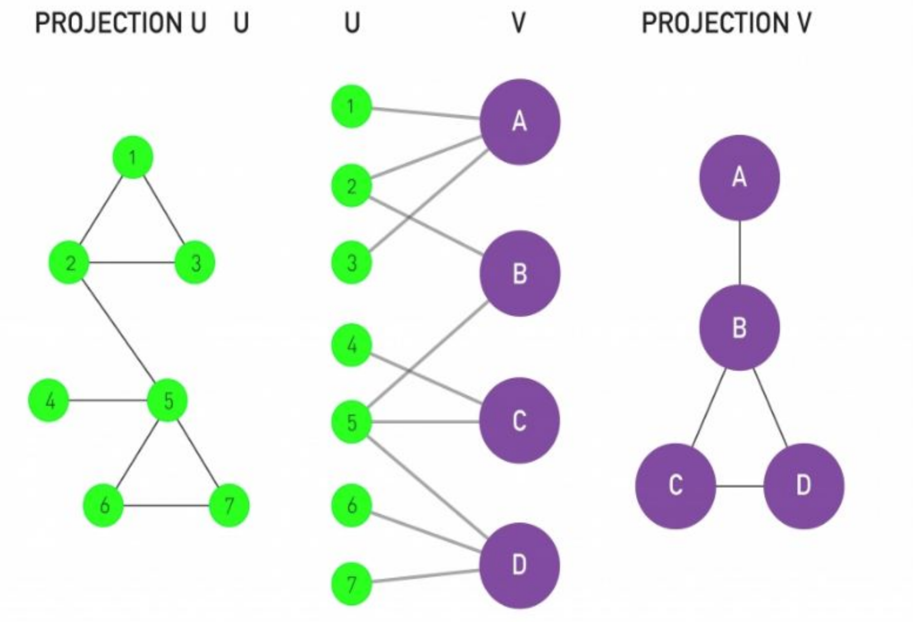
$$B_{ij} = \begin{cases} 1\; si\; hay\; enlace\; entre\; el\; nodo\; j\; de\; U\; \text{hasta}\; i\; de\; V \\ 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

columna nodo origen en U, # fila nodo destino en V

Tipos de grafos básicos

Grafos bipartitos: es una red cuyos nodos se dividen en dos conjuntos disjuntos U y V. Cada enlace conecta un nodo de U con un nodo de V. Se pueden proyectar a grafos simples.

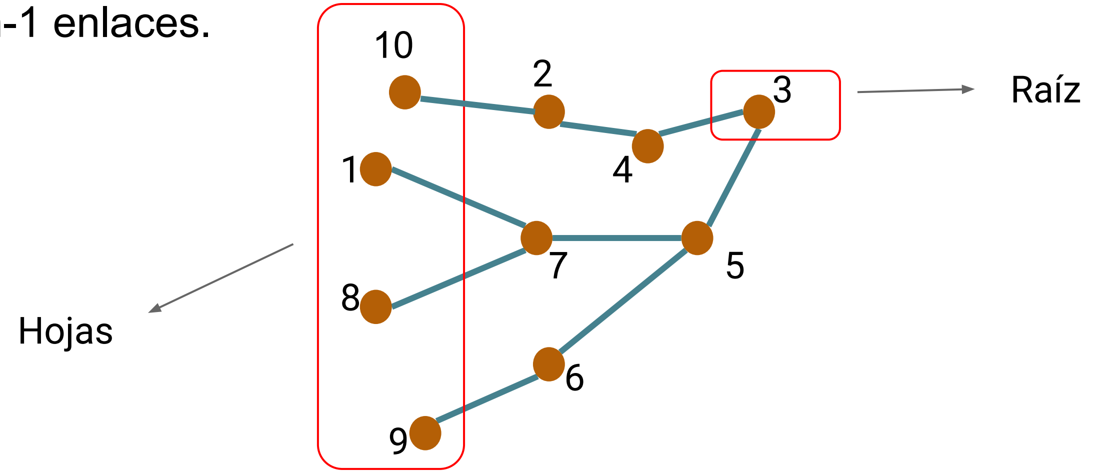


Más tipos de Grafos

Árboles

Un árbol es un grafo que no contiene ciclos cerrados y/o lazos, conectado, no dirigido, cuyos nodos finales se llaman **hojas**, y el inicial se llama **nodo raíz**.

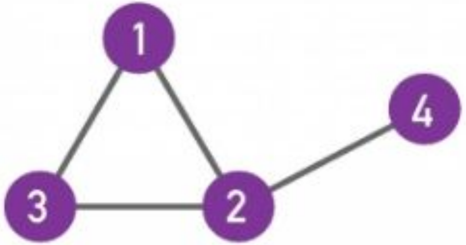
Tiene siempre n-1 enlaces.



Definiciones: Grado (k_i)

No dirigido

$$A_{ij} = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$



$$k_1 = 2$$
$$k_2 = 3$$
$$k_3 = 2$$
$$k_4 = 1$$

n números de nodos

$$k_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

$$2m = \sum_{i=1}^{n} k_i \rightarrow \; m \text{ es el total de enlaces}$$

$$< k > \; = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{2m}{n}$$

Densidad $\longleftarrow$ $\rho = \dfrac{m}{\binom{n}{2}} = \dfrac{2m}{n(n-1)} = \dfrac{< k >}{n-1}$

$\boxed{\rho \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty}$ Dispersa

$\boxed{\rho \rightarrow cte \text{ si } n \rightarrow \infty}$ Densa

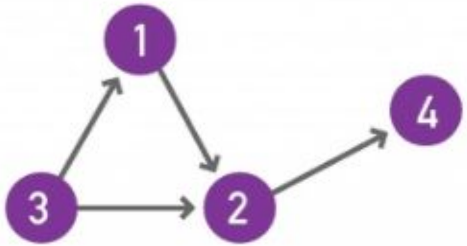
Definiciones: Grado (k_i)

Dirigido

Suma sobre columnas

Suma sobre filas

$$A_{ij} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$



$$k_1^{\text{in}} = 1;\ \ k_1^{\text{out}} = 1$$
$$k_2^{\text{in}} = 2;\ \ k_2^{\text{out}} = 1$$
$$k_3^{\text{in}} = 0;\ \ k_3^{\text{out}} = 2$$
$$k_4^{\text{in}} = 1;\ \ k_4^{\text{out}} = 0$$

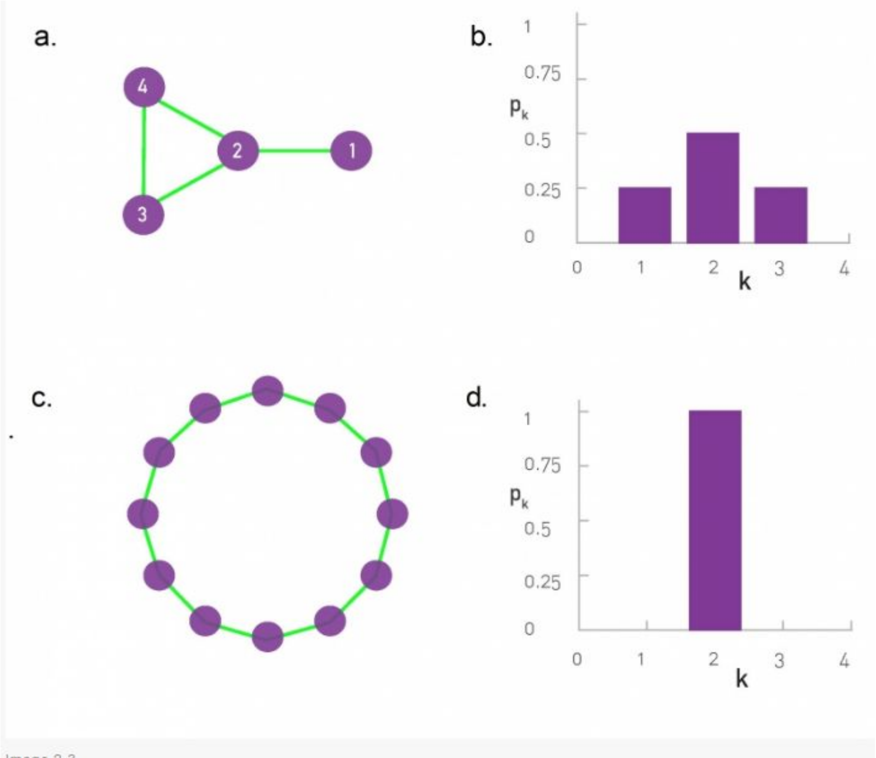
$$k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij};\ k_j^{\text{out}} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^{n} k_j^{\text{out}} = \sum_{ij} A_{ij}$$

$$< k^{in} >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i^{\text{in}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_i^{\text{out}} =< k^{out} >$$

$$< k > = \frac{m}{n}$$

Distribución de grado



Se puede graficar el **histograma de frecuencias** o la **distribución de probabilidades** de que un nodo tenga grado k ($\boldsymbol{p_k}$).

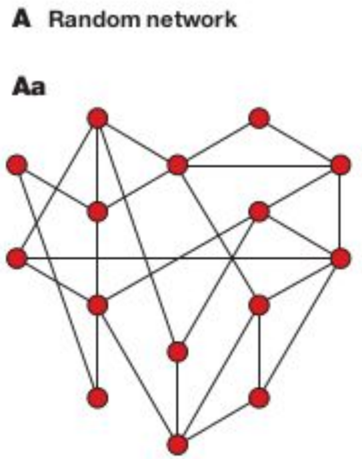
La distribución de grado, p_k, de nodos de una red provee la probabilidad de que un nodo elegido al azar tenga grado k.

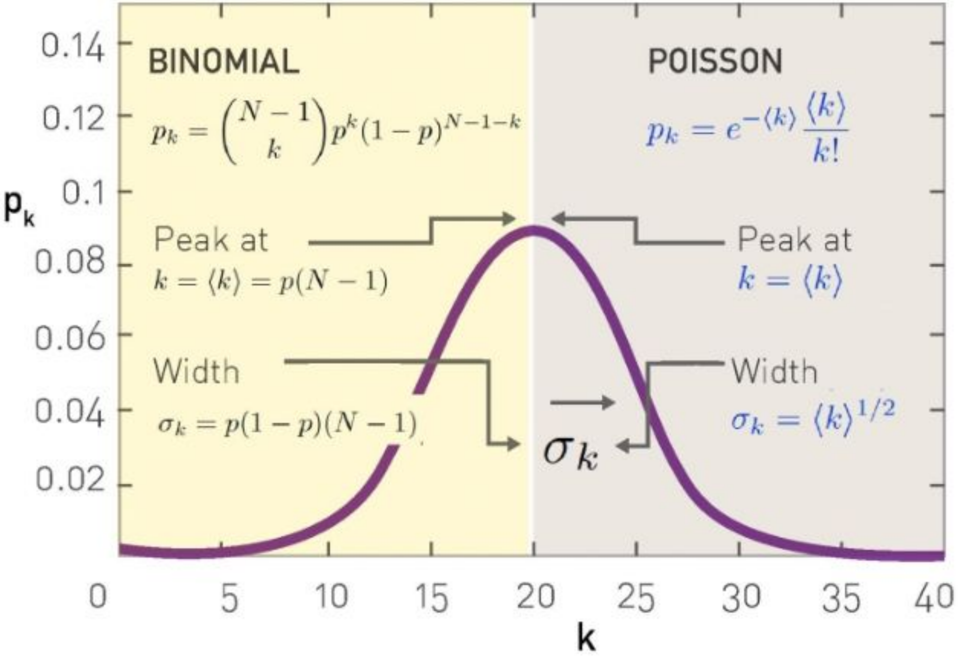
$$p_k = \frac{n_k}{N}$$

de nodos con grado k

$$\sum_{1}^{N} p_k = 1$$

Distribución de grado

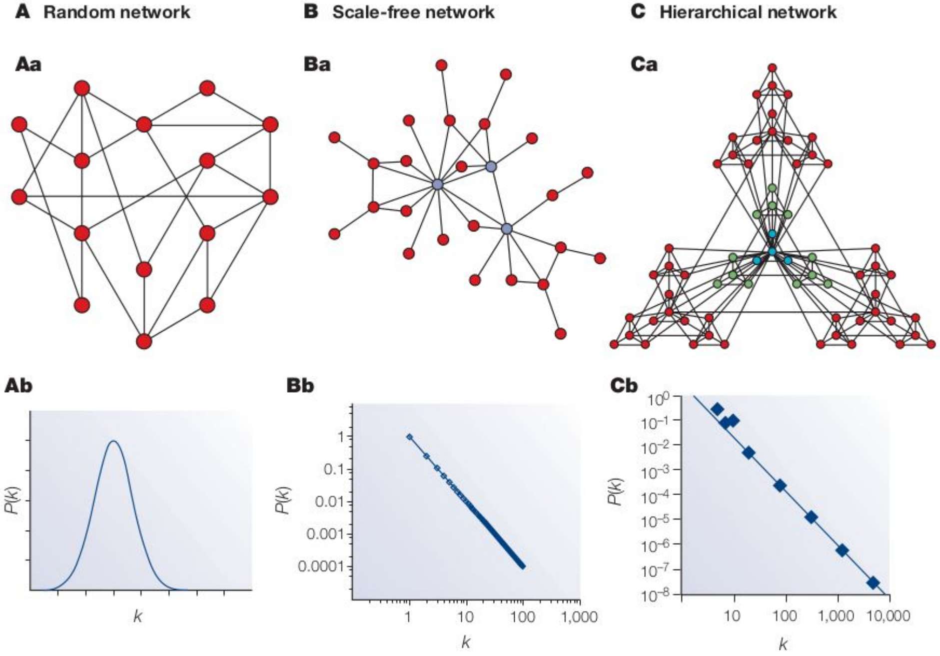




En el límite *N* >> <*k*> la distribución de grado tiende a Poisson

Distribución de grado

Información que se desprende de la distribución de grado:



Barabasi, A. L., & Oltvai, Z. N. (2004).

Scale-free:

$$p_k \sim k^{-\gamma}$$

$$\log p_k \sim -\gamma \log k$$

Random network

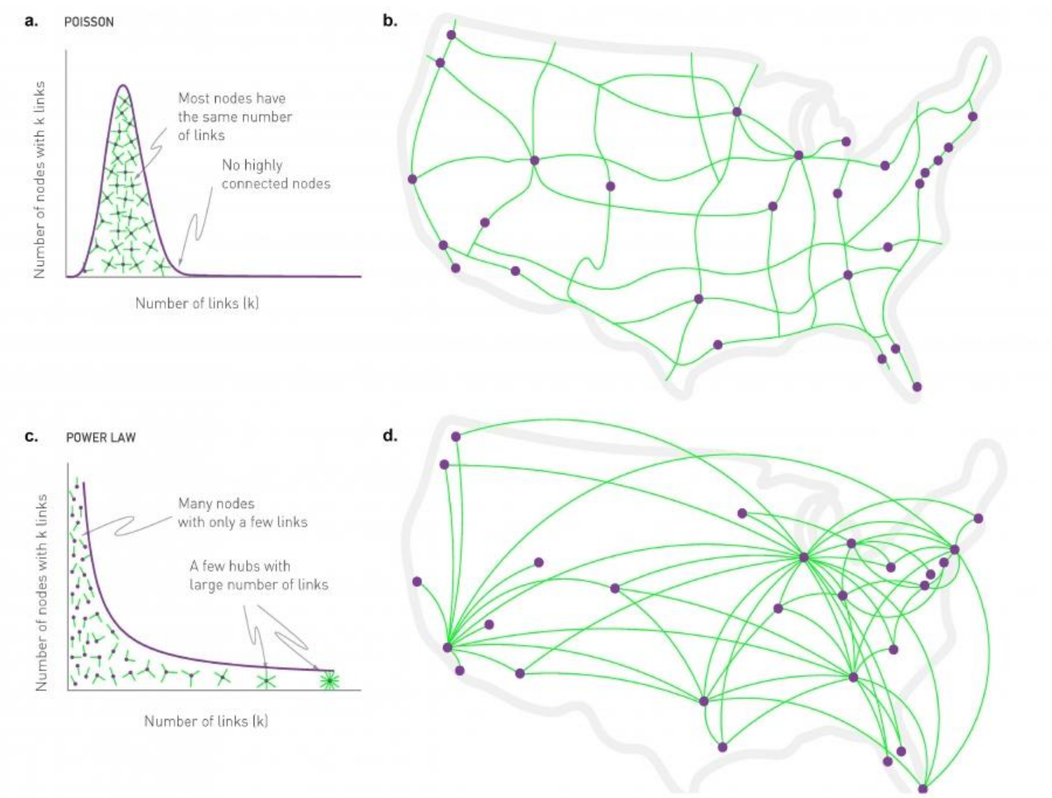
Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$

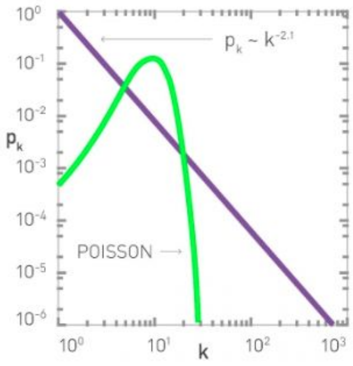
Scale: $\langle k \rangle$

Scale-free network

Randomly chosen node: $k = \langle k \rangle \pm \infty$

$\langle k \rangle$ is meaningless as 'scale'



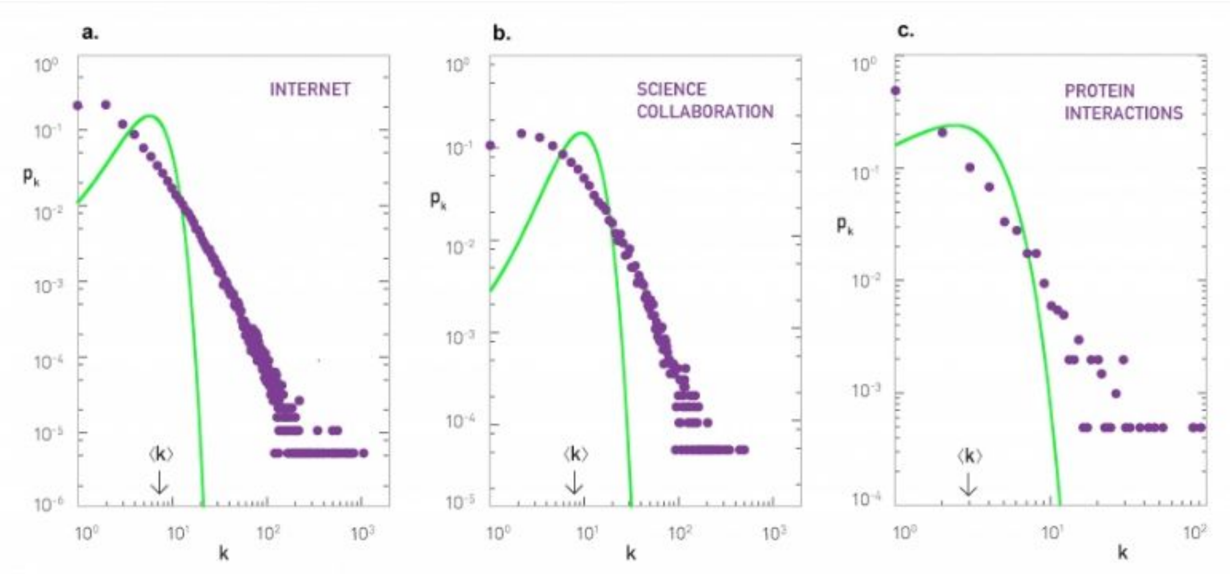


“Hubs” generan atajos

Distribución de grado

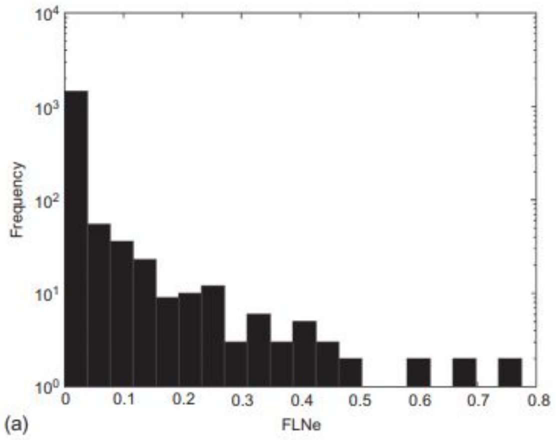
Redes reales

El rango de k puede variar mucho en una red real.



Distribución de grado

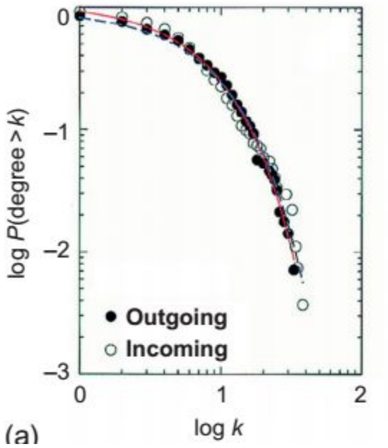
Redes pesadas



Distribución del peso.

(FLNe: fracción de neuronas de una región que proyectan a otra región)

Redes dirigidas



Distribuciones de k_{in} y k_{out}

Fornito, Zalesky, Bullmore (2016). Fundamentals of Brain Network Analysis, Chapter 4