# SVD计算过程：

例：对矩阵 A 进行奇异值分解。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

① 首先求出 $A^TA$ 和 $AA^T$

$$A^TA=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

② 求出 $A^TA$ 的特征值和特征向量

$$\lambda_1=3;v_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\lambda_2=1;v_2=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

求出 $AA^T$ 的特征值和特征向量

$$\lambda_1=3;u_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{bmatrix};\lambda_2=1;u_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ -1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\lambda_3=0;u_3=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\ -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

③ 利用 $\sigma_i=\sqrt{v_i}$ 求解奇异值

$$\sigma_1=\sqrt{3};\quad \sigma_2=1$$

最终得到 A 的奇异值分解为：

$$A=U\Sigma V=\begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$