

Université Mohammed V RABAT

Ecole Nationale Supérieur d'Informatique et Analyse des Systèmes  
(ENSIAS)



## MODELISATION ET SIMULATION SOUS MATLAB DU SYSTEME D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC DES PONDERATIONS PROBABILISTES



Fait par :

**MOHAMMED RGUIBI**

**AHMED BENAMAR**

**MAROUANE ADNANE**

**MOUNIR BELGHITI**

Supervisé et Encadré par :Mr Mohammed KAICER

Master Science de données et Big Data 2017/2018

**Présentation du modèle mathématique :**

D'une manière générale, les modèles mathématiques constituent des outils de compréhension du fonctionnement de systèmes naturels, et de prédiction de leurs évolutions. Nous nous intéresserons ici au traitement de systèmes dynamiques continus et déterministes, c'est-à-dire régi par des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont essentiellement utilisés dans le cadre d'études de dynamiques des populations et des écosystèmes, mais les techniques sont également applicables à des systèmes moléculaires, ou, en élargissant le champ, à des modèles spatiaux, d'épidémiologie notamment.

On ne devra jamais perdre de vue le caractère explicatif et le pouvoir prédictif du modèle étudié.

En effet, les objectifs visés sont de trois ordres :

- palier à la simplicité des modèles à une espèce et se rapprocher d'une réalité ancrée dans un écosystème complexe ; ces modèles offrent une meilleure balance entre le critère de minimalité de la construction du modèle et le caractère explicatif que l'on en attend.
- réaliser une étude qualitative de l'évolution du système modélisé. Il s'agit la plupart du temps de déterminer la stabilité de la communauté étudiée, les conditions hypothétiques d'existence d'une stabilité, la sensibilité de telles conditions vis-à-vis des paramètres, des conditions initiales, de la complexité du système. Ce positionnement soulevé d'ailleurs la question de la validité de la notion de stabilité ; doit-on se focaliser sur les points particuliers, insensibles aux perturbations, ou inclure également une certaine persistance des espèces aux travers de dynamiques cycliques voire porter une certaine attention aux transients (périodes transitives des dynamiques).
- permettre une étude quantitative viable des communautés étudiées. Il s'agit de mettre au point des outils d'aide à la gestion ; le caractère prédictif du modèle est alors mis à contribution.

D'un point de vue biologique, ces modèles sont bien sûr discutables, du fait des difficultés liées à l'observation et à la mesure des paramètres du système.

D'autre part, ils ne tiennent pas compte du caractère éminemment stochastique des processus biologiques.

## Table des matières

Introduction.....	5
Problématique.....	6
Le langage du calcul technique : .....	7
Première Partie .....	8
1- Système dynamique .....	8
1.1- Système dynamique différentiel .....	8
1.2- Systèmes linéaires et non linéaires .....	8
1.3- Les systèmes dynamiques et la théorie du chaos .....	9
2- Résolution d'un SDD avec des pondérations aléatoires sous Matlab.....	10
2.1- La fonction utilisée .....	10
2.2- Scripte 1 sous MATLAB.....	10
Deuxième partie .....	14
1- Théorie des bifurcations.....	14
1.1- Cas concrets.....	14
1.2- Définition.....	14
1.3- Types de bifurcation .....	14
2- Résolution d'un SDD avec des pondérations aléatoires sous Matlab.....	15
2.1- Scripte 2 sous Matlab : .....	16
2.2- Etude de notre système pour un modèle de proie - prédateur.....	17
Troisième partie .....	26
1- Loi de probabilité.....	26
1-1 Lois de probabilités usuelles.....	26
2- Résolution du SDD graphiquement en affectant une loi de probabilité à chaque pondération	27
2.1- les lois continues .....	28
2.2- les lois discrètes .....	31

Figure 1 Etat initial.....	12
Figure 2 Valeur maximal.....	12
Figure 3 Valeur fixé.....	12
Figure 4 Valeur aléatoire Exemple:2 .....	13
Figure 5 Valeur aléatoire Exemple:1 .....	13
Figure 6 Valeur aléatoire Exemple:4 .....	13
Figure 7 Valeur aléatoire Exemple: 3 .....	13
Figure 8 Résolution graphiques deuxième Q, Graphe 4.....	17
Figure 9 Résolution graphiques deuxième Q, Graphe 3.....	17
Figure 10 Résolution graphiques deuxième Q, Graphe 1.....	17
Figure 11 Résolution graphiques deuxième Q, Graphe 2.....	17
Figure 12 Résolution du SDD avec des pondérations aléatoires.....	21
Figure 13 Résolution du SDD avec des pondérations aléatoires 2 .....	22
Figure 14 la courbe orbite .....	24
Figure 15 les pondérations alpha, sigma, beta1 et beta2 suivant une loi exponentielle.....	29
Figure 16 les pondérations alpha, sigma, beta1 et beta2 suivant une loi normal. ....	30
Figure 17 les pondérations alpha, sigma, beta1 et beta2 suivant la loi uniforme .....	31
Figure 18 les pondérations alpha, sigma, beta1 et beta2 suivant une loi binomiale. ....	32
Figure 19 les pondérations alpha, sigma, beta1 et beta2 suivant une loi de poisson .....	33

**Mini projet en probabilité : Modélisation et simulation sous  
Matlab du Système d'équations différentielles avec des  
pondérations probabilistes**

# Introduction

La dynamique des populations est au cœur de l'interface entre systèmes dynamiques et biologie. Ainsi, l'un des modèles biologiques les plus simples et les plus importants — le modèle logistique — correspond à la dynamique des polynômes quadratiques, dont l'étude mathématique est des plus intéressantes. Ce seul cas montre combien il est aisé d'obtenir un comportement complexe sans introduire beaucoup de complexité dans le modèle. Mais le modèle logistique est bien trop peu réaliste pour que sa complexité dynamique puisse être directement interprétée dans le cadre d'une population biologique réellement observée. D'un point de vue mathématique, les systèmes de dimension 1 présentent un nombre limité de dynamiques possibles. Il est donc intéressant de considérer des modèles de dimension supérieure tels que l'application de Hénon (qui est une petite perturbation de la dynamique d'un polynôme quadratique, en dimension 2).

Le cours de probabilité du master première année, filière « Sciences de Données et Big Data », donné à ENSIAS, Université Mohamed V de Rabat, sur la période 2017-2019, par Mr. Mohammed Kaicer, nous a permis de découvrir un ensemble des théorèmes portés sur les lois de probabilité : la loi de Bernoulli, loi de poisson, etc.

Après ce cours théorique, nous devons mettre en pratique nos connaissances en développant sous Matlab.

Notre thème est porté sur les équations différentielles non-linéaires avec des pondérations aléatoires, le but de ce projet c'est la résolution d'un système d'équations différentielles (SDD) non linéaire à l'aide du logiciel Matlab

# Problématique

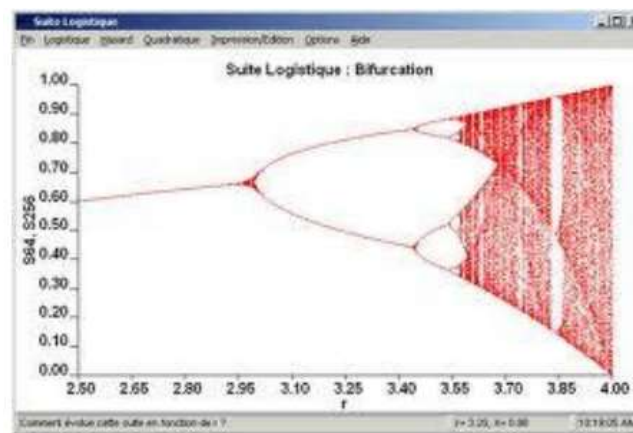
Au cours de ce projet On va résoudre à l'aide de Matlab le système d'équations différentielles (SDD) non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{dt} = \sigma \frac{1-\alpha}{\alpha} (S_t + I_t) - \beta_1 S_t I_t + \beta_2 S_t I_t - \mu_1 S_t \\ \frac{dI_t}{dt} = (1-\sigma) \frac{1-\alpha}{\alpha} (S_t + I_t) + \beta_1 S_t I_t - \beta_2 S_t I_t - \mu_2 I_t \end{cases}$$

Où  $\sigma, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$  sont des pondérations.

On cherche à évaluer la fonction  $S_t$  et  $I_t$  graphiquement sur le même graphe

- 1- La première partie consiste à Résoudre, graphiquement par **Matlab**, le système en affectant aux pondérations des valeurs numériques comprises entre 0 et 1.
- 2- Dans la deuxième partie, on doit Résoudre, graphiquement par **Matlab**, le système en affectant aux pondérations des valeurs numériques comprises entre 0 et 1, pour obtenir un graphe semblable au graphe suivant



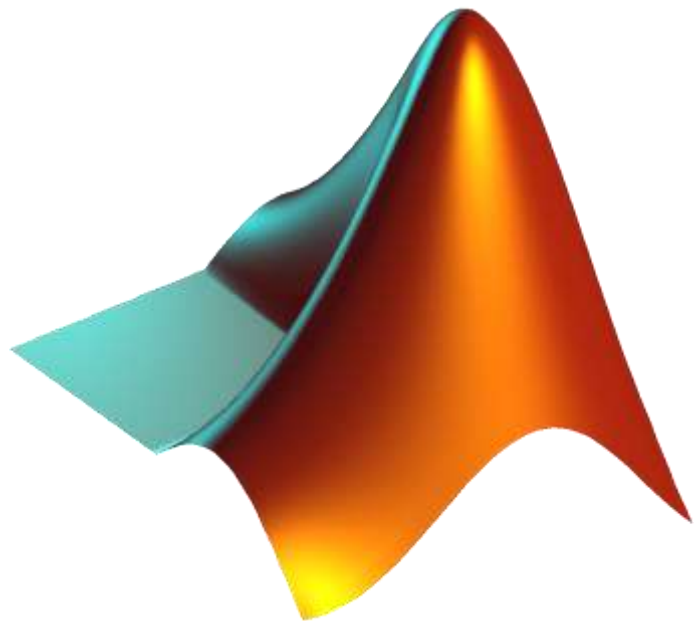
- 3- Dans la troisième partie, on doit Retrouver le même type du graphe en affectant cette fois-ci une loi de probabilité à chaque pondération, par exemple  $\alpha$  suit la loi de Bernoulli de paramètre (0,7)

# Le langage du calcul technique :

**MATLAB** (« matrix laboratory ») est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom ; il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran. Les utilisateurs de MATLAB (environ un million en 2004) sont de milieux très différents comme l'ingénierie, les sciences et l'économie dans un contexte aussi bien industriel que pour la recherche. Matlab peut s'utiliser seul ou bien avec des toolbox (« boîte à outils »).

Voici une liste non exhaustive (loin de là) et en vrac de toolboxes, montrant la diversité des fonctionnalités de Matlab :

- Control System Toolbox
- Symbolic Math Toolbox
- Signal Processing Toolbox
- Neural Network Toolbox
- Optimization Toolbox
- Parallel Computing Toolbox
- Statistics Toolbox
- Fuzzy Logic Toolbox
- Image Processing Toolbox
- Aerospace Toolbox
- Data Acquisition Toolbox
- Bioinformatics Toolbox
- MATLAB Compiler
- Vehicle Network Toolbox
- Based Calibration Toolbox
- Financial Toolbox
- RF Toolbox
- System Identification Toolbox





# Première Partie

## 1- Système dynamique

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régi par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique) des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique).

Deux aspects importants d'un système dynamique est qu'il est :

- causal, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- déterministe, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

Une notion importante est celle de système dynamique réversible pour lequel on peut également décrire un état passé du système à partir de son présent et de son futur. Autrement dit, en renversant la flèche du temps on a encore un système dynamique. Mathématiquement un système dynamique réversible est un cas particulier d'action de groupe (le groupe étant celui des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  dans le cas discret et l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  dans le cas continu).

### 1.1- Système dynamique différentiel

Depuis les travaux d'Isaac Newton (1687), l'idée que l'évolution temporelle d'un système physique quelconque est bien modélisée par une équation différentielle (ou ses généralisations à la théorie des champs, les équations aux dérivées partielles) est admise. Cette modélisation différentielle s'est depuis étendue avec succès à d'autres disciplines comme la chimie, la biologie, l'économie...

On considère typiquement un système différentiel du premier ordre du type :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t)$$

où la fonction  $f$  définit le système dynamique étudié (pour un système à  $n$  degrés de liberté, il s'agit à proprement parler d'un champ de vecteurs à  $n$  dimensions, c'est-à-dire, d'un point de vue prosaïque, un ensemble de  $n$  fonctions scalaires).

### 1.2- Systèmes linéaires et non linéaires

Nous distinguons les systèmes dynamiques linéaires des systèmes dynamiques non linéaires. Dans les premiers, le membre de droite de l'équation est une fonction dépendant linéairement de  $x$ , telle que :

$$x_{t+1} = 3x_t.$$

La somme de deux solutions d'un système linéaire est également solution (« principe de superposition »). Les solutions d'une équation linéaire forment un espace vectoriel, ce qui permet l'utilisation de l'algèbre linéaire et simplifie considérablement l'analyse. Pour les systèmes à temps continu, la transformée de Laplace permet de transformer les équations différentielles en des équations

algébriques.

### 1.3- Les systèmes dynamiques et la théorie du chaos

Des systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceau , peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles ? » ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales ? ».

Un objectif important est la description des **points fixes**, ou états stationnaires, du système ; ce sont les valeurs de la variable pour lesquelles elle n'évolue plus avec le temps. Certains de ces points fixes sont **attractifs**, ce qui veut dire que si le système parvient à leur voisinage, il va converger vers le point fixe.

De même, on s'intéresse aux **points périodiques**, les états du système qui se répètent au bout d'un certain nombre de pas (leur **période**). Les points périodiques peuvent également être attractifs. Le théorème de Charkovski donne une contrainte sur l'ensemble des périodes possibles des points d'un système dynamique à variable réelle et fonction d'évolution continue ; notamment, s'il existe un point de période 3, il existe des points de période quelconque

Le comportement chaotique de systèmes complexes n'est pas une surprise – on sait depuis longtemps que la météorologie comprend des comportements complexes et même chaotiques. La véritable surprise est plutôt la découverte de chaos dans des systèmes presque triviaux ; ainsi, la fonction logistique est un simple polynôme du second degré, pourtant le comportement de ses solutions est chaotique.

## 2- Résolution d'un SDD avec des pondérations aléatoires sous Matlab

Résoudre, graphiquement par **Matlab**, le système **S(t)** et **I(t)** suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{dt} = \sigma \frac{1-\alpha}{\alpha} (S_t + I_t) - \beta_1 S_t I_t + \beta_2 S_t I_t - \mu_1 S_t \\ \frac{dI_t}{dt} = (1-\sigma) \frac{1-\alpha}{\alpha} (S_t + I_t) + \beta_1 S_t I_t - \beta_2 S_t I_t - \mu_2 I_t \end{cases}$$

Où  $\alpha, \sigma, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$  sont des pondérations.

En affectant aux pondérations des valeurs numériques comprises entre 0 et 1.

### 2.1- La fonction utilisée

**DDE23** : Résoudre des équations différentielles avec des retards (Delay) constants

#### Syntaxe

```
sol = dde23(ddefun,lags,history,tspan)
sol = dde23(ddefun,lags,history,tspan,options)
```

- Pour résoudre cette équation, on fait appel à la fonction prédéfinie de **Matlab**

**DDE23** ayant comme paramètres :

**history** = [3; 3];

**tspan** = [0, 10];

et un **délai** égale 0.

### 2.2- Scripte 1 sous MATLAB

Le scripte 1 permettant la résolution est :

```

function sol0 = Q1

history = [3; 3];
tspan = [0, 10];
opts = ddeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-5);

alpha=rand(1);
sigma=rand(1);
beta1=rand(1);
beta2=rand(1);
mu1=rand(1);
mu2=rand(1);

sol0 = dde23(@eq,[],history,tspan,opts,alpha,sigma,beta1,beta2,mu1,mu2);

figure
plot(sol0.x,sol0.y)
title('Résolution graphique du SDD ')
xlabel('S(t) et I(t)')
ylabel('t')
legend(' S','I')

end
%-----

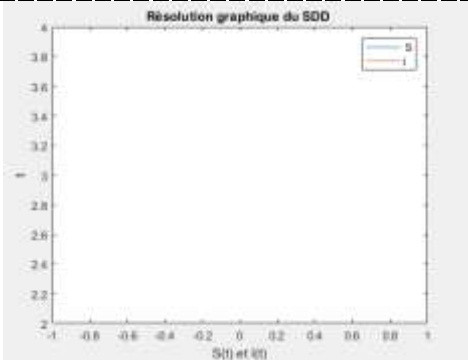
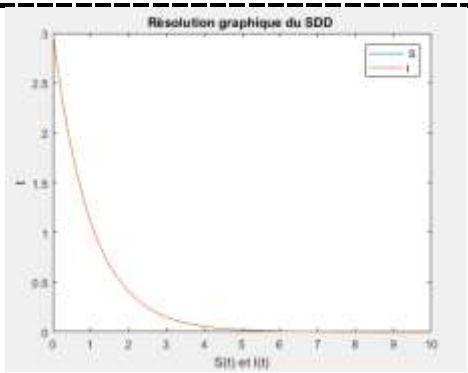
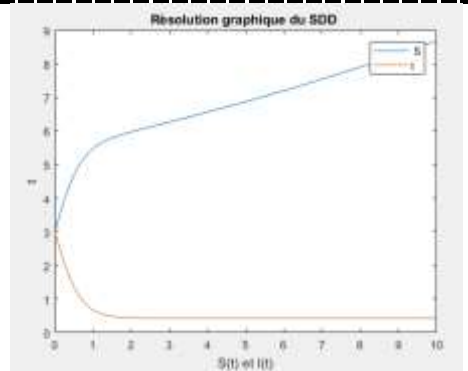
function v = eq(t,y,Z,alpha,sigma,beta1,beta2,mu1,mu2)

v = zeros(2,1);
beta=beta1-beta2;
alph=(1-alpha)/alpha;

v(1)=(sigma*alph*(y(1)+y(2)))-(y(1)*y(2)*beta)-(mu1*y(1));
v(2)= ((1-sigma)*alph*(y(1)+y(2)))+(y(1)*y(2)*beta)-(mu2*y(2));

end

```

Les valeurs des paramètres		Résolution graphique
Etat initial	$\alpha=0;$ $\sigma=0;$ $\beta_1=0;$ $\beta_2=0;$ $\mu_1=0;$ $\mu_2=0;$	 <p>Figure 1 Etat initial</p>
valeur Maximal	$\alpha=1;$ $\sigma=1;$ $\beta_1=1;$ $\beta_2=1;$ $\mu_1=1;$ $\mu_2=1;$	 <p>Figure 2 Valeur maximal</p>
Valeur fixé	$\alpha= 0.8003$ $\sigma= 0.1419$ $\beta_1= 0.4218$ $\beta_2= 0.9157$ $\mu_1= 0.2000$ $\mu_2= 0.3000$	 <p>Figure 3 Valeur fixé</p>

Valeur  
aléatoire

```
alpha=rand(1);
sigma=rand(1);
beta1=rand(1);
beta2=rand(1);
mu1=rand(1);
mu2=rand(1);
```

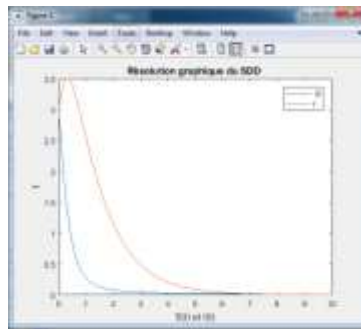


Figure 5 Valeur aléatoire Exemple:1

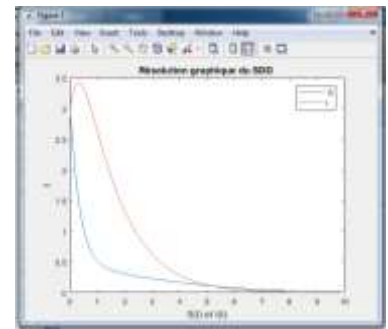


Figure 4 Valeur aléatoire Exemple:2

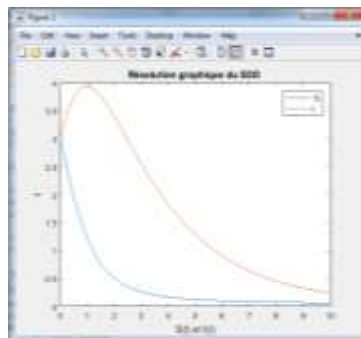


Figure 7 Valeur aléatoire Exemple: 3

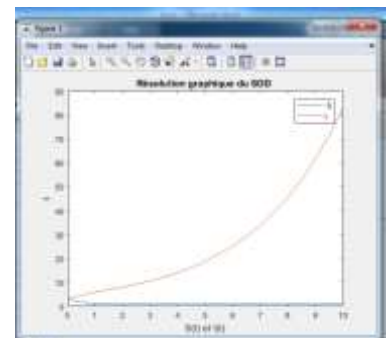


Figure 6 Valeur aléatoire Exemple:4

# Deuxième partie

## 1- Théorie des bifurcations

La théorie des bifurcations, en mathématiques et en physique est l'étude de certains aspects des systèmes dynamiques. Une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système.

### 1.1- Cas concrets

Des exemples classiques d'une bifurcation en sciences pures sont par exemple les rythmes circadiens de populations animales en biologie théorique et les solutions de météo en mathématique et physique non-linéaire, en sciences de l'ingénieur il y a aussi le flambage d'une poutre élastique (l'expérience peut être faite avec une règle d'écolier) ou les transitions de phase de matériaux (température critique de bifurcation, concentration critique).

Cas de la poutre : si on compresse la poutre légèrement, elle va rester droite. Tout à coup, au-delà d'une limite bien définie, la poutre va se plier de plus en plus lorsqu'on augmente la force exercée. Il y a donc bifurcation, ou brisure de symétrie, où l'on passe de l'état "poutre droite" à l'état "poutre courbée", soit dans un sens, soit dans l'autre, avec une certaine probabilité (d'où l'idée de bifurcation). Avant la bifurcation, l'état "poutre droite" était stable, après la bifurcation, il devient instable.

Un exemple en magnétisme est la température de Curie pour une transition de phase : au-delà de cette température, un matériau perd son aimantation spontanée.

La prise de la mayonnaise : Le système, à l'état liquide, contient de l'huile et de l'eau (dans le jaune d'œuf). En mélangeant on forme une émulsion d'huile et eau où la quantité relative des deux varie lentement au fur et à mesure qu'on ajoute l'huile. La mayonnaise prend lorsque le liquide se transforme en gel (bifurcation appelée changement de phase en physique), et cela se produit pour un rapport eau/huile critique.

### 1.2- Définition

Soit un système d'équations différentielles :

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$\lambda$  est ici le paramètre contrôlant la bifurcation (la force exercée dans l'exemple précédent). On dit qu'il y a bifurcation en  $\lambda_0$  si, en une valeur de  $\lambda$  arbitrairement proche de  $\lambda_0$ , il existe une dynamique typologiquement non-équivalente à celle en  $\lambda_0$ .

### 1.3- Types de bifurcation

La théorie des bifurcations consiste à classer les différents types de bifurcation en classes. Chaque classe correspond à une certaine symétrie dans le problème. Parmi les différents types de bifurcations, on trouve :

- Les bifurcations « de fourche » (en anglais : « pitchfork »). Un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Cette

transition peut se faire de façon supercritique (de façon continue et prévisible) ou sous-critique (discontinue, avec des phénomènes d'hystérèse)

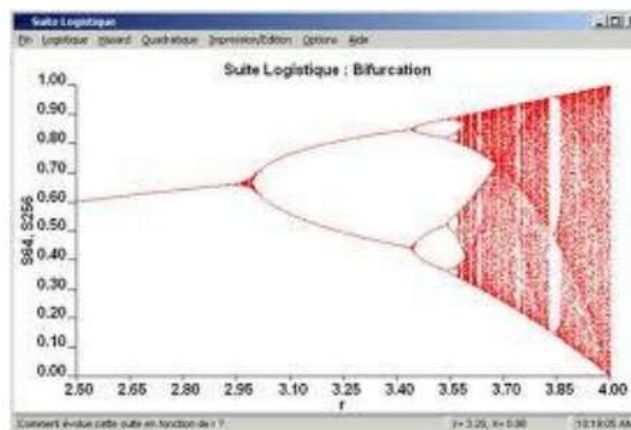
- Les bifurcations col-nœud (en anglais : « saddle-node »). Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.
- Les bifurcations de Hopf. Ce sont des bifurcations oscillantes, comme l'attracteur de Lorenz.
- Les bifurcations de dédoublement de période. Ce sont des bifurcations qui mènent à des comportements chaotiques. Elles peuvent par exemple s'obtenir en faisant rebondir une balle de ping-pong sur une surface oscillante, et en augmentant la fréquence d'oscillation.

Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation. Par exemple, la forme normale d'une bifurcation pitchfork supercritique est :

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3 \quad \text{Pour des valeurs négatives de } r, x=0 \text{ est la seule solution. Pour } r>0, \text{ il y a deux solutions stables } x = \pm\sqrt{r}.$$

## 2- Résolution d'un SDD avec des pondérations aléatoires sous Matlab

Résoudre, graphiquement par **Matlab**, le système en affectant aux pondérations des valeurs numériques comprises entre 0 et 1, pour obtenir un graphe semblable au graphe suivant :



Afin d'aboutir à cette solution, on fait appel à la fonction DDE23 ayant un délai T non nul.



## 2.1- Scripte 2 sous Matlab :

```
function [sol0,sol1] = Q2

history = [0.5; 0.5];
tspan = [0, 10];
opts = ddeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-5);

alpha=rand(1);
sigma=rand(1);
beta1=rand(1);
beta2=rand(1);
mu1=rand(1);
mu2=rand(1);

sol0 = dde23(@eq,[],history,tspan,opts,alpha,sigma,beta1,beta2,mu1,mu2);

tau = 6;
sol1 = dde23(@eq,tau,history,tspan,opts,alpha,sigma,beta1,beta2,mu1,mu2);
figure
plot(sol0.y(1,:),sol0.y(2,:),sol1.y(1,:),sol1.y(2,:))
title(' Résolution du SDD ')
xlabel('S(t)')
ylabel('I(t)')

%-----

function v = eq(t,y,Z,alpha,sigma,beta1,beta2,mu1,mu2)
%PROB1F The derivative function for Problem 1 of the DDE Tutorial.
v = zeros(2,1);
beta=beta1-beta2;
alph=(1-alpha)/alpha;
```

Des exemples des graphes avec :

history = [0.5; 0.5];

tspan = [0, 10];

Résolution graphique :

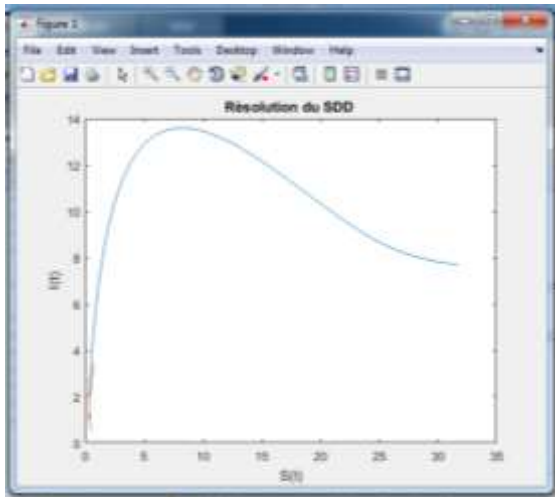


Figure 10 Résolution graphique deuxième Q, Graphe 1

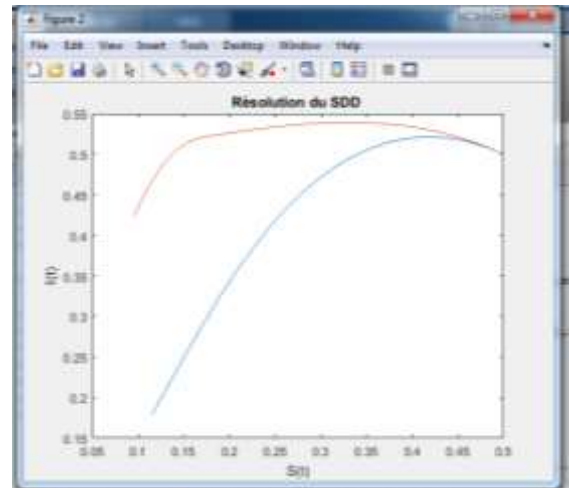


Figure 11 Résolution graphique deuxième Q, Graphe 2

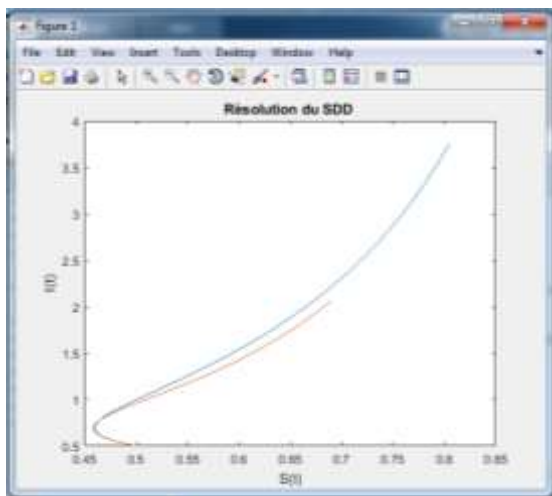


Figure 9 Résolution graphique deuxième Q, Graphe 3

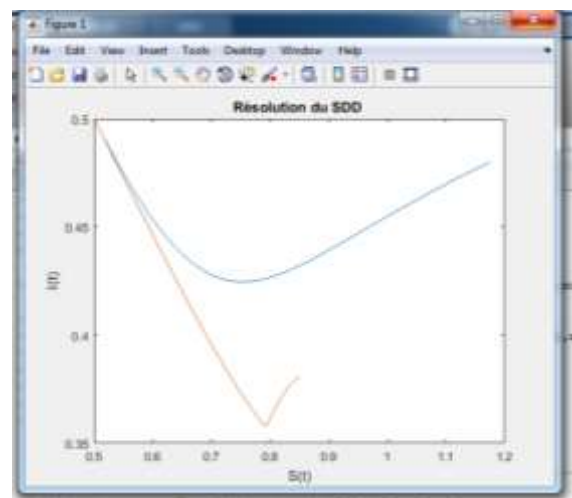


Figure 8 Résolution graphique deuxième Q, Graphe 4

## 2.2- Etude de notre système pour un modèle de proie - prédateur

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{dt} = \sigma \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) (S_t + I_t) - \beta_1 S_t I_t + \beta_2 S_t I_t + \mu_1 S_t \\ \frac{dI_t}{dt} = (1-\sigma) \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) (S_t + I_t) + \beta_1 S_t I_t - \beta_2 S_t I_t - \mu_2 I_t \end{cases}$$

Pour arriver à rédiger un modèle d'un système non linéaire de deux équations et qui décrit les interactions entre deux espèces par exemple les renards et les lapins, ou les gros poissons et les petits poissons, on a essayé de développer notre système d'équation vers la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{dt} = S_t(I_t((\beta_2 - \beta_1) - \mu_1)) \\ \frac{dI_t}{dt} = I_t(S_t(\beta_1 - \beta_2) - \mu_2) \end{cases} \quad (\text{Figure 1.1})$$

Et c'est en affectant à alpha  $\alpha$  la valeur « 1 », ce qui nous donne un système très proche de celui Le modèle classique *Lotka-Volterra(LV)* de la compétition prédateur-proie, qui décrit les interactions et qui est fondement de l'écologie mathématique. Il a également été appliqué à de nombreux autres domaines, y compris l'économie. Le modèle est un système non linéaire de deux équations, où une espèce croît exponentiellement et l'autre décroît exponentiellement en l'absence de l'autre.

Les équations des prédateurs des proies des prédateurs de *Lotka-Volterra Altera* sont le grand-père de tous les modèles impliqués dans la compétition entre les espèces. Ils sont la base de domaines tels que l'écologie mathématique. Par exemple aux deux espèces comme les lapins et les renards ou les orignaux et les loups ou les petits poissons dans les gros poissons.

### **Equation LV :**

C'est une équation qui modélise les comportements proie-prédateur. Il se compose de deux équations différentielles de la forme ressemble à peu près de ça:

$$dX/dt = aX - bXY \text{ -----(1)}$$

$$dY/dt = cXY - dY \text{ -----(2)}$$

X est le nombre (concentration) des proies, alors que Y représente le nombre de prédateurs.

Les quatre paramètres clés :

"a" - le taux de croissance exponentiel de X;

"b" - le taux de X est tué par Y;

"c" - le taux de croissance de Y par les chances de tuer X

"d" - le taux de mortalité exponentiel de Y;

### **Analyse de base**

En manipulant les équations (1) et (2), nous pourrions acquérir une certaine compréhension de ces équations différentielles :

Voir la manipulation sur la droite.

Malgré la simplicité du système (1.1), l'analyse de stabilité de ce système par linéarisation au voisinage du point d'équilibre positif met en évidence l'existence d'oscillations déphasées et indique que les trajectoires dans le plan de phase sont des orbites fermées. Les populations de prédateurs et de proies exhibent des dynamiques périodiques entretenues (Figure 1.1). Les courbes sont obtenues pour différentes valeurs des données initiales  $S(0)$  et  $I(0)$ .

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} * \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{-dy + cxy}{ax - byx}$$

$$ax\partial y - byx\partial y = -dy\partial x + cxy\partial x$$

$$\partial y * \frac{a - by}{y} = \partial x * \frac{-d + cx}{x}$$

$$\int \left( \frac{a}{y} - b \right) dy = \int \left( -\frac{d}{x} + c \right) dx$$

$$a \ln y - by = -d \ln x + cx + const$$

$$\ln y^a + \ln x^d = cx + by + const$$

$$y^a x^d e^{-(cx+by)} = const$$

(Au niveau de **Matlab**, on présente  $S_t$  par  $y(1)$  et  $I_t$  par  $y(2)$ )

$$F=@(t,y) [(y(2)*(b2-b1)-u1)*y(1); (y(1)*(b1-b2)-u2)*y(2)]$$

$Y_1$  représente la proie, qui vivrait paisiblement par lui-même s'il n'y avait pas de prédateurs. On a choisi les unités de temps et de population de sorte que les coefficients devant les principaux termes linéaires soient un. Donc  $y_1$  prime égal à  $y_1$  représente la croissance exponentielle de la proie en l'absence de tout prédateur.

Les prédateurs ont besoin de la proie, vivent sur la proie. Donc, en l'absence de toute proie, ce signe moins est tout important. Ainsi,  $y_2$  prime égal à moins  $y_2$  représente la décroissance exponentielle. Et les prédateurs meurent exponentiellement en l'absence de toute proie.

**$S_t' = S_t$**

**$I_t' = -I_t$**

$$y(1)' = (y(2)*(b2-b1)-u1)*y(1)$$

$$y(2)' = (y(1)*(b1-b2)-u2)*y(2)$$

Il s'agit des termes non-linéaires. Ce sont comme des termes logistiques, sauf avec l'interaction entre les deux espèces. La croissance de  $Y_1$  est limitée par la présence de  $y_2$ .

Pour compléter cette spécification, nous avons besoin des conditions initiales. Nous avons donc deux valeurs  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , qui sont les valeurs initiales de  $y_1$  et  $y_2$ .

Nous pouvons avoir la moitié d'un lapin ou le dixième d'un orignal. Ce sont, après tout, des modèles qui sont des versions idéalisées de ce qui se passe dans la nature. Les points critiques sont quand les dérivées deviennent 0. Il y a un point critique à l'origine.

Mais l'intéressant est quand ces termes deviennent 0. Donc c'est le point où  $y_1$  et  $y_2$  sont égaux à  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Ce sont des équations non linéaires. Nous ne pouvons pas exprimer la solution en termes de fonctions analytiques simples.

Nous devons les calculer numériquement. Mais nous savons cela à propos de leur comportement. Si les conditions initiales sont proches du point critique, la solution est périodique. La période est proche. Et l'orbite est proche d'une ellipse.

D'un autre côté, si les conditions initiales sont éloignées du point critique, il s'avère que la solution est encore périodique. Mais l'orbite est loin d'une ellipse.

Voici le code sous **Matlab** :

```
alpha = 1;
rho = 1;
b1 = 0.001;
b2 = 0.002;
u1 = 0.3;
u2 = -0.97823;
eta=[400 100]
F=@(t,y)[(y(2)*(b2-b1)-u1)*y(1); (y(1)*(b1-b2)-u2)*y(2)]
ode45(F,[0 100],eta)
```

On a défini l'équation différentielle. Et puis choisit **ODE45** et nous allons intégrer de 0 à 25. Et voici la solution. C'est périodique. Un prédateur et une proie. Et il ressemble à la période, il revient à la condition initiale est 100 et 400.

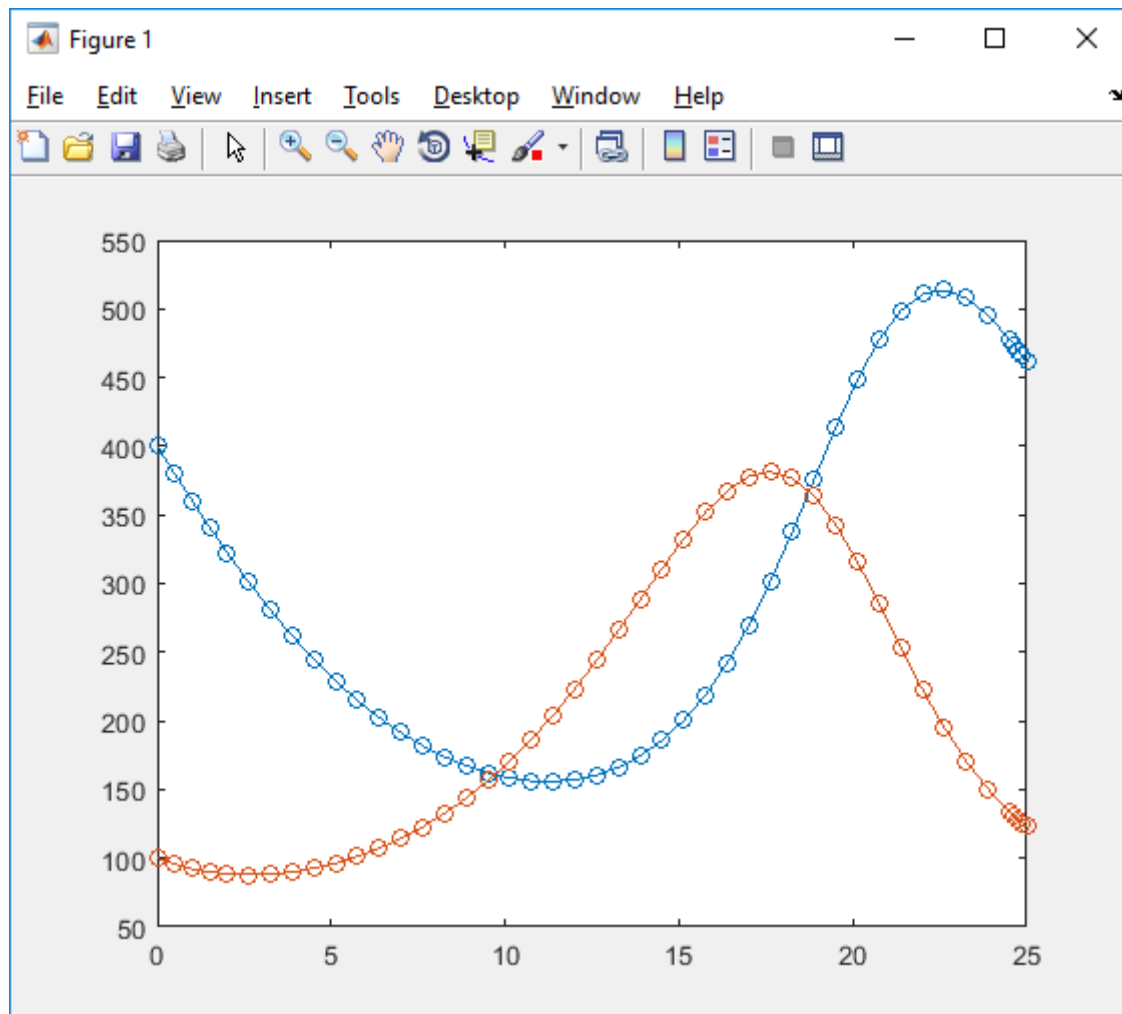


Figure 12 Résolution du SDD avec des pondérations aléatoires

Et ça revient. Et nous avons intégré plus de trois périodes. La période est de 6,5. Et capturons la solution et intégrons trois périodes. Il a généré 337 points. Et nous pouvons voir ici, nous sommes allés sur trois périodes et revenons à nos valeurs initiales de 100 et 300.

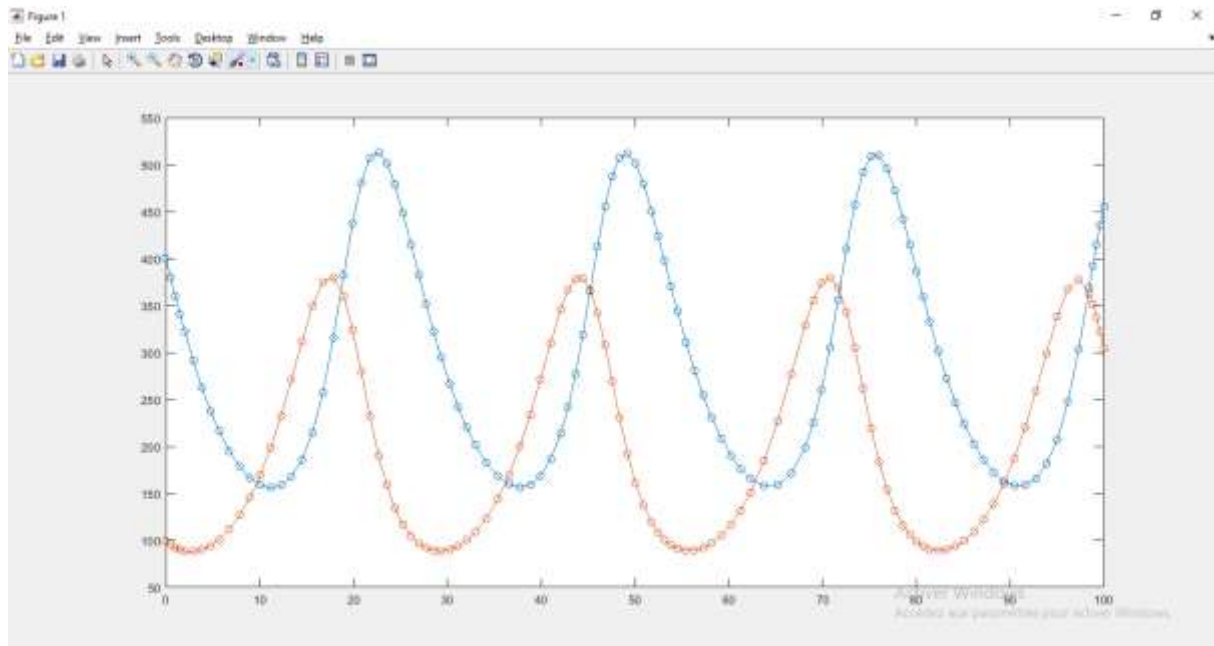


Figure 13 Résolution du SDD avec des pondérations aléatoires 2

Ce graphe confirme que nous sommes en train d'étudier un système dynamique autonome non-linéaire qui permettra d'illustrer le caractère périodique des solutions et leur **déphasage**.

Et maintenant on va utiliser une fonction qui permet de montrer la périodicité de la fonction dans **MATLAB** appelée « **Comet** » :

```

%mu=[300 200]
alpha = 1;
rho = 1;
b1 = 0.001;
b2 = 0.002;
u1 = 0.3;
u2 = -0.97823;
eta=[400 100]
F=@(t,y)[(y(2)*(b2-b1)-u1)*y(1); (y(1)*(b1-b2)-u2)*y(2)]
%F=@(t,y)[(1-y(2)/mu(2))*y(1); -(1-y(1)/mu(1))*y(2)]
%F=@(t,y)[rho*((1-alpha)/alpha)*(y(1)+y(2)) - b1*y(1)*y(2) + b2*y(1)*y(2) - u1*y(1);
%(1-rho)*((1-alpha)/alpha)*(y(1)+y(2)) + b1*y(1)*y(2) - b2*y(1)*y(2) - u2*y(2)]
%ode45(F,[0 100],eta)
period = 6.5357
opt=odeset('RelTol',1.e-6)
[t,y]=ode45(F,[0 3*period],eta,opt)
%plot(t,y,'-')
axis([0 2500 0 1400]), hold on, plot(eta(1), eta(2),'o'), pause(1), comet(y(:,1),y(:,2))
%shg, axis([100 600 50 400]), hold on, plot(eta(1), eta(2),'o'), pause(1), comet(y(:,1),y(:,2))

```

La courbe suivante montre une trajectoire se forme une orbite comme solution de notre système d'équations  $(S(t), I(t))_{t \geq 0}$



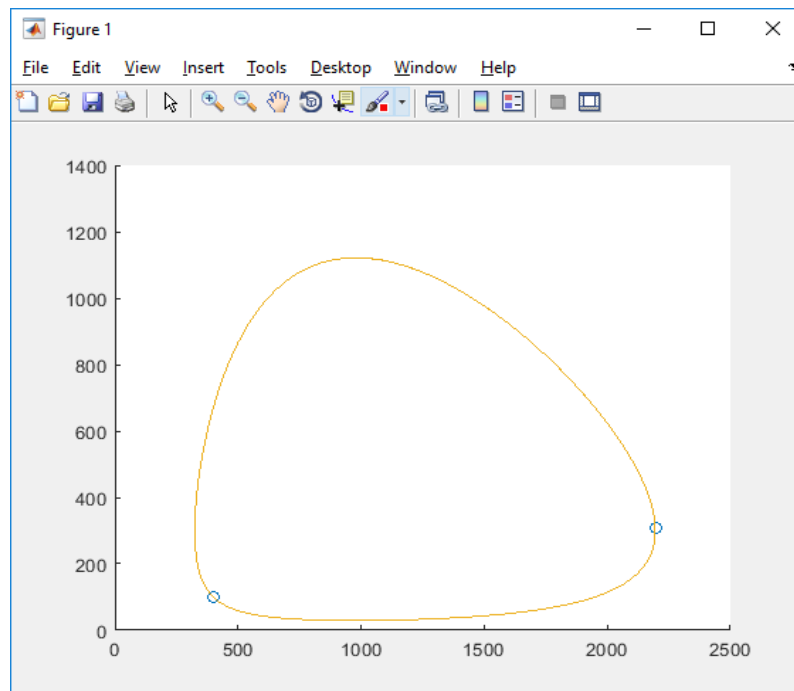
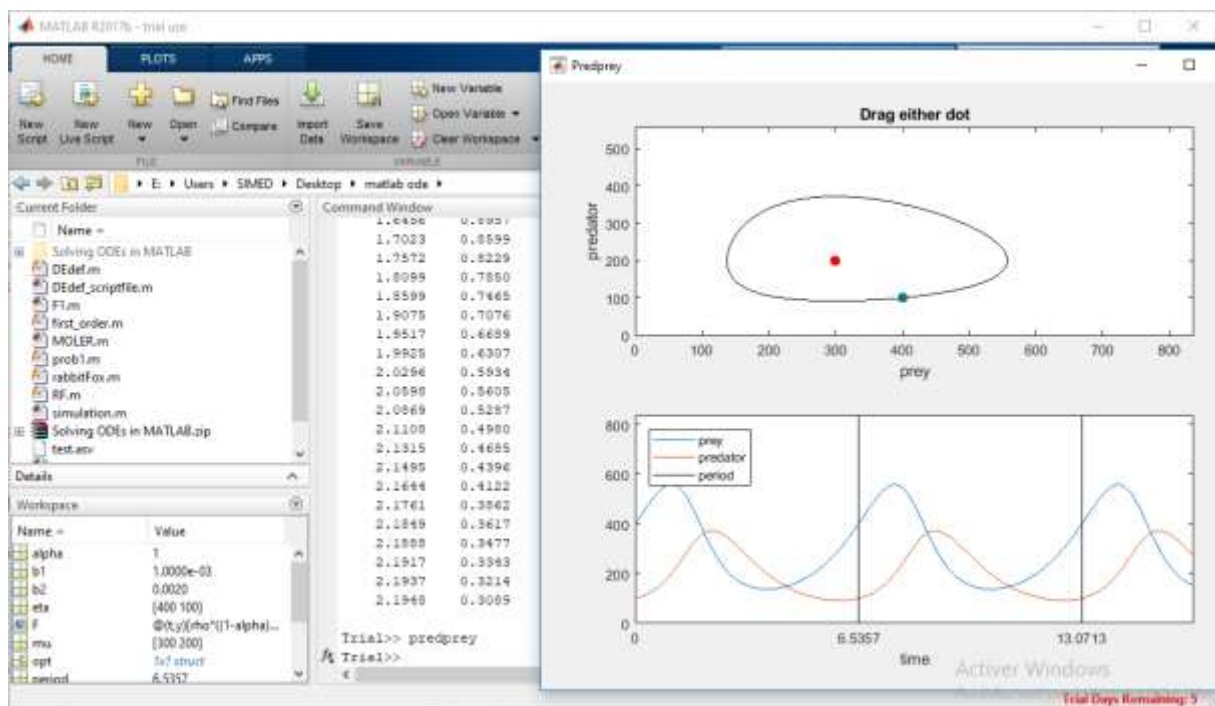


Figure 14 la courbe orbite

Il y a un programme appelé « Predator Prey » qui fait partie de la collection de programmes fournis avec NCM, Numerical Computing avec MATLAB.

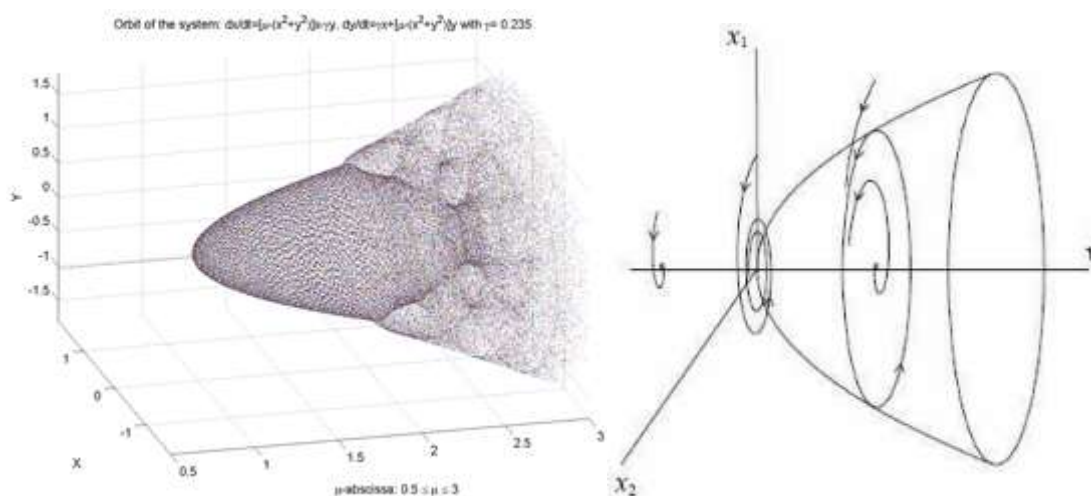


Prédateur proie offre cette interface utilisateur graphique pour démontrer ce que nous avons parlé des équations des proies des prédateurs. L'affichage supérieur montre le tracé du plan de phase, le tracé de la proie par rapport au prédateur. Et l'affichage du bas montre le tracé de la série temporelle, l'intrigue des deux populations.

Et au départ, c'est réglé aux conditions dont nous avons parlé. Voici 400 lapins et 100 renards autour du point critique de 300 lapins et 200 renards. Et voici la période de 6,5 avec laquelle nous avons travaillé.

Et vous pouvez changer les conditions initiales ou le point critique. Si j'apporte les conditions initiales proches du point critique, le tracé du plan de phase devient proche de l'ellipse. Et la période devient proche de  $2\pi$ . C'est donc l'application « **Pred Prey** ».

L'établissement d'un diagramme de bifurcation tel que ci-dessous est une méthode couramment utilisée pour déterminer quand un système passe vers un état chaotique en fonction d'un paramètre du système.



Exemples des diagrammes Henon Bifurcation :

# Troisième partie

## 1- Loi de probabilité

En théorie des probabilités, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Jeux de dés, tirage de boules dans des urnes et jeu de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir les expériences aléatoires. Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou au plus dénombrable. Certaines questions ont cependant fait apparaître des lois à support infini non dénombrable.

### 1-1 Lois de probabilités usuelles

#### VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES

Dans le tableau ci dessous, on suppose  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

Loi et Symbole $X \rightsquigarrow$	Probabilités	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$	Fonction caractéristique $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
Bernouilli $\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ $\mathbb{P}(X = 1) = p$	$p$	$p(1 - p)$	$1 - p + pe^{it}$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \mathbb{1}_{\{0, \dots, n\}}(k)$	$np$	$np(1 - p)$	$(1 - p + pe^{it})^n$
Binomiale négative $\mathcal{BN}(n, p)$	$\mathbb{P}(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1 - p)^{k-n} \mathbb{1}_{\{n, \dots\}}(k)$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$	$\left( \frac{pe^{it}}{(1-(1-p)e^{it})} \right)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(k)$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1} \mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(k)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, m, n)$ $(m, n) \in \{1, \dots, N\}^2$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} \mathbb{1}_{\{0, \dots, \min(m, n)\}}(k)$	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	

## VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES CONTINUES

La fonction Gamma est définie pour  $a > 0$  par  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$ .

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\forall a \in ]1, +\infty[, \quad \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1).$$

Dans le tableau ci dessous,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

Loi et Symbole $X \rightsquigarrow$	Densité	Espérance	$Var(X)$	Fonction caractéristique $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
Loi Uniforme $\mathcal{U}[a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$	$m$	$\sigma^2$	$e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Loi Exponentielle $\mathcal{Exp}(\lambda) = \mathcal{G}(1, \lambda)$	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$
Loi Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$	$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$(1 - \frac{it}{\lambda})^{-\alpha}$
Loi du Chi-deux $\chi_n^2 = G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$	$f_X(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$n$	$2n$	$(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$
Première loi de Laplace	$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{- x } \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$	$0$	$2$	$\frac{1}{1+t^2}$

## 2- Résolution d'un SDD graphiquement en affectant une loi de probabilité à chaque pondération

Retrouver un graphe en affectant cette fois-ci une loi de probabilité à chaque pondération, par exemple  $\alpha$  suit la loi de Bernoulli de paramètre (0,7)...etc.

## 2.1- les lois continues

*2.1-1 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant une loi exponentielle.*

on utilise la fonction prédéfinie EXPRND

### Syntaxe

```
R = exprnd(mu)
R = exprnd(mu,m,n,...)
R = exprnd(mu,[m,n,...])
```

### Scripte sous Matlab

```
function sol0 = Q1

history = [3; 3];
tspan = [0, 20];
opts = ddeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-5);

alpha= exprnd(7)
sigma= exprnd(7)
beta1= exprnd(7)
beta2= exprnd(7)
mu1= .2000
mu2= .3000

sol0 =
dde23(@eq, [], history, tspan, opts, alpha, sigma, beta1, beta2, mu1, mu2);

figure
plot(sol0.y(1,:), sol0.y(2,:))
title('Résolution graphique du SDD ')
xlabel('S(t)')
ylabel('I(t)')
legend(' S', 'I')

end
%-----
--

function v = eq(t,y,Z,alpha,sigma,beta1,beta2,mu1,mu2)

v = zeros(2,1);
beta=beta1-beta2;
alph=(1-alpha)/alpha;

v(1)=(sigma*alph*(y(1)+y(2)))-(y(1)*y(2)*beta)-(mu1*y(1));
v(2)= ((1-sigma)*alph*(y(1)+y(2)))+(y(1)*y(2)*beta)-(mu2*y(2));

end
```

Le graphe généré sous **Matlab** est le suivant :

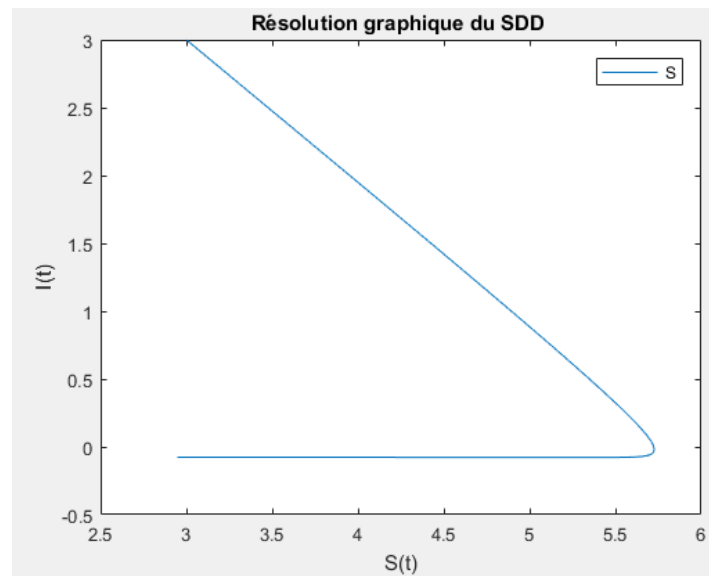


Figure 15 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant une loi exponentielle.

2-1-2 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant une loi normal.

on utilise la fonction prédéfinie NORMPDF

### Syntaxe

$Y = \text{normpdf}(X, \mu, \sigma)$

$Y = \text{normpdf}(X)$

$Y = \text{normpdf}(X, \mu)$

Les valeurs des pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$

$\alpha = \text{normpdf}(0.1)$

$\sigma = \text{normpdf}(0.7)$

$\beta_1 = \text{normpdf}(0.4)$

$\beta_2 = \text{normpdf}(0.3)$

$\mu_1 = .2000$

$\mu_2 = .3000$

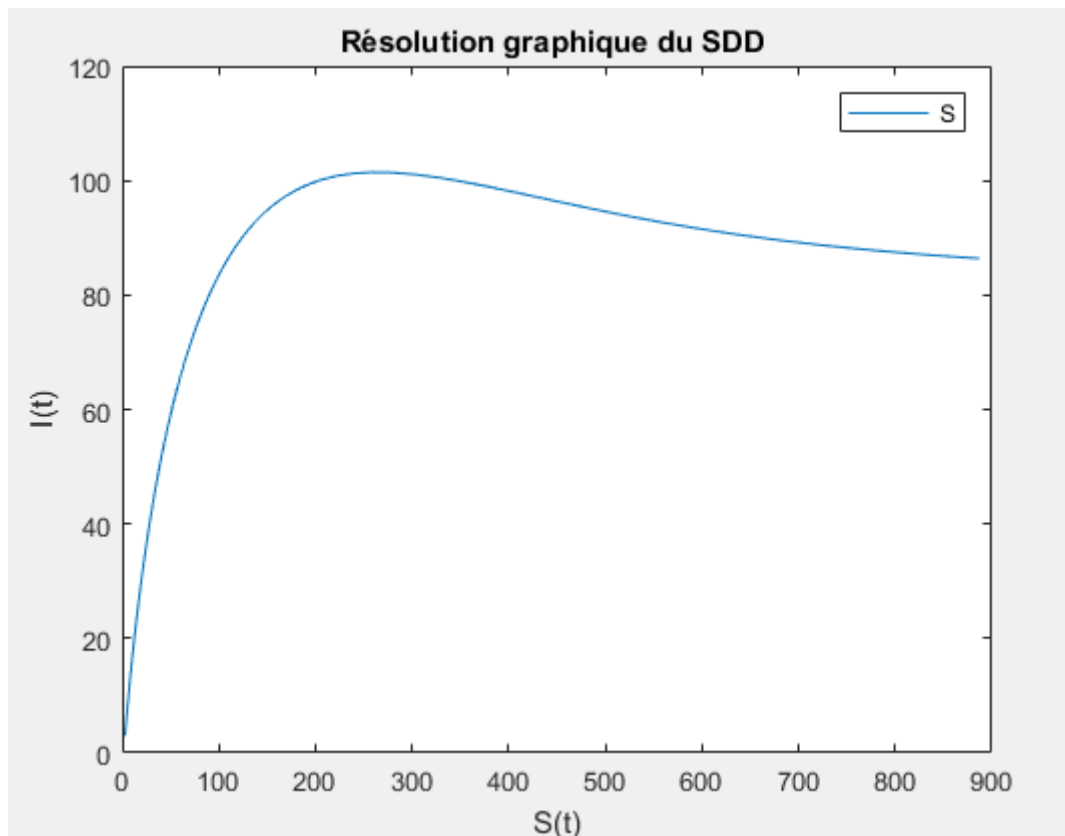


Figure 16 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant une loi normal.

### 2.1.3- les pondérations $\alpha$ , $\sigma$ , $\beta_1$ et $\beta_2$ suivant la loi uniforme

on utilise la fonction prédéfinie UNIFRND

#### **Syntaxe**

```
R = unifrnd(A,B)
R = unifrnd(A,B,m,n,...)
R = unifrnd(A,B,[m,n,...])
```

Les valeurs des pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$

```
alpha= unifrnd(0.5,0.7)
sigma= unifrnd(0.1,0.3)
beta1= unifrnd(0.4,0.6)
beta2= unifrnd(0.1,0.3)
mu1= .2000
mu2= .3000
```

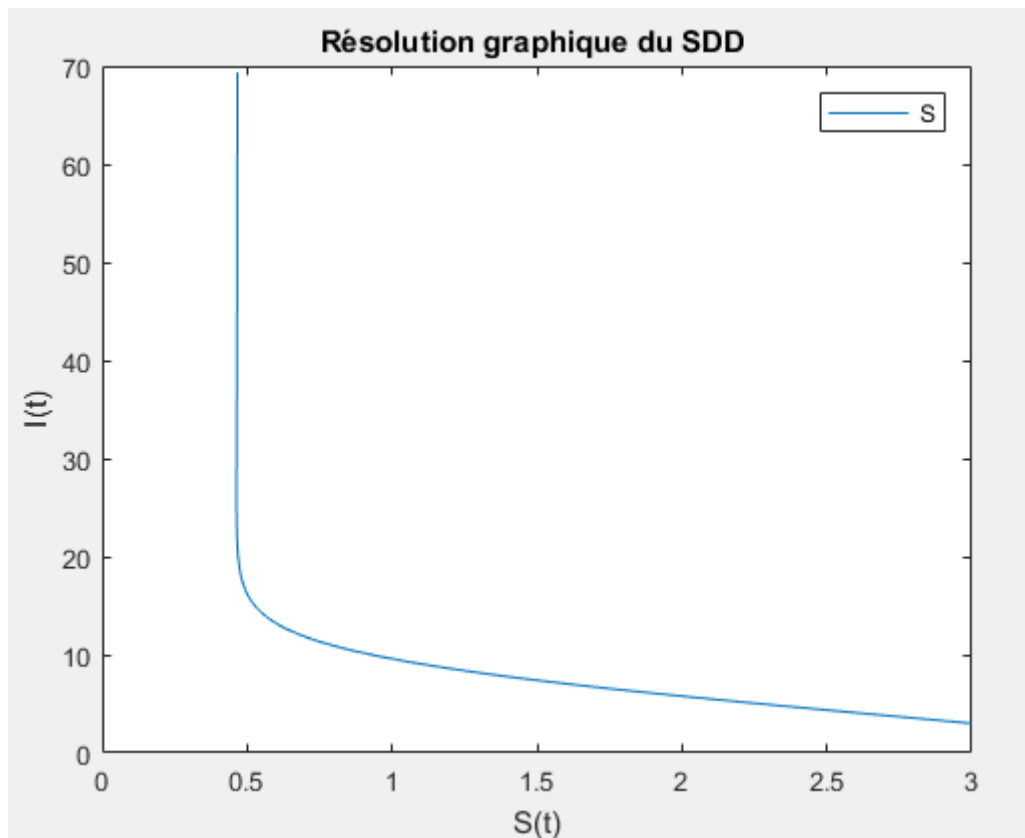


Figure 17 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant la loi uniforme

## 2.2- les lois discrètes

### 2-2-1 les pondérations $\alpha$ , $\sigma$ , $\beta_1$ et $\beta_2$ suivant une loi binomiale.

on utilise la fonction prédéfinie `BINORND`

#### Syntaxe

```
R = binornd(N,P)
R = binornd(N,P,m,n,...)
R = binornd(N,P,[m,n,...])
```

Les valeurs des pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$

```
alpha= binornd(4,0.5)
sigma= binornd(6,0.2)
beta1= binornd(2,0.1)
beta2= binornd(1,0.7)
mu1= .2000
mu2= .3000
```



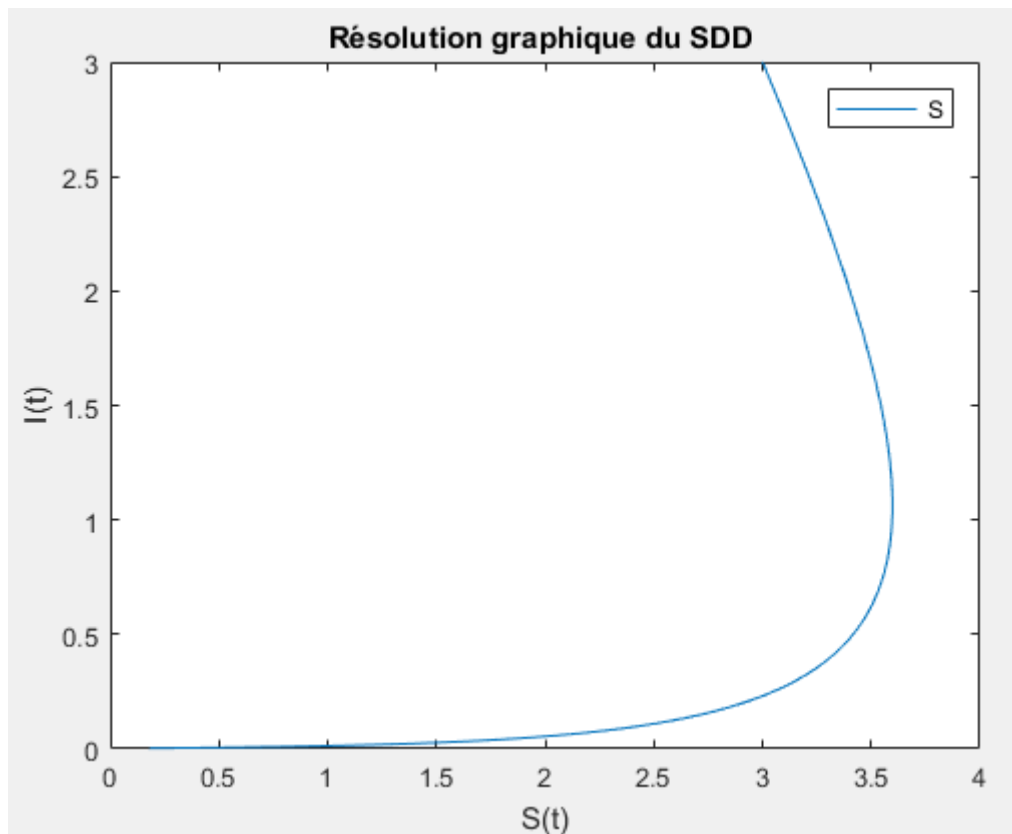


Figure 18 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant une loi binomiale.

### 2-2-2 les pondérations $\alpha$ , $\sigma$ , $\beta_1$ et $\beta_2$ suivant une loi de poisson

on utilise la fonction prédéfinie POISSPDF

#### Syntaxe

$Y = \text{poisspdf}(X, \lambda)$

Les valeurs des pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$

```
w=0;
alpha= poisspdf(w,7)
sigma= poisspdf(w,4)
beta1= poisspdf(w,3)
beta2= poisspdf(w,1)
mu1= .2000
mu2= .3000
```

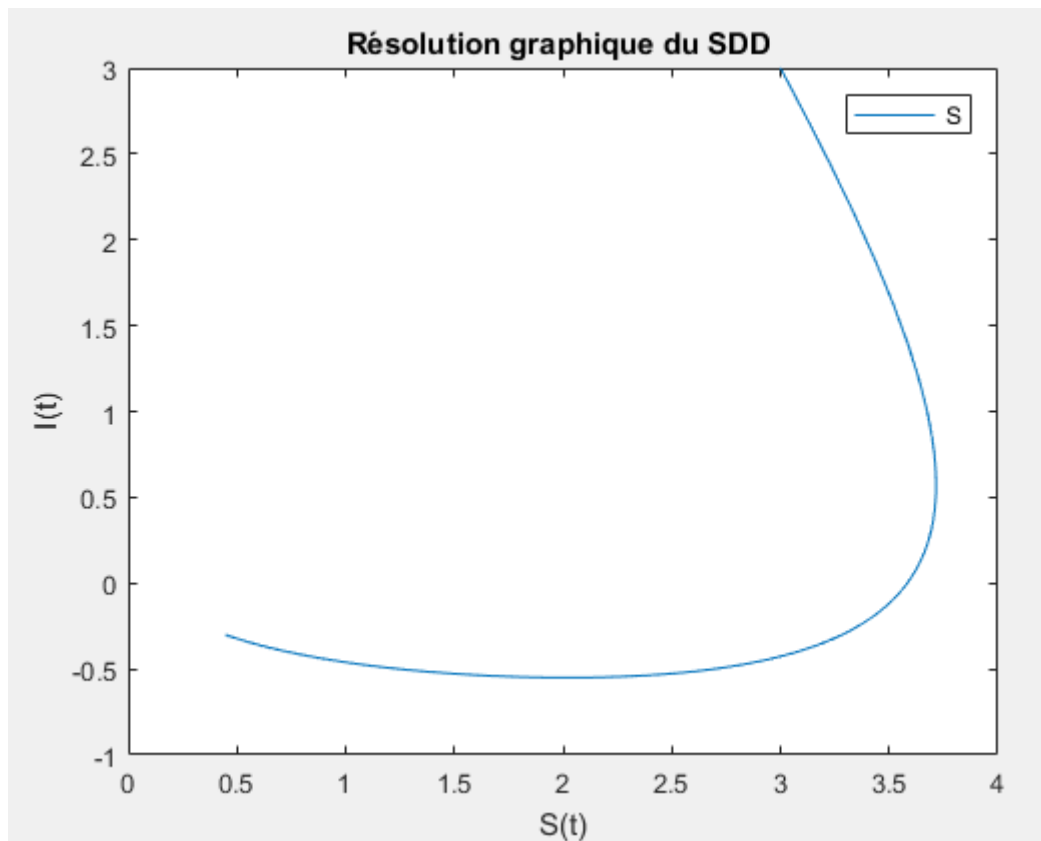


Figure 19 les pondérations  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivant une loi de poisson

## **Conclusion :**

L'étude des dynamiques de systèmes non linéaires simples tels que ce qui vient d'être évoqué conduit l'observateur ou le spécialiste à deux séries de conclusions importantes. En premier lieu, il apparaît que, pour des valeurs appropriées des paramètres régissant leurs dynamiques, ces systèmes peuvent présenter des trajectoires bornées qui ne se stabilisent ni sur un point fixe, ni sur une orbite périodique. Dans ces conditions, bien que ces dynamiques relèvent d'un déterminisme rigoureux.

D'autre part dans le cas de système dynamique non linéaire la notion de stabilité est plus complexe et l'existence d'attracteurs multiples modifie les trajectoires dans le plan de phase. Cependant, dans le cas d'un système d'ordre 2, les non linéarités génèrent plusieurs attracteurs autour desquels nous retrouvons les trajectoires associées aux systèmes linéaires. Enfin, l'augmentation du degré de liberté (par variation d'un paramètre dit de contrôle) a fait apparaître des changements brutaux de trajectoires (bifurcations) à l'origine desquels on conçoit l'idée de trajectoire chaotique.

La théorie du chaos a permis des avancées importantes dans différentes disciplines, elle soulève un débat majeur, celui du déterminisme. Dans quelle mesure la science permet-elle de prédire l'avenir ? Pour certains, les résultats obtenus jusqu'ici dans le cadre de la théorie du chaos prouvent l'importance des facteurs aléatoires dus à l'infinie sensibilité des phénomènes aux conditions initiales. Pour ces personnes, les équations déterministes n'ont qu'une portée limitée et l'avenir restera imprévisible. Pour d'autres, au contraire, les résultats obtenus montrent que l'on peut trouver un ordre et des lois dans ce qui peut sembler " chaotique ".

## **Références :**

Meirong Zhang , From ODE to DDE , repéré le 12 décembre 2017 à

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11464-009-0034-4>

système proies-prédateurs et évolutions périodiques, Universiapolis.fr repéré le 5 janvier

2018 à <https://www.universalis.fr/media/DE041576/>

ABDUL RAHUMAN Ahmed, Analyse des Systèmes Non-linéaires à Dynamiques Complexes

repéré le 15 décembre 2017 à [http://dspace.univ-](http://dspace.univ-tlemcen.dz/bitstream/112/3615/1/These_finale%20Ahmed_Chaos%20mageln.pdf)

[tlemcen.dz/bitstream/112/3615/1/These\\_finale%20Ahmed\\_Chaos%20mageln.pdf](http://dspace.univ-tlemcen.dz/bitstream/112/3615/1/These_finale%20Ahmed_Chaos%20mageln.pdf)

Système dynamique. Dans Wikipédia, l'encyclopédie libre. Repéré le 30 décembre 2017 à

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Experience\\_de\\_Milgram](http://fr.wikipedia.org/wiki/Experience_de_Milgram)[https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me\\_dynamique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_dynamique)

Faber Sperber, Robert Paris (2010), Qu'est-ce qu'un système dynamique? Repéré le 29

décembre 2017 à <http://www.matierevolution.fr/spip.php?article599>

La fonction logistique, dans Wikipédia, l'encyclopédie libre. Repéré le 30 décembre 2017 à

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me\\_dynamique#La\\_fonction\\_logistique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_dynamique#La_fonction_logistique)

Théorie des bifurcations, dans Wikipédia, l'encyclopédie libre. Repéré le 28 décembre 2017 à

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie\\_des\\_bifurcations](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_bifurcations)

Les systèmes dynamiques non-linéaires (SDNL), révolution complexe, repéré le 16 décembre

2017 à <http://www.revolutionducomplexe.fr/index.php/la-revolution-du-complexe/les-systemes-dynamiques-non-lineaires-sdnl/29-les-bifurcations-exemple-de-la-mayonnaise>

Documentation Matlab , <https://fr.mathworks.com/help>