
PROYECTO GLOBAL INTEGRADOR:

**CONTROL DE ACCIONAMIENTO
DE CA CON MOTOR SÍNCRONO
DE IMANES PERMANENTES**

Rodrigo Pérez y Matías Molina

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN:	4
PRIMERA PARTE: Modelado, Análisis y Simulación Dinámica del SISTEMA FÍSICO a “Lazo Abierto” (Sin Controlador Externo de Movimiento).	4
1) Modelo matemático equivalente del Subsistema Mecánico Completo.	4
• Carga mecánica:	4
• Tren de transmisión:	5
• Máquina eléctrica:	5
• Subsistema mecánico completo:	6
2) Modelo dinámico del Sistema Físico Completo.	7
• Subsistema electromagnético acoplado:	7
.....	9
• Subsistema térmico acoplado:	10
a) Modelo Global NL.	12
I) Ecuaciones vectoriales NL de estado y de salida (con estado inicial genérico)	12
II) Diagrama de bloques de estado del Modelo Global NL.	14
b) Linealización Jacobiana. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV).	15
I) Espacio de operación global NL (cuasi-estacionario).	17
II) Modelo dinámico LPV (pequeñas variaciones locales).	18
c) Linealización por Realimentación NL.	19
I) Ecuaciones vectoriales/matriciales LTI de estado y de salida.....	20
II) Diagrama de bloques de estado.....	21
III) Determinación de la Restricción o Ley de Control mínima.	21
IV) Implementación en el Modelo Global NL Completo.	22
V) Modelo de la dinámica residual equivalente para \dot{idsr} (eje d) al aplicar Ley de control mínima.	23
VI) Restricción o Ley de Control complementaria mínima en el eje q.	23
d) Comparación del modelo dinámico global LPV vs el modelo dinámico LTI equivalente aumentado.	24
e) Funciones de Transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado.	25
3) Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado.	26
a) Determinación de polos y ceros, y cálculo de frecuencias naturales y amortiguamiento:	26
b) Evaluación de estabilidad parcial y completa, y dinámica de los ceros:	27
4) Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado.	28
5) Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado (ítem 2.c.VI) desde entrada manipulada $vqsr(t)$, sin considerar la perturbación de la carga mecánica.	29
6) Simulación dinámica en DT, comparando el modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL vs LTI equivalente aumentado, comparando $\dot{idsr}(0) = \pm 0.5 A$ vs $\dot{idsr}(0) = 0 A$:	30
a) Respuesta del estado interno.	31
b) Determinación de velocidad y corriente final de establecimiento, y especificaciones de la respuesta del sistema. ..	36
c) Comparación de comportamiento de \dot{idsr} para $\dot{idsr} = \pm 0.5 A$ vs $\dot{idsr} = 0 A$	37
d) Agregado de una consigna de tensión $Vdsr * t$	39
SEGUNDA PARTE: Diseño, Análisis y Simulación con CONTROLADOR de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque Equivalente (Control Vectorial)	44

1) Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque).	44
a) Desacoplamiento de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada.	44
b) Diseño de lazos de control de corrientes $iqd0sr(t)$	45
c) Incorporación adecuada de consigna de torque.....	47
2) Controlador externo de movimientos: posición/velocidad.....	47
3) Incorporación y diseño de Observador de Estado de orden reducido.	49
4) Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL.....	51
a) Seguimiento de consignas de movimiento.....	51
b) Rechazo a Perturbaciones.	54
5) Verificación de desempeño y/o mejoras.	56
a) Verificación de Especificaciones de Operación.....	56
b) Verificación del Observador.	58
c) Comportamiento térmico del motor.....	59
d) Degrado de desempeño del sistema al colocar sensores con ancho de banda finito.....	60
e) Degrado de desempeño del sistema al colocar actuadores con ancho de banda finito.	64
6) Versión final:	67
Conclusión:	67
Referencias:	67

RESUMEN— En el presente proyecto se realiza el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un sistema de control automático de posición y movimiento para el accionamiento de una articulación de un robot SCARA, a través de un motor síncrono de corriente alterna trifásico con una caja reductora como actuador final. Se implementa un análisis inicial a lazo abierto para evaluar el modelo propuesto. Luego se aplica un sistema de control adecuado, y se estudian las respuestas no ideales de los elementos del sistema aplicando modelos de las degradaciones a encontrar en una situación real. Se da solución a dichos errores, empleando consignas adecuadas que sean realizables por el sistema, así como implementando algoritmos adecuados para mejorar su desempeño. Se obtuvo un sistema de control robusto y con un buen seguimiento de las consignas de posición provistas por el usuario, pero se remarca la importancia de la correcta selección de los elementos a emplear, así como los algoritmos a desarrollar para una eventual implementación real.

INTRODUCCIÓN:

El proyecto tiene la finalidad didáctica, y consiste en el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño, de un sistema de control automático de posición y movimientos para el accionamiento electromecánico, en 4 cuadrantes, de solo la primer articulación “hombro” de un robot SCARA. Y, en lugar de estudiar la dinámica no lineal (NL) acoplada a la carga mecánica del robot, en el presente proyecto se optó por aproximar su comportamiento no lineal, con un modelo linealizado que considera parámetros equivalentes variables. El accionamiento se encuentra compuesto por: un motor eléctrico de corriente alterna (CA) trifásico síncrono con excitación por imanes permanentes (PMSM); alimentado con un inversor trifásico desde una fuente ideal de corriente continua (CC); un reductor de velocidad de engranajes planetarios de salida hacia la carga mecánica; y realimentación con 1 sensor de posición (encoder) en el eje del motor, más 3 sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor al estator, y 1 sensor de temperatura del bobinado de estator.

El resultado esperado es lograr manipular correctamente la frecuencia y tensión trifásica de línea a través del inversor, para así mediante el motor, transformar energía eléctrica a energía mecánica, de forma tal que se obtenga a cada instante de tiempo la posición angular deseada de la primera articulación del robot SCARA. Y lograrlo para cualquiera de los posibles valores de torque externo de carga mecánica y temperatura ambiente en la aplicación; y de forma segura, midiendo la posición del motor eléctrico, las corrientes de fase estatóricas, y la temperatura del estator.

El desarrollo del proyecto se divide en dos grandes partes. La primer parte consiste en el modelado, análisis y simulación dinámica a lazo abierto. Aquí, no se utiliza el controlador de movimiento, pero sí se comienza a analizar cómo plantear las leyes básicas de control no lineal. Y la segunda parte consiste en el diseño, análisis y simulación del controlador de movimiento de lazo cerrado, en donde se profundiza en las leyes de control básicas para plantear el modulador de torque equivalente completo en cascada. Además, aquí se realiza una simulación con perfiles de movimiento a seguir, para luego en función de lo observado poder realizar mejoras si fuera necesario. Y finalmente, se realiza un análisis de cuál es la degradación que presenta el sistema cuando a los sensores y al inversor se les limita el ancho de banda, y también cuando el inversor presenta saturación.

PRIMERA PARTE: Modelado, Análisis y Simulación Dinámica del SISTEMA FÍSICO a “Lazo Abierto” (Sin Controlador Externo de Movimiento).

1) Modelo matemático equivalente del Subsistema Mecánico Completo.

•Carga mecánica:

La carga mecánica a controlar corresponde solo a la primer articulación del robot SCARA. Hay que tener en cuenta que la posición, velocidad y aceleración de la segunda articulación “codo” del robot influye en la dinámica de la primera. Una forma de encarar esta complejidad podría ser, estudiando la dinámica no lineal acoplada al robot; pero en lugar de ello, en el presente proyecto se opta por aproximar el comportamiento no lineal del robot, con un modelo linealizado. Es decir, considerando que la carga posee un comportamiento lineal, mediante el uso de los siguientes parámetros equivalentes variables:

- Momento de inercia equivalente (variable): ya que al cambiar el ángulo instantáneo de la articulación codo, el momento de inercia, referido al eje de rotación vertical de la base inercial del robot, que experimenta su articulación hombro varía.
- Amortiguamiento viscoso equivalente (variable): el cual es una fricción ficticia, pero con ella se logra involucrar de forma equivalente los efectos de las fuerzas centrífugas y fuerzas de Coriolis que aparecen cuando se acelera la articulación codo.

Al seguir dicha metodología, entonces se tiene una incertidumbre en cuál es el valor de dichos parámetros, en función de cuál es el estado dinámico de la segunda articulación. Lo que se representa mediante un valor nominal \pm una variación máxima, en ambos parámetros de momento de inercia y amortiguamiento.

Luego, la tercera articulación es una articulación de traslación vertical, por lo que en teoría no influye en la dinámica de la primer articulación. Por otra parte, la aceleración de la gravedad tampoco influye en el robot, ya que esta es compensada por las reacciones de vínculo de su propia estructura. El **modelo simplificado equivalente (con parámetros variables)**, referido al eje de salida del tren de transmisión: coordenada articular de eje de la articulación hombro $q_l(t) \equiv \theta_l(t)$, está dado por:

$$J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt}(t) = \omega_l(t) \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (2)$$

Donde:

J_l : Momento de inercia equivalente del robot (variable).

b_l : Amortiguamiento viscoso equivalente del robot (variable).

$\theta_l(t)$: Ángulo del eje de salida de la caja reductora.

$\omega_l(t)$: velocidad angular del eje de salida de la caja reductora.

$T_q(t)$: torque de salida de la caja reductora.

$T_l(t)$: torque resistente proporcionado por la carga externa, (o torque de carga).

Parámetros equivalentes variables (valor nominal \pm variación máx.):

$$J_l \approx (0,2520 \pm 0,1260) \text{ kg.m}^2$$

$$b_l \approx (0 \pm 0,0630) \frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}}$$

Especificación de operación (carga o perturbación, valor límite requerido):

$$T_l(t) \approx (0 \pm 6,28) \text{ N.m}$$

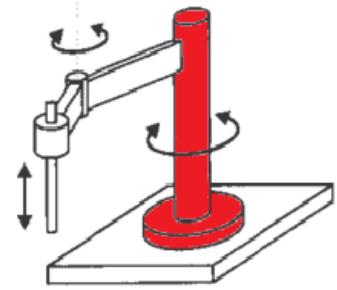


Figura 1. Imagen representativa del Robot SCARA.

•Tren de transmisión:

El tren de transmisión corresponde a una caja reductora de engranajes planetarios, y se asume que esta presenta un acoplamiento rígido, es decir, sin elasticidad torsional, ni sin juego “backlash” entre los engranajes. El **modelo equivalente (rígido)** por tanto, se expresa como:

$$\omega_l(t) = \frac{\omega_m(t)}{r} \quad (3)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (4)$$

Donde:

r : Relación de reducción total.

Parámetro (constante).

$$r = 314,3008 : 1$$



Figura 2. Imagen representativa de la caja reductora de engranajes planetarios.

Especificaciones de operación (valores límite, no sobrepasar):

$$n_{l_{nom}} = 21 \text{ rpm } (\omega_{l_{nom}} = 2,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}})$$

$$T_{l_{nom}} = 7,26 \text{ N.m (régimen continuo o rms)}$$

$$T_{l_{máx}} = 29,42 \text{ N.m (corta duración, aceleración)}$$

•Máquina eléctrica:

La máquina eléctrica corresponde a un motor de CA síncrono con excitación por imanes permanentes (PMSM), y estator conectado en estrella (simétrico y equilibrado) accesible en bornes de fases abc, con centro de estrella (punto “neutro”) flotante (no accesible). El **modelo equivalente** del rotor referido al estator, el cual es un sistema inercial de referencia, está dado por:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (5)$$

$$\dot{\theta}_m(t) \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) \cdot d\xi + \theta_m(0) \quad (6)$$

Donde:

J_m : Momento de inercia del rotor junto con la caja reductora (valor constante).

b_m : Amortiguamiento viscoso del rotor junto con la caja reductora (valor constante).

$\theta_m(t)$: Ángulo geométrico del motor.

$\omega_m(t)$: Velocidad angular geométrica del motor. Que, por tratarse una máquina síncrona, es la velocidad de sincronismo, es decir, que es la misma velocidad a la que gira el campo magnético rotante.

$T_m(t)$: Torque electromagnético.

$T_d(t)$: Torque resistente proporcionado por la caja reductora.



Figura 3. Imagen representativa del motor eléctrico

Parámetros mecánicos del motor y caja sumados (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1%):

$$J_m \approx 3,1 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$$

$$b_m \approx 1,5 \times 10^{-5} \frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}}$$

Especificación mecánica de operación del motor, (valor límite):

$$n_{m\ nom} = 6600 \text{ rpm} \quad (\omega_{m\ nom} = 691,15 \frac{\text{rad}}{\text{s}})$$

•Subsistema mecánico completo:

A partir de los tres modelos mecánicos equivalentes obtenidos, se puede realizar una simplificación o compactación de los mismos para obtener un único **modelo matemático equivalente** del subsistema mecánico completo, el cual posee de 1 grado de libertad gdl.

Subsistema mecánico completo = Subsistema mecánico del motor (Ec. 5-6) + Transmisión rígida (Ec. 3-4) + Carga (Ec. 1-2).

Despejando $T_q(t)$ de (1):

$$T_q(t) = J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t) \quad (7)$$

Remplazando $T_q(t)$ por (4):

$$\begin{aligned} r \cdot T_d(t) &= J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t) \\ T_d(t) &= \frac{J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t)}{r} \end{aligned} \quad (8)$$

Despejando $T_d(t)$ de (5):

$$T_d(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) \quad (9)$$

Igualando $T_d(t)$ de (8) y (9):

$$\begin{aligned} T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) &= \frac{J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t)}{r} \\ J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) &= T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - \frac{J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t)}{r} \end{aligned} \quad (10)$$

Remplazando $\omega_l(t)$ por (3), y recordando que $\omega_m(t) = \dot{\theta}_m(t)$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) &= T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - \frac{J_l \cdot \frac{\dot{\omega}_m(t)}{r} + b_l \cdot \frac{\omega_m(t)}{r} + T_l(t)}{r} \\ J_m \cdot \ddot{\theta}_m(t) &= T_m(t) - b_m \cdot \dot{\theta}_m(t) - \frac{J_l}{r^2} \cdot \ddot{\theta}_m(t) - \frac{b_l}{r^2} \cdot \dot{\theta}_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \\ \left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \cdot \ddot{\theta}_m(t) &= T_m(t) - \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \cdot \dot{\theta}_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \end{aligned} \quad (11)$$

En donde las expresiones obtenidas entre paréntesis son las expresiones de los parámetros equivalentes del momento de inercia J_{eq} , y del amortiguamiento viscoso b_{eq} respectivamente, del subsistema mecánico completo; (los cuales son variables, debido a los parámetros variables de la carga mecánica del robot).

Parámetros equivalentes (variables):

$$J_{eq} = \left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \quad (12)$$

$$b_{eq} = \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \quad (13)$$

Y, además, también se podría trabajar matemáticamente con un torque de carga equivalente $T_{eq}(t)$ dado por:

$$T_{l_{eq}}(t) = \frac{T_l(t)}{r} \quad (14)$$

Por lo que, se puede escribir:

$$J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_m(t) = T_m(t) - b_{eq} \cdot \dot{\theta}_m(t) - T_{l_{eq}}(t) \quad (15)$$

Finalmente, se despeja la aceleración angular de (15); y junto con (6), se obtienen las ecuaciones de estado que componen al modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{T_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_{l_{eq}}(t)}{r \cdot J_{eq}} \end{cases} \quad (16)$$

En forma matricial:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J_{eq}} \\ 0 & \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{r \cdot J_{eq}} & -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] \cdot x(t) \end{cases} \quad (17)$$

Donde:

$x(t)$: Vector de estados.

$u(t)$: Vector de entradas.

$y(t)$: Vector de salidas.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \theta_l(t)$$

Esta compactación de los subsistemas mecánicos se puede realizar debido a que se considera al tren de transmisión como idealmente rígido. Ya que, de lo contrario debido la elasticidad torsional y al juego entre los engranes (backlash), dicho tren de transmisión dividiría al subsistema mecánico en dos partes, cada una con un gdl rotacional distinto; impidiendo su compactación o simplificación en una única ecuación matemática como (15). En tal caso se tendrían dos ecuaciones en el modelo, una para cada gdl.

Se muestra el **diagrama en bloques** que representa al modelo del subsistema mecánico completo (16):

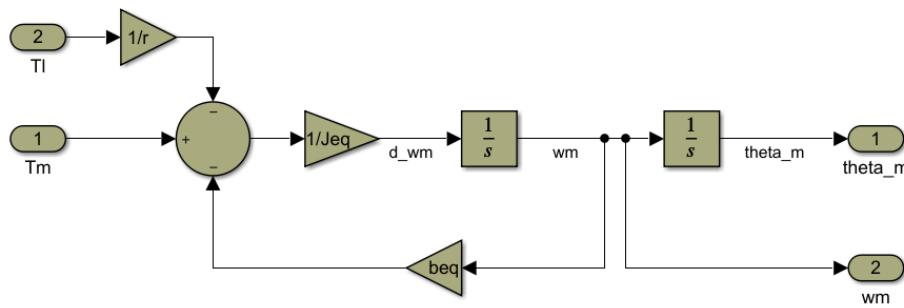


Figura 4. Diagrama de bloques del subsistema mecánico completo.

2) Modelo dinámico del Sistema Físico Completo.

Para obtener el modelo dinámico del sistema físico completo, se incorporan los subsistemas electromagnético y térmico acoplados de la máquina eléctrica al subsistema mecánico completo obtenido.

•Subsistema electromagnético acoplado:

A continuación, se obtiene el modelo idealizado equivalente, del subsistema electromagnético del motor eléctrico. Este modelo, se encuentra dado en coordenadas eléctricas qd0 fijas a la posición eléctrica del rotor, las cuales se obtienen a partir de las coordenadas abc mediante la aplicación de la transformación de Park.

A diferencia de las coordenadas eléctricas abc, referenciadas a los bornes a, b y c de cada una de las tres fases fijas al estator, las coordenadas eléctricas qd0, constituyen un sistema de referencia que se mueve junto con el campo rodante, es decir que se mueve a velocidad angular eléctrica $\omega_r(t)$. Lo cual resulta de mayor conveniencia a la hora de realizar el modelado electromagnético de la máquina síncrona de CA, ya que facilita las operaciones matemáticas, y además nos permite asemejar el comportamiento de la máquina síncrona de CA a la máquina de CC. Dicho sistema de coordenadas qd0, se define con la incorporación de tres ejes:

- Un eje q (del inglés: quadrature) en cuadratura con el campo rodante del estator, o sea desfasado 90° eléctricos.
- Un eje d (del inglés: direct) directo con del campo rodante del estator, es decir en fase con dicho campo.
- Un eje 0 (número 0) ortonormal a los ejes q y d, coincidente con el eje geométrico de rotación del motor.

En donde, debido a la consideración de sistema trifásico equilibrado en el estator, se tiene que el valor del eje 0 es siempre cero; (siempre que el sistema no deje de estar equilibrado, claro). Y las transformaciones de Park, directa e inversa, son las herramientas matemáticas que permiten pasar desde el sistema de coordenadas abc al sistema de coordenadas qd0 y viceversa, respectivamente.

El uso del sistema de coordenadas qd0, posee dos ventajas principales que simplifican el modelado:

- 1) Se pasa de tener tres ejes (a, b y c), a solo dos ejes (q y d). Ya que, al ser el eje 0 coincidente con el eje de rotación del rotor, este no depende de la variable $\theta(t)$.

2) Se pasa de tener valores de inductancias L_a , L_b y L_c , y de flujos dependientes de $\theta(t)$ y por tanto del tiempo, a tener valores de inductancias L_d y L_q y de flujos independientes de $\theta(t)$, y por tanto constantes en el tiempo. Ya que, los ejes q y d giran de forma solidaria al rotor.

Las **coordenadas eléctricas** de entrehierro qd0 fijas a rotor son:

$$\dot{\theta}_r(t) = \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\xi) \cdot d\xi + \theta_r(0) \quad (18)$$

$$\theta_r(t) = P_p \cdot \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (19)$$

Donde:

$\theta_r(t)$: Posición angular eléctrica. Es el ángulo que existe entre el eje a y el eje q.

$\omega_r(t)$: Velocidad angular eléctrica. Es la frecuencia de las ondas senoidales de tensiones eléctricas aplicada al estator.

P_p : Pares de polos magnéticos del estator.

El **torque electromagnético** se expresa como:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda'_m + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (20)$$

Donde:

$i_{qs}^r(t)$: Corriente de fase de eje en cuadratura.

$i_{ds}^r(t)$: Corriente de fase de eje directo.

L_q : Inductancia de estator (eje en cuadratura).

L_d : Inductancia de estator (eje directo).

λ'_m : Flujo magnético equivalente de imanes concatenado por espiras del bobinado de estator.

En (20), el término con factor λ'_m corresponde al torque debido a los imanes permanentes; y el término con factor $(L_d - L_q)$, corresponde a un pequeño torque de reluctancia. Dado que L_d es ligeramente mayor que L_q , esto permite producir el efecto de field forcing y field weakening. La ecuación es no lineal ya que se produce el producto entre las variables $i_{ds}^r(t)$ y de $i_{qs}^r(t)$ dependientes del tiempo.

El **balance de tensiones eléctricas equivalentes** de estator (referido a coordenadas qd0 fijas en rotor) se expresa como:

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \quad (21)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (22)$$

$$v_{0s}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \quad (23)$$

Donde:

$v_{qs}^r(t)$: Tensión de fase de eje en cuadratura.

$v_{ds}^r(t)$: Tensión de fase de eje directo.

$v_{0s}^r(t)$: Tensión de fase de eje cero.

$i_{qs}^r(t)$: Corriente de fase de eje directo.

L_{ls} : Inductancia de dispersión referida al estator.

$R_s(t)$: Resistencia de estator, por fase.

En (21), (22) y (23) los primeros términos del miembro derecho corresponden a las caídas óhmicas referidas al estator; en donde se tiene que los bobinados del estator, correspondientes a cada fase, poseen la misma resistencia $R_s(t)$, debido a la consideración de sistema equilibrado. Los segundos términos corresponden a las caídas de tensión inducidas que existen en cada eje, debido a los bobinados. Dichas ecuaciones también son no lineales, ya que en el primer término se produce el producto de dos variables dependientes del tiempo, ya que, aunque el valor de $R_s(t)$ cambie de forma lenta al ir cambiando la temperatura, se considera que varía. También, se puede observar en los terceros términos de (21) y (22) que la caída de tensión en cuadratura depende de variables de estado del eje directo, y que la caída de tensión del eje directo depende de variables de estado del eje en cuadratura; es decir están “cruzadas”. Y, además, el flujo depende de las corrientes las cuales son dependientes del tiempo al ser corriente alterna; y a su vez el flujo depende de la posición puntual del campo respecto al campo rodante (en grados eléctricos), de ahí se incluye el valor de ω_r .

El valor de $v_{0s}^r(t)$ y el valor de $i_{0s}^r(t)$ representan cualquier desequilibrio que puede presentarse en el sistema.

Parámetros eléctricos (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1%):

$$P_p = 3 \text{ (6 polos)}$$

$$\lambda_m^r \approx 0,01546 Wb - t, \text{o } \left(\frac{V}{rad/s} \right)$$

$$L_q \approx 5,8 mH$$

$$L_d \approx 6,6 mH$$

$$L_{ls} \approx 0,8 mH$$

Especificaciones eléctricas de operación, en bornes de fases abc de estator (valores límite):

Tensión nominal de línea: $V_{sl\ nom} = 24 V_{ca\ rms}$ (tensión nominal de fase: $V_{sf\ nom} = \frac{V_{sl\ nom}}{\sqrt{3}}$)

Corriente nominal: $I_{s\ nom} = 0,4 A_{ca\ rms}$ (régimen continuo)

Corriente máxima: $I_{s\ máx} = 2,0 A_{ca\ rms}$ (corta duración, aceleración)

El diagrama de bloques del subsistema electromagnético, correspondiente a las ecuaciones (19) a (23), se construye despejando las derivadas de las corrientes qd0 en las ecuaciones (21), (22) y (23).

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s(t).i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d.i_{ds}^r(t)].\omega_r(t)}{L_q} \quad (24)$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s(t).i_{ds}^r(t) + L_q.i_{qs}^r(t).\omega_r(t)}{L_d} \quad (25)$$

$$\frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{v_{0s}^r(t) - R_s(t).i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \quad (26)$$

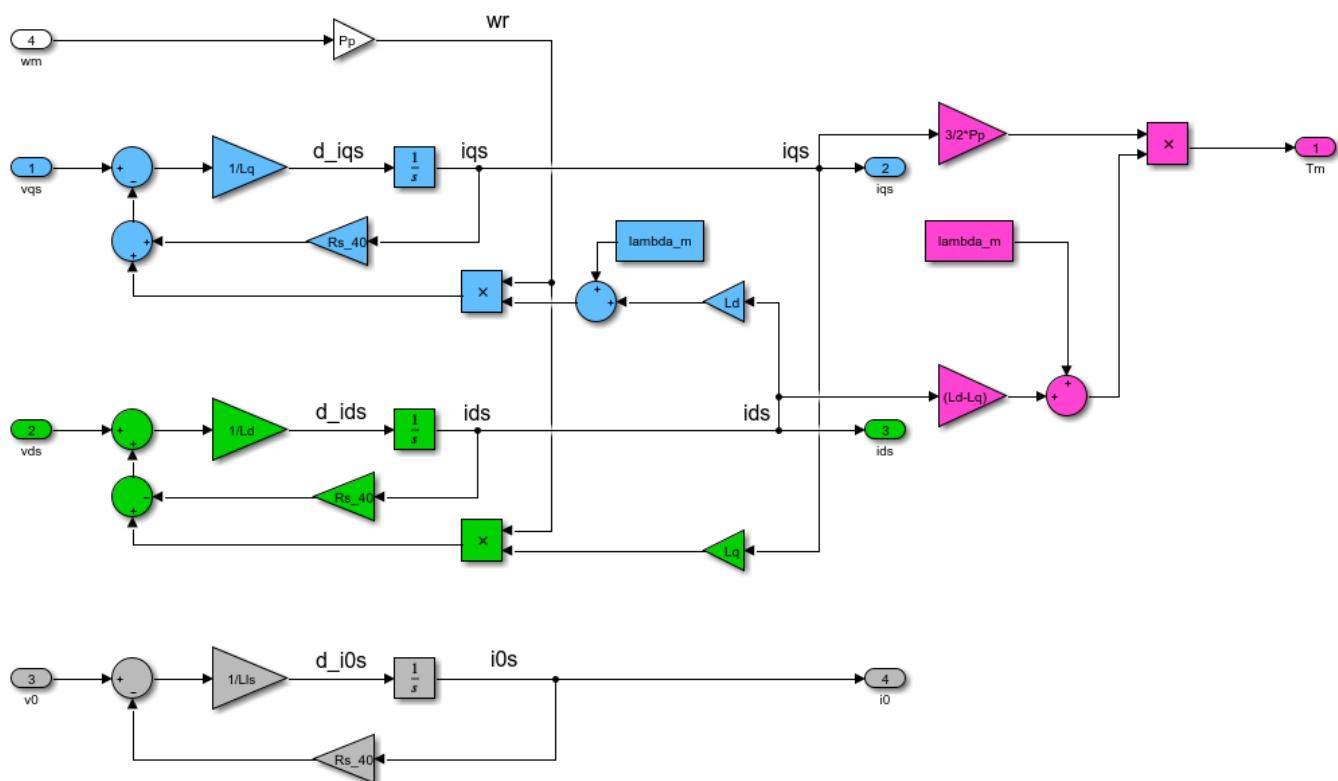


Figura 5. Diagrama de bloques del subsistema electromagnético.

•Subsistema térmico acoplado:

En el modelo equivalente del subsistema térmico, solo se consideran las pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule en los bobinados del estator, y la transferencia de calor por conducción y convección natural. Es un modelo muy simplificado, ya que se desprecian las pérdidas magnéticas en el núcleo, se supone una temperatura homogénea en cada punto del bobinado estatórico (cuando realidad suelen haber puntos más calientes que otros), y no se supone el caso de ventilación forzada en la transferencia de calor. A dicho subsistema, se lo modela como un sistema de primer orden como se muestra a continuación.

En primer lugar, se asume que cada bobinado estatórico es de cobre, por ser lo más usual. Y debido a que cada uno es un conductor eléctrico, cada uno presenta una resistencia eléctrica $R_s(t)$ que se calienta por efecto joule, estableciendo una pérdida de energía. Dicho calentamiento produce un aumento de su temperatura, lo que a su vez produce un aumento del valor de cada resistencia $R_s(t)$.

La variación de la resistencia del bobinado estatórico con la temperatura se expresa mediante:

$$R_s(t) = R_{sREF} \cdot \left(1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ) \right) \quad (27)$$

Donde:

α_{Cu} : Coeficiente térmico para el cobre.

R_{sREF} : Resistencia de referencia a una determinada temperatura T_{sREF}° .

T_{sREF}° : Temperatura de referencia correspondiente al valor de la R_{sREF} .

$T_s^\circ(t)$: Temperatura del bobinado estatórico.

La ecuación (27) es un desarrollo en serie de Taylor de la función de aumento de la resistencia en función de la temperatura, en donde se han despreciado todos los términos de orden superior, con lo que se asume que se tiene un comportamiento lineal de la resistencia con la temperatura. Es decir, solo se ha tomado la primer aproximación; y, como resultado se obtiene la ecuación de una recta, donde $R_s(t)$ y $T_s^\circ(t)$ son los valores instantáneos, mientras que R_{sREF} y T_{sREF}° corresponden a un punto cualquiera sobre dicha recta de la resistencia en función de la temperatura.

La potencia de pérdidas calóricas puede ser expresada en función de las corrientes de fase abc o, también en función de las corrientes qd0 como:

$$P_{sPerd}(t) = R_s(t) \cdot (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) \quad (28)$$

Donde:

$P_{sPerd}(t)$: Potencia de pérdidas calóricas en el estator.

$i_{as}(t)$: Corriente de fase a.

$i_{bs}(t)$: Corriente de fase b.

$i_{cs}(t)$: Corriente de fase c.

El **balance térmico del estator** está determinado por:

$$P_{sPerd}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (29)$$

Donde:

C_{ts} : Capacitancia térmica de estator.

$T_{amb}^\circ(t)$: Temperatura del ambiente industrial, es decir, el ambiente donde se encuentra trabajando el motor.

R_{ts-amb} : Resistencia térmica estator-ambiente. Es la resistencia en la conducción térmica de calor desde el estator hacia el ambiente industrial, a través de la carcasa.

La ecuación (28) es la expresión que toma en cuenta el efecto joule, el cual expresa que la pérdida de calor es proporcional a la resistencia y al cuadrado de la corriente. La ecuación (29) es una ecuación diferencial, cuyo primer término corresponde a el almacenamiento de energía calórica en la masa física del estator. Mientras que, el segundo término de (29) corresponde a la transferencia de potencia calórica al ambiente, en función de la capacidad de disipación del calor hacia el ambiente, es decir en función del inverso de la R_{ts-amb} . Y dependiendo hacia donde se incline el balance, se podría o no superar la temperatura máxima del bobinado estatórico, respectivamente quemando o no al motor.

En otras palabras, (28) dice cuánta energía eléctrica por unidad de tiempo se transforma en energía térmica; el primer término de (29) dice que parte de dicha energía térmica queda almacenada en los bobinados; y el segundo término de (29) dice que parte de dicha energía de (28) se disipa al ambiente. De esta forma, se establece un ciclo de realimentación positiva, modelado dinámicamente por las ecuaciones (28) y (29): Si se aumenta la demanda de corriente en el bobinado estatórico, entonces en (28) las pérdidas crecen significativamente, debido a la potencia al cuadrado de las corrientes, lo cual produce un calentamiento; y si en (29) se almacena más energía térmica de la que se disipa, entonces crece la temperatura en los bobinados, lo que aumenta

a su vez el valor de la $R_s(t)$, lo que aumenta aún más la potencia perdida $P_{s\text{perd}}(t)$ en (28); cerrando así el ciclo de realimentación positiva. Dicho esto, se resume que: el valor de la constante de tiempo térmica, determinada por la multiplicación de los valores de los parámetros C_{ts} y R_{ts-amb} , junto con la exigencia a la que es sometida la máquina, son los parámetros que determinan qué tanto se calentará el bobinado del estator.

Parámetros térmicos (valores nominales medidos, tolerancia error +/- 1%):

$$R_s \approx 1,02 \Omega \text{ (a } 40^\circ C) \rightarrow 1,32 \Omega \text{ (a } 115^\circ C)$$

$$\alpha_{cu} = 3,9 \times 10^{-3} \frac{1}{^\circ C} \quad (\text{valor tabulado})$$

$$C_{ts} \approx 0,818 \frac{W}{^\circ C/s}$$

$$R_{ts-amb} \approx 146,7 \text{ } ^\circ C/W$$

$$\text{Constante de tiempo térmica: } t_{ts-amb} = R_{ts-amb} \cdot C_{ts} \approx 120 \text{ s}$$

Especificaciones térmicas de operación (valores límite):

$$\text{Temperatura máxima de bobinado estator: } T_s^{\circ \text{máx}} = 115^\circ C$$

$$\text{Rango de temperatura ambiente de operación: } -15^\circ C \leq T_s^{\circ amb} \leq 40^\circ C$$

Para construir el diagrama de bloques del subsistema térmico, se igualan (28) y (29), se despeja la derivada de mayor orden, es decir $\frac{dT_s^{\circ}(t)}{dt}$, y luego se reemplaza $R_s(t)$ por (27):

$$\frac{dT_s^{\circ}(t)}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}^2(t)) - \frac{(T_s^{\circ}(t) - T_{amb}^{\circ}(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \quad (30)$$

$$\frac{dT_s^{\circ}(t)}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_{sREF} \cdot (1 + \alpha_{cu} \cdot (T_s^{\circ}(t) - T_{sREF}^{\circ})) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)) - \frac{(T_s^{\circ}(t) - T_{amb}^{\circ}(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}}. \quad (31)$$

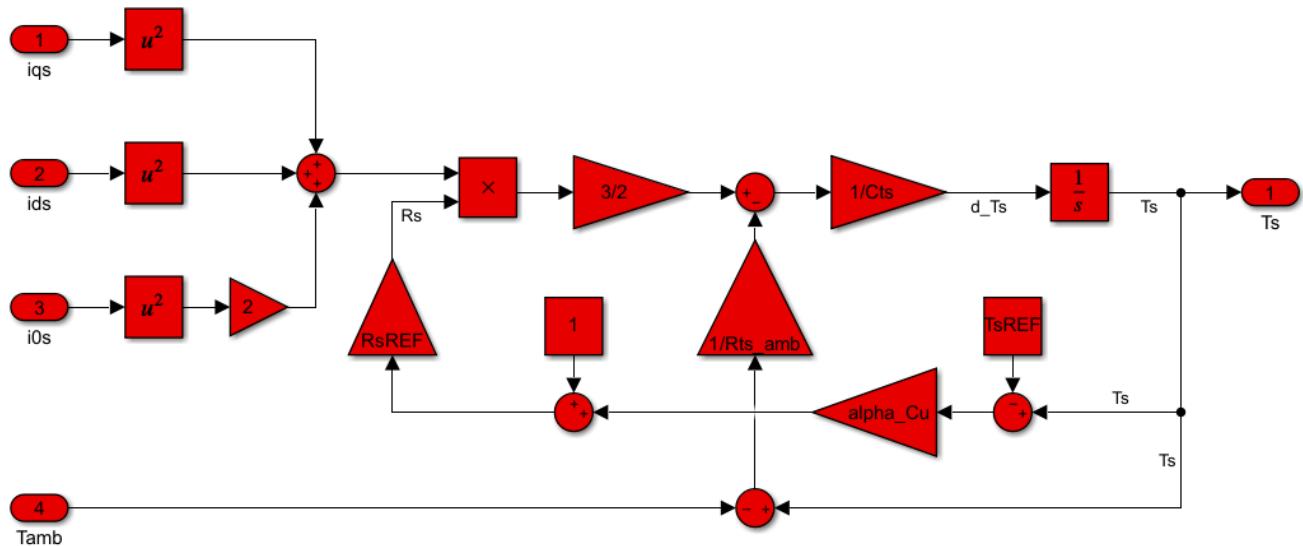


Figura 6. Diagrama de bloques del subsistema térmico.

a) Modelo Global NL.

El modelo global, se forma uniendo todos los submodelos previamente obtenidos. Y, dado que tanto el submodelo electromagnético como submodelo el térmico son no lineales, entonces el modelo global también tendrá un comportamiento no lineal.

Las variables de estado del modelo global, se determinan mediante la cantidad de elementos almacenadores de energía que lo compongan:

- Al considerar un acoplamiento rígido entre motor y la carga mecánica, entonces la variable de estado $\theta_m(t)$ no se relaciona con un almacenamiento real de energía elástica.
- Los momentos de inercia sumados, del rotor del motor, de los engranajes planetarios, y de la articulación hombro del robot, almacenan energía cinética, energía que depende de $\omega_m(t)$ (o de $\omega_l(t)$), la cual es una de las variables de estado del modelo global.
- Los bobinados estatóricos, son inductores que almacenan energía electromagnética, por lo que las corrientes $i_{qs}^r(t)$, $i_{ds}^r(t)$ y $i_{0s}^r(t)$ (o también expresadas en coordenadas abc) son otras tres variables de estado del sistema.
- La masa física del estator, al elevar su temperatura, almacena energía térmica, por lo que $T_s^\circ(t)$ también es una variable de estado del modelo global.

I) Ecuaciones vectoriales NL de estado y de salida (con estado inicial genérico).

Para obtener el modelo matemático global, primero se procede a acoplar el subsistema electromagnético al subsistema mecánico. Se reemplaza a $T_m(t)$ de (16) por (20):

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \right) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \quad (32)$$

Luego, en las ecuaciones (24) y (25), se reemplaza a $\omega_r(t)$ por (19):

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \quad (33)$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_d} \quad (34)$$

El modelo global, se expresa mediante (6), (32), (33), (34), (26) y (30) como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \right) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0s}^r(t)^2) - \frac{(T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (35)$$

Siendo la ecuación de salida:

$$y(t) = \theta_l(t) \quad (36)$$

O, en forma matricial, se puede expresar también como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ -b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^{qr} + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \right) \\ \frac{J_{eq}}{-R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^{qr} + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)} \\ \frac{L_q}{-R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)} \\ \frac{L_d}{-R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)} \\ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^{r2}(t) + i_{ds}^{r2}(t) + 2 \cdot i_{0s}^{r2}(t)) - \frac{T_s^\circ(t)}{R_{ts-amb}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Siendo la ecuación de salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

El primer término del miembro derecho de (37), es un campo vectorial, el cual solo depende de las variables de estado, y no de las de entradas. Y a las variables de entrada se las ha separado del campo vectorial para asimilar la notación a la notación estándar. Y, además a las variables de entrada se las ha separado en variables manipuladas y variables de perturbación, ya que con el controlador solo se puede influir en las variables manipuladas y no en las de perturbación.

El modelo global en forma matricial, también se puede expresar de forma compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (39)$$

O bien:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) \end{aligned} \quad (40)$$

En donde:

$u(t)$: Vector de entradas.

$x(t)$: Vector de estado.

$x_0(t)$: Vector de estado inicial genérico.

$y(t)$: Vector de salida. (En el caso de estudio, posee solo un elemento).

$f(x(t))$: Campo vectorial. (En función solo de las variables de estado).

B : Matriz de entradas.

C : Matriz de salida.

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad x_{0(t)} = \begin{bmatrix} \theta_{m_0}(t) \\ \omega_{m_0}(t) \\ i_{qs_0}^r(t) \\ i_{ds_0}^r(t) \\ i_{0s_0}^r(t) \\ T_{s_0}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

II) Diagrama de bloques de estado del Modelo Global NL.

El diagrama de bloques del modelo global, resulta de la unión de los diagramas de bloques de los subsistemas trabajados. Debido al gran tamaño del mismo, se recurre a encapsular los subsistemas. Y, además, se incorporan las transformaciones de Park virtuales para acceso físico en bornes a las tensiones y corrientes de fase reales de estator (coordenadas abcs).

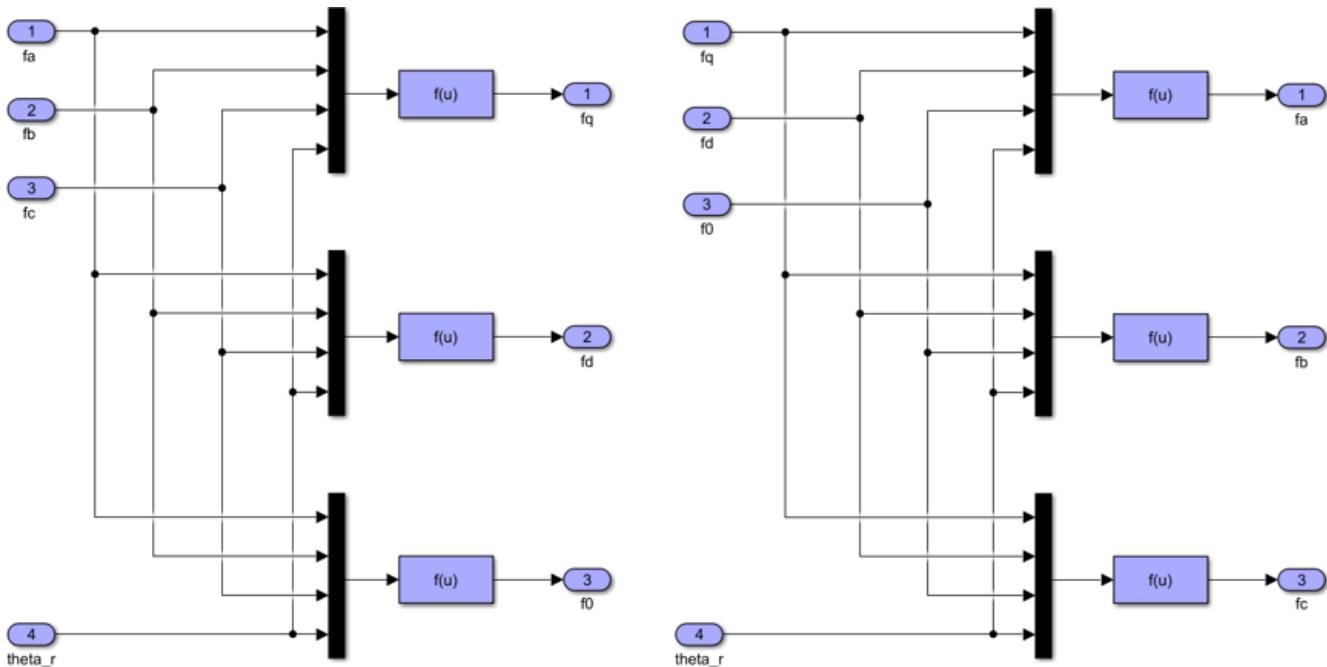


Figura 7. Transformadas de Park virtuales. (Cada bloque $f(u)$, contiene la operación correspondiente de cada fila de la matriz de Park).

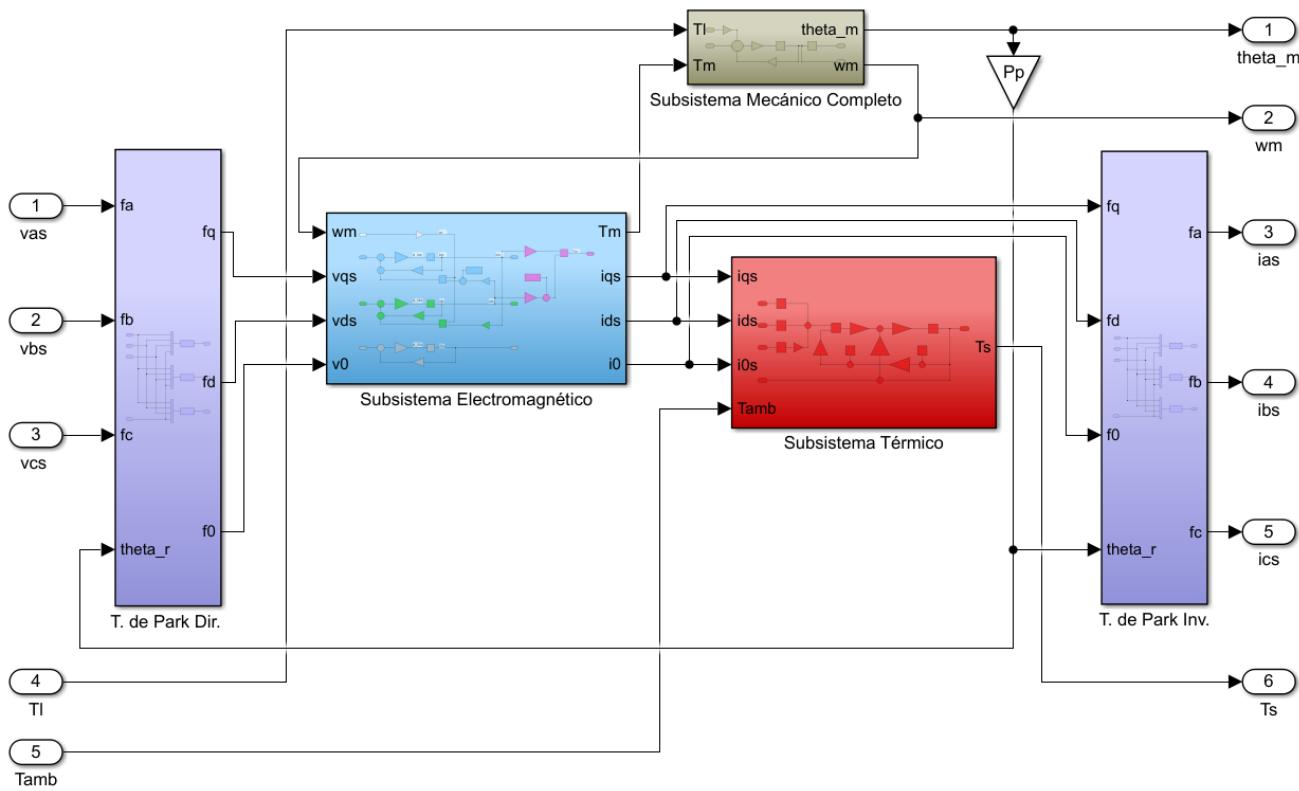


Diagrama de bloques del Modelo Global NL.

b) Linealización Jacobiana. Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

La mayoría de sistemas, y máquinas eléctricas en general poseen un comportamiento no lineal; pero trabajar con ecuaciones no lineales, además de soler ser mucho más complejo, requiere de la utilización de herramientas que exceden a la materia. Por esto, se opta por tratar al modelo global del proyecto con herramientas lineales. Y para ello, antes se debe aplicar alguna metodología de linealización. La linealización conlleva a una pérdida de precisión en el control, pero es recomendable ante la ventaja de trabajar con un sistema linealizado, ya que los sistemas lineales son sustancialmente más sencillos de desarrollar y controlar que los no lineales.

Se procede a linealizar el sistema a partir del modelo NL, mediante la metodología de linealización Jacobiana. La cual, es un método general, que se basa en la aproximación por serie de Taylor, en un punto genérico ‘ o ’ de operación, con truncamiento al primer orden, es decir que solo se consideran los dos primeros términos de (43).

Serie de Taylor:

$$z(t) = f(t) = f(t_o) + \frac{df(t_o)}{dt} \cdot (t - t_o) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2f(t_o)}{dt^2} \cdot (t - t_o)^2 + \dots \quad (43)$$

En donde, $f(t)$ en el presente caso de estudio representa al campo vectorial de (37), aunque incluyendo a las variables de entrada, es decir: $f(t) = f(x(t), u(t))$. El primer término de (43) $f(t_o)$, es un término constante correspondiente al valor de la función del campo vectorial en el punto de operación. Y, en el segundo término se tiene la primera derivada parcial (jacobiano) del campo vectorial, multiplicado por el vector $(t - t_o)$ de pequeñas variaciones.

Estos dos primeros términos de la serie de Taylor, constituyen la ecuación de una recta. Es decir que, en esta linealización, se aproximan las variaciones no lineales del campo vectorial $f(t)$, por tramos de rectas tangentes, en donde a estos tramos, se los considera pequeños tal que la aproximación sea aceptable. Y debido a la consideración de tramos pequeños, entonces $(t - t_o)$ también será pequeño, un valor menor a la unidad. Luego, al multiplicar un número menor a la unidad por sí mismo, se obtiene un número aún más pequeño. Y como todos los términos de orden superior de la serie, contienen como factor una potencia de $(t - t_o)$, entonces estos términos resultan ser despreciables, en comparación con los dos primeros términos que son los que dan el comportamiento dominante; lo que muestra que es razonable linealizar con la serie de Taylor, siempre que se considere un entorno pequeño.

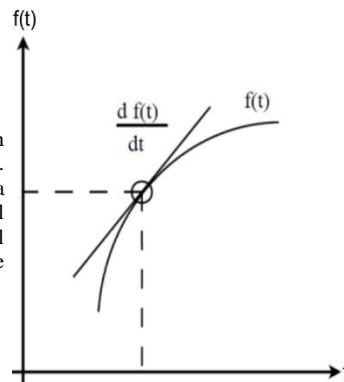


Figura 8. Recta tangente a una función $f(t)$ de una sola variable no lineal. (Representa, de forma análoga, la aproximación que se realiza del comportamiento dinámico local del campo vectorial, alrededor del punto de operación.)

Así, para un punto de operación genérico $(t_o, f(t_o))$ se establece la aproximación lineal, mediante los primeros dos términos de la serie de Taylor como:

$$z(t) = Z_o(t) + \Delta z(t) \quad (44)$$

La ecuación (44) permite descomponer a todas las variables del modelo global (variables de entrada, de estado y de salida) en dos partes:

- $Z_o(t)$: Representa una variable de gran valor, la cual es no lineal y es de variación lenta con el tiempo (cuasi-estacionaria), correspondiente a cada punto de operación (equilibrio dinámico). Describe un comportamiento global.
- $\Delta z(t)$: Representa una variable de pequeño valor, la cual es lineal y es de variación rápida con el tiempo, correspondiente a oscilaciones (de alta frecuencia) alrededor del punto de operación (equilibrio dinámico). Describe un comportamiento local.

Se considera que el punto de operación $Z_o(t)$ puede migrar de un valor a otro, de forma cuasi-estacionaria. Por lo que, el modelo dinámico que queda alrededor del punto, es un Modelo Lineal de Parámetros Variables (LPV). Es decir, que los parámetros dependen del punto de operación, tal que para cada punto de operación se tiene un juego de parámetros distintos.

Por otro lado, como se ha descompuesto el modelo, entonces para el diseño de todo el controlador se puede realizar una combinación de dos controladores: uno a lazo abierto para fijar el punto de operación, y otro controlador lineal a lazo cerrado que permite regular la dinámica del sistema alrededor de ese punto de operación.

Al descomponer a todas las variables del modelo global NL (37) como (44), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dX_o(t)}{dt} + \frac{d\Delta x(t)}{dt} &= f(X_o(t) + \Delta x(t), U_o(t) + \Delta u(t)) \approx f(X_o(t), U_o(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_o \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_o \cdot \Delta u(t) = \\ &= f(X_o(t), U_o(t)) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_o \cdot \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_m} \right]_o \cdot \Delta u(t) \end{aligned} \quad (45)$$

De (45), dado que la componente de gran señal $Z_o(t)$ se considera de variación lenta con el tiempo, entonces las derivadas de las variables de estado en el punto de operación son aproximadamente igual a cero:

$$\frac{dX_o(t)}{dt} = f(X_o(t), U_o(t)) \approx 0 \quad (\delta \text{ Const} \neq 0) \quad (46)$$

Por lo que se puede expresar a (45) de la siguiente manera:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} \approx \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]_o \cdot \Delta x(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial u_1} \dots \frac{\partial f}{\partial u_m} \right]_o \cdot \Delta u(t) \quad (47)$$

Es decir, que las ecuaciones (35) o (37) del modelo global NL, se pueden aproximar solamente mediante el modelo dinámico LPV (de pequeñas variaciones locales), ecuaciones (53) o (54), que se obtendrán a continuación.

La ecuación (46), es la definición puntos de equilibrio; los cuales son equilibrios dinámicos ya que se pueden ir cambiando de lugar, y además son equilibrios cargados porque se pueden tener valores definidos de las variables de excitación. Por otro lado, se permite que el miembro derecho de algunas ecuaciones de (46) pueda ser igual a una constante distinta de cero. Esto es porque sino, si todas las derivadas fueran cero en los puntos de operación, entonces se tendría un equilibrio estático, por lo que se restringiría el análisis a solo cuando el robot se encuentre detenido. Por esto, es necesario que la derivada respecto al tiempo de algunas variables particulares como la derivada de la posición, pueda ser igual a una constante distinta de cero. Con lo cual, se tiene un equilibrio dinámico, permitiendo así también el análisis del sistema a velocidad constante.

I) Espacio de operación global NL (cuasi-estacionario).

Forzando que las derivadas de las variables de estado en el punto de operación sean aproximadamente iguales a cero, ecuación (46):

$$\frac{dX_o(t)}{dt} = f(X_o(t), U_o(t)) \approx 0 \text{ (ó } Const \neq 0\text{)}$$

Entonces las ecuaciones que describen el sistema no lineal cuasi-estacionario son:

$$\left\{ \begin{array}{l} cte \approx \dot{\theta}_{mo}(t) = \omega_{mo}(t) \\ 0 \approx \dot{\omega}_{mo}(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \omega_{mo}(t) + \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{dso}^r(t)] \cdot i_{qso}^r(t) \right) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \\ 0 \approx \frac{di_{qso}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qso}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qso}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{dso}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t)}{L_q} \\ 0 \approx \frac{di_{dso}^r(t)}{dt} = \frac{v_{dso}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{dso}^r(t) + L_q \cdot i_{qso}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t)}{L_d} \\ 0 \approx \frac{di_{0so}^r(t)}{dt} = \frac{v_{0so}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{0so}^r(t)}{L_{ls}} \\ 0 \approx \frac{dT_{so}^\circ(t)}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qso}^r(t)^2 + i_{dso}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0so}^r(t)^2) - \frac{(T_{so}^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} cte \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{mo}(t) \\ \dot{\omega}_{mo}(t) \\ \frac{di_{qso}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{dso}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0so}^r(t)}{dt} \\ \frac{dT_{so}^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{mo}(t) \\ -b_{eq} \cdot \omega_{mo}(t) + \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{dso}^r(t)] \cdot i_{qso}^r(t) \right) \\ \frac{-R_s(t) \cdot i_{qso}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{dso}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t)}{L_q} \\ \frac{-R_s(t) \cdot i_{dso}^r(t) + L_q \cdot i_{qso}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t)}{L_d} \\ \frac{-R_s(t) \cdot i_{0so}^r(t)}{L_{ls}} \\ \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qso}^r(t)^2 + i_{dso}^r(t)^2 + 2 \cdot i_{0so}^r(t)^2) - \frac{T_{so}^\circ(t)}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{qso}^r(t) \\ v_{dso}^r(t) \\ v_{0so}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (49)$$

La ecuación de salida del espacio de operación global NL es:

$$Y_o(t) = C \cdot X_o(t) \quad (50)$$

Y las condiciones iniciales del espacio de operación global NL son:

$$X_o(0) = x_0 \quad (51)$$

II) Modelo dinámico LPV (pequeñas variaciones locales).

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} \approx \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array} \right]_o \cdot \Delta x(t) + \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{array} \right]_o \cdot \Delta u(t) \quad (52)$$

Las ecuaciones que definen el modelo dinámico lineal son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Delta\theta}_m(t) = \Delta\omega_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \Delta\omega_m(t) + \left(\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}(t)] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) \right) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot (L_d - L_d) \cdot i_{qs}(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}(t)] \cdot P_p \cdot \Delta\omega_m(t) - L_d \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t)}{L_q} \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}(t) \cdot P_p \cdot \Delta\omega_m(t) + L_q \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t)}{L_d} \\ \frac{d\Delta i_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{\Delta v_{0s}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \\ \frac{d\Delta T_s^\circ(t)}{dt} = \frac{3 \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + i_{ds}(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 2 \cdot i_{0s}(t) \cdot \Delta i_{0s}^r(t)) - \frac{(\Delta T_s^\circ(t) - \Delta T_{amb}^\circ(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (53)$$

$$\left[\begin{array}{c} \dot{\Delta\theta}_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta i_{0s}^r(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta T_s^\circ(t)}{dt} \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}(t)]}{2 \cdot J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot (L_d - L_d) \cdot i_{qs}^r(t)}{2 \cdot J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{[\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}(t)] \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & -\frac{L_d \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t)}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p}{L_d} & \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_{mo}(t)}{L_d} & -\frac{R_s(t)}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t)}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{3 \cdot R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{3 \cdot R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t)}{C_{ts}} & -\frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \Delta\theta_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}^r(t) \\ \Delta T_s^\circ(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}^r(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta T_l(t) \\ \Delta T_{amb}^\circ(t) \end{array} \right] \quad (54)$$

Las cuales se pueden expresar como:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} \approx A \cdot \Delta x(t) + B \cdot \Delta u(t) \quad (55)$$

Donde:

A: Matriz de entradas.

Y la ecuación de salida del modelo dinámico LPV es:

$$\Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) \quad (56)$$

Las condiciones iniciales del modelo dinámico LPV son:

$$\Delta x(0) = 0 \quad (57)$$

Como se observa, el estado inicial (condiciones iniciales) del modelo dinámico LPV es cero, por lo que si se podrá aplicar una función de transferencia, la cual también va a tener parámetros dependientes del punto de operación.

c) Linealización por Realimentación NL.

A continuación, se procede a linealizar el sistema a partir del modelo NL original, mediante la metodología de linealización por realimentación NL; la cual es una técnica de control para sistemas NL, que permitirá hacer dos cosas para la máquina síncrona de imanes permanentes: Linealizar el sistema, y Desacoplar los ejes q y d. Técnica con la que se obtendrá un Modelo Lineal Invariante en el Tiempo (LTI) equivalente; lo que luego nos permitirá así mismo controlar a la máquina de CA, síncrona de imanes permanentes, de manera similar a la máquina de CC. Por otro lado, para simplificar el modelo, no se tendrá en cuenta el acoplamiento no lineal con el subsistema térmico, sino que solo se considerará su dinámica lineal.

Para realizar la linealización por realimentación NL, se impone la simplificación:

$$i_{ds}^r(t) = 0 \quad \therefore \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0 \quad (58)$$

Esta imposición, elimina los acoplamientos cruzados con el eje d, y elimina el producto de variables de estado entre sí, por lo que el modelo global se linealiza. Así se pueden obtener las matrices A de estado, B de entrada, y C de salida, independientes de las variables de estado; o sea, invariantes en el tiempo, ya que sus elementos se conformarán solamente por constantes del sistema.

Además, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- Dado que el estator de la máquina eléctrica conectado en estrella, posee un centro de estrella (neutro) flotante no accesible, entonces la suma vectorial de las tres corrientes abc será siempre igual a cero. Esto es, ya sea que el sistema trifásico se encuentre equilibrado (como es el caso) como si se encuentre desequilibrado; ya que, si no estuviera equilibrado, los vectores de corriente del circuito en coordenadas abc no tendrían las mismas magnitudes, ni estarán desfasados 120° entre sí, pero por ley Kirchhoff aplicada al nodo del centro de la estrella, su suma vectorial sería también igual al vector nulo.

$$i_n(t) = i_{a_s}(t) + i_{b_s}(t) + i_{c_s}(t) = 0 \quad (59)$$

Y como la corriente $i_{0s}(t)$ es igual al promedio de las tres corrientes de fase abc, entonces ella y por tanto su derivada, también serán siempre igual a cero:

$$i_{0s}(t) = \frac{i_{a_s}(t) + i_{b_s}(t) + i_{c_s}(t)}{3} \Rightarrow i_{0s}(t) = 0 \quad \therefore \frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0 \quad (60)$$

Además, por el hecho de ser el sistema trifásico simétrico, las tensiones en coordenadas abc estarán balanceadas, por lo que también será:

$$v_{a_s}(t) + v_{b_s}(t) + v_{c_s}(t) = 0 \quad (61)$$

$$v_{0s}^r = \frac{v_{a_s}(t) + v_{b_s}(t) + v_{c_s}(t)}{3} = 0 \quad (62)$$

También se puede deducir que $v_{0s}^r = 0$ de (26). Esto simplifica el sistema, ya que se contempla una variable de estado menos.

- Como se comentó, no se considerará el acoplamiento no lineal con el subsistema térmico, sino que solo se considerará su dinámica lineal. Para ello, la variación de la resistencia del bobinado estatórico $R_s(t)$, expresión (27), con la temperatura $T_s^\circ(t)$ se puede considerar insignificante para un amplio rango de temperaturas. Por lo que, se despreciará dicha variación, tomando a R_s como una constante independiente del tiempo.

$$R_s = cte$$

- Y se asume la hipótesis de que el estado inicial de $i_{ds}^r(0)$ es igual a 0, ya que no es necesario realizar reforzamiento de campo para arrancar el motor (ya que vamos a considerar luego que la tensión se establece antes que la carga T_l), ni tampoco es necesario realizar debilitamiento de campo.

$$i_{ds}^r(0) = 0$$

I) Ecuaciones vectoriales/matriciales LTI de estado y de salida

Teniendo en cuenta lo mencionado, el sistema de ecuaciones resultante tiene la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0 = v_{ds}^r(t) - R_s \cdot 0 + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{\frac{3}{2} \cdot R_s \cdot i_{qs}^2(t) - \frac{(T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (63)$$

O bien simplemente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{P_{sperd}(t) - \frac{(T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (64)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_m^r \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [v_{qs}^r(t)] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} & \frac{1}{C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \\ P_{sperd}(t) \end{bmatrix} \quad (65)$$

Y el vector de salidas queda como:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (66)$$

En donde, cabe destacar que $P_{sperd}(t)$ es una no linealidad, debido a que depende del cuadrado de la corriente $i_{qs}^r(t)$. Por tanto, a fin de poder incluir el subsistema térmico en el modelo LTI, además lo que se hace es considerar a $P_{sperd}(t)$ como otra perturbación; obteniendo así la dinámica lineal del sistema térmico.

$$P_{sperd}(t) = \frac{3}{2} \cdot R_s \cdot i_{qs}^r(t)^2 \quad (67)$$

II) Diagrama de bloques de estado.

A continuación, se muestra el diagrama de bloques de estado (en forma desagregada) del modelo simplificado LTI equivalente, construido a partir de las expresiones de (64):

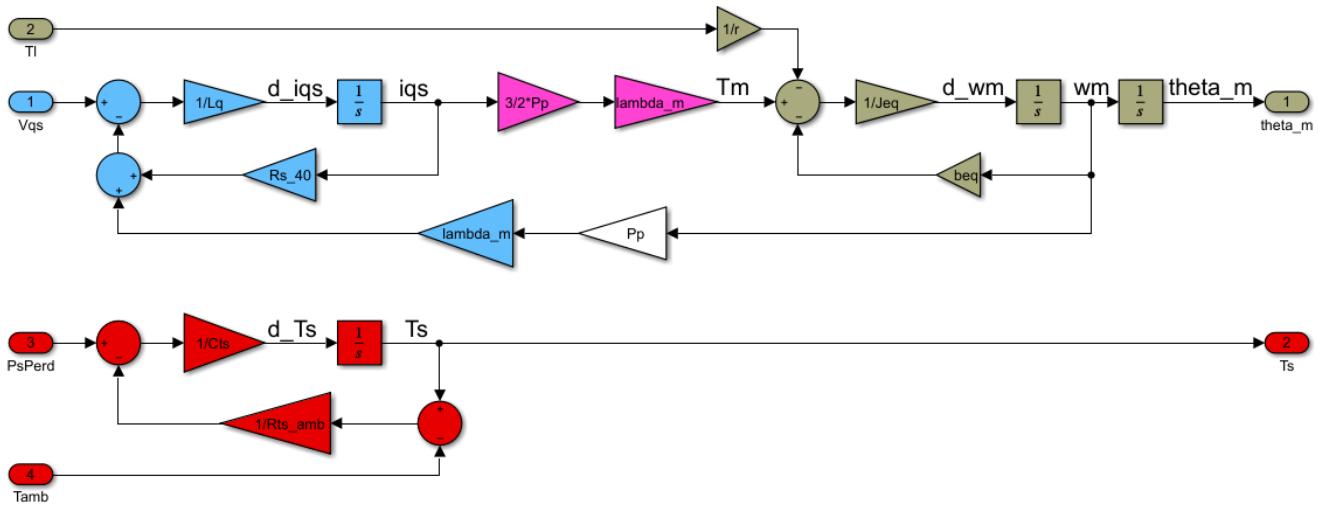


Figura 9. Diagrama de bloques del Modelo simplificado LTI equivalente.

III) Determinación de la Restricción o Ley de Control mínima.

Para lograr cumplir con la especificación $i_{ds}^r(t) = 0$, y por tanto también con $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$, vemos que al reemplazar estas igualdades nulas en la cuarta expresión de (35), o en (22), se obtiene la restricción o ley de control mínima que es necesaria aplicar sobre la variable manipulada virtual $v_{qd0s}^r(t)$ o, equivalentemente (aplicando la transformada de Park) sobre $v_{abcs}(t)$:

$$v_{ds}^r(t) = -P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \quad (68)$$

Es decir, se debe lograr que como señal de control $v_{ds}^r(t)$, el controlador brinde a cada instante el valor correspondiente a esta expresión (68). De esta forma, se puede ver claramente en la **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, que al ser en $v_{ds}^r(t)$ la realimentación NL natural del sistema electromagnético positiva, entonces el signo de la ley de control mínima (68) debe ser negativo para anularla, logrando así compensar la no linealidad del producto $\omega_m(t) \cdot i_{qs}^r(t)$, y logrando eliminar el acoplamiento cruzado del eje d con el eje q. Y, para cumplir con dicha expresión (restricción o ley de control mínima), es necesario medir las variables de estado $\omega_m(t)$ e $i_{qs}^r(t)$ para poderlas realimentar en el sistema. Cabe mencionar que dicha realimentación es no lineal ya que consiste en el producto de ambas variables de estado, y por ello el nombre de la técnica de linealización (no lineal) utilizada. Además, la señal de control $v_{ds}^r(t)$ se transmite desde el controlador al sistema físico mediante la transformada inversa y directa de Park. Aplicando la transformada inversa de Park se contempla que los valores de tensiones y corrientes en coordenadas abc serán:

$$v_{abcs} = k_s(\theta)^{-1} \cdot v_{qd0s}^r(t) \quad (69)$$

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta) + (-P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)) \cdot \sin(\theta) \\ v_{qs}^r(t) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + (-P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)) \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{qs}^r(t) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + (-P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t)) \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$i_{abcs}(t) = k_s(\theta)^{-1} \cdot i_{qd0s}^r(t) \quad (71)$$

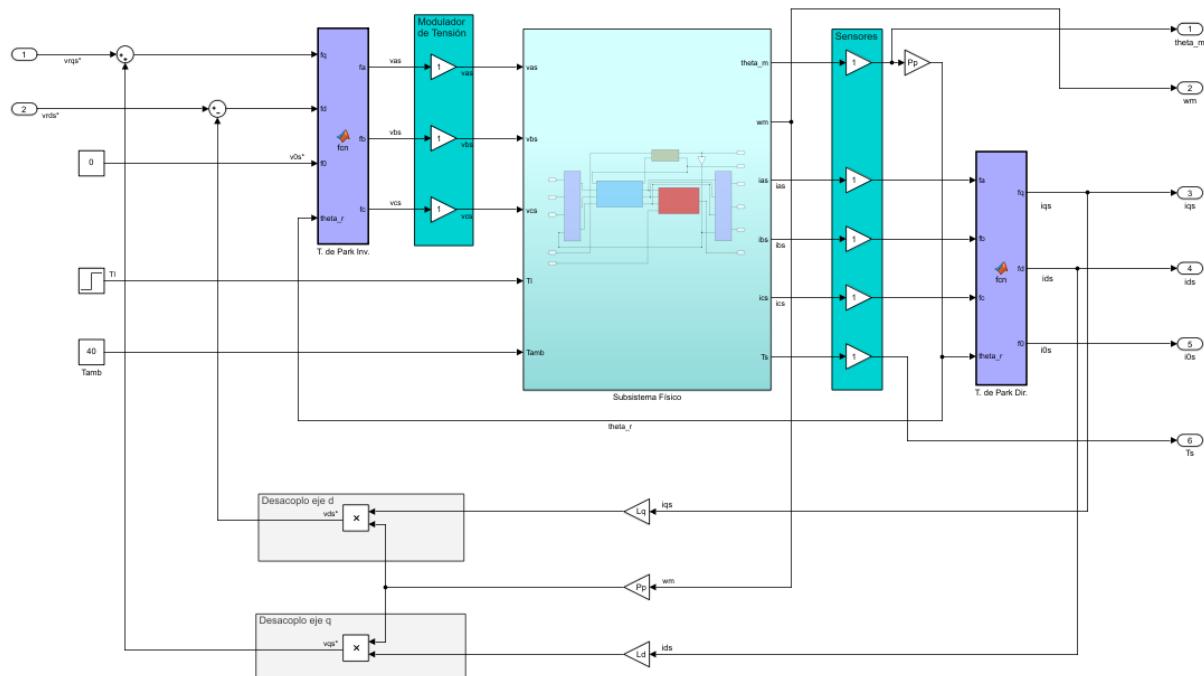
$$\begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{qs}^r(t) \cdot \cos(\theta) \\ i_{qs}^r(t) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_{qs}^r(t) \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (72)$$

IV) Implementación en el Modelo Global NL Completo.

Para que la ley de control previamente mencionada sea eficiente, se debe poder actuar sobre el sistema sin ningún tipo de acoplamiento que interfiera en el control. En este caso se considera el desacoplamiento y linealización por realimentación directa no lineal de estado parcial. Lo cual consiste en la compensación de las caídas inductivas (no lineales), tal que dichas caídas se anulen. El sistema completo se puede modelar como se ve en la **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**. Se puede diferenciar el sistema físico (planta) del controlador ya que el sistema físico está embebido en un subsistema (de color celeste en la figura). El desacoplamiento se lo identificado con un área de color gris claro en el diagrama de bloques.

Los límites entre el sistema físico y el sistema de control quedan definidos por el inversor (modulador de tensión trifásico equivalente) y los sensores. Dicho modulador de tensión trifásico está representado en el esquema como una ganancia unitaria por cada fase (ya que se lo considera ideal). Los sensores de realimentación de variables de estado (de posición, corrientes, y temperatura) se toman como ganancias unitarias, ya que en este caso se consideran sensores ideales, es decir, se considera que poseen un ancho de banda infinito.

Cabe destacar que las dos transformadas de Park reales a implementar en el sistema de control, se representan de forma distinta en Simulink, simplemente para diferenciarlas de las otras dos transformadas de Park del sistema físico, las cuales son virtuales. Las transformadas de Park del sistema de control son reales ya que el control se implementa actuando sobre i_{q0s} pero los valores reales (medidos en bornes) son los valores de las fases a, b y c.



Sistema NL con desacoplamiento y linealización por realimentación directa no lineal de estado parcial.

V) Modelo de la dinámica residual equivalente para $i_{ds}^r(t)$ (eje d) al aplicar Ley de control mínima.

Para cumplir con la ley de control mínima, los dos términos que corresponden a la caída óhmica y a la tensión inducida deben ser igual a cero, dando lugar a la siguiente ecuación diferencial autónoma de primer orden, que corresponde a la dinámica residual:

$$v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (73)$$

Luego de aplicar la realimentación no lineal dada por la ley de control mínima dada por (68) para desacoplar al eje d, se obtiene el acoplamiento residual, dado por:

$$0 = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \quad (74)$$

Luego, se procede a analizar la estabilidad del eje d, encontrando el polo de la dinámica residual (77). Y para ello, se pasa al dominio de la frecuencia, mediante el uso de la transformada de Laplace:

$$0 = R_s \cdot I_{ds}^r(s) + L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) \quad (75)$$

$$0 = I_{ds}^r(s) \cdot (R_s + L_d \cdot s) \quad (76)$$

$$s = -\frac{R_s}{L_d} \quad (77)$$

Se observa que el polo, al tener componente real negativa, indica que se trata de un sistema estable. Dicha estabilidad se explica dada la naturaleza disipativa de R_s . Además, al ser R_s y L_d parámetros del sistema físico, entonces este polo queda fijo.

De esta manera, si se tuviera un estado inicial de $i_{ds}^r(0) \neq 0$, al ser el sistema estable, y autónomo (es decir: al no tener entrada de excitación forzada), entonces $i_{ds}^r(0)$ va a decaer a cero con un decaimiento que va a depender de la constante de tiempo dada por (77), ósea que decae más rápidamente mientras mayor sea R_s . [Ya que cuanto más lejos se encuentran los polos del origen, menor es la constante de tiempo, y por lo tanto más rápido responde el sistema, y viceversa].

El resultado de la ecuación diferencial (74) es:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) \cdot e^{-\frac{R_s}{L_d}t} \quad (78)$$

Esta es una función exponencial decreciente, que se puede observar que decrece muy rápidamente a cero, en tan solo unos 0,02s según el factor $-\frac{R_s}{L_d}$. Por lo que, debido a que $i_{ds}^r(t)$ se hace 0 rápidamente, entonces se puede despreciar el acoplamiento residual NL sin error significativo en régimen forzado, es decir que se puede no considerar en las ecuaciones.

VI) Restricción o Ley de Control complementaria mínima en el eje q.

A su vez, para hacer el sistema completamente lineal, y desacoplar también el acoplamiento no lineal en el eje q, se implementa una Ley de control mínima complementaria. De la ecuación (21):

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (79)$$

Por lo tanto, se busca compensar los efectos inductivos no lineales, lo cual conduce a que la ecuación de la ley de control complementaria mínima (en eje q) es:

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (80)$$

En donde el primer término $v_{qs}^{r*}(t)$ es la consigna de tensión deseada, y el segundo término es el que contrarresta la no linealidad $i_{ds}^r(t) \cdot \omega_m(t)$. De esta forma, se puede ver claramente en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, que al ser en $v_{qs}^r(t)$ la realimentación NL natural del sistema electromagnético negativa, entonces el signo de la ley de control mínima (80), debe ser positiva para anularla, logrando así compensar (anulando) la no linealidad del producto $i_{ds}^r(t) \cdot \omega_m(t)$, y logrando eliminar el acoplamiento cruzado del eje q con el eje d.

Dicha ley de control complementaria mínima para el eje q (80), ya se ha mostrado agregada en el modelo NL desacoplado **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**. Y a continuación, en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se muestra el modelo LTI equivalente aumentado que se obtiene, en donde se observa que es igual al modelo LTI solo que en comparación con (64) y Figura 9, se agrega la ecuación correspondiente a la variable de estado $i_{ds}^r(t)$.

El sistema de ecuaciones resultante, da el modelo LTI Aumentado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{-b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{T_l(t)}{r}}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} - \frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{P_{sperd}(t) - \frac{(T_s^o(t) - T_{amb}^o(t))}{R_{ts-amb}}}{C_{ts}} \end{array} \right. \quad (81)$$

Y su diagrama de bloques del modelo LTI Aumentado es:

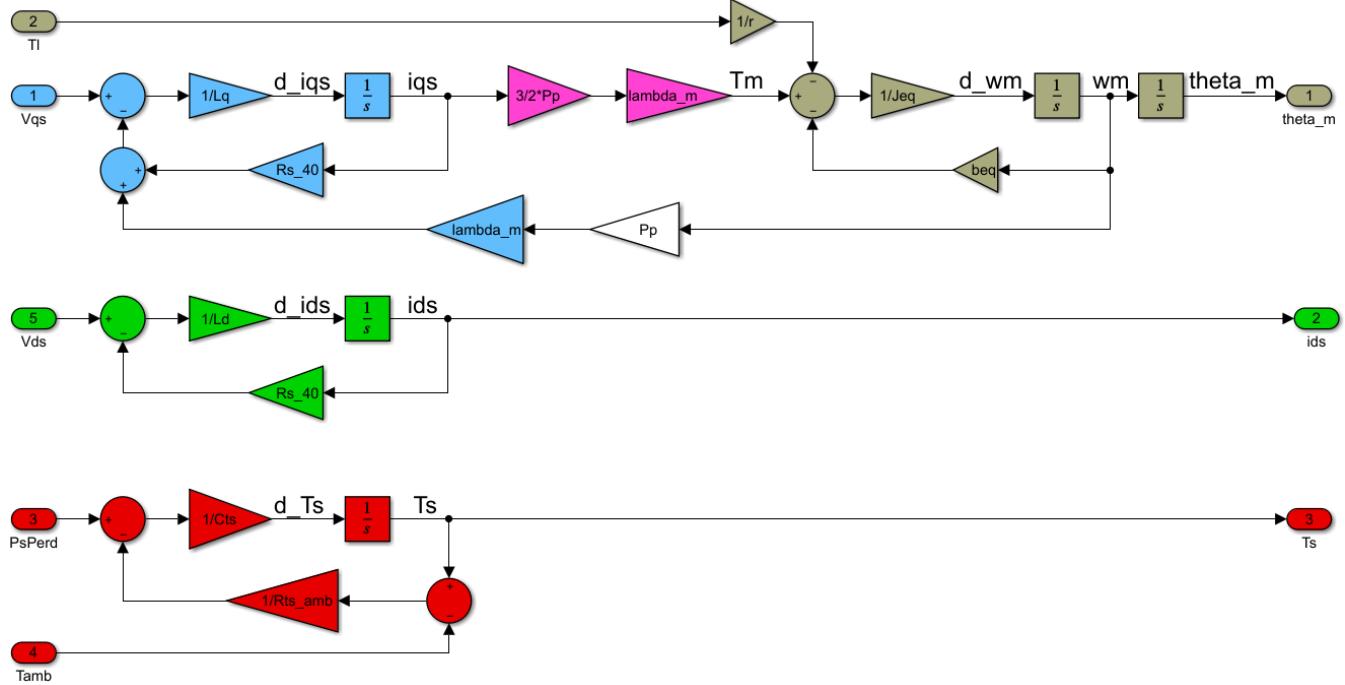


Diagrama de bloques del Modelo simplificado LTI equivalente Aumentado

d) Comparación del modelo dinámico global LPV vs el modelo dinámico LTI equivalente aumentado.

Comparando el modelo LPV (54) con el modelo LTI aumentado (81), se tiene que el modelo LTI presenta la ventaja de ser un modelo con mucha mayor simplicidad, pero el modelo LPV es el que mejor representa al sistema real, ya que es el que mejor representa sus no linealidades, sobre todo cuando se trata con variaciones de $i_{ds}^r(t)$. Sin embargo, cuando se fuerza a $i_{ds}^r(t)=0$ (como se impuso para obtener el modelo LTI en el inciso 2c), $i_{qs}^r(t)=0$ por ser un sistema en equilibrio, y además considerando a considerar a $P_{sperd}(t)$ (67) de subsistema térmico como una entrada de perturbación, entonces las variaciones locales del sistema LPV quedan de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta\theta}_m(t) \\ \dot{\Delta\omega}_m(t) \\ \frac{d\Delta i_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta T_s^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3.P_p \cdot [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) \cdot i_{dso}^r(t)]}{2.J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{[\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{dso}^r(t)] \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{ts-amb} \cdot C_{ts}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta_m(t) \\ \Delta\omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta T_s^\circ(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\Delta v_{qs}^r(t)] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \\ P_{sPerd}(t) \end{bmatrix} \quad (82)$$

En donde los términos resaltados en color cian son igual a 0 por las condiciones mencionadas previamente. Con lo que se observa que el sistema LPV ha quedado igual al sistema LTI. Entonces como se ha demostrado que se puede obtener el modelo LTI a partir del modelo LPV, se puede concluir que el modelo LTI es solo un caso particular (una instancia) del sistema LPV.

Evaluación del modelo LPV para puntos de operación con Debilitamiento y Reforzamiento de campo:

Se pueden lograr diferentes comportamientos al cambiar el valor de $i_{dso}^r(t)$:

- $i_{dso}^r(t) = 0$: Funcionamiento normal., solo se tiene el flujo concatenado de los imanes.
- $i_{dso}^r(t) < 0$: Field weakening. Modo de trabajo en donde la corriente $i_{dso}^r(t)$ tiene el sentido opuesto al flujo magnético del rotor, o sea que se produce un debilitamiento del campo magnético de los imanes en el rotor. Lo que hace disminuir el valor de la tensión mal llamada ‘fuerza’ contraelectromotriz FCEM, resultando en un incremento de velocidad angular del motor, y consecuentemente un decrecimiento (aunque relativamente pequeño) de su torque. Cabe mencionar que al utilizar field weakening se debe operar con precaución, ya que la máquina se puede embalar.
- $i_{dso}^r(t) > 0$: Field forcing. Modo de trabajo en donde la corriente $i_{dso}^r(t)$ tiene el mismo sentido que el flujo magnético del rotor, o sea que se produce un reforzamiento del campo magnético de los imanes en el rotor. Lo que hace disminuir el valor de la tensión mal llamada ‘fuerza’ contraelectromotriz FCEM, resultando en un incremento de torque del motor (aunque relativamente pequeño), y consecuentemente un decrecimiento de su velocidad angular.

Lo mencionado anteriormente, se explica mediante la ecuación (20) del torque electromagnético y ecuación (21) de la tensión $v_{qs}^r(t)$, al considerar las variables $i_{qs}^r(t)$ y $v_{qs}^r(t)$ constantes. En (20), dado que $L_d > L_q$, entonces si la corriente $i_{ds}^r(t)$ es positiva $T_m(t)$ aumenta, y si es negativa $T_m(t)$ disminuye. Y en (21) se puede ver que al aumentar la corriente $i_{ds}^r(t)$ para que sea $v_{qs}^r(t)$ constante, entonces $\omega_m(t)$ debe disminuir. Por lo que se puede concluir que la variación de corriente $i_{ds}^r(t)$ es directamente proporcional al par $T_m(t)$, he inversamente proporcional a la velocidad angular $\omega_m(t)$. Esto permite llevar la máquina a velocidades superiores a la velocidad base (velocidad nominal para el máximo voltaje que entrega la fuente).

Adicionalmente cabe hacer notar que $T_m(t)$ y $\omega_m(t)$ no varían con la misma proporción respecto a un cambio de $i_{ds}^r(t)$, ya que de (20) se puede ver que $T_m(t)$ es directamente proporcional a $i_{ds}^r(t)$ mediante la diferencia $(L_d - L_q)$, en donde al ser L_d parecido a L_q , dicha diferencia es muy pequeña, por lo que la variación de $T_m(t)$ con la $i_{ds}^r(t)$ es bastante pequeña. Mientras que se puede ver en (21) que $\omega_m(t)$ es inversamente proporcional a $i_{ds}^r(t)$ mediante únicamente el factor L_d , por lo que la variación de $\omega_m(t)$ con la $i_{ds}^r(t)$ es mayor en proporción a $T_m(t)$.

e) Funciones de Transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado.

Para poder analizar la estabilidad del sistema, se puede realizar un análisis de los polos a lazo abierto del mismo. Partiendo del sistema de ecuaciones (64), y pasando las mismas al dominio de la frecuencia se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s^2 \cdot \Theta_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[-b_{eq} \cdot \Omega_m(s) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m \cdot I_{qs}^r(s) - \frac{T_l}{r} \right] \\ S \cdot I_{qs}^r = \frac{1}{L_q} \cdot [V_{qs}^r - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - P_p \cdot \lambda'_m \cdot \Omega_m(s)] \end{cases} \quad (83)$$

Despejando $I_{qs}^r(s)$ de la tercera ecuación de (83), reemplazándola en la segunda se obtiene, y sabiendo que $\Omega_m(s) = s \cdot \Theta_m(s)$:

$$I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q \cdot s + R_s} \cdot [V_{qs}(s) - P_p \cdot \lambda'_m \cdot \Omega_m(s)] \quad (84)$$

$$s^2 \cdot \Theta_m = \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left[-b_{eq} \cdot s \Theta_m + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m \cdot \left(\frac{1}{L_q \cdot s + R_s} \cdot [V_{qs}(s) - P_p \cdot \lambda'_m \cdot s \cdot \Theta_m(s)] \right) - \frac{T_l(s)}{r} \right] \quad (85)$$

Y operando de manera algebraica en las ecuaciones que definen el sistema (83) se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

$$G_{V_{qs}}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}(s)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda'_m}{(J_{eq} \cdot L_q) \cdot s^3 + (J_{eq} \cdot R_s + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s^2 + \left(b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^r_m \right) \cdot s} \quad (86)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{L_q \cdot s + R_s}{(J_{eq} \cdot L_q) \cdot s^3 + (J_{eq} \cdot R_s + b_{eq} \cdot L_q) \cdot s^2 + \left(b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^r_m \right) \cdot s} \quad (87)$$

En donde se observa que $G_{T_l}(s)$, aporta un cero en $s = -\frac{R_s(t)}{L_q}$.

3) Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado.

a) Determinación de polos y ceros, y cálculo de frecuencias naturales y amortiguamiento:

Para hallar las frecuencias naturales se debe llegar a una ecuación de la forma:

$$s^2 + 2 \cdot \zeta \omega_m \cdot s + \omega_m^2 = 0 \quad (88)$$

Entonces tomando el denominador de las funciones de transferencia, sacándole factor común s, e igualando sus términos con (88), se obtienen las expresiones:

$$2 \cdot \zeta \cdot \omega_m = \frac{1}{(J_{eq} \cdot L_q)} \cdot (J_{eq} \cdot R_s + b_{eq} \cdot L_q) \quad (89)$$

$$\omega_m^2 = \frac{1}{(J_{eq} \cdot L_q)} \cdot \left(b_{eq} \cdot R_s + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda'^r_m \right) \quad (90)$$

A continuación, se muestran los resultados de las frecuencias naturales y factores de amortiguamiento relativo obtenidos con MatLab, al variar los parámetros del sistema a lazo abierto.

Rsmin					
Wn mínimo	Wn nominal	Wn máximo	ξ mínimo	ξ nominal	ξ máximo
357.3817	314.5047	284.1034	0.2506	0.2838	0.3135

Tabla 1

En la Tabla 1 se observa que, si se toman los parámetros mínimos del sistema, con la resistencia del estator mínima, entonces la frecuencia natural del sistema aumenta y el amortiguamiento disminuye. A medida que los parámetros aumentan, la frecuencia natural del sistema disminuye y el amortiguamiento crece.

Rsmax					
Wn mínimo	Wn nominal	Wn máximo	ξ mínimo	ξ nominal	ξ máximo
357.6192	314.7229	284.3089	0.3228	0.3658	0.4042

Tabla 2

En la Tabla 2 se observan resultados similares a los obtenidos en la Tabla 1, en cuanto a las frecuencias naturales del sistema, al variar los parámetros con resistencia del estator máxima. Pero, al aumentar la resistencia del estator se observa que el amortiguamiento aumenta aproximadamente un 29%. Lo cual, al no ser un porcentaje despreciable, nos lleva a la conclusión de que $R_s(t)$ no se puede tomar como una constante del sistema.

Además, mediante el uso de Matlab, también se calcularon los polos y ceros a lazo abierto del sistema LTI equivalente aumentado, los cuales se muestran en los siguientes planos de Laplace (Figura 13 y Figura 14):

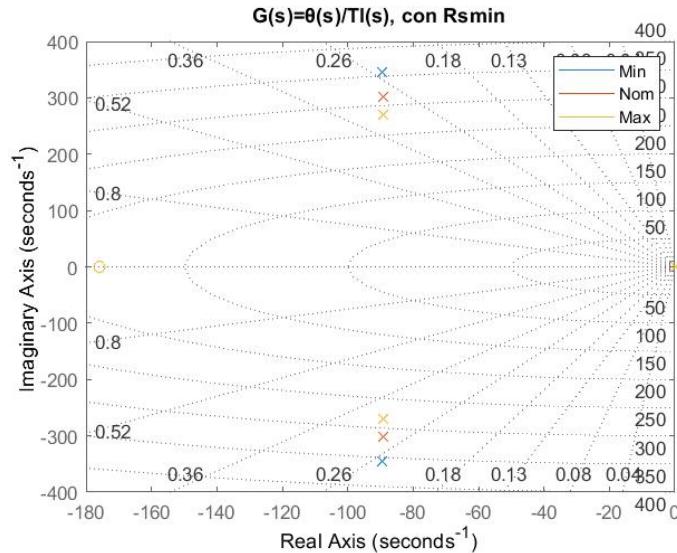


Figura 10. Diagrama de Polos y ceros con Rsmín

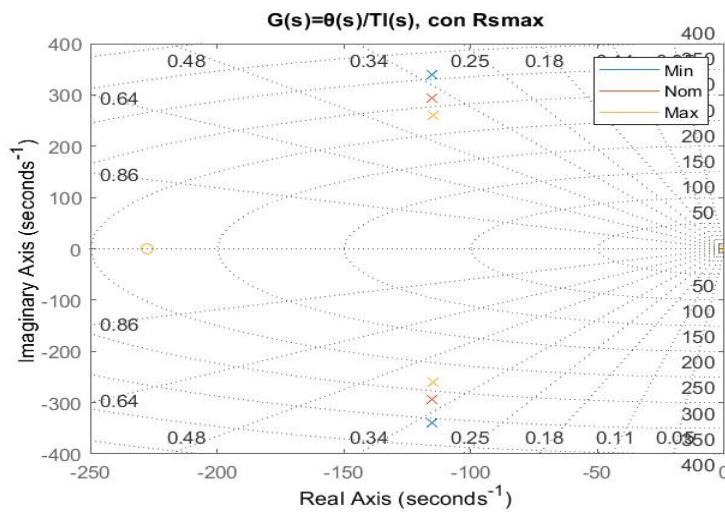


Figura 11. Diagrama de Polos y ceros con Rsmáx

Al observar los diagramas de polos y ceros del sistema con respecto a la posición sobre la tensión en cuadratura del rotor vista desde el estator, se observa que el comportamiento del sistema es subamortiguado, debido a que cuenta con dos polos compuestos conjugados. Además, se observa un polo en cero, lo cual indica que el sistema posee un integrador puro.

b) Evaluación de estabilidad parcial y completa, y dinámica de los ceros:

La estabilidad es una propiedad fundamental, que hay que tener en cuenta en los sistemas dinámicos, y fundamentalmente cuando se aplica control. La estabilidad depende únicamente de la matriz de estado A del sistema, ya que

tiene que ver con los modos naturales de vibrar, los cuales se relacionan con los polos que producen los valores dentro de dicha matriz A.

Un sistema LTI es Estable, si para toda excitación $u(t)$ acotada en $t > t_0$ [es decir en respuesta forzada] todos sus estados $x_i(t)$ toman valores acotados; y si desaparece la excitación $u(t) \equiv 0$ [es decir en respuesta natural], el estado tiende al origen del espacio de estado $x=0$.

El criterio de estabilidad establece que un sistema LTI es estable si todos los autovalores de A tienen parte real negativa.

Por esto dicho, entonces el sistema posee estabilidad completa, ya que los 3 polos del sistema se encuentran en el semiplano negativo del plano de Laplace.

4) Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado.

A continuación, se procede a analizar la observabilidad completa de estado, primero del modelo LTI equivalente, y luego del modelo LTI equivalente aumentado. En donde no se considera la variable de estado $T_s^\circ(t)$, ya que contiene no linealidades.

Un sistema LTI es Observable, si con el sistema en el estado inicial, es posible determinar dicho estado a partir de la observación de la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito. Lo cual es solo posible si cada transición de estado afecta a cada elemento del vector de salida $y(t)$, es decir, que tiene que haber una conexión entre la dinámica natural del sistema y la salida $y(t)$. Por lo que la observabilidad depende de la matriz de salida C del sistema, y claro también de su matriz de estado A.

Para el análisis de la observabilidad completa de estado se utiliza el criterio de Kalman, el cual dice que se puede garantizar que un sistema LTI de rango n es totalmente observable, si el rango de la matriz ϑ de observabilidad (91), es igual a la cantidad de variables de estado n del sistema. Siendo la matriz de observabilidad:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (91)$$

En donde, A es la matriz de estado del sistema del modelo LTI equivalente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_m \cdot P_p}{J_{eq}} & -\frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{\lambda_m \cdot P_p}{J_{eq}} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \quad (92)$$

Y C es la matriz de salida, correspondiente a la salida de posición $\theta_m(t)$ (medida con encoder):

$$C = [1 \ 0 \ 0] \quad (93)$$

Con lo que la matriz de observabilidad desde la salida medida $\theta_m(t)$ queda:

$$\vartheta_{\theta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Y como el rango de ϑ_{θ_m} es 3, y la cantidad de variables de estado también es 3, por lo que el sistema si es totalmente observable. Esto nos garantiza que todos los estados del sistema se pueden observar si se toma como salida a la variable de estado de posición angular $\theta_m(t)$.

Alternativamente, también se evalúa la observabilidad, pero tomando como salida a la velocidad $\omega_m(t)$, medida con un tacogenerador. Por lo que la matriz de salida C ahora es:

$$C = [0 \ 1 \ 0] \quad (95)$$

Y la matriz de observabilidad desde la salida medida $\omega_m(t)$ queda:

$$\vartheta_{\omega_m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2}{J_{eq}^2} - \frac{3 \cdot \lambda_m^2 \cdot P_p^2}{2 \cdot J_{eq}^2} & -\frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p \cdot b_{eq}}{2 \cdot J_{eq}^2} - \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p \cdot R_s}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{bmatrix} \quad (96)$$

Pero como el rango de ϑ_{θ_m} es 2, mientras que la cantidad de variables de estado es 3, lo cual nos indica que no serán observables todos los estados si se toma como salida a la variable de estado de velocidad angular $\omega_m(t)$. Esto es debido a que se pierde la variable de estado de posición angular $\theta_m(t)$, como consecuencia de que no se obtiene referencia de posición inicial al realimentar el sistema con la velocidad angular $\omega_m(t)$. **Lo que tiene sentido, ya que, para obtener la posición a partir de la velocidad, se debe integrar, por lo que queda una constante desconocida en el proceso de integración.**

Sistema LTI equivalente Aumentado:

Para el caso del LTI aumentado, la matriz de estado A del sistema del modelo LTI aumentado es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & -\frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_m \cdot P_p}{J_{eq}} & -\frac{R_s}{L_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s}{L_d} \end{bmatrix} \quad (97)$$

La matriz de salida C ahora tendrá 4 columnas, ya que se agrega la variable de estado $i_{ds}^r(t)$:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (98)$$

Con lo que la matriz de observabilidad desde la salida medida $\theta_m(t)$ es:

$$\vartheta_{\theta_m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 * P_p * \lambda_m}{2 * J_{eq}} & 0 \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 - 3 * P_p^2 * \lambda_m^2}{2 * J_{eq}^2} & -\left(\frac{3 * P_p * \lambda_m * b_{eq}}{2 * J_{eq}^2} + \frac{3 * P_p * \lambda_m * R_s}{2 * J_{eq} * L_q}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Por lo que como tiene rango de 3, mientras que la cantidad de variables de estado es 4, entonces el sistema no es observable desde $\theta_m(t)$ (y por tanto tampoco desde $\omega_m(t)$), ya que no se puede estimar el valor de la corriente $i_{ds}^r(t)$.

Si ahora colocamos un sensor para medir la corriente $i_{ds}^r(t)$, con el vector de salida (100) procederemos a calcular la matriz de observabilidad.

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \quad (100)$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_s} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{R_s}{L_d} \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 * P_p * \lambda_m}{2 * J_{eq}} & \frac{R_s^2}{L_d^2} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2 - 3 * P_p^2 * \lambda_m^2}{2 * J_{eq}^2} & -\left(\frac{3 * P_p * \lambda_m * b_{eq}}{2 * J_{eq}^2} + \frac{3 * P_p * \lambda_m * R_s}{2 * J_{eq} * L_q}\right) & -\frac{R_s^3}{L_d^3} \end{bmatrix} \quad (101)$$

En la matriz (101), se observa que al agregar el sensor de corriente, el sistema es ahora completamente observable, ya que el rango de la matriz es de 4 al igual que el número de variables de estado del sistema.

5) Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado (ítem 2.c.VI) desde entrada manipulada $v_{qs}^r(t)$, sin considerar la perturbación de la carga mecánica.

A continuación, se procede a analizar la controlabilidad completa de estado, también se analizó primero el modelo LTI equivalente, y luego el LTI equivalente aumentado. Y tampoco se considera la variable de estado $T_s^\circ(t)$. Y tampoco se considera la perturbación de la carga mecánica.

Un sistema LTI es Controlable, si se puede transferir desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control $u(t)$ no restringido, en un intervalo de tiempo finito. Es decir, si manipulando las variables de entrada de manipulación, se puede influir en todas las variables de estado. Por lo que la controlabilidad depende de la matriz de entrada B del sistema, y claro también de su matriz de estado A.

Para el análisis de la controlabilidad completa de estado se utiliza el criterio de Kalman, el cual dice que se puede garantizar que un sistema LTI de rango n es totalmente controlable, si el rango de la matriz C de observabilidad (102), es igual a la cantidad de variables de estado n del sistema. Siendo la matriz de controlabilidad:

$$C = [B \ A \cdot B \ \dots \ A^{n-1} \cdot B] \quad (102)$$

En donde, la matriz A de estado del sistema del modelo LTI equivalente es (92). Mientras que B es la matriz de entrada, correspondiente a solamente la entrada manipulada $v_{qs}^r(t)$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ L_q \end{bmatrix} \quad (103)$$

Con lo que la matriz de controlabilidad desde la entrada manipulada $v_{qs}^r(t)$ queda:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \\ 0 & \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & \left(-\frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq}^2 \cdot L_q^2} \right) \cdot (b_{eq} \cdot L_q + R_s \cdot J_{eq}) \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{-3 \cdot \lambda_m^2 \cdot P_p^2 \cdot L_q^2 + 2 \cdot R_s^2 \cdot J_{eq}^2}{2 \cdot J_{eq}^2 \cdot L_q^3} \end{bmatrix} \quad (104)$$

Y como el rango de C es 3, y la cantidad de variables de estado también es 3, por lo que el sistema si es totalmente controlable. Esto nos garantiza que, mediante las variables de entrada manipuladas, que en este caso es solo $v_{qs}^r(t)$, se va a poder controlar el valor de todas las variables de estado.

Sistema LTI equivalente Aumentado:

Para el caso del LTI aumentado, se tiene la matriz de estado A del sistema del modelo LTI aumentado es la mostrada en (97), mientras que el vector de entrada del sistema LTI aumentado ahora es:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} \end{bmatrix} \quad (105)$$

Con lo que la matriz C de controlabilidad queda como:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & 0 & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot (L_a \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{2 \cdot L_q^2 \cdot J_{eq}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot \lambda_m \cdot P_p}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & 0 & -\frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{2 \cdot L_q^2 \cdot J_{eq}^2} & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot (3 \cdot L_q^2 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r^2} + 2 \cdot L_q^2 \cdot b_{eq}^2 + 2 \cdot L_q \cdot R_s \cdot b_{eq} \cdot J_{eq} + 2 \cdot R_s^2 \cdot J_{eq}^2)}{4 \cdot L_q^3 \cdot J_{eq}^3} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & -\frac{R_s}{L_q^2} & 0 & \frac{-3 \cdot \lambda_m^2 \cdot P_p^2 \cdot L_q^2 + 2 \cdot R_s^2 \cdot J_{eq}^2}{2 \cdot J_{eq}^2 \cdot L_q^3} & 0 & -\frac{3 \cdot b_{eq} \cdot L_q^3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r^2} + 6 \cdot L_q^2 \cdot P_p^2 \cdot R_s \cdot J_{eq} \cdot \lambda_m^{r^2} + 2 \cdot R_s^3 \cdot J_{eq}^3}{2 \cdot L_q^4 \cdot J_{eq}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & -\frac{R_s}{L_d^2} & 0 & \frac{R_s^2}{L_d^3} & 0 & \frac{R_s^3}{L_d^4} \end{bmatrix} \quad (106)$$

Como se puede observar el rango de la matriz de controlabilidad es 4, y es igual al número de variables de estado que ahora son 4, por lo que el sistema LTI aumentado si es totalmente controlable.

Notar que al sistema LTI aumentado se le agregó la consigna de control $v_{ds}^r(t)$, es decir se agregó la segunda columna en la matriz de entrada B, para poder tener un sistema totalmente controlable. De lo contrario, solo con la acción de control de $v_{qs}^r(t)$, se obtendría un rango de 3 en la matriz C de controlabilidad, es decir que no sería un sistema totalmente controlable. Y esto último tiene sentido, ya que sin la acción de control de $v_{ds}^r(t)$ no se podría influir en el estado de la $i_{ds}^r(t)$.

6) Simulación dinámica en DT, comparando el modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL vs LTI equivalente aumentado, comparando $i_{ds}^r(0) = \pm 0.5A$ vs $i_{ds}^r(0) = 0 A$:

Para realizar las simulaciones, se considera una consigna de pulso de tensión de estator en eje q de +19,5966 Vcc entre 0,1 y 0,7 segundos, superpuesta con un doble pulso de torque de carga: +6,28 N.m entre 0.3 y 0.5 segundos, y -6,28 N.m entre 0.5 y 0.9 segundos.

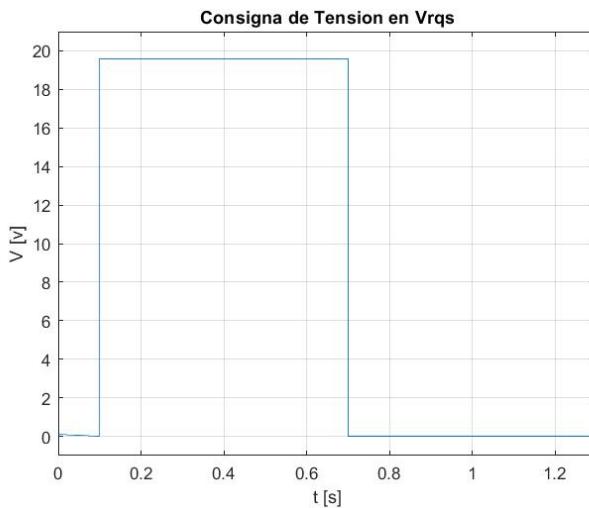


Figura 12. Consigna de $v_{qs}^*(t)$.

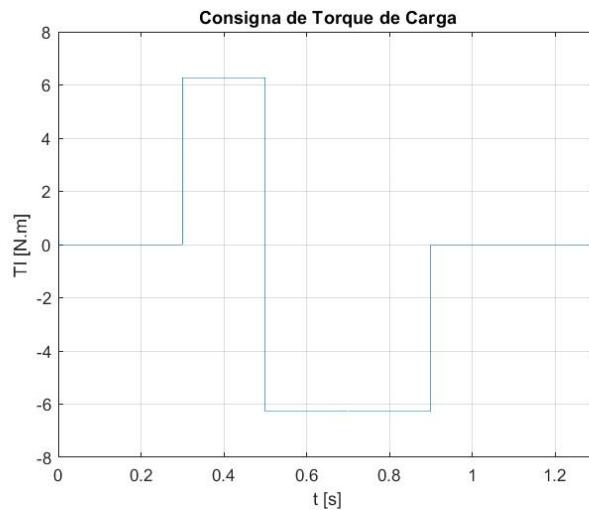


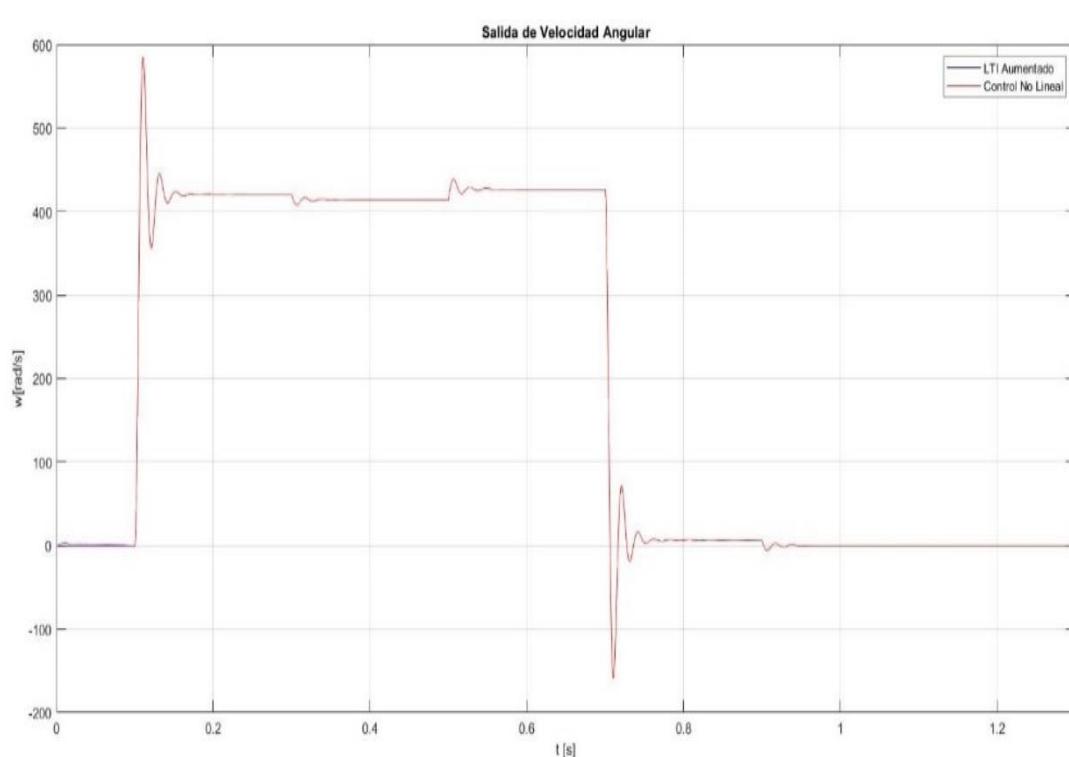
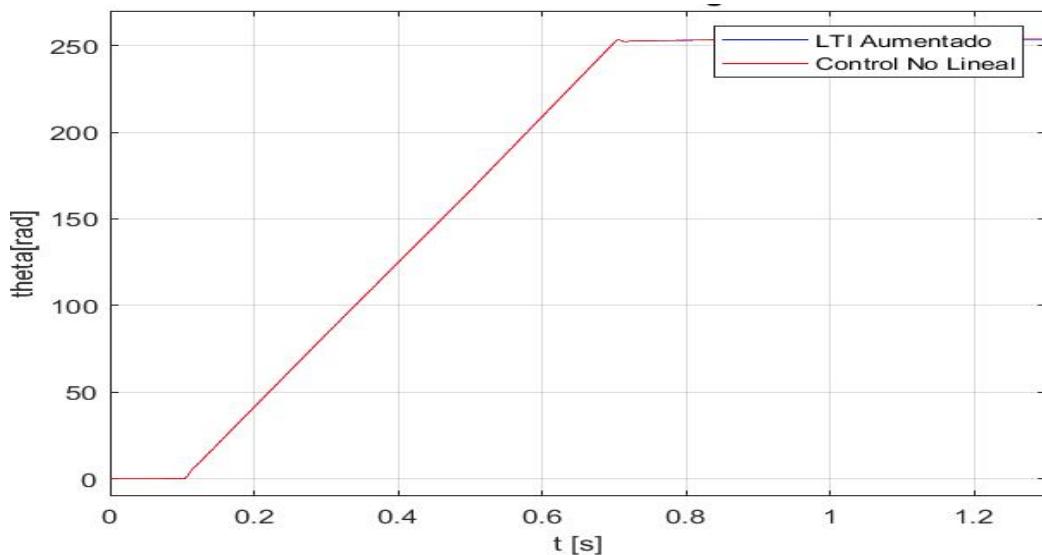
Figura 13. Consigna de $T_l(t)$.

a) Respuesta del estado interno.

A continuación, se comparan las respuestas del estado interno para los dos modelos desarrollados anteriormente, el modelo no lineal y el modelo LTI aumentado.

- EVOLUCIÓN DE LAS VARIABLES EN EL TIEMPO:

Las gráficas obtenidas de la evolución de las variables en el tiempo (con tensiones y corrientes en ambas coordenadas qd0 y abc3) son:



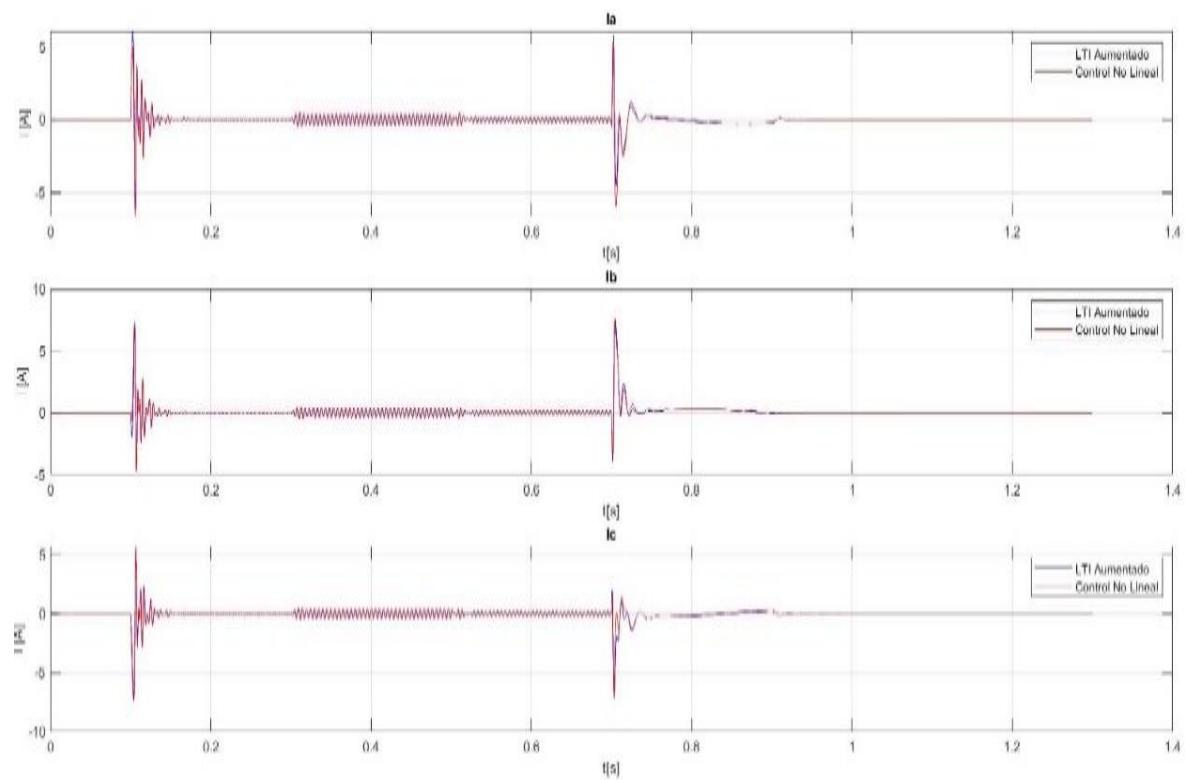


Figura 16. Corrientes $i_{abcs}(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A.

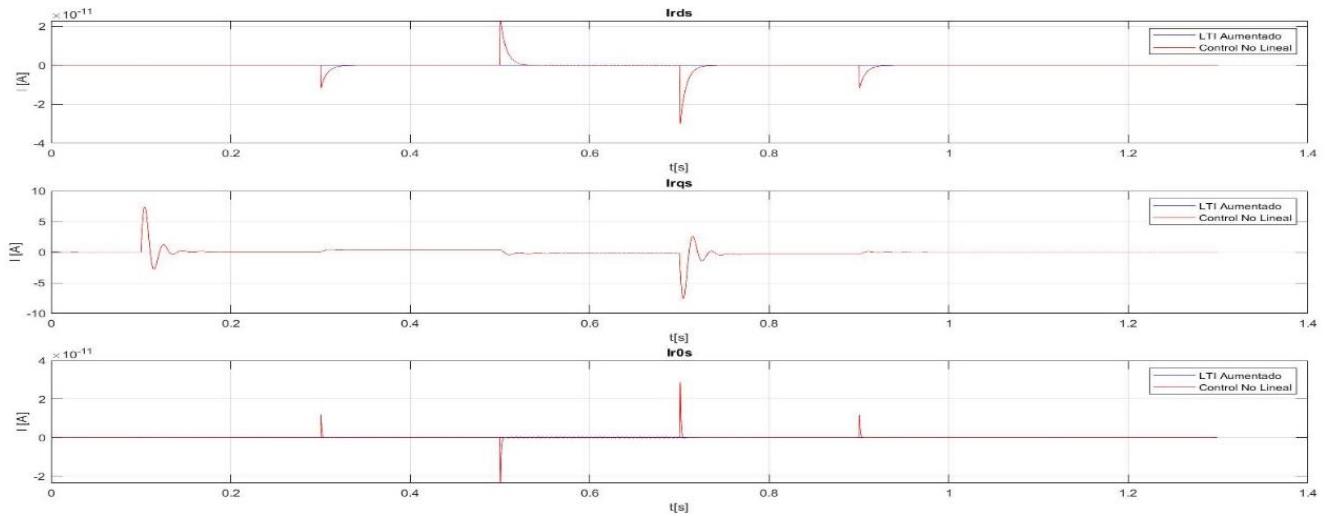


Figura 17. Corrientes $i_{qds}^r(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A.

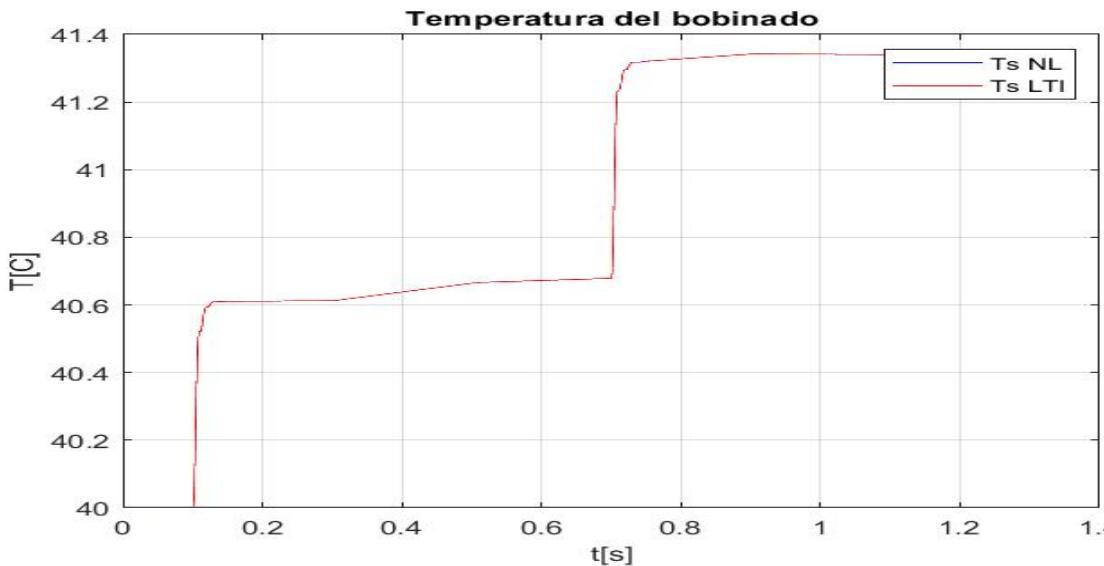


Figura 18. $T_s^o(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A.

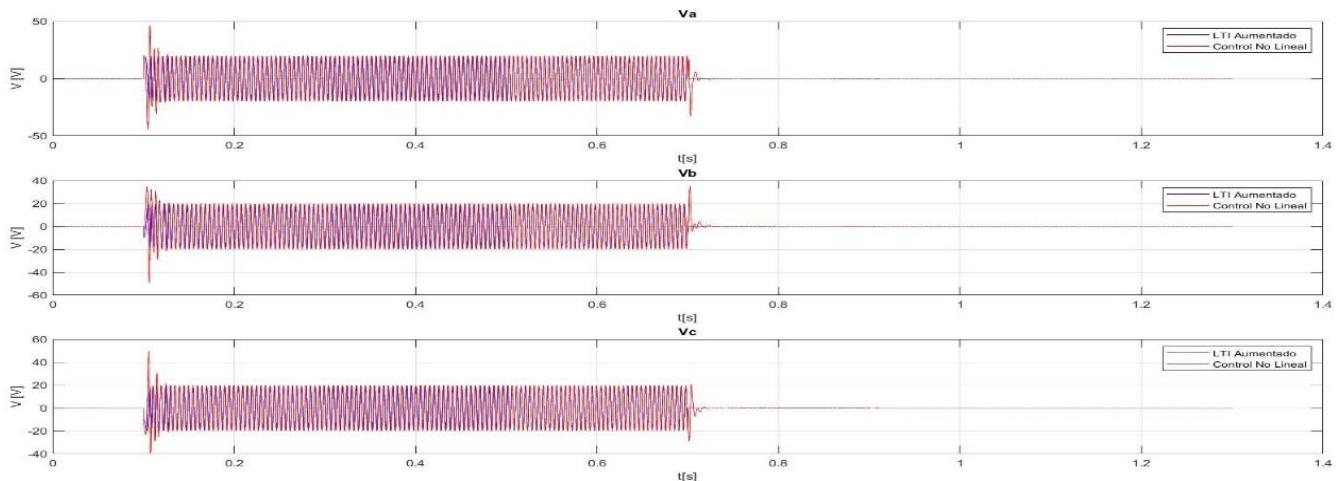


Figura 19. Voltajes $v_{abcs}(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A

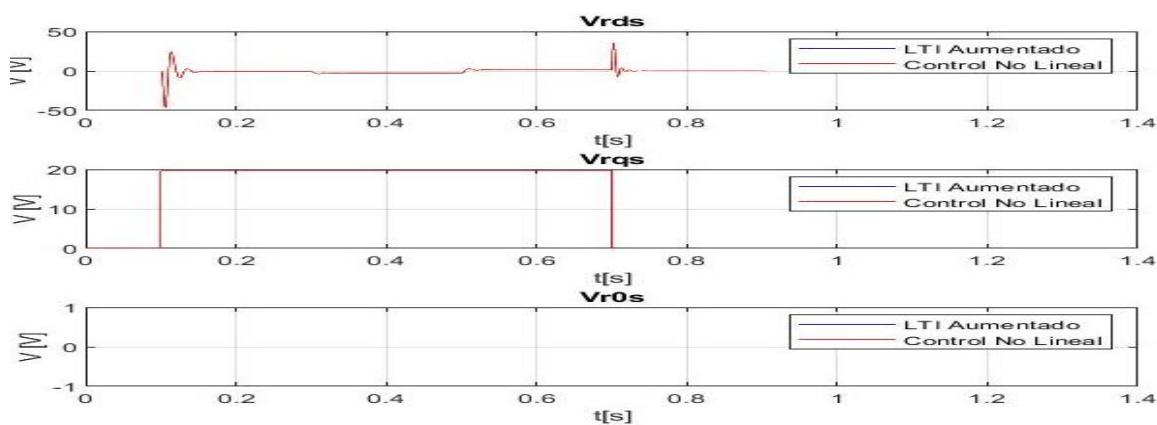


Figura 20. Voltajes $v_{qdo}^r(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A.

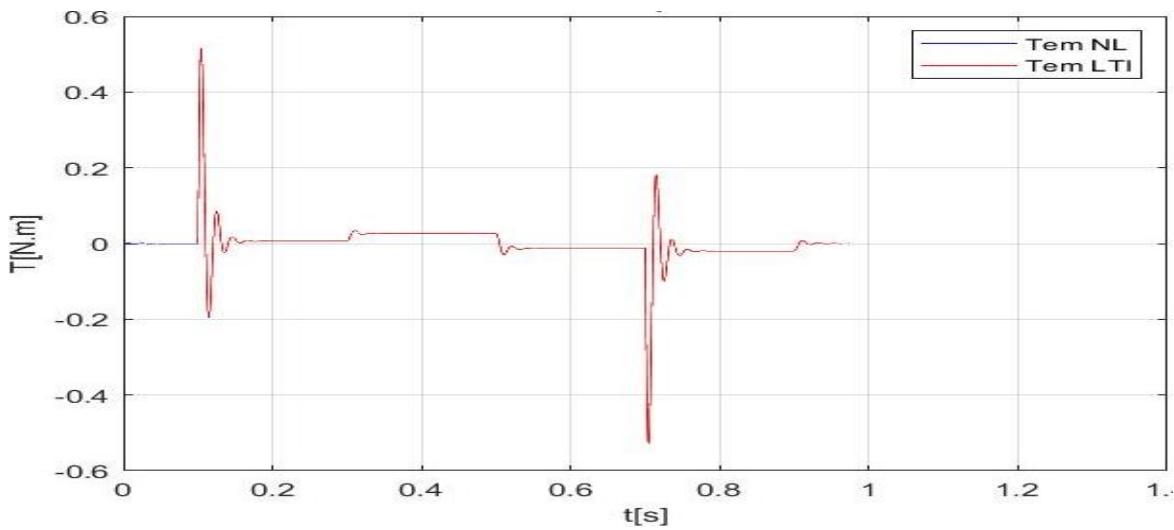


Figura 21. $T_m(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A.

CURVAS PARAMÉTRICAS:

La gráfica de las curvas paramétricas de $T_m(t)$ vs $\omega_m(t)$ es:

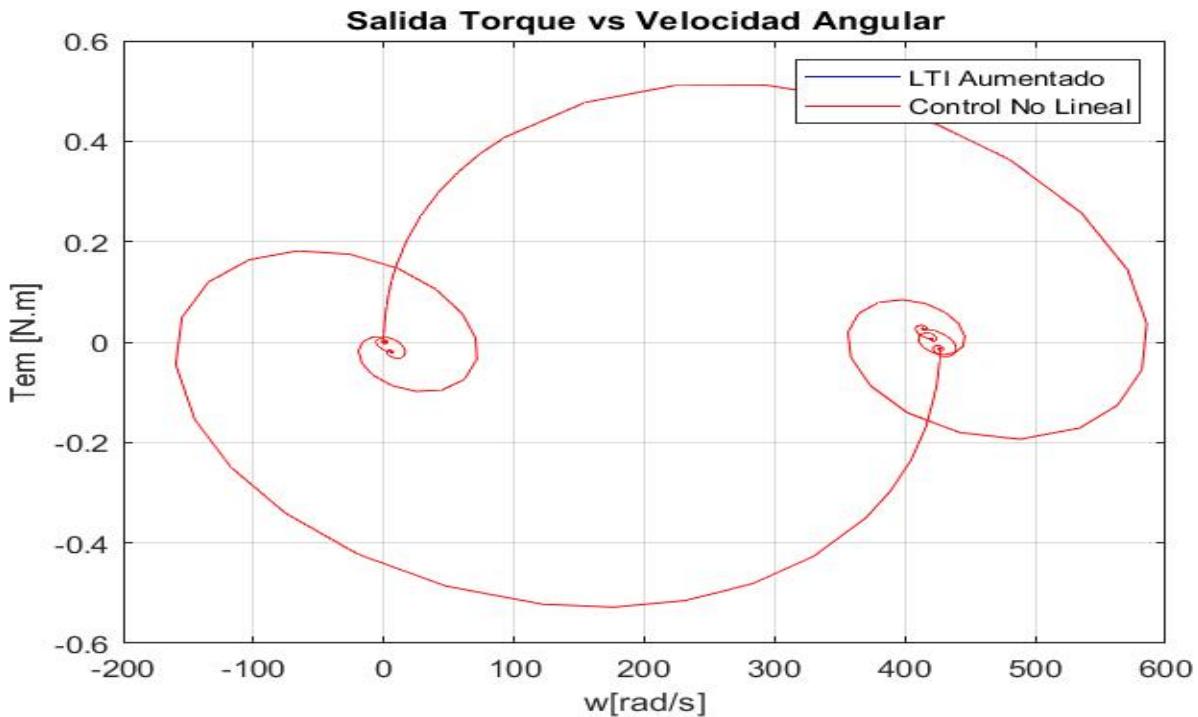


Figura 22. Curva Paramétrica $T_m(t)$ vs $\omega_m(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A.

Cuadrantes De Operación:

Al realizar un análisis sobre las curvas paramétricas Figura 25, se observa que el motor parte del reposo (velocidad y torque iguales a 0), y en el flanco de subida de la consigna de tensión $v_{qs}^r(t)$, el sistema entra en el **primer cuadrante de operación**. Es decir se entra en fase de motorización directa, en donde el T_m crece relativamente rápido al comienzo, aumentando el valor de la ω_m , hasta alcanzar un valor máximo del T_m , luego del cual, al seguirse incrementando el valor de la ω_m , el T_m comienza a disminuir cada vez más, hasta alcanzar el valor de 0 N.m, en donde se alcanza el valor máximo de ω_m . En este momento, ocurre un sobrepico de velocidad generado por el flanco ascendente del pulso de tensión, y la velocidad se establece alrededor del punto de operación a bajo torque. Aquí, se pasa del primer al **segundo cuadrante de operación**, correspondiente al frenado en sentido directo, en donde se tiene un T_m de signo contrario para disminuir el valor positivo de la ω_m . Así, luego se vuelve al primer cuadrante de operación y produciéndose oscilaciones en los valores de ω_m y T_m con cada vez menos amplitud, oscilaciones que corresponden a la respuesta transitoria del sistema, para establecerse en un valor permanente de ω_m y T_m .

Posteriormente, en el flanco de bajada de la consigna de tensión $v_{qs}^r(t)$, se puede observar una gran variación de la ω_m y el T_m , disminuyendo ambas variables a valores negativos, pasando así al **tercer cuadrante de operación** de motorización inversa. Y de forma similar a lo explicado para los primeros dos cuadrantes, se pasa al **cuarto cuadrante de operación** de frenado en sentido inverso, y establecerse nuevamente en otro valor permanente de ω_m y T_m .

b) Determinación de velocidad y corriente final de establecimiento, y especificaciones de la respuesta del sistema.

Como se puede observar, no se presentan diferencias significativas entre ambos modelos; salvo en cuanto a la temperatura, ya que para el desarrollo del modelo LTI no se tuvo en cuenta la acoplamiento del subsistema térmico. Dado que no se encontraron grandes diferencias entre dichos modelos, se procede a detallar los valores finales de establecimiento de la ω_m y i_{qs}^r , luego de los transitorios; y además se determinan las especificaciones: tiempo de crecimiento, momento de sobrepico, y tiempo de establecimiento, tanto de la velocidad angular como de las corrientes en coordenadas qd0 y abc referidas al estator:

$\omega_m(t)$					
Tiempo	Valor establecido de ω_m	Tiempo de crecimiento t_r	Momento de Sobrepico M_p	Tiempo de establecimiento t_s	Causa
0,1 s	421,3 rad/s	4,133 ms	581,8 rad/s	72,697 ms	Voltaje
0,3 s	414,3 rad/s	1,388 ms	416,9 rad/s	62,434 ms	Torque
0,5 s	426,3 rad/s	1,5 ms	439,3 rad/s	58,520 ms	Torque
0,7 s	5,53 rad/s	4,139 ms	-159,5 rad/s	70,592 ms	Voltaje
0,9 s	0,06 rad/s	1,498 ms	-5,736 rad/s	63,289 ms	Torque

Tabla 3

$i_{qs}^r(t)$					
Tiempo	Valor establecido de i_{qs}^r	Tiempo de crecimiento t_r	Momento de Sobrepico M_p	Tiempo de establecimiento t_s	Causa
0,1 s	0,0904 A	21,662 μ s	7,287 A	57,847 ms	Voltaje
0,3 s	0,381 A	4,14 ms	0,484 A	72,481 ms	Torque
0,5 s	-0,188 A	4,122 ms	-0,416 A	70,200 ms	Torque
0,7 s	-0,296 A	21,412 μ s	-7,581 A	69,887 ms	Voltaje
0,9 s	0 A	4,171 ms	0,104 A	80,060 ms	Torque

Tabla 4

En primer lugar, se puede observar en las tablas 3 y 4 que, las mayores variaciones (en cada tramo de tiempo) del valor en que se establece ω_m es a causa de un escalón en la consigna del voltaje v_{qs}^r ; mientras que, las mayores variaciones de los valores de establecimiento del valor en que se establece i_{qs}^r es a causa de un escalón en la consigna del torque de carga T_l .

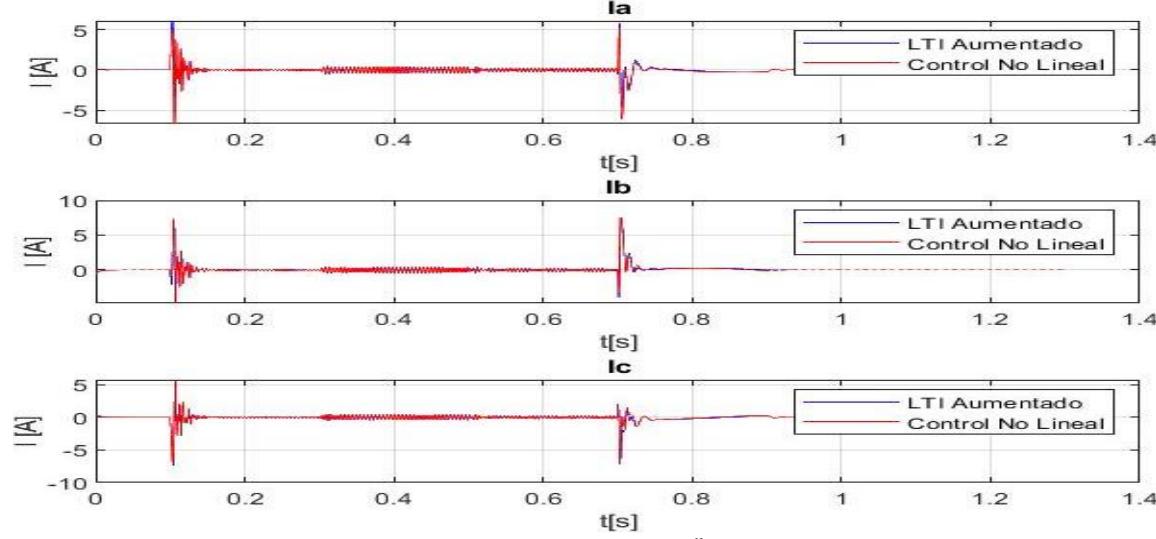
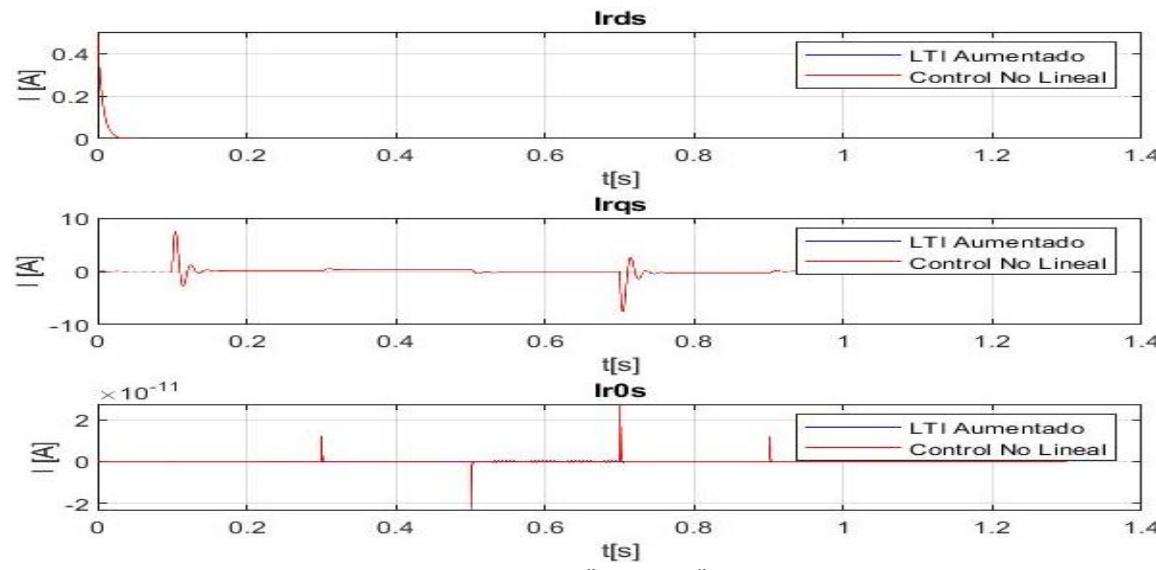
De la Figura 18. $\omega_m(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0$ A, se puede ver claramente que la influencia del voltaje v_{qs}^r sobre $\omega_m(t)$, es superior que la influencia de las perturbaciones de carga T_l sobre $\omega_m(t)$.

Además, con respecto a las especificaciones, se puede ver que la respuesta de velocidad angular $\omega_m(t)$ ante la consigna de la carga T_l es más rápida ósea posee un menor tiempo de crecimiento (lo cual es debido a la poca variación de amplitud de la velocidad que produce el escalón de torque de carga) que su respuesta al cambio de consigna de tensión v_{qs}^r . Aunque el tiempo de establecimiento de $\omega_m(t)$ es bastante similar para ambas causas.

En cuanto a la corriente i_{qs}^r , los tiempos de crecimiento son mayores cuando la causa es debida al voltaje v_{qs}^r , y los tiempos de establecimiento son menores (es decir, los transitorios que genera son menores, por lo que tarda menos tiempo en establecerse), que cuando la causa es la perturbación del torque de carga T_l . En la tabla 3 y 4 se observa que la corriente i_{qs}^r posee una mayor variación con la consigna de escalón de voltaje, aunque solo de forma transitoria.

c) Comparación de comportamiento de $i_{ds}^r(0)$ para $i_{ds}^r(0) = \pm 0,5 A$ vs $i_{ds}^r(0) = 0 A$.

A continuación, se realizaron las mismas simulaciones y gráficos, pero con las condiciones iniciales de $i_{ds}^r(0) = \pm 0,5 A$, para compararlas con la condición inicial de $i_{ds}^r(0) = 0 A$. En donde como las gráficas obtenidas de posición angular, velocidad angular y torque electromagnético son indistinguibles, se omitieron para no repetir figuras iguales, y por esto, solo se muestran las gráficas de corrientes y tensiones:

Figura 23. Corrientes $i_{abc}(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0,5 A$.Figura 24. Corrientes $i_{qds}^r(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0,5 A$.

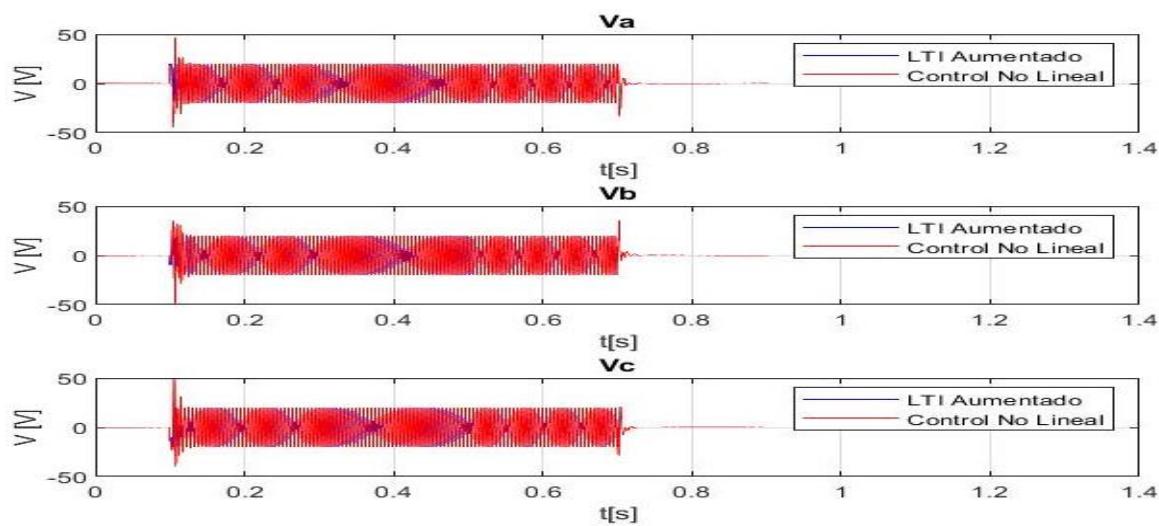


Figura 25. Voltajes $v_{abcs}(t)$ con $i_{ds}^r(0) = 0,5$ A.

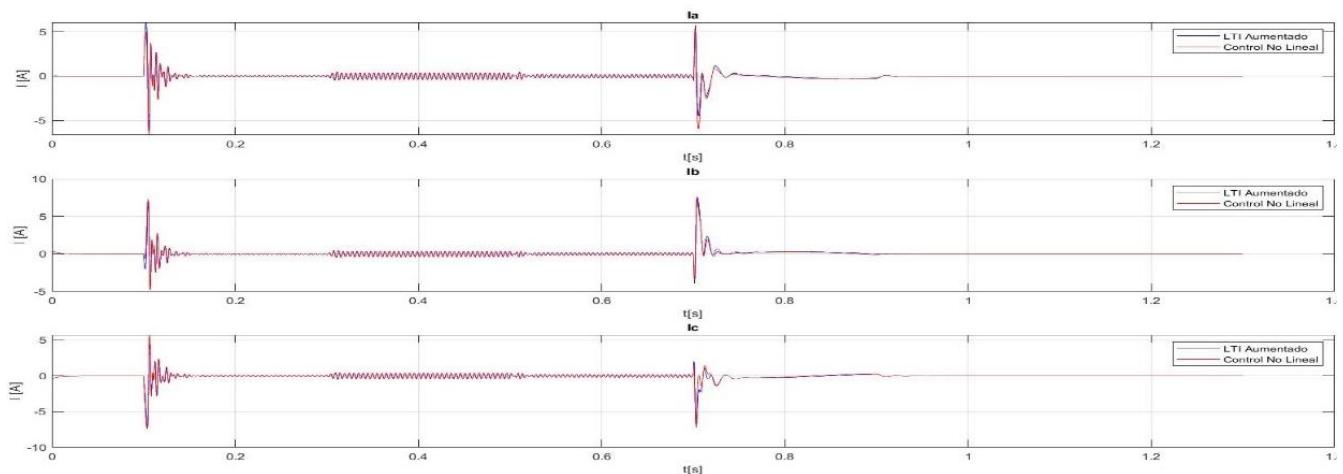


Figura 26. Corrientes $i_{abcs}(t)$ con $i_{ds}^r(0) = -0,5$ A.

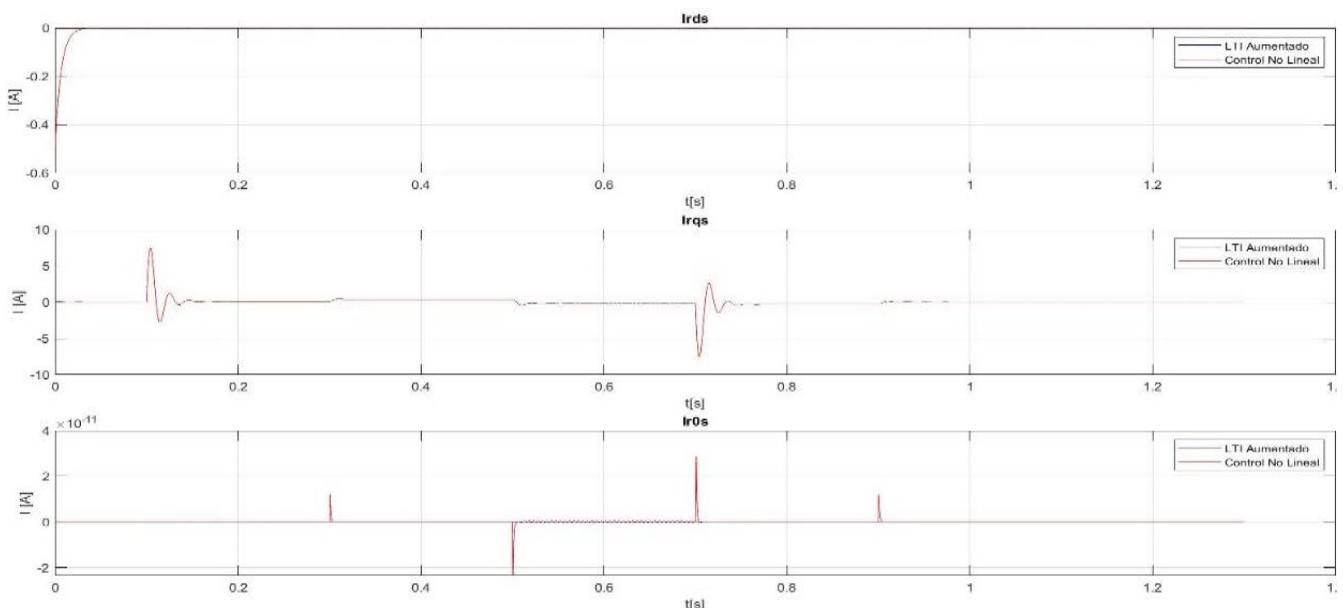


Figura 27. Corrientes $i_{qdos}^r(t)$ con $i_{ds}^r(0) = -0,5$ A.

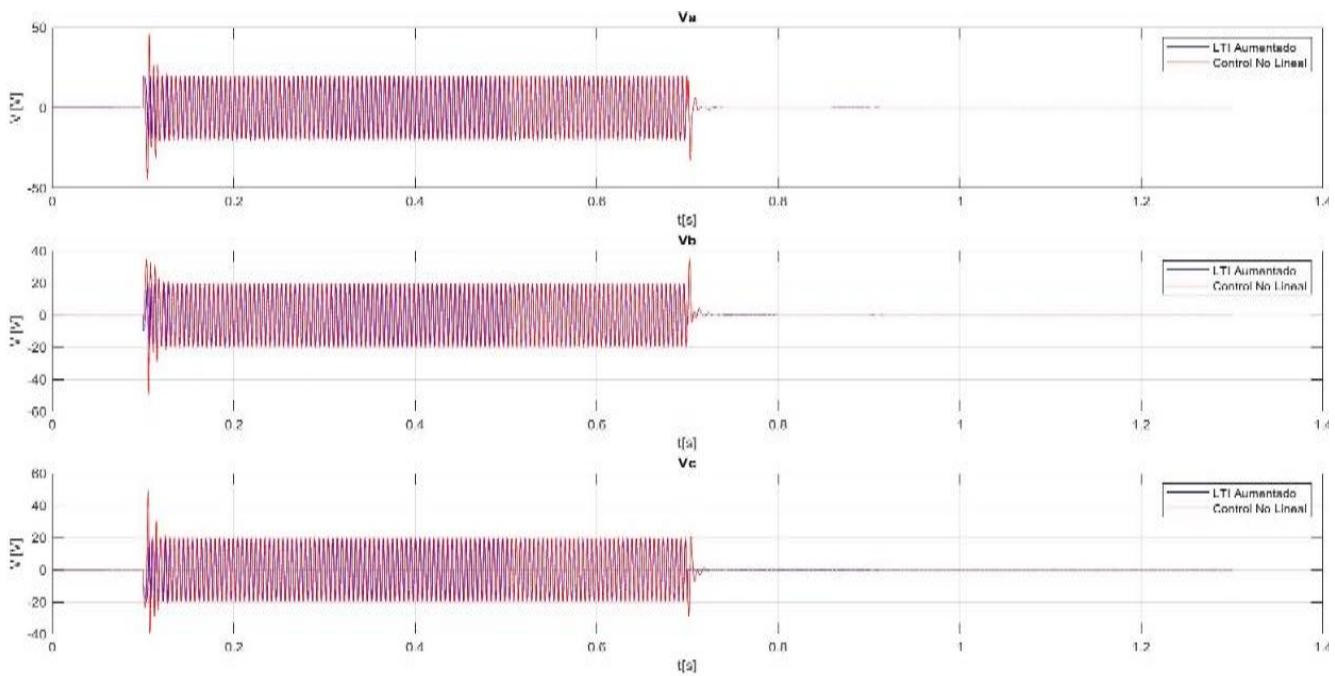


Figura 28. Voltajes $v_{abcs}(t)$ con $i_{ds}^r(0) = -0,5$ A.

Se puede observar un comportamiento transitorio exponencial de las corrientes, que rápidamente tienden a establecerse en 0 nuevamente según la constante de tiempo $\frac{R_s}{L_d}$ dada por (77).

En tanto que para tensiones de fase $v_{abcs}(t)$, se tiene un comportamiento similar exceptuando que en el modelo no lineal hay transitorios generados que luego son compensados y los valores de dichas tensiones se establecen en los mismos valores que para el LTI.

d) Agregado de una consigna de tensión $V_{ds}^r(t)$.

Finalmente se agrega una consigna de tensión $V_{ds}^r(t) = 0$ en $t = 0$ s, $V_{ds}^r(t) = 1,9596$ V en el tiempo $t = 5$ s, es decir se aplica field forcing (Reforzamiento de campo $V_{ds}^r(t) = 1,9596 v$), y field weakening (Debilitamiento de campo $V_{ds}^r(t) = -1,9596 v$) respectivamente, a fin de comparar los efectos que produce en ambos sistemas. Cabe destacar que las conclusiones siguientes fueron tomadas aplicando también la consigna de escalón de tensión en el eje q $v_{qs}^r(t)$, y la perturbación de torque de carga $T_l(t)$.

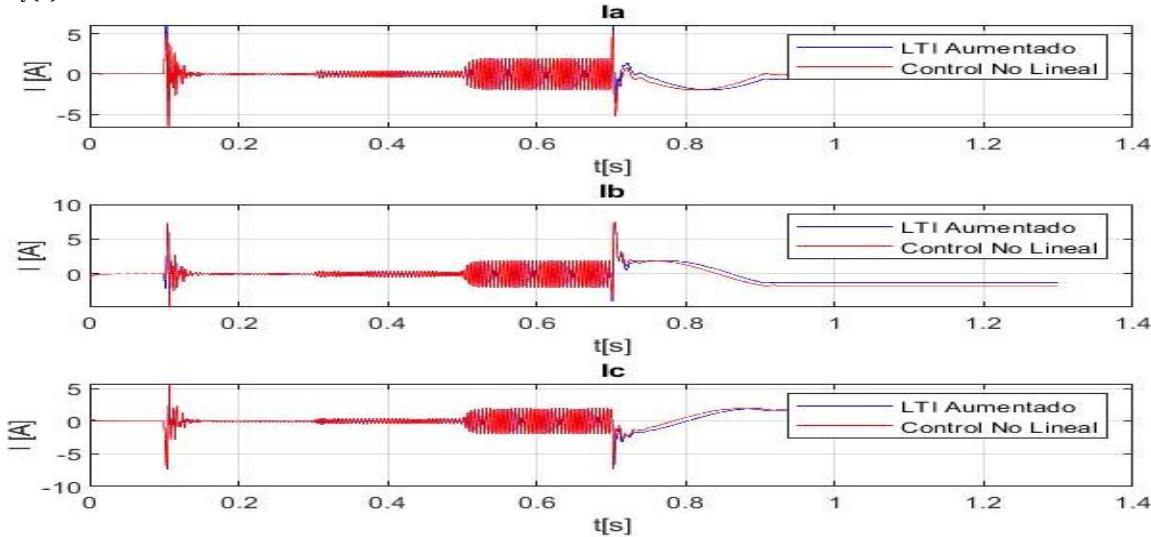


Figura 29. Corrientes $i_{abcs}(t)$ con Fiel Forcing.

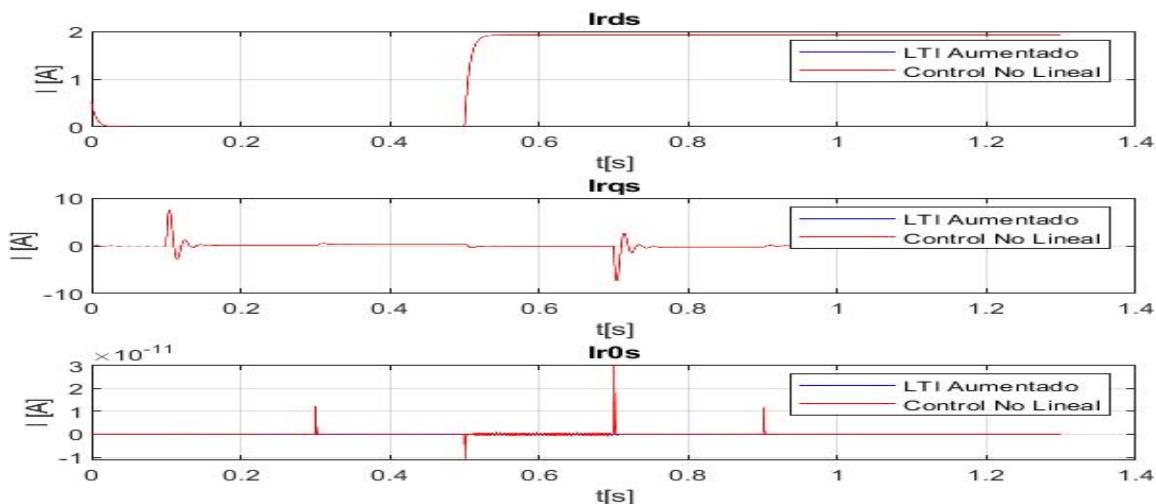


Figura 30. Corrientes $i_{qd0s}^r(t)$ con Fiel Forcing.

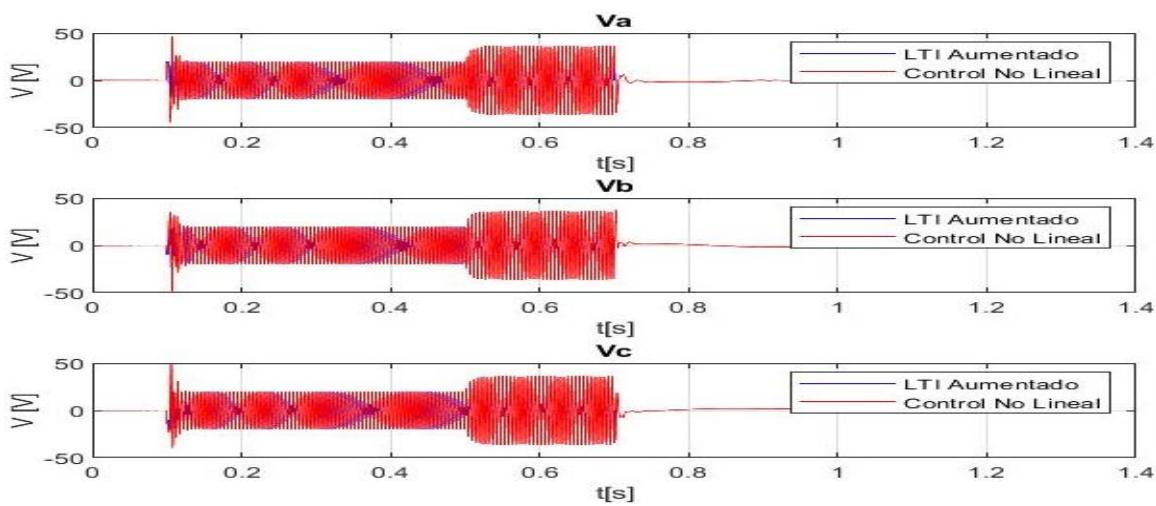


Figura 31. Voltajes $v_{abcs}(t)$ con Fiel Forcing.

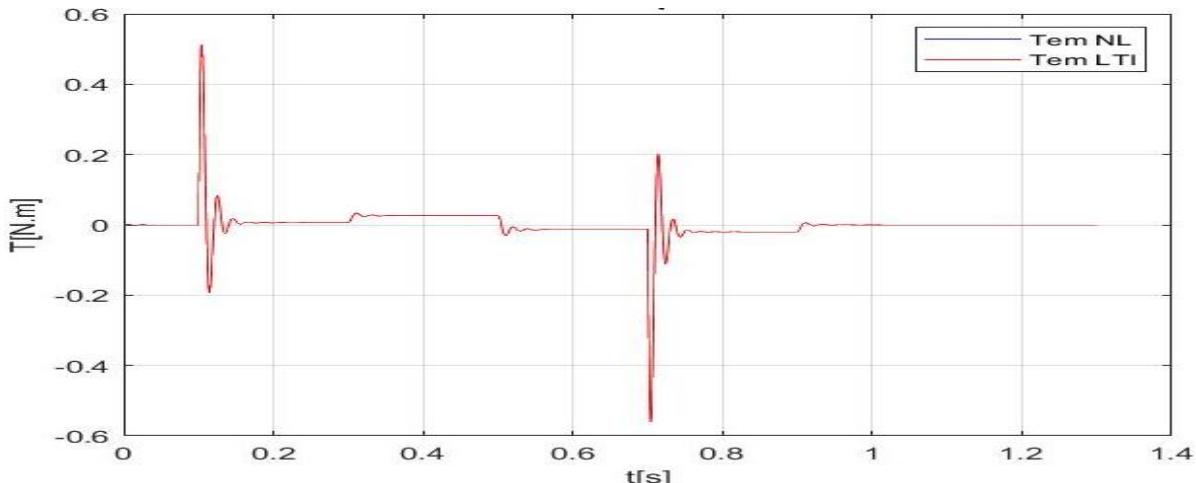


Figura 32. $T_m(t)$ con Fiel Forcing.

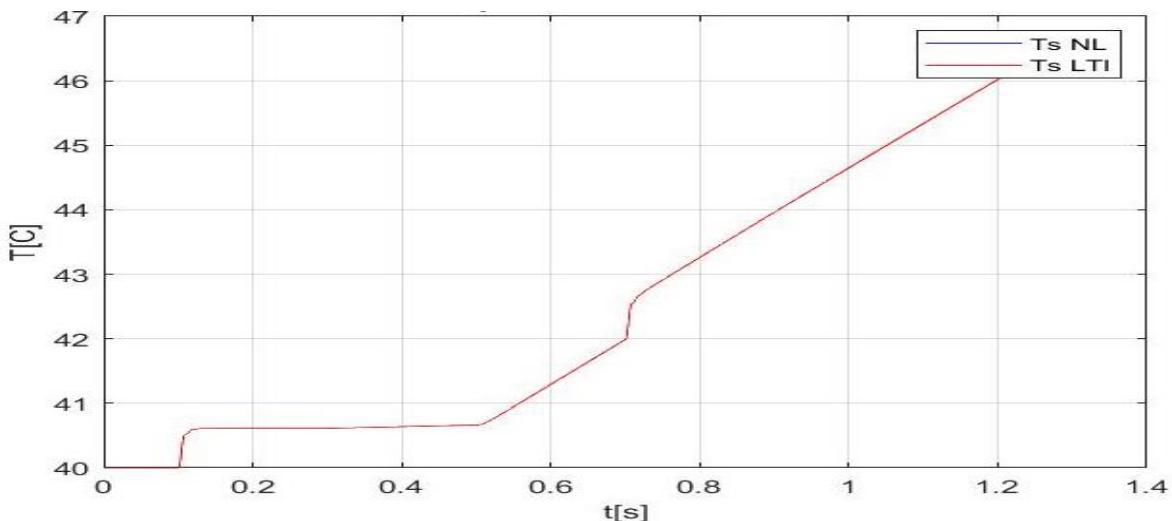


Figura 33. $T_s^\circ(t)$ con Fiel Forcing.

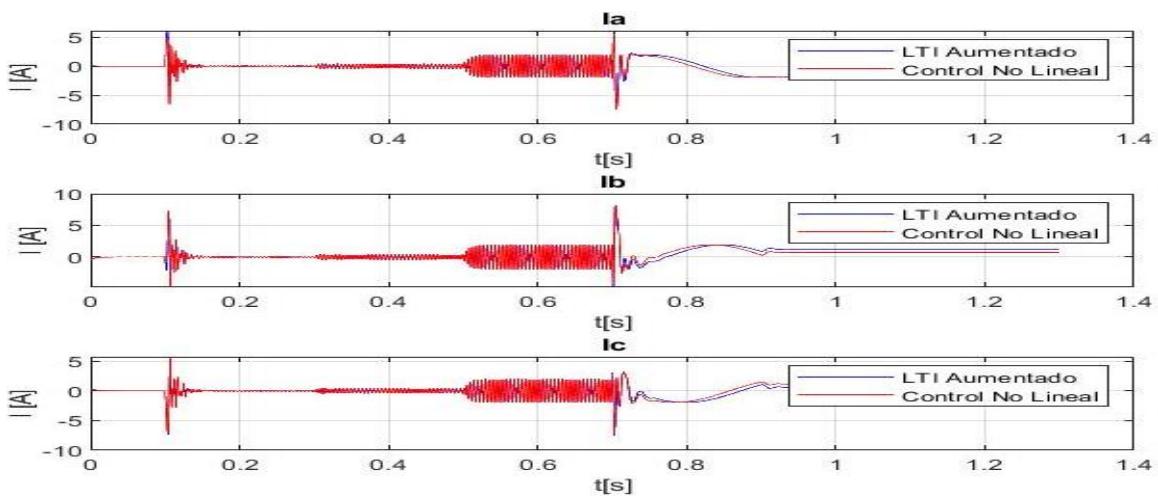


Figura 34. Corrientes $i_{abc}(t)$ con Fiel Weakening.

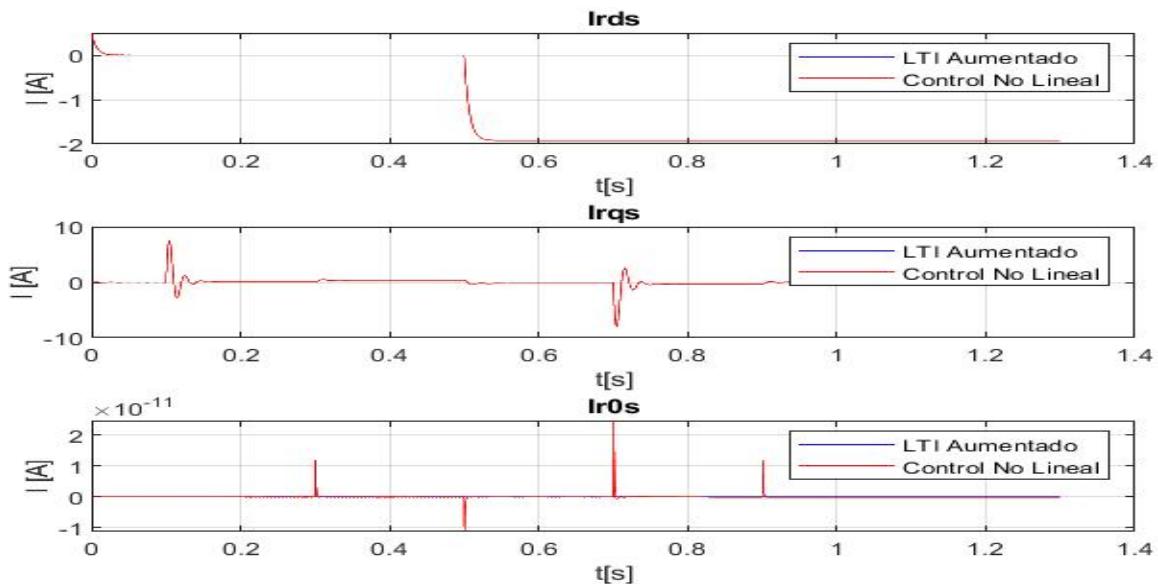


Figura 35. Corrientes $i_{qdos}^r(t)$ con Fiel Weakening.

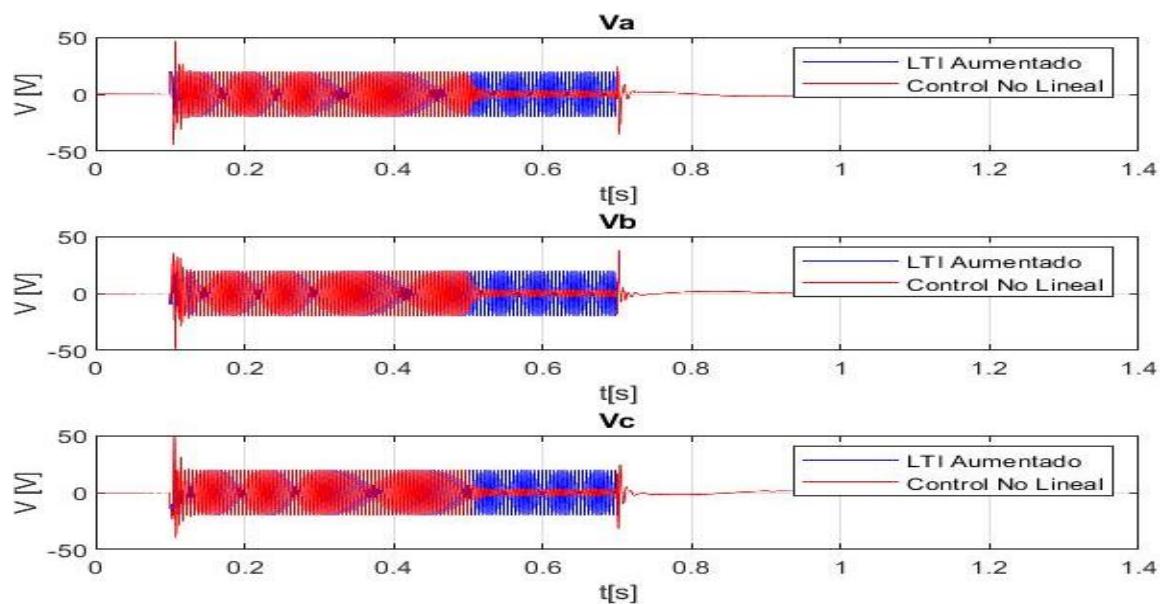


Figura 36. Voltajes $v_{abcs}(t)$ con Fiel Weakening.

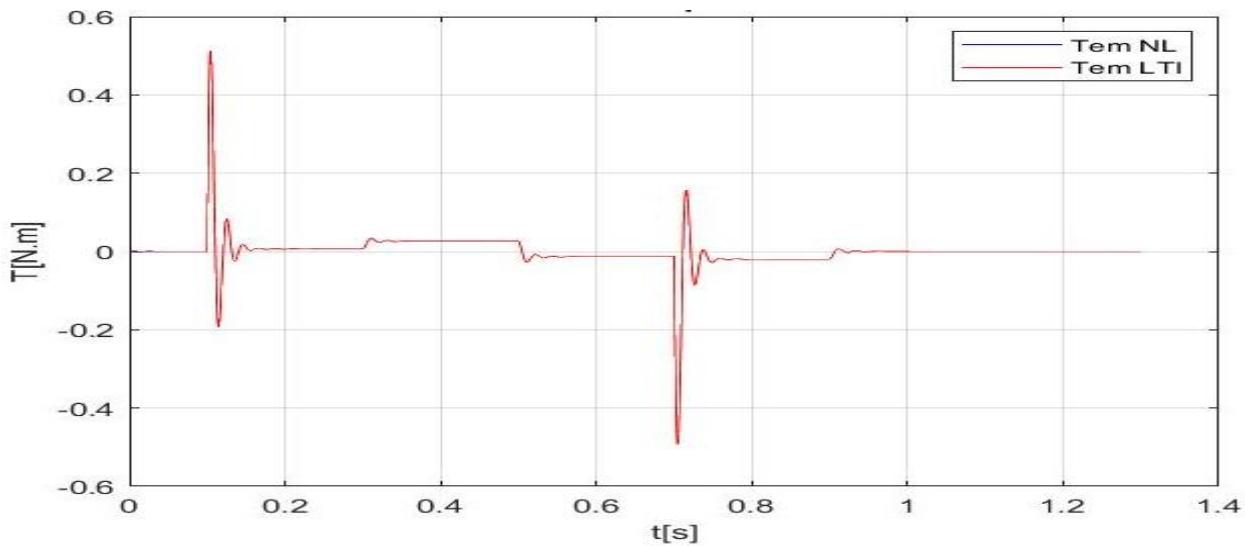


Figura 37. $T_m(t)$ con Fiel Weakening.

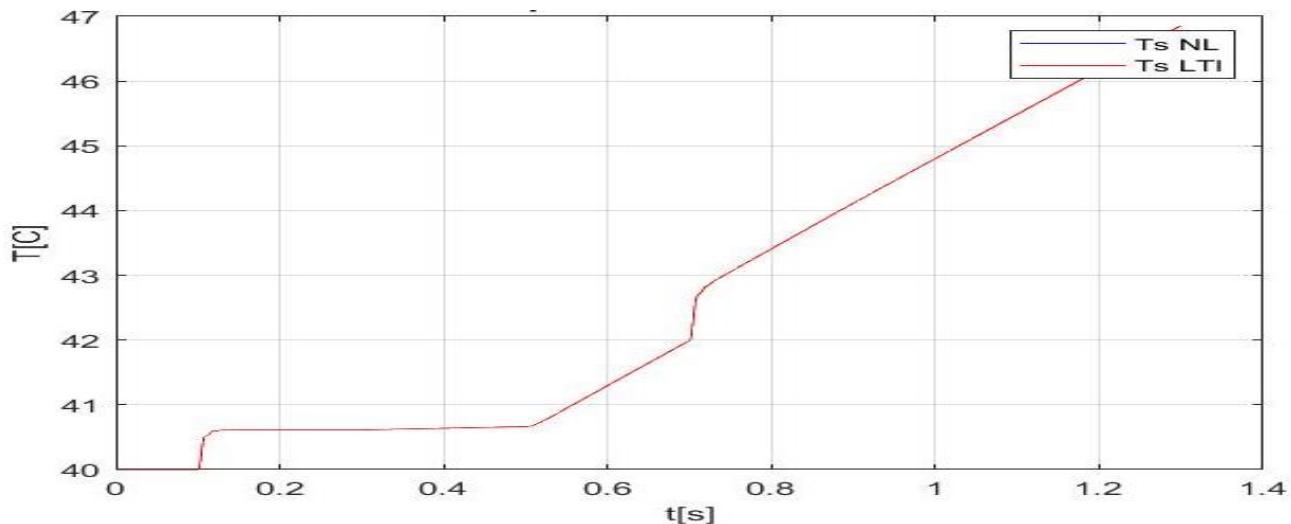
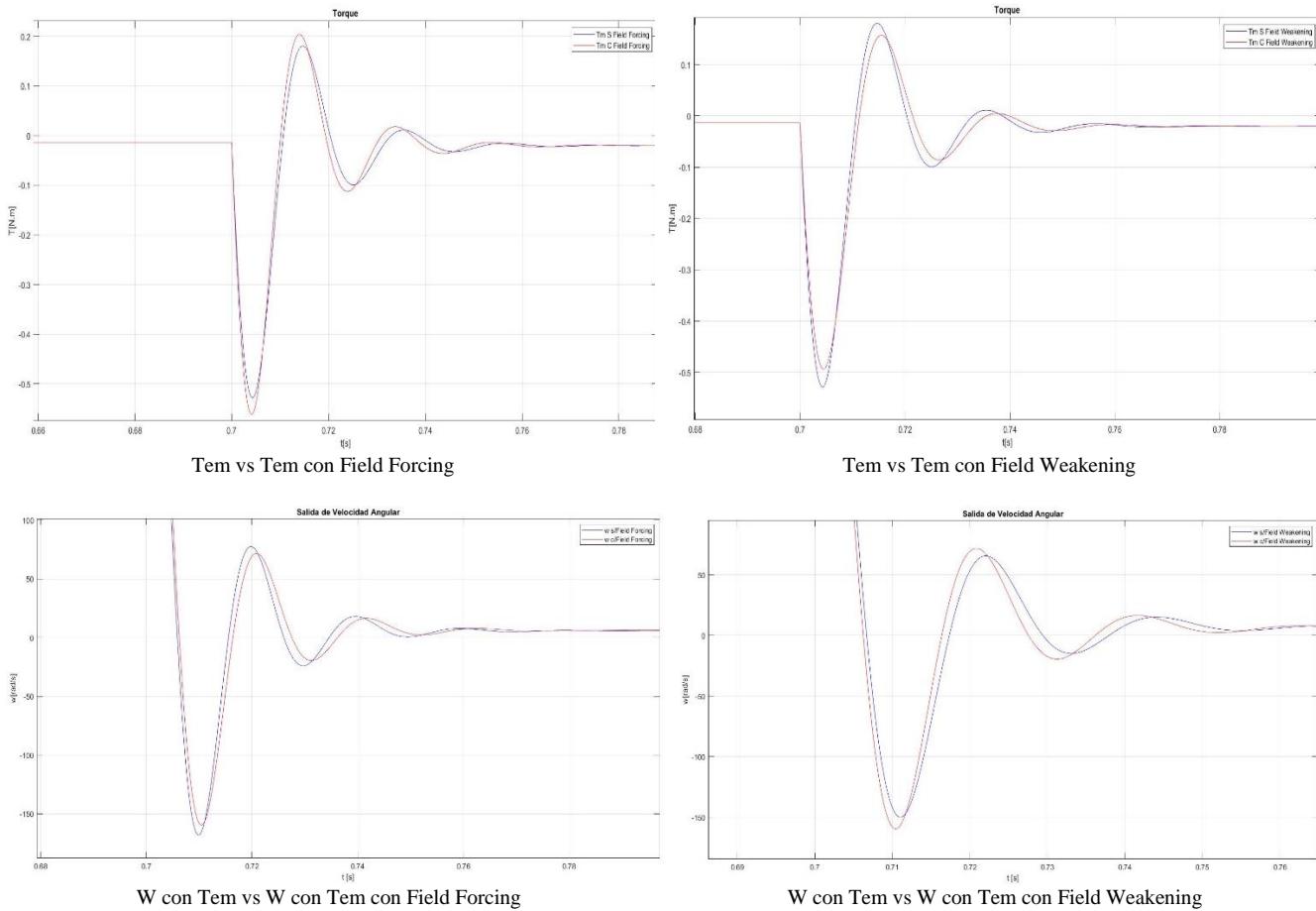


Figura 38 . $T_s^\circ(t)$ con Fiel Weakening.

En el modelo LTI al comparar el comportamiento tanto de la velocidad $\omega_m(t)$ como del torque $T_m(t)$ no se observan grandes cambios al aplicar las dos estrategias, al contrario de lo que se esperaba, que eran cambios distinguibles sobre todo en la velocidad. Este comportamiento puede ser debido a que para los modelos desarrollados se tuvieron en cuenta algunas simplificaciones y no se puede ver un cambio evidente.

Para el modelo NL si se notaron diferencias (aunque pequeñas) en los valores de velocidad $\omega_m(t)$ de la forma esperada, tal que para reforzamiento de campo la $\omega_m(t)$ posee un menor valor que para debilitamiento de campo. Haciendo una comparación entre field-forcing y field-weakening no se notaron grandes cambios en cuanto al $T_m(t)$, ya que los valores de torque en el eje son muy pequeños debido a la reducción de la caja planetaria. Si se notaron diferencias entre las dos técnicas durante el flanco de bajada de la consigna de tensión $v_{qs}^{r*}(t)$, siendo la variación de torque $T_m(t)$ mayor para reforzamiento de campo (el transitorio es mayor).



SEGUNDA PARTE: Diseño, Análisis y Simulación con CONTROLADOR de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque Equivalente (Control Vectorial)

En esta segunda parte del proyecto, se realiza el controlador de movimiento de lazo cerrado, el cual se lo implementa en cascada con un modulador de torque equivalente.

Esta técnica de control en cascada, se compone por dos etapas de control en serie:

- Un **lazo de control interno**, dado por un **Modulador de Torque**, el cual es un lazo rápido de control de corriente (o torque electromagnético).
- Un **lazo de control externo**, dado por un **Controlador PID** de movimiento, el cual es un lazo más lento de control de posición y velocidad.

Dicho control en cascada, consiste en dar una consigna de posición $\theta_m^*(t)$ variable en el tiempo (tal que se corresponda a una trayectoria deseada a seguir) la cual es la entrada al Controlador PID. Y en donde la salida del mismo (es decir su acción de control), será la consigna de torque electromagnético $T_m^*(t)$ necesaria, que a su vez es la entrada del Modulador de Torque. Y las salidas (acciones de control) del modulador de torque son las tensiones que a su vez entran al modulador de tensión trifásico (inversor trifásico), el cual se encuentra en la interfaz entre el sistema de control y el sistema físico (planta).

Cabe aclarar que el accionamiento electromecánico posee dos etapas de potencia:

- Etapa rectificadora: Compuesta por un rectificador trifásico, que toma energía de una línea de CA, y la rectifica.
- Etapa inversora: Compuesta por el inversor trifásico, que toma la energía de CC proveniente del rectificador, y la modula para obtener las ondas de voltaje de CA que son las entradas del sistema físico.

La técnica de control en cascada tiene las siguientes ventajas (en comparación de un control de movimiento mediante la técnica de realimentación de estados):

- Con este Modulador de Torque, se tiene una buena respuesta a los cambios de torque de carga.
- Y, además, con la acción integral del Controlador PID, se compensa el error de régimen estacionario.

Para realizar dicho controlador en cascada, se tienen en cuenta las siguientes simplificaciones:

- La primera es que dicho **modulador de tensión** es **ideal**, matemáticamente:
- $$v^r(t) \approx 1. v^r(t) \quad (107)$$
- La segunda simplificación que se debe considerar, es que todas las **variables de estado** son **accesibles**, es decir que se pueden sentir, para así poderlas realimentar.

1) Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque).**a) Desacoplamiento de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada.**

Para poder actuar de manera directa sobre el torque electromagnético $T_m(t)$, y así poder responder ante los cambios de carga se realiza una realimentación de las no linealidades, y también de las caídas óhmicas. Las entradas del modulador de torque son las corrientes q_0 , y a la salida se encuentran las consignas de tensiones q_0 , que luego son transformadas mediante la transformación de Park a coordenadas abc.

La tensión a la entrada del modulador de tensión (antes de pasar por la transformada de Park) es igual a la tensión de referencia $v^r(t)$ más las compensaciones por caídas naturales del sistema, es decir las caídas óhmicas y de tensiones inducidas.

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = R_s \cdot i_{qs}^{r*}(t) + L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda'_m + L_d \cdot i_{ds}^{r*}(t)] \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \\ v_{ds}^{r*}(t) = R_s \cdot i_{ds}^{r*}(t) + L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^{r*}(t) \cdot \omega_m(t) \cdot P_p \\ v_{0s}^{r*}(t) = R_s \cdot i_{0s}^{r*}(t) + L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{cases} \quad (108)$$

Luego de realizar las retroalimentaciones, (108) queda compensada como:

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ v_{0s}^{r*}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{cases} \quad (109)$$

b) Diseño de lazos de control de corrientes $i_{qd0s}^r(t)$.

Las tensiones de referencia son en realidad una diferencia de corrientes multiplicado por una ganancia proporcional y como el resultado de esta operación, es un voltaje esta ganancia tiene unidades de resistencia.

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \cdot R_q \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \cdot R_d \\ v_{0s}^{r*}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \cdot R_0 \end{cases} \quad (110)$$

Aplicando Laplace a las ecuaciones (110), se obtienen las funciones de transferencia de primer orden. Solo se muestra a continuación el procedimiento para la primera ecuación de (110) correspondiente al eje q, ya que el desarrollo es similar para los ejes d y 0.

$$v_{qs}^{r*}(s) = L_q \cdot s \cdot i_{qs}^r(s) = (i_{qs}^{r*}(s) - i_{qs}^r(s)) \cdot R_q \quad (111)$$

$$\frac{L_q}{R_q} \cdot s \cdot i_{qs}^r(s) = i_{qs}^{r*}(s) - i_{qs}^r(s) \quad (112)$$

$$Gi_q = \frac{i_{qs}^r(s)}{i_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R_q} \cdot s + 1} \quad (113)$$

Los valores de las ganancias R_q, R_d y R_0 , se obtienen mediante el método de asignación de polos. Siendo el polo deseado igual a -5000 rad/s.

$$\frac{L_q}{R_q} \cdot s + 1 = \frac{1}{5000} \cdot s + 1 \quad (114)$$

$$R_q = L_q \cdot 5000 = 29\Omega \quad (115)$$

De igual manera se obtienen R_d y R_0 :

$$R_d = L_d \cdot 5000 = 33\Omega \quad (116)$$

$$R_0 = L_0 \cdot 5000 = 4\Omega \quad (117)$$

Al realizar este procedimiento cambia la dinámica del sistema, ya que el polo correspondiente a la corriente se traslada a -5000 rad/s, los polos restantes se mantienen en el mismo lugar.

Con esta asignación de los polos de los ejes qd0, se logra que el lazo de control interno sea de alta velocidad (debido a la alta frecuencia que genera un valor de polo de -5000 rad/s), con lo que se evita la interferencia en la dinámica con el lazo de control externo, (el cual es lento, respecto al interno como se verá más adelante).

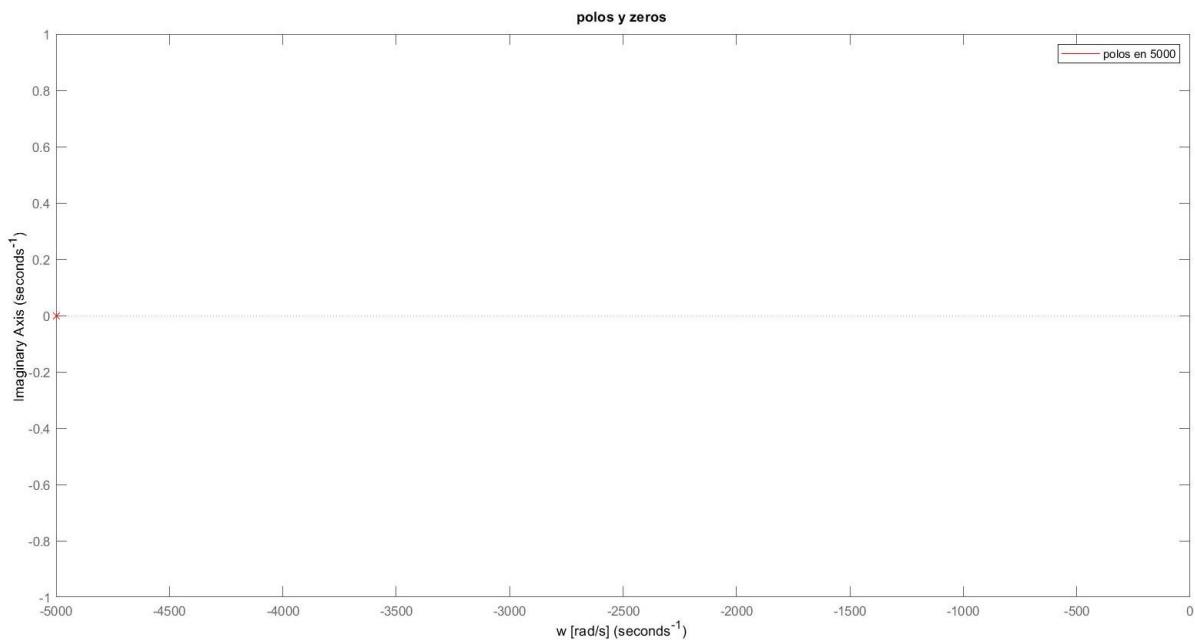


Figura 39. Polos del controlador de corriente.

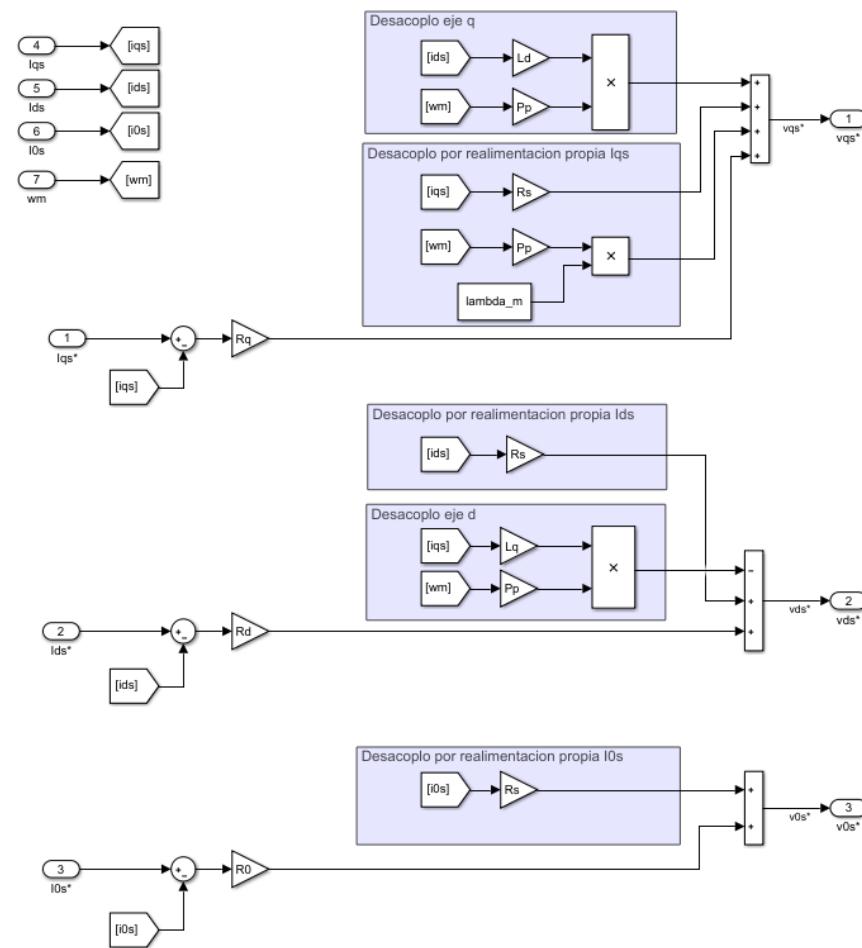


Figura 40 . Controlador de Corriente

En la Figura 43 se puede ver la implementación del modulador de corriente en Simulink, con las correspondientes realimentaciones y las ganancias calculadas previamente.

c) Incorporación adecuada de consigna de torque.

Se agrega ahora una consigna de torque, se parte de la ecuación:

$$T_m^*(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda'_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}^{r*}(t)] \cdot i_{qs}^{r*}(t) \quad (118)$$

Despejando la ecuación anterior se obtiene el valor de $i_{qs}^{r*}(t)$ para que sea la consigna que va a ingresar al modulador de corriente.

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda'_m^r + (L_d - L_d) \cdot i_{ds}^{r*}(t)]} \quad (119)$$

De esta manera se puede ver que T_m es ahora la variable manipulada. Cabe destacar que el torque es $T_m(t) = T_m^*(t) + b_{eq} \cdot w_m$. Esta ecuación es un caso general, manipulando $i_{ds}^{r*}(t)$ de tal manera de usar valores positivos o negativos se puede hacer Field-forcing y Field-weakening respectivamente. Para el caso especial de $i_{ds}^{r*}(t) = 0$ la corriente de entrada se reduce a:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^*(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r} \quad (120)$$

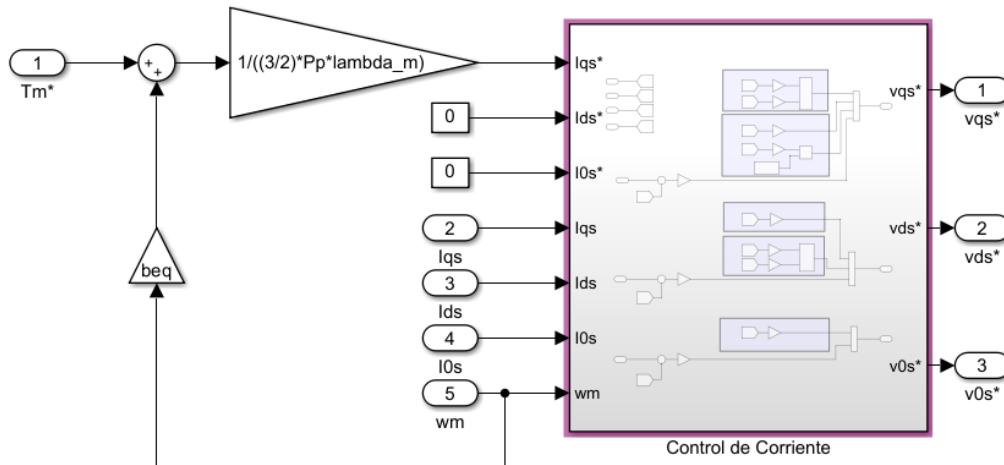


Figura 41 . Modulador de Torque

En la Figura 44 se puede ver la implementación de del modulador de torque con $i_{ds}^{r*}(t) = 0$ A, en el mismo se puede observar que la consigna de torque es la entrada del controlador de corriente.

2) Controlador externo de movimientos: posición/velocidad.

Posteriormente se procede a dar consignas específicas de posición/velocidad para el motor, a través de consignas de torque $T_m^*(t)$. Se usará un controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo, Figura 45) para cumplir con el perfil planteado que es un perfil trapezoidal de posición.

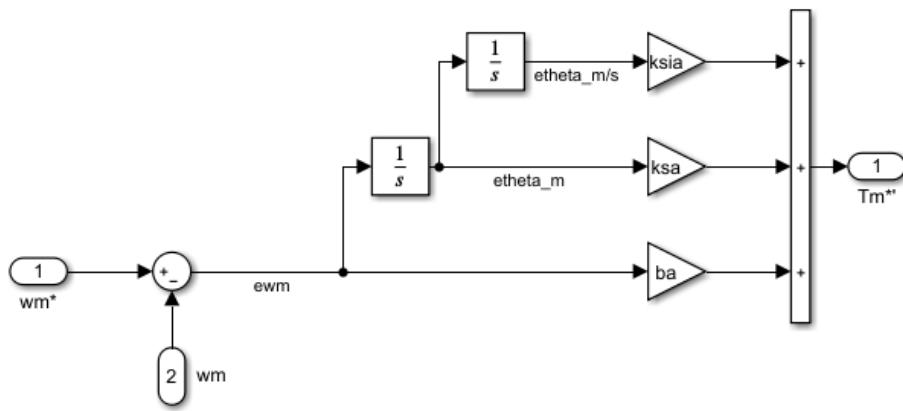


Figura 42 . Control de Movimiento PID

Si bien se desea seguir un perfil de posición, se evita el uso de una consigna de posición ya que de esa manera se necesitaría usar un derivador para obtener la respectiva consigna de velocidad angular. Y un derivador implica la posibilidad de amplificar el ruido en la entrada, ya que la señal puede oscilar a alta frecuencia y la derivación es sensible a estos ruidos. La solución para esto es derivar ('a mano') el perfil de posición y obtener el perfil de velocidad, de manera que la velocidad sea la nueva consigna del controlador.

La ecuación del controlador tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} T_m^* = e_\theta \cdot K_p + K_i \cdot \int e_\theta \cdot dt + e_w \cdot K_d \\ e_w = w_m^*(t) - w_m(t) \end{cases} \quad (121)$$

El modelo mecánico simplificado del sistema es:

$$J_{eq} \cdot \dot{\theta}_m = T_m^* - T_l \quad (122)$$

En donde cabe destacar que no aparece el término correspondiente a la fricción viscosa.

Se considera que el modulador de torque tiene un ancho de banda infinito, por lo tanto, su función de transferencia actúa como una ganancia unitaria, (lo que se puede deducir al considerar una constante de tiempo tendiendo a cero, en la fórmula de la función de transferencia) entonces $T_m^* = G_{Tl} \cdot T_m^* \rightarrow T_m^* \approx T_m^*$.

Reemplazando en la ecuación (121) y sabiendo que $e_w = \frac{d(\theta)}{dt}$, luego se puede representar la ecuación (121) en el dominio de Laplace:

$$\begin{cases} J_{eq} * s * \Omega_m(s) = T_m^*(s) - T_l(s) = K_d * (\Omega_m^*(s) - \Omega_m(s)) + K_p * (\theta_m^*(s) - \theta_m(s)) + \frac{K_i}{s} * (\theta_m^*(s) - \theta_m(s)) - T_l(s) \\ \Omega_m(s) = \theta_m(s) * s \end{cases} \quad (123)$$

Reemplazando las ecuaciones (123) obtenemos:

$$J_{eq} * s^2 * \theta_m(s) = K_d * s * (\theta_m^*(s) - \theta_m(s)) + K_p * (\theta_m^*(s) - \theta_m(s)) + \frac{K_i}{s} * (\theta_m^*(s) - \theta_m(s)) - T_l(s) \quad (124)$$

Operando en (124) se llega a:

$$\left(J_{eq} * s^2 + K_d * s + K_p + \frac{K_i}{s} \right) * \theta_m(s) = \left(K_d * s + K_p + \frac{K_i}{s} \right) * \theta_m^*(s) - T_l(s) \quad (125)$$

De donde podemos obtener las funciones de transferencia de la posición ($\theta_m(s)$) con respecto a la consigna de posición ($\theta_m^*(s)$) y la posición ($\theta_m(s)$) con respecto al torque de carga ($T_l(s)$).

$$\begin{aligned} \frac{\theta_m(s)}{\theta_m^*(s)} &= \frac{\left(K_d * s + K_p + \frac{K_i}{s} \right)}{\left(J_{eq} * s^2 + K_d * s + K_p + \frac{K_i}{s} \right)} \\ \frac{\theta_m(s)}{T_l(s)} &= -\frac{1}{\left(J_{eq} * s^2 + K_d * s + K_p + \frac{K_i}{s} \right)} \end{aligned} \quad (126)$$

Si en (126) multiplicamos y dividimos por s obtenemos:

$$\frac{\theta_m(s)}{\theta_m^*(s)} = \frac{\left(K_d * s^2 + K_p * s + K_i \right)}{\left(J_{eq} * s^3 + K_d * s^2 + K_p * s + K_i \right)} \quad (127)$$

$$G_{\theta_m(s)} = -\frac{s}{(J_{eq} * s^3 + K_d * s^2 + K_p * s + K_i)}$$

De la ecuación (127) se puede observar que cuando $K_i \neq 0$, no obtenemos un error de estado estacionario ante un Escalón de torque de carga. Lo que se puede apreciar al aplicar el teorema del valor final, es decir haciendo $s \rightarrow 0$ en donde obtenemos el valor final en régimen permanente: $\theta_m(s) = \theta_m^*(s)$.

Si $K_i = 0$, obtendremos un error de estado estacionario ya que si $s \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_m(s) = \theta_m^*(s) - \frac{T_l(s)}{K_p}$.

De esta manera se observa que la acción integral compensa las perturbaciones de carga constante en estado estacionario. Se desea calcular las constantes del controlador PID. Se aplica el método de Sintonía Serie, el cual define que los polos deben tener la misma distancia radial al origen (en el diagrama de Laplace los polos formaran una circunferencia), es decir que tienen la misma frecuencia (w_{pos}) para obtener un filtro de Butterworth de tercer orden. Para realizar el método de asignación de polos se parte del siguiente polinomio deseado ecuación (128), la cual se iguala al polinomio característico (129), y por medio del método de asignación de polos se obtienen las constantes K_d, K_p y K_i :

$$p_{des} = J_{eq} * (s + w_{pos}) * (s^2 + (n - 1) * w_{pos} + w_{pos}^2) \quad (128)$$

$$p_{caract} = J_{eq} * s^3 + K_d * s^2 + K_p * s + K_i \quad (129)$$

Luego de igualar p_{des} y p_{caract} , obtenemos las siguientes relaciones:

$$K_d = J_{eq} * n * w_{pos} = b_a \quad (130)$$

$$K_p = J_{eq} * n * w_{pos}^2 = k_{sa} = b_a * w_{pos} \quad (131)$$

$$K_i = J_{eq} * w_{pos}^3 = k_{sia} = k_{sa} * \frac{w_{pos}}{n} \quad (132)$$

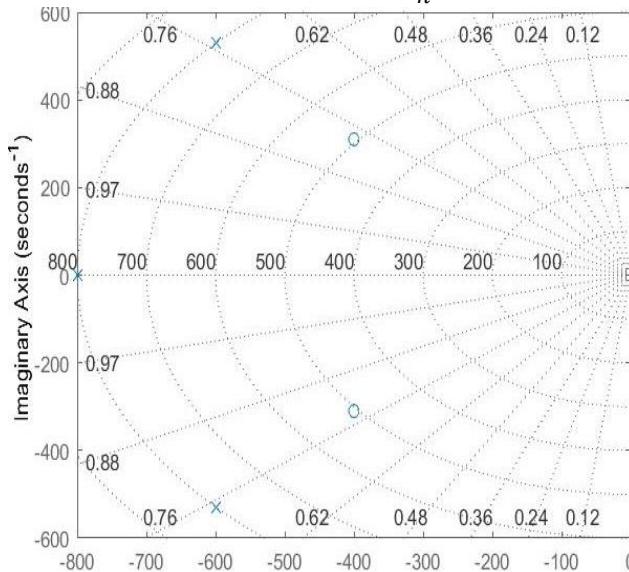


Figura 43 . Polos y ceros del Sistema después de aplicar el Método de Sintonía Serie

3) Incorporación y diseño de Observador de Estado de orden reducido.

Se agrega un observador de estado de orden reducido teniendo en cuenta solo el subsistema mecánico tal como esta definido en las ecuaciones del subsistema mecánico. Como no se cuenta con un sensor de velocidad (un tacogenerador) y es necesario realimentar el sistema con el valor de la velocidad, se procede a realizar un observador de estado de orden reducido. Esto se puede hacer ya que el sistema es observable desde θ_m como lo demostramos en el primer parte. Para poder estimar el valor de la velocidad se debe expandir el sistema, es decir aumentar la cantidad de variables de estado de n , a $2n$ variables de estado.

Las variables estimadas pueden tener un error dependiendo de cómo este planteado el modelo, y los parámetros estimados del mismo. Se puede destacar que, para un sistema sin perturbación, el mismo va a responder de manera casi inmediata a las variaciones de las variables de estado de la planta, pero si la planta tiene una perturbación, el mismo puede llegar a tener un error de estado estacionario, por lo que se deberán agregar integradores dependiendo del perfil de la perturbación. Cabe mencionar que, para que el observador responda correctamente a las variaciones del sistema se buscará que lo haga de manera más rápida posible, por lo tanto, es necesario que los polos del mismo sean negativos y de valor absoluto mayor a los de la

planta (en lazo cerrado), se busca que estos sean entre 5 y 10 veces mayores. Es decir, el ancho de banda del observador debe ser muy grande para poder responder de manera fiable. Y bueno, aquí una situación de compromiso ya que, dependiendo de la calidad del sensor, puede ser conveniente usar valores estimados para los parámetros para que el sensor no ingrese ruido al sistema.

Los dos polos del observador son reales iguales, y con un valor de $p_{obs1,2} = -3200 \frac{rad}{s}$, para no interferir demasiado los polos del controlador PID que son de un valor de -800. Las variables deberán aproximarse, de manera que se las compara en cada instante de tiempo produciendo un determinado error y se lo magnifica con una ganancia. El torque de entrada al observador se lo tomo antes de compensar el término $b_{eq} * w_m$.

Las ecuaciones de estado del subsistema mecánico tienen la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D \end{cases} \quad (133)$$

La ecuación de estado del observador es:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A.\tilde{x}(t) + B.u(t) + k_e.e(t) \\ e(t) = (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) = C.\tilde{x}(t) + D \end{cases} \quad (134)$$

Finalmente llegamos a:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A.\tilde{x}(t) + B.u(t) + B_d.d(t) + k_e.e(t) \\ \dot{e}(t) = (A - k_e.C).e(t) + B_d.d(t) \\ \tilde{y}(t) = C.\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (135)$$

Al aplicar la ecuación (134) en nuestro sistema mecánico, las ecuaciones resultantes del observador de orden reducido son:

$$\dot{\theta}_m(t) = w_m(t) + e_o.k_{\theta o} \quad (136)$$

$$J_{eq} \cdot \dot{w}_m(t) = T_m(t) + e_o.k_{wo} \quad (137)$$

Donde se puede notar que en (137) no se presentan el término correspondiente al amortiguamiento viscoso (ya que se lo compensó al realimentarlo), ni el término correspondiente al torque de carga (ya que no se lo puede medir, por lo que no lo podemos considerar en la estimación de las variables de estado).

Luego, se calculan las constantes $k_{\theta o}$ y k_{wo} , por el Método de asignación de polos con el polinomio obtenido en la ecuación (138) y el polinomio deseado, ecuación (139) .

$$\det(s.I - (A - k_e.C)) = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{\theta o} \\ k_{wo} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\} = s^2 + k_{\theta o}.s + k_{wo} \quad (138)$$

$$p_{des} = (s - (-3200)).(s - (-3200)) = s^2 + 2.3200.s + 3200^2 \quad (139)$$

$$\begin{cases} k_{\theta o} = 6400 \\ k_{wo} = 3200^2 \end{cases} \quad (140)$$

A continuación, se muestra el diagrama de bloques del observado de orden reducido correspondiente a las ecuaciones (136) y (137).

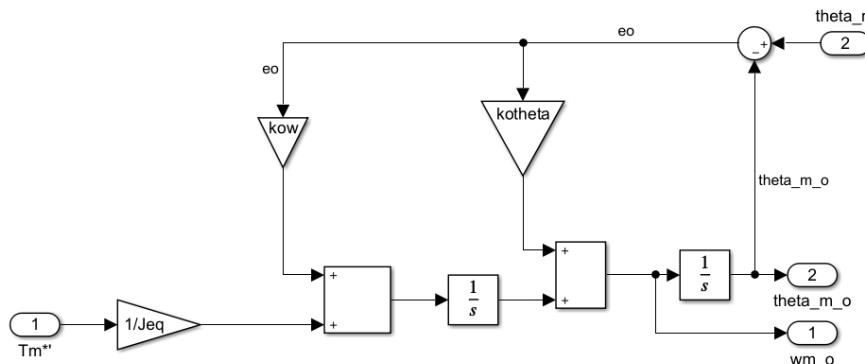


Figura 44 . Observador de Orden Reducido del Sistema Mecánico

4) Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL

Al modelo NL de la primera parte del proyecto, se le agrego un modulador de torque, el controlador de movimiento mediante PID, y un observador, de manera que resulta en el modelo NL completo el cual se observa en la Figura 48.

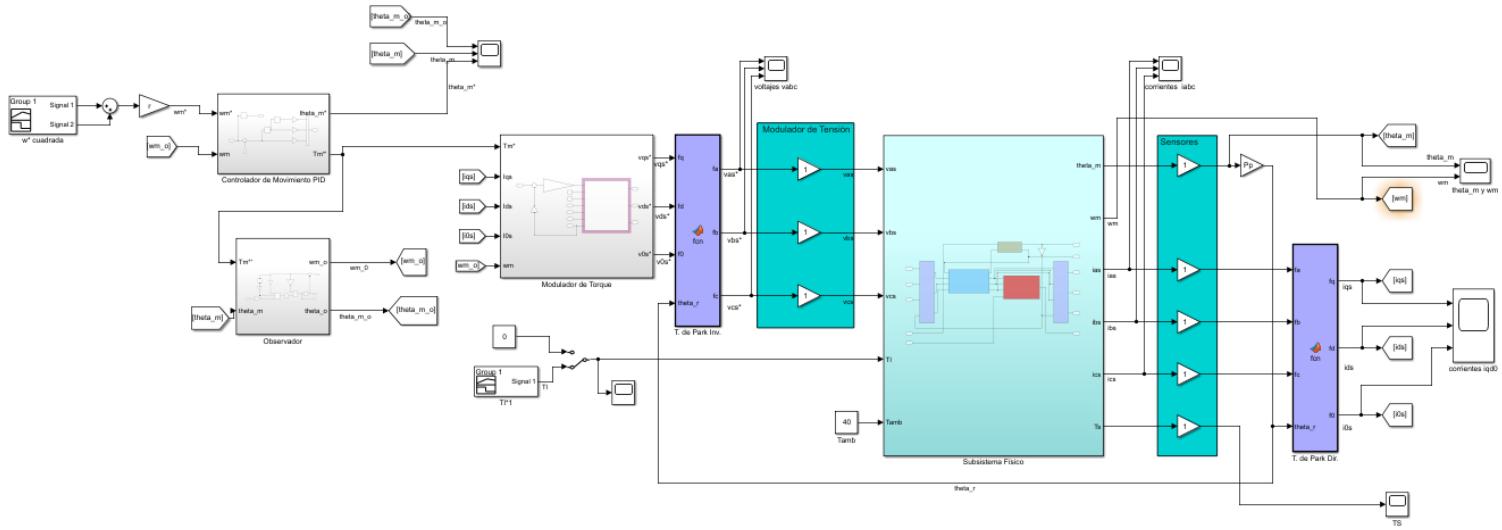


Figura 45 . Diagrama NL Completo

A continuación, se realizan simulaciones específicas y se sacan conclusiones de las mismas.

a) Seguimiento de consignas de movimiento.

Se analizará el comportamiento del sistema para una un perfil trapezoidal de posición para la articulación del hombro del robot. Como las consignas son posiciones articulares $q^*(t)$ se debe multiplicar las mismas por la razón de reducción r para referirlas al eje del motor. La consigna consiste en que el hombro realice una vuelta completa y luego regrese a la posición de origen. Para realizar la consigna de posición especificada y según lo dicho anteriormente se dará una consigna de velocidad al controlador PID.

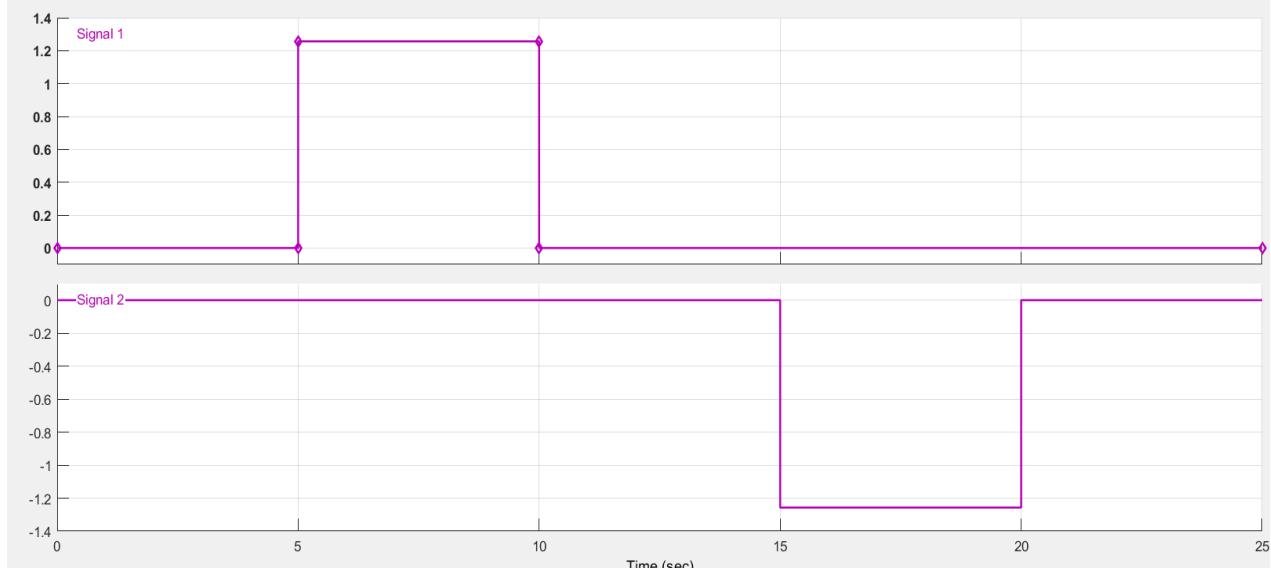


Figura 46 . Consigna de ω_m para tener un perfil trapezoidal de posición

En la Figura 50 se observa que se cumple el perfil deseado de consigna. Tanto la posición angular medida, como la consigna y la posición observada son muy similares, salvo que existen pequeñas diferencias cuando hay saltos abruptos tipo escalón en la velocidad del sistema, tal como se observa en la Figura 51 y Figura 52.

Idealmente la consigna de velocidad angular es cuadrada y finita, pero en la realidad para que se cumpla el seguimiento de dicha consigna se necesitan aceleraciones muy altas (teóricamente infinitas) para partir de 0 a un valor finito (en este caso $q(t) = 2.\pi \text{ rad en } t = 5\text{s}$). Estas especificaciones son demasiado exigentes y el motor alcanza altas tensiones y corrientes para poder cumplir con el escalón de velocidad y sus valores sobrepasan los valores límites de trabajo, siendo esto perjudicial

para la máquina. De seguirse estas consignas el motor trabajara exigido y la temperatura se elevará, siendo imposible que el motor trabaje de esta manera en régimen permanente. Cabe destacar que este aumento excesivo de las corrientes y tensiones es teórico ya que en realidad la fuente se satura y no puede cumplir con las especificaciones de tensión, entregando lo máximo posible.

Se pueden observar, en la Figura 53, las tensiones y corrientes estatáticas generadas al dar una consigna de posición con perfil trapezoidal.

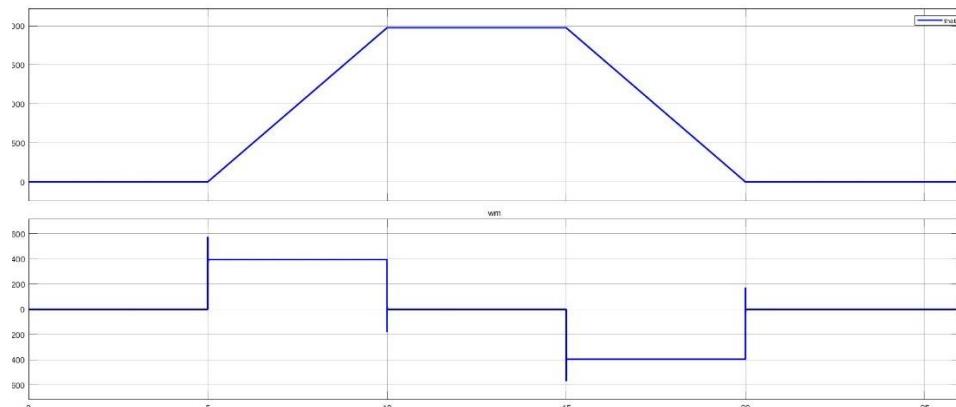


Figura 47 . Respuesta de velocidad y posición angular para la consigna dada.

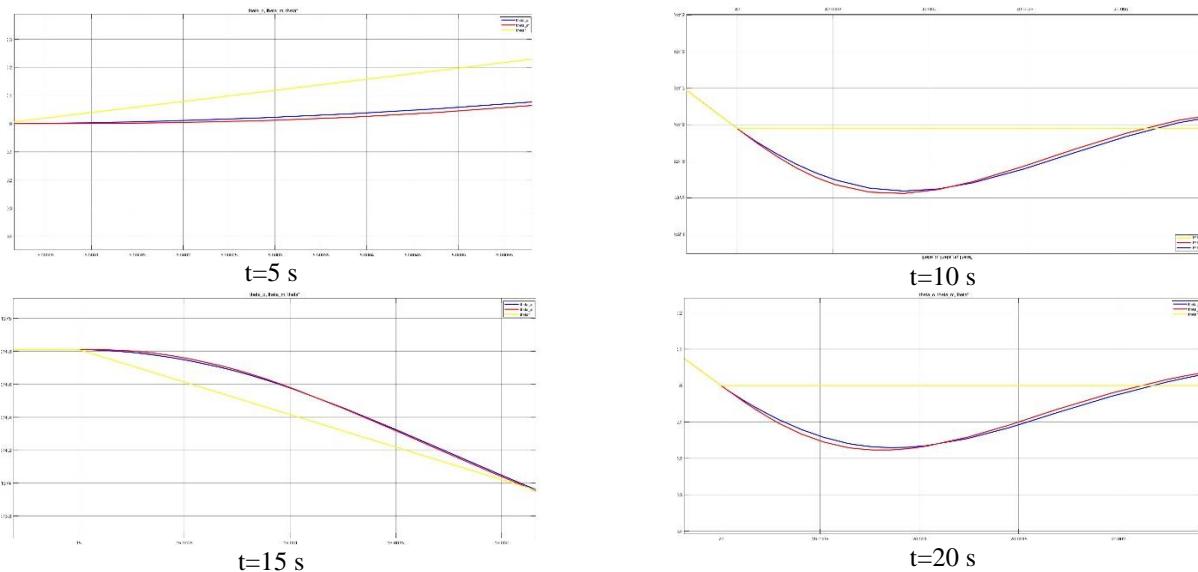
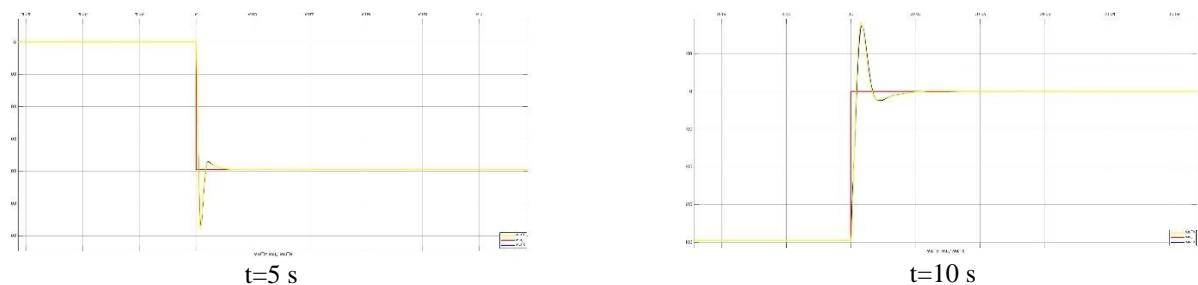


Figura 48 . Oscilaciones de la posición angular en los vértices del trapecio



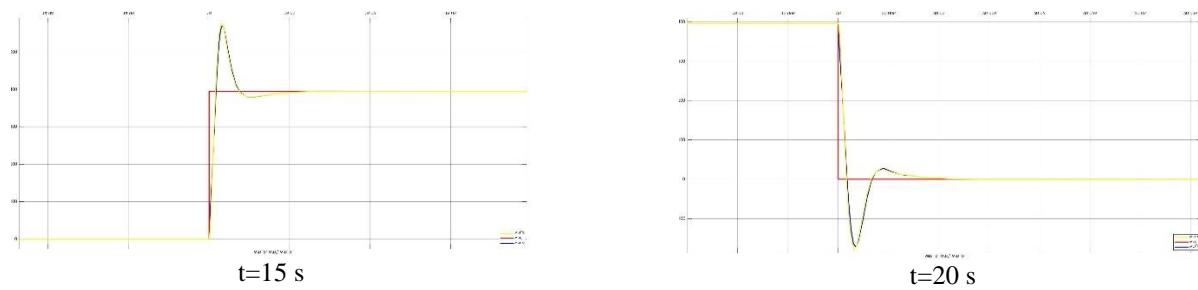


Figura 49 . Oscilaciones de la velocidad angular en los vértices del trapecio

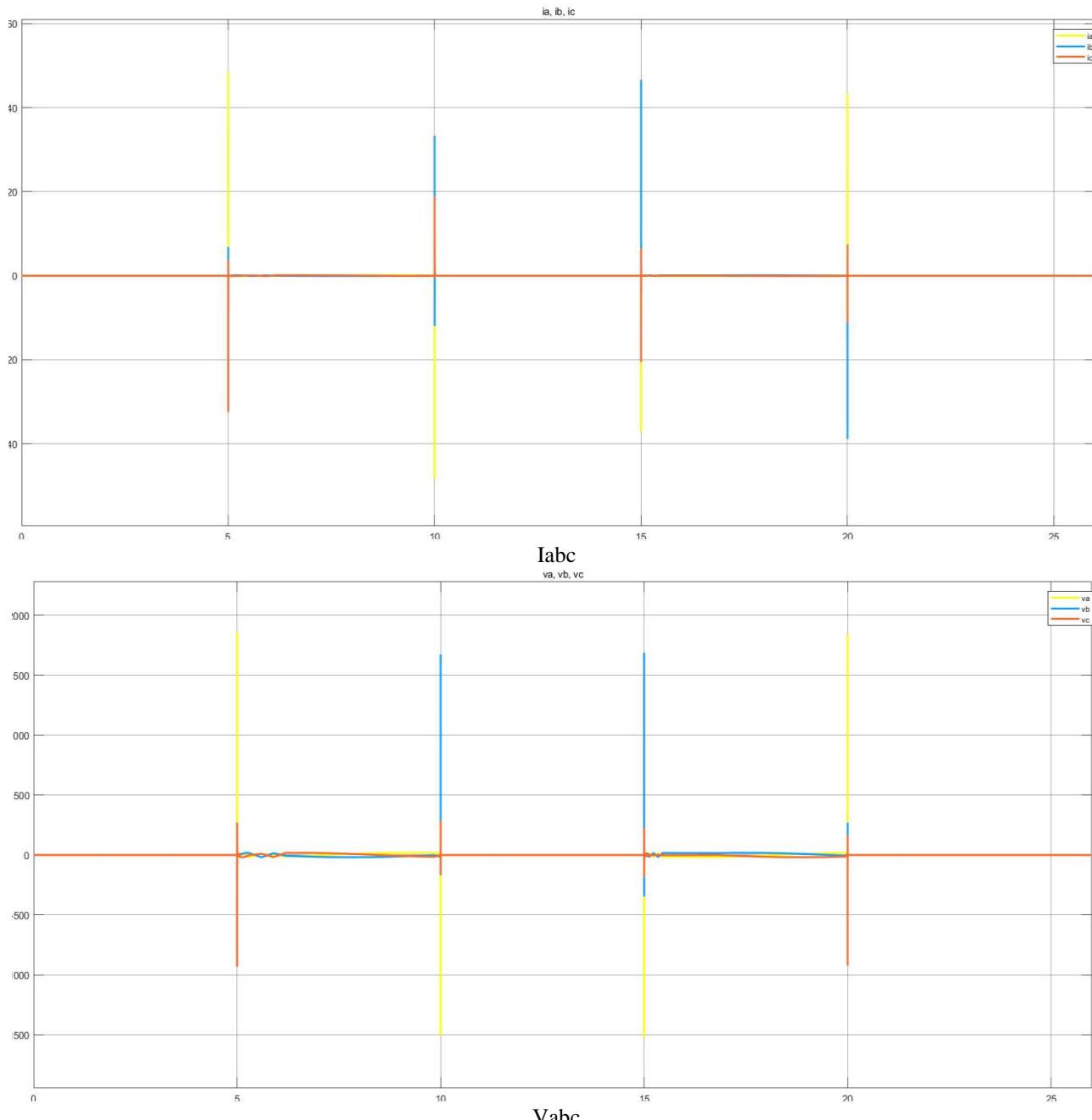


Figura 50 . Salida de Tensiones y Corrientes estatáticas

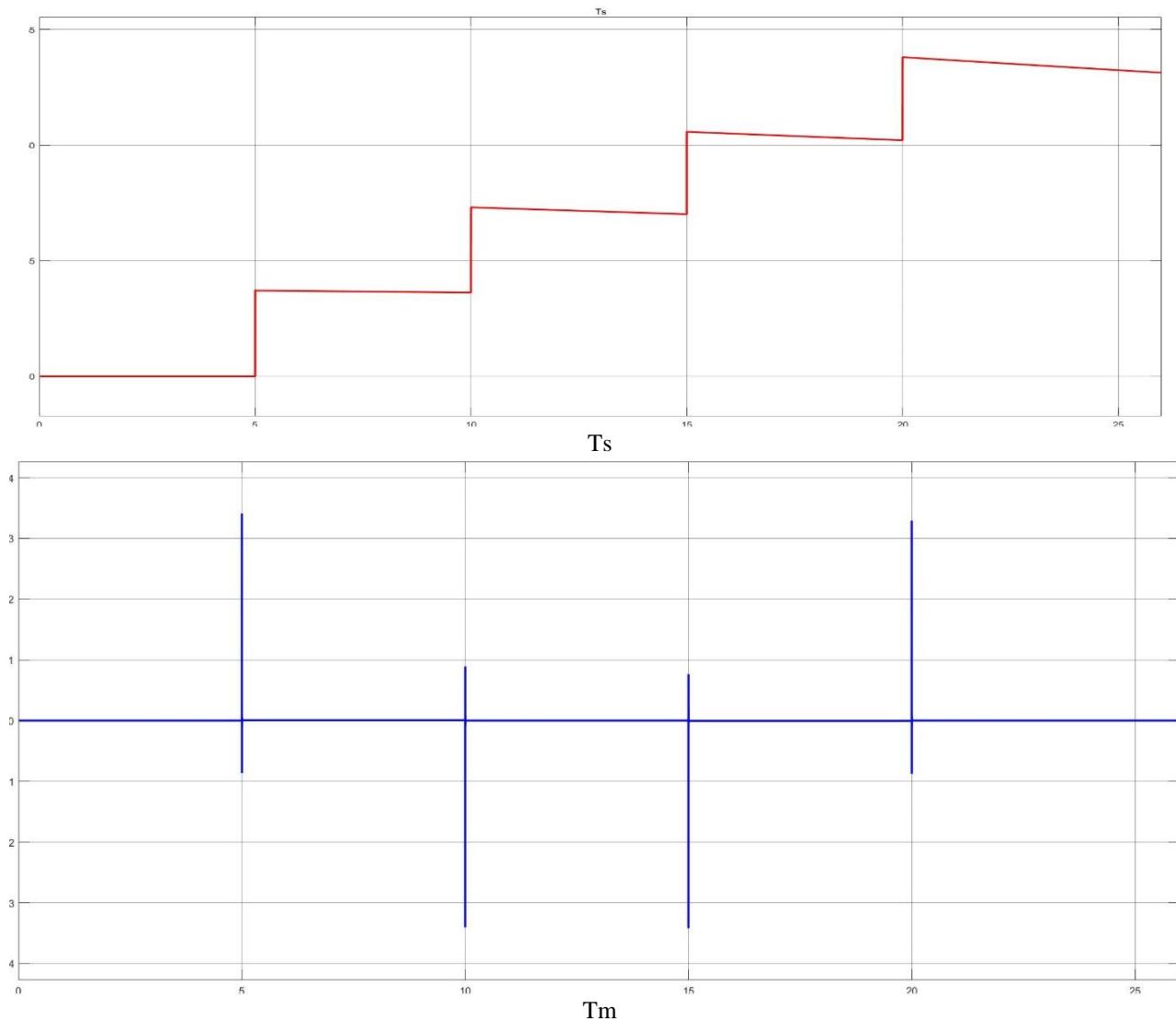
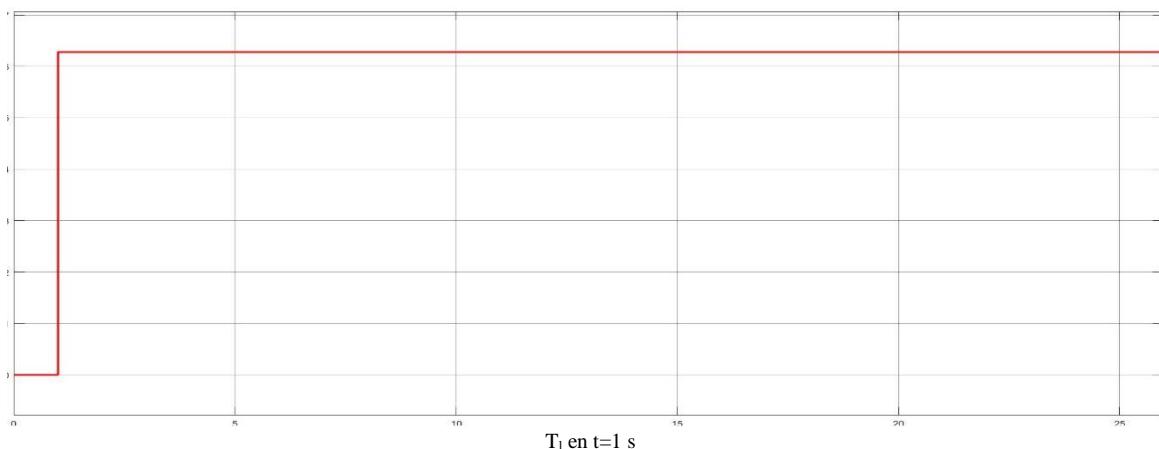


Figura 51 . Salida de Temperatura de bobinado y Torque electromagnético

b) Rechazo a Perturbaciones.

A continuación, se aplica un escalón de torque de carga (T_l) con su valor máximo de 6.28 N.m en $t=1$ s, para ver la respuesta del sistema ante un escalón de perturbación. El mismo se puede observar en la Figura 55.



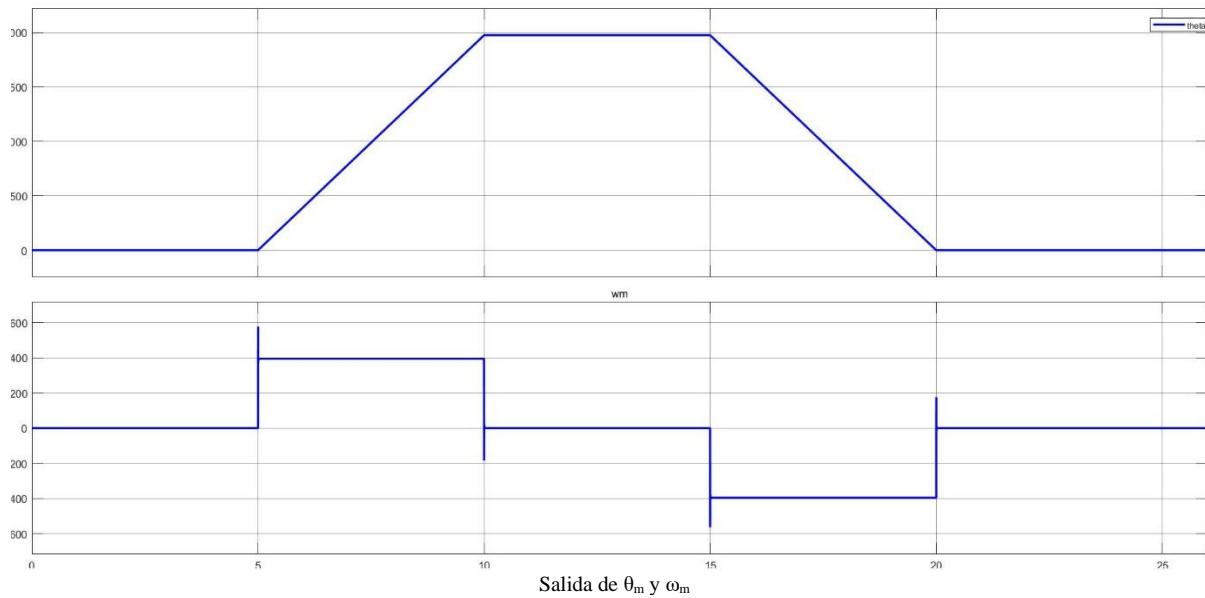


Figura 52 . Salida de posición angular y velocidad angular aplicando una perturbación en $t=1$ s

En la Figura 56, se puede observar, que al aplicar una perturbación en $t=1$ s, el sistema sigue la consigna, pero antes de llegar a la consigne obtiene un error de estado estacionario tanto en w_m como en θ_m , debido al escalón de Torque. Lo cual nos indica que nuestro sistema no rechaza la perturbación de torque como nosotros deseamos.

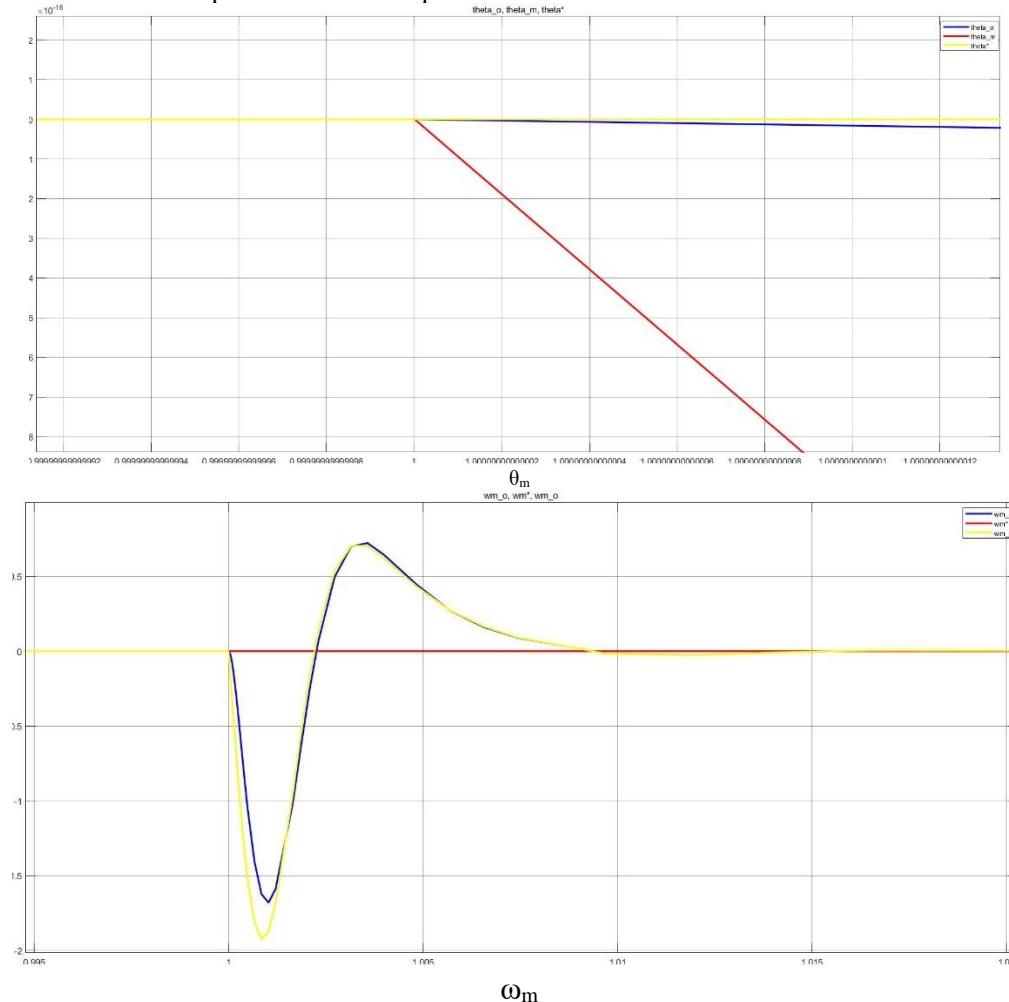


Figura 53 . Oscilación de Θ_m y w_m ante una perturbación en $t=1$ s

5) Verificación de desempeño y/o mejoras.

a) Verificación de Especificaciones de Operación.

En la Tabla 5, se pueden comparar los valores máximos soportados por el sistema vs los valores obtenidos en la simulación. En la misma se puede observar que en la simulación, se exceden tanto los límites de corriente como de voltaje, debido a que la consigna de velocidad cuadrada es muy exigente para el sistema, para suavizar la respuesta se propone generar una consigna de velocidad trapezoidal con rampas de ascenso y descenso de 0,2 s, como las que se observan en la Figura 57, en vez de cuadrada Figura 49.

Parámetro	Valor Máximo Soportado	Valor Máximo Medido
I	2 A	48.85 A
V	19,5959 V	1861 V
T _s	115 C	56,15 C
ω	691,15 rad/s	569,5 rad/s
T _m	29,42 N. m	3,444 N.m

Tabla 5

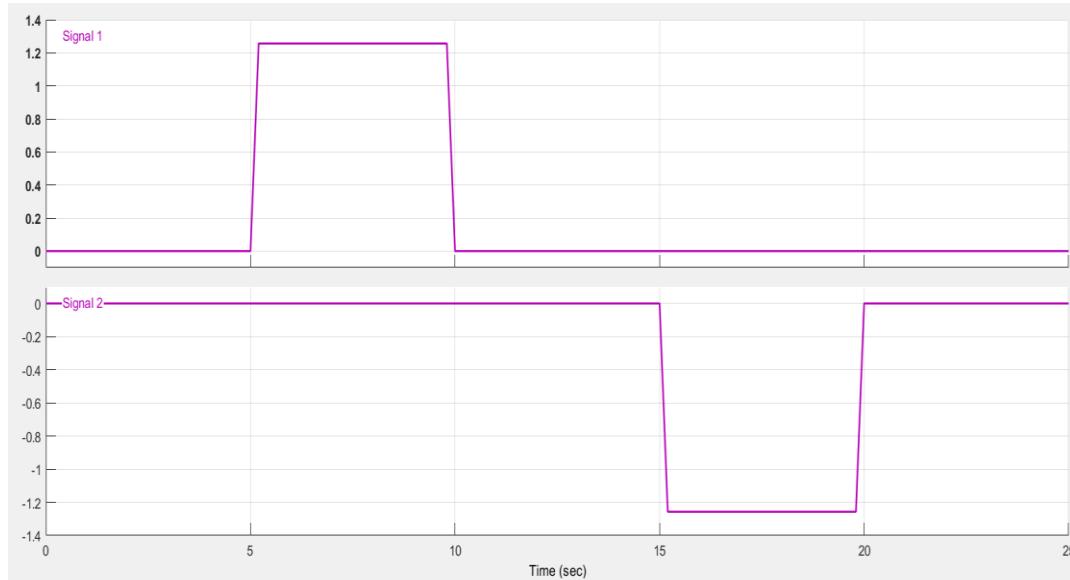
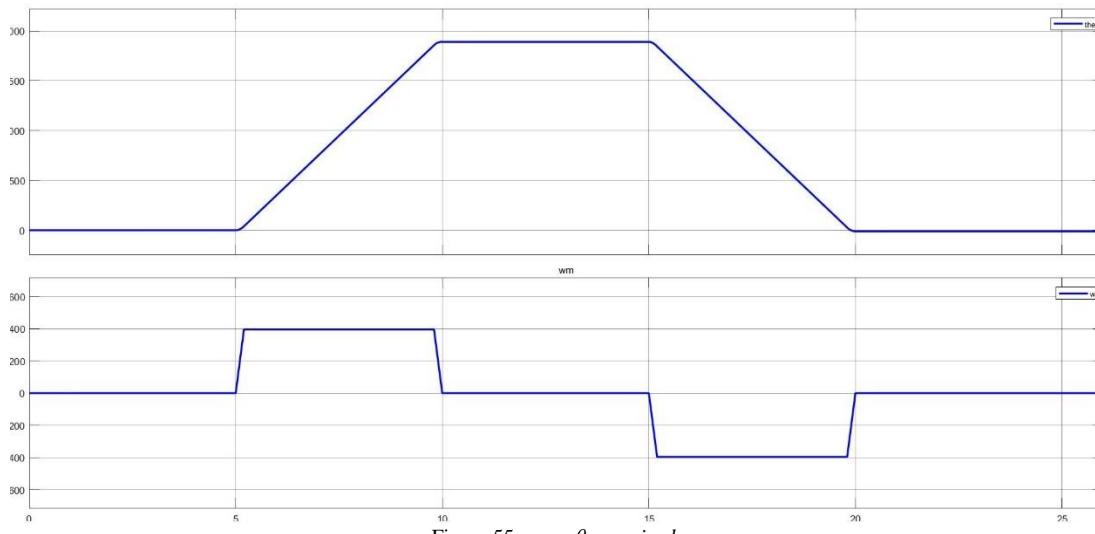


Figura 54 . Consigna de velocidad Trapezoidal

De la Figura 58 a la Figura 62, se pueden observar los resultados de las salidas del sistema al suavizar la consigna de velocidad ω_m *.

Figura 55 . ω_m y θ_m suavizadas

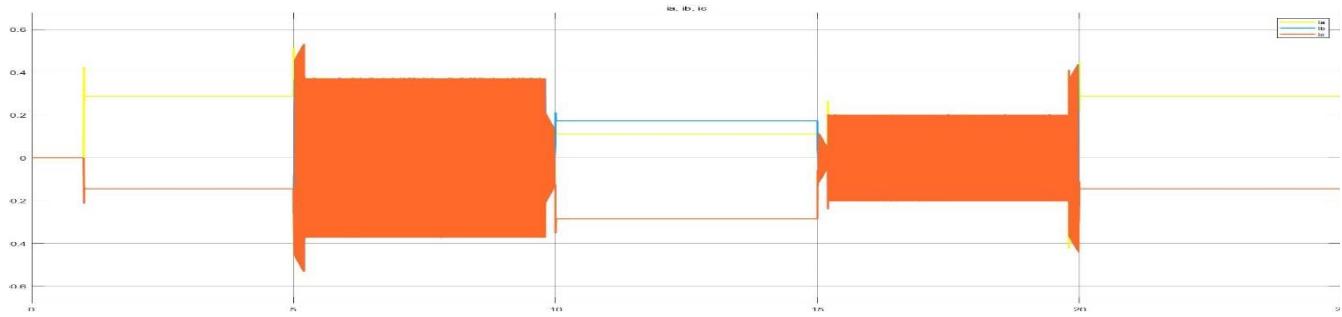


Figura 56 . i_{abc} suavizada

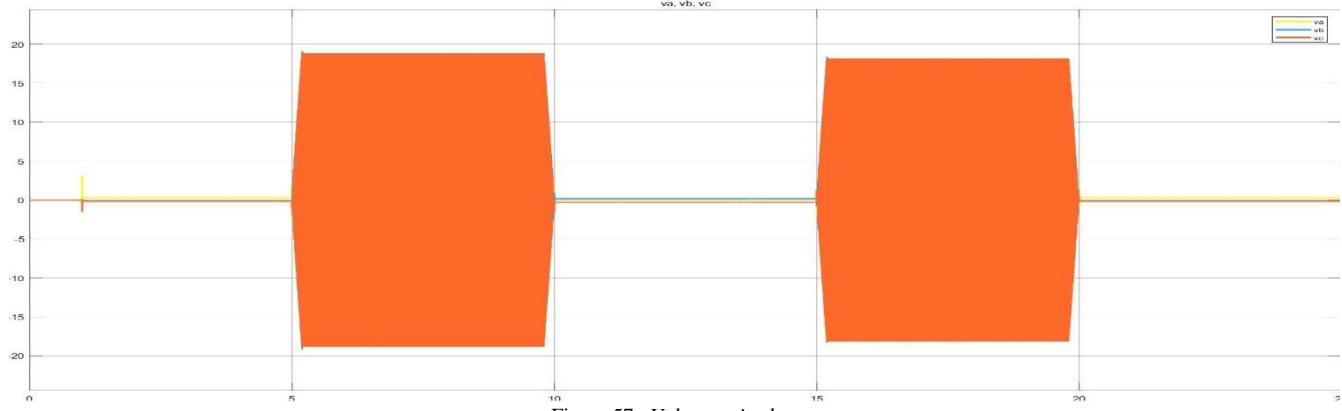


Figura 57 . v_{abc} suavizada

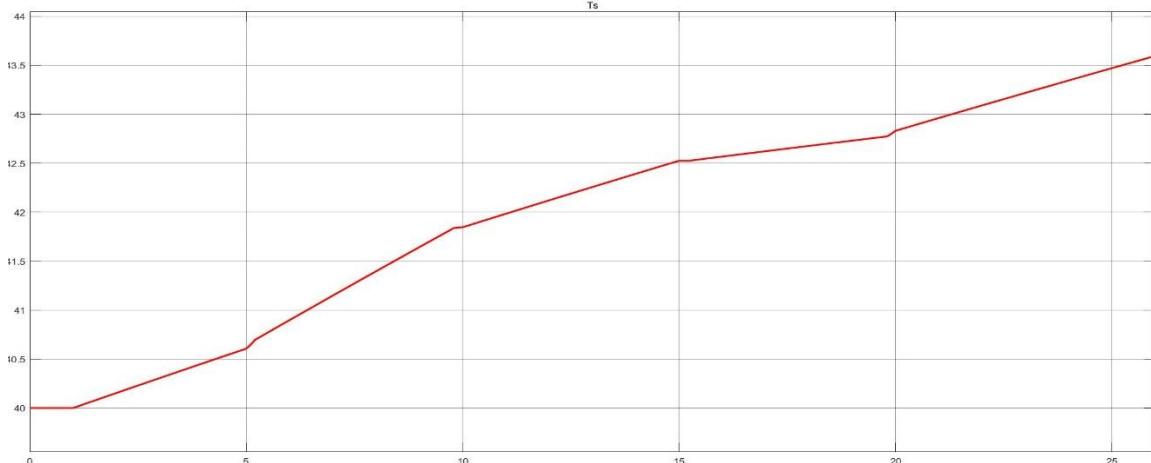


Figura 58 . T_s suavizada

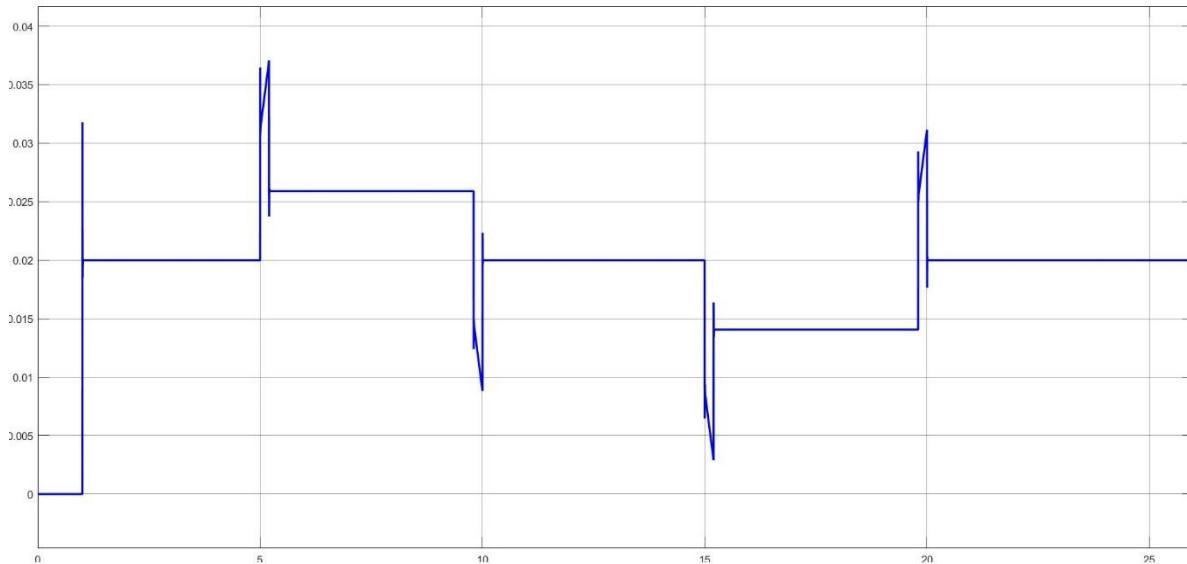


Figura 59 . T_m suavizado

Parámetro	Valor Máximo Soportado	Valor Máximo Medido
I	2 A	0,524 A
V	19,5959 V	18,9 V
T_s	115 C	41,02 C
ω_m	691,15 rad/s	395,4 rad/s
T_m	29,42 N.m	0,3707 N.m

Tabla 6

En la Tabla 6, se puede apreciar que, al suavizar la consigna de velocidad, ahora los parámetros de la simulación, se encuentran dentro del rango de funcionamiento del motor.

b) Verificación del Observador.

En la Figura 63, se observa que el que observador contiene error de estado estacionario.

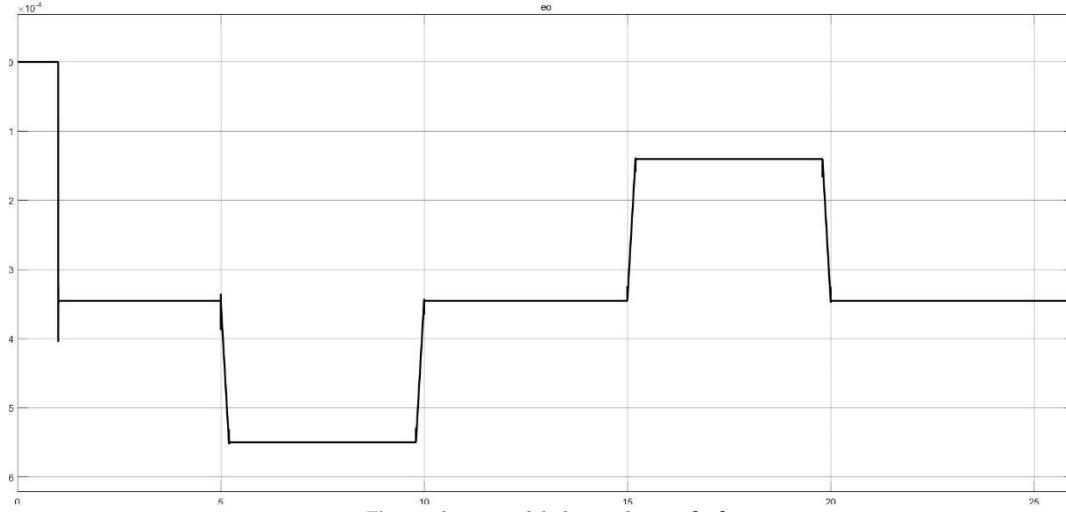


Figura 60 . Error del observador $e_0 = \theta_m - \theta_{mo}$

Para eliminar este error se procederá a incluir un integrador en el observador de orden reducido. Al agregar un integrador se expande el orden del sistema, agregando así un nuevo polo. Se define una nueva variable:

$$z(t) = K_{Tlo} \cdot \int e_0 \cdot dt$$

Con lo cual, las ecuaciones del mismo (136) y (137) van a quedar de la siguiente manera:

$$\dot{\theta}_m(t) = w_m(t) + e_o \cdot k_{\theta o} \quad (141)$$

$$J_{eq} \cdot \dot{w}_m(t) = T_m(t) + e_o \cdot k_{wo} + z(t) \quad (142)$$

$$\dot{z}(t) = e_o \cdot k_{tlo} \quad (143)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (141),(142),(143), procederemos a calcular el determinante del observador, ecuación (144), para así obtener las nuevas constantes del observador, ecuación (146), al aplicar el Método de asignación de polos con el polinomio deseado de la ecuación (145).

$$\det(s * I - (A - k_e * C)) = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{\theta o} \\ k_{wo} \\ k_{tlo} \end{bmatrix} * [1 \ 0 \ 0] \right) \right\} = s^3 + k_{\theta o} * s^2 + k_{wo} * s + k_{tlo} \quad (144)$$

$$p_{des} = (s - (-3200)) * (s - (-3200)) * (s - (-3200)) = s^3 + 9600 * s^2 + 3 * 3200^2 s + 3200^3 \quad (145)$$

$$\begin{cases} k_{\theta o} = 9600 \\ k_{wo} = 3 * 3200^2 \\ k_{tlo} = 3200^3 \end{cases} \quad (146)$$



Figura 61 . Error del observador al colocar el integrador

En la Figura 64, se observa cómo se eliminaron los errores de estado estacionario, luego de incorporar el integrador al observador de orden reducido.

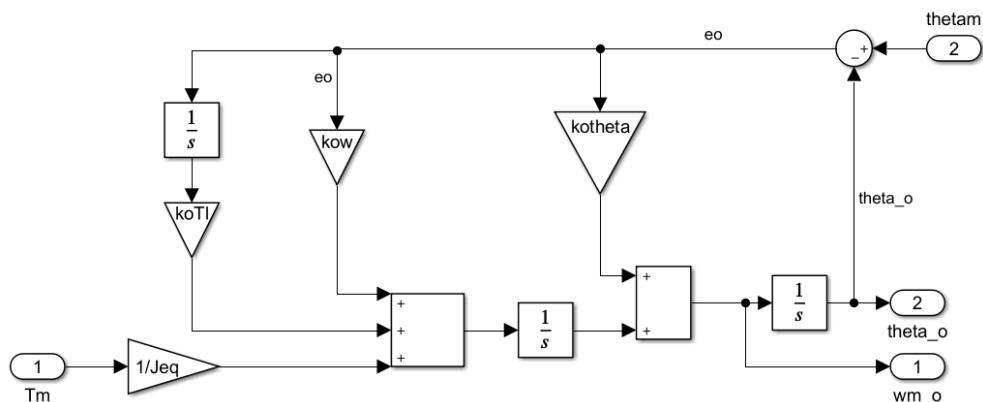


Figura 62 . Observador de orden reducido Corregido

c) Comportamiento térmico del motor.

Se evaluó el comportamiento térmico del motor sometido a una secuencia repetitiva de trabajo. Se consideró la misma consigna que anteriormente, el perfil trapezoidal de velocidad corregido, el mismo se puede ver en la Figura 67. El tiempo de operación definido fue de 600 segundos (10 minutos). Se aplicó el escalón de carga como en el caso anterior. Se puede apreciar

en la Figura 66 que durante los primeros ciclos la temperatura crece abruptamente hasta estabilizarse en un valor asintótico. Se cumplen las especificaciones de operación y la temperatura del motor se verifica, por lo tanto, el modelo funciona correctamente.

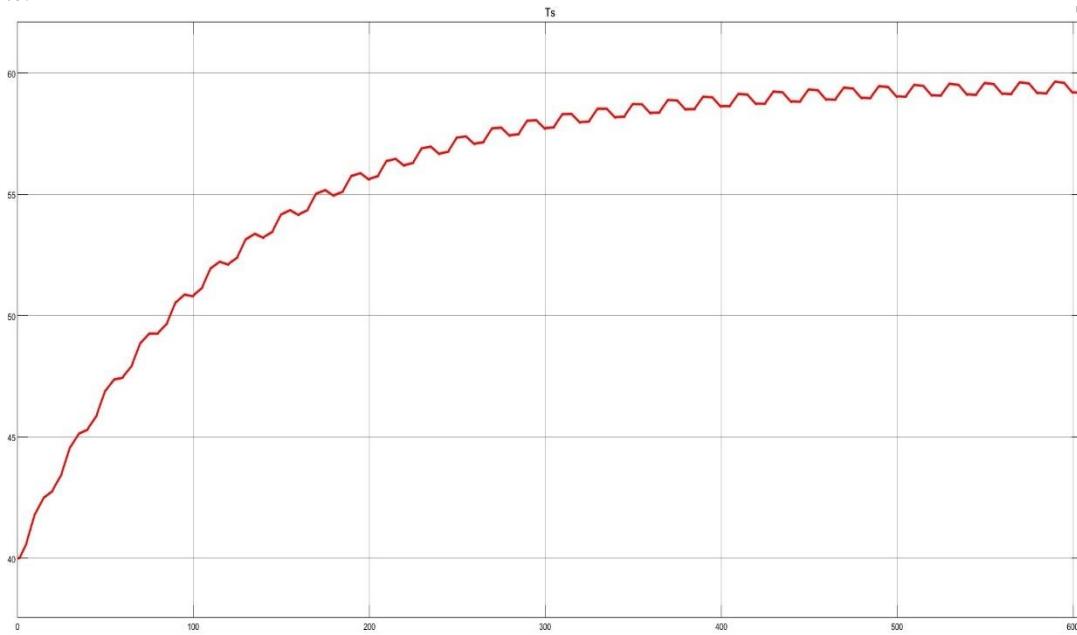


Figura 63 . Curva de T_s para 600 s de funcionamiento con T_l

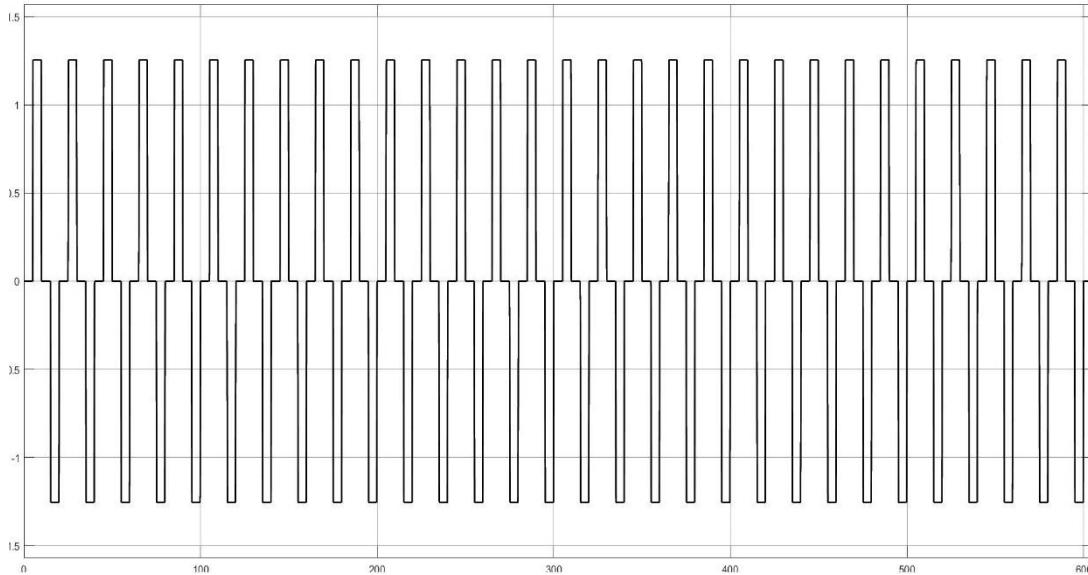


Figura 64 . Curva de w_m^* para 600 s de funcionamiento

d) Degradación de desempeño del sistema al colocar sensores con ancho de banda finito.

En este apartado, se evaluará si aparece alguna degradación de desempeño del sistema cuando se considera la *respuesta no ideal* (ancho de banda limitado) de los sensores y acondicionadores de señal, reemplazando el modelo ideal $G(s)\equiv 1$ para los sensores asumido hasta aquí, por modelos aproximados equivalentes con características de *filtro Pasa Bajos (LP) con ganancia (k) unitaria*, implementados en el Espacio de Estados (SS):

- Corrientes $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$, $i_{cs}(t)$: modelo LP en SS 2º orden, $\omega_n=6000\text{rad/s}$, $\xi=1$.
- Posición angular $\theta_m(t)$: modelo LP en SS 2º orden, $\omega_n=2000\text{rad/s}$, $\xi=1$.
- Temperatura $T_s^\circ(t)$: modelo LP en SS 1º orden, $\tau=20\text{s}$.

La función de transferencia de un filtro pasa bajo de primer orden es la ecuación (147), y la de un filtro pasa bajo de segundo orden es la ecuación (148).

$$G(s) = \frac{k}{\tau * s + 1} \quad (147)$$

$$G(s) = \frac{k * w_n^2}{s^2 + 2 * \xi * w_n * s + w_n^2} \quad (148)$$

Las funciones de transferencia (147) y (148), se las paso al espacio de estado, mediante la matriz canónica controlable obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{k}{\tau} * u(t) - \frac{1}{\tau} * x_1(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

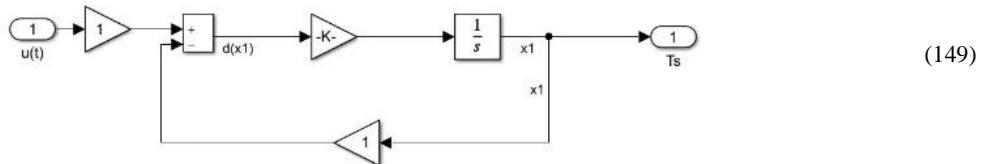


Figura 65 . Diagrama de bloques del Filtro pasa bajo de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = k * w_n^2 * u(t) - w_n^2 * x_1(t) - 2 * \xi * w_m * x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \\ \text{en forma matricial} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_n^2 & -2 * \xi * w_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ k * w_n^2 \end{bmatrix} \\ y(t) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (150)$$

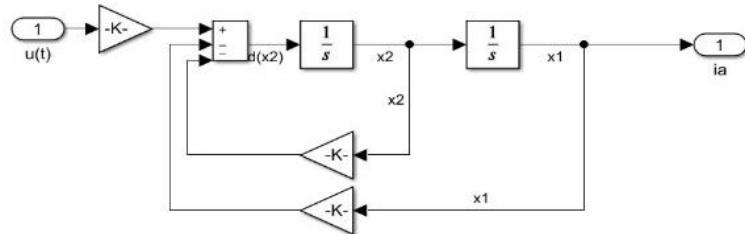


Figura 66 . Diagrama de bloques del Filtro pasa bajo de segundo orden

Con las frecuencias $w_m=6000$ rad/s para los sensores de corriente y $w_m=2000$ rad/s para el sensor de posición angular, el sistema diverge como se puede observar en las figuras 69 y 70.

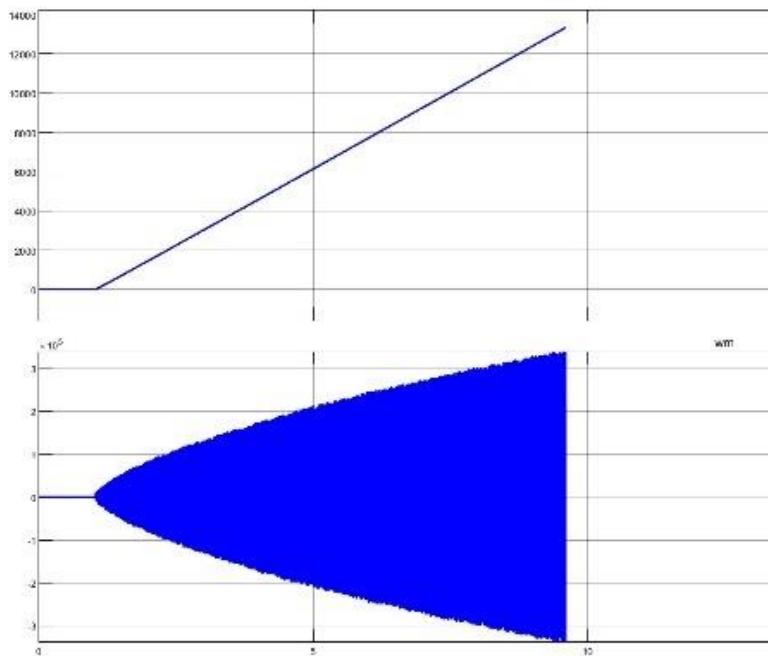


Figura 67 . Respuestas de w_m y θ_m para w del sensor de 2000 rad/s

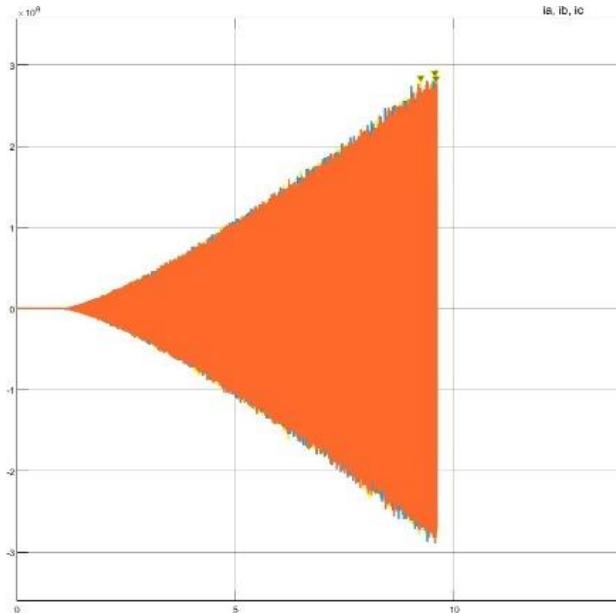


Figura 68 . Respuestas de i_{abc} , para w del sensor de 6000 rad/s

Se probó el sistema con diferentes frecuencias de los sensores y se observó que a partir de los 10000 rad/s, el sistema ya era estable, pero las consignas de tensión excedían el rango de funcionamiento del motor, por este motivo se optó por tomar como frecuencia tanto del sensor de posición como los sensores de corriente a $w=15000$ rad/s, ya que, a esta, se cumple el rango de funcionamiento del motor.

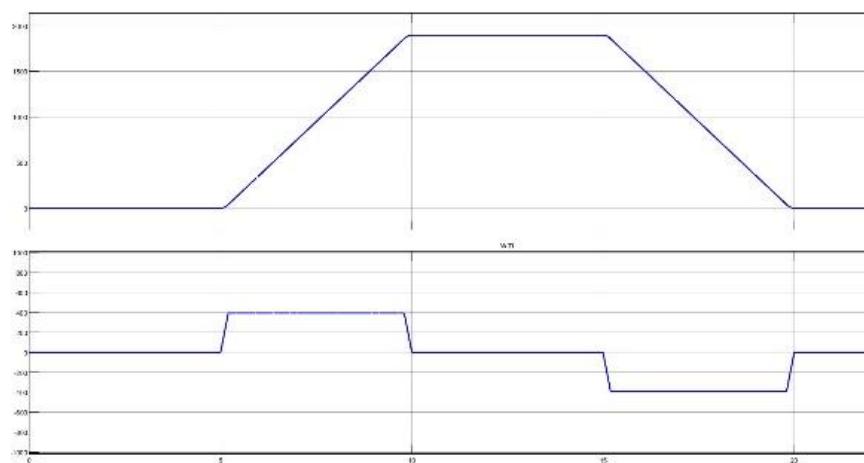


Figura 69 . Respuestas de w_m y θ_{tam} para w del sensor de 15000 rad/s

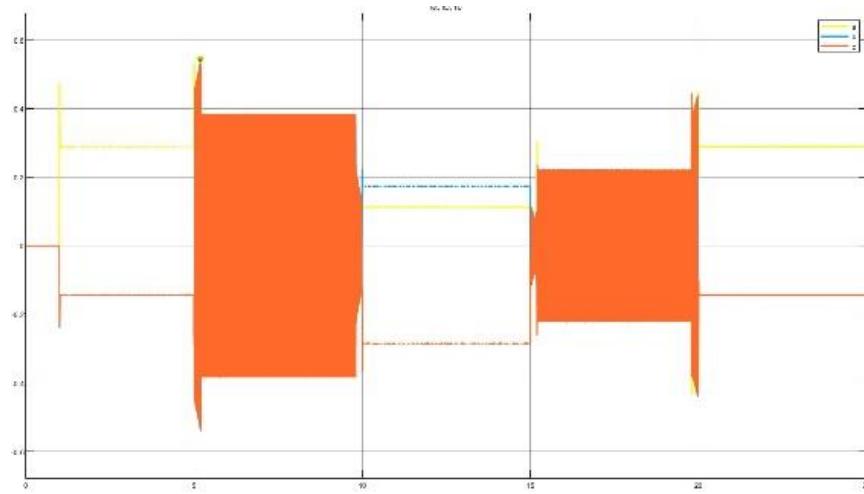


Figura 70 . Respuestas de I_{abc} , para w del sensor de 15000 rad/s

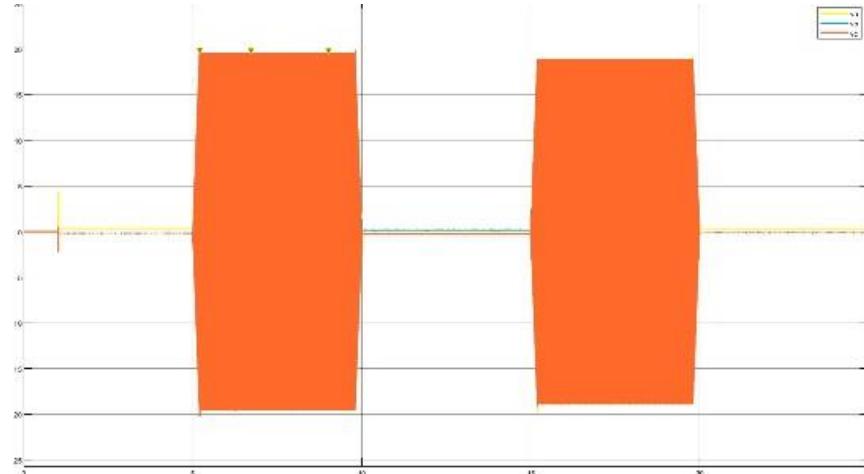


Figura 71 . Respuestas de V_{abc} , para w del sensor de 15000 rad/s

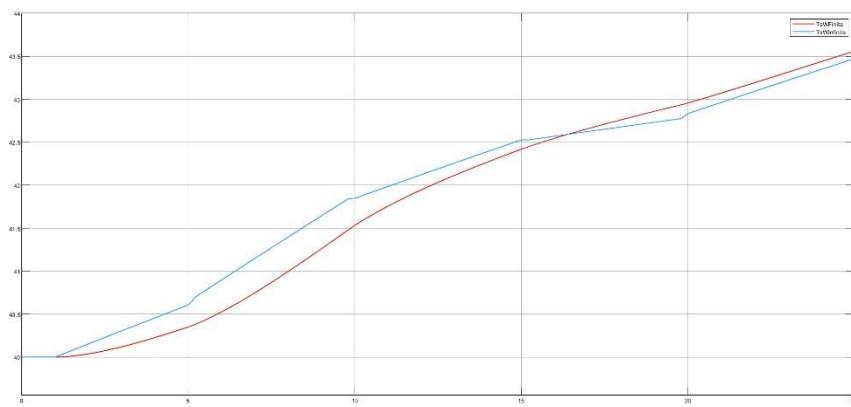


Figura 72 . Respuestas de T_s , para τ del sensor de 2 s vs τ del sensor infinito.

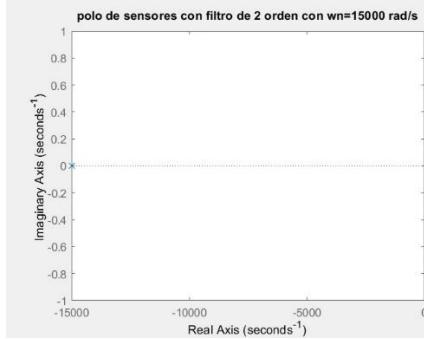


Figura 73 . Diagrama de Polos de Sensores de corriente y posición

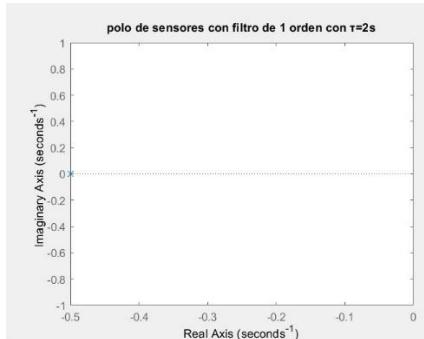


Figura 74 . Diagrama de Polos de Sensor de Temperatura

e) Degradación de desempeño del sistema al colocar actuadores con ancho de banda finito.

A continuación se evaluará adicionalmente si aparece alguna degradación de desempeño del sistema cuando se considera la respuesta no ideal (Saturación y ancho de banda limitado) en el modulador trifásico de tensión que representa como modelo promediado el Inversor, reemplazando el modelo ideal $G(s)\equiv 1$ para el inversor asumido hasta aquí, por modelo aproximado equivalentes con saturación y características de filtro Pasa Bajos (LP) con ganancia unitaria, implementados en el Espacio de Estados (SS):

- Saturación: $|vas(t)|, |vbs(t)|, |vcs(t)| \leq \sqrt{2} \cdot Vsl \cdot \text{máx.}/\sqrt{3}, Vsl \text{ máx.}=24 Vca rms$
- Tensiones $vas(t), vbs(t), vcs(t)$: modelo LP en SS 2º orden, $\omega_n=6000 \text{ rads}$, $\xi=1$.

Al aplicar $\omega_n=6000 \text{ rad/s}$, se observa que el sistema no cumple con la consigna deseada como se puede observar en la Figura 78.

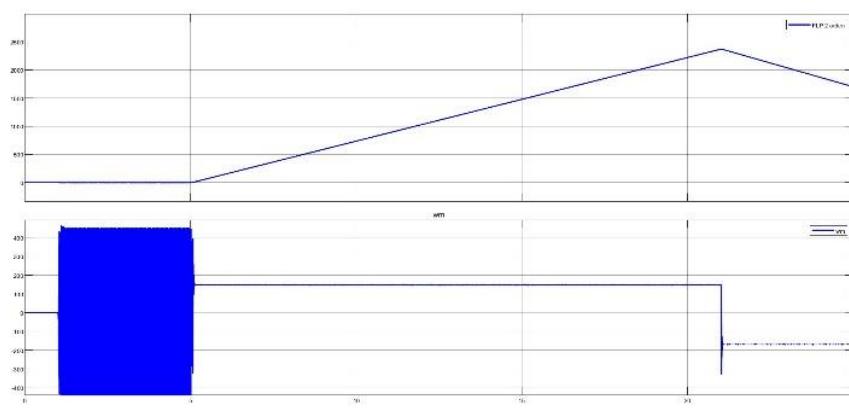


Figura 75 . Respuestas de w_m y θ_m , para $w_n = 6000 \text{ rad/s}$ en el modular de tensión.

Para lograr que el sistema cumpla con la consigna deseada se tuvo que aumentar la frecuencia del modulador de tensión, de 6000 rad/s a 30000 rad/s. En las figuras 77 a 81 se observa el comportamiento del sistema.

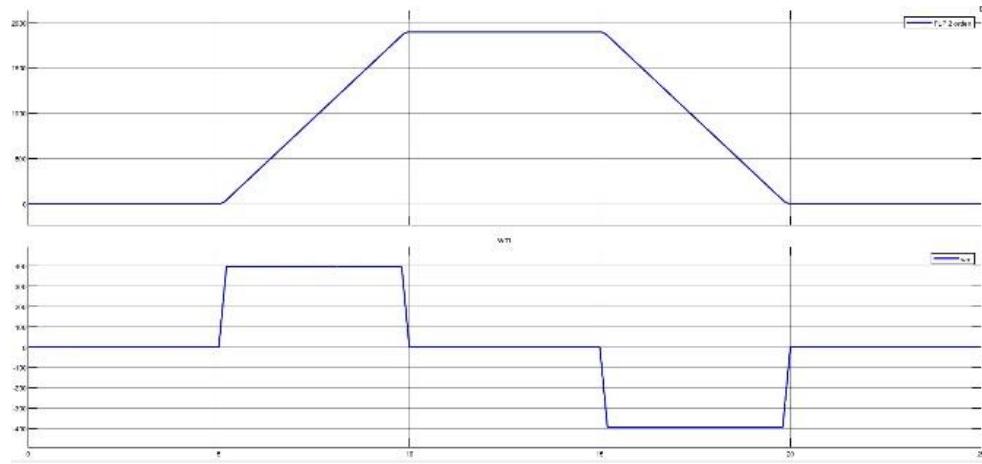


Figura 76 . Respuestas de w_m y θ_m , para $w_n = 30000 \text{ rad/s}$ en el modular de tensión.

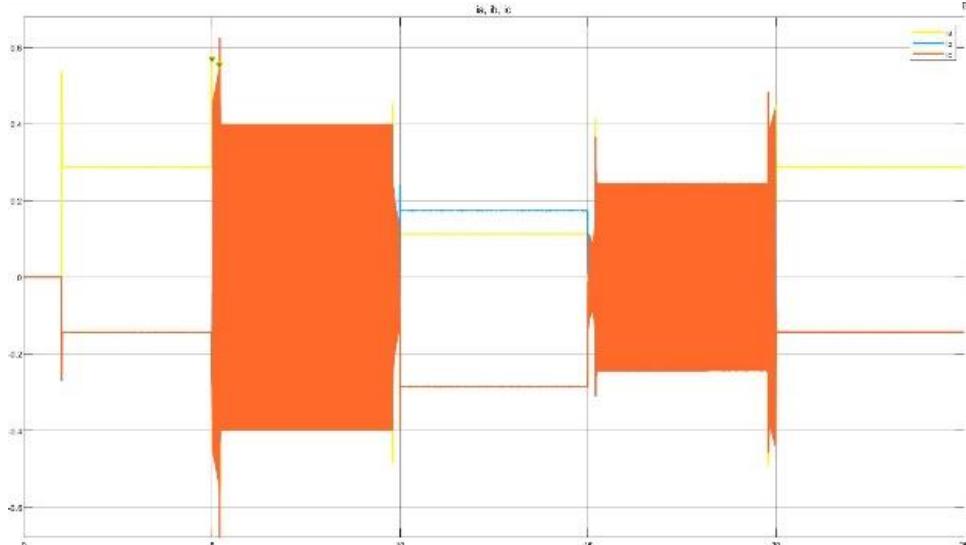


Figura 77 . Respuestas de I_{abc} , para $w_n = 30000 \text{ rad/s}$ en el modular de tensión.

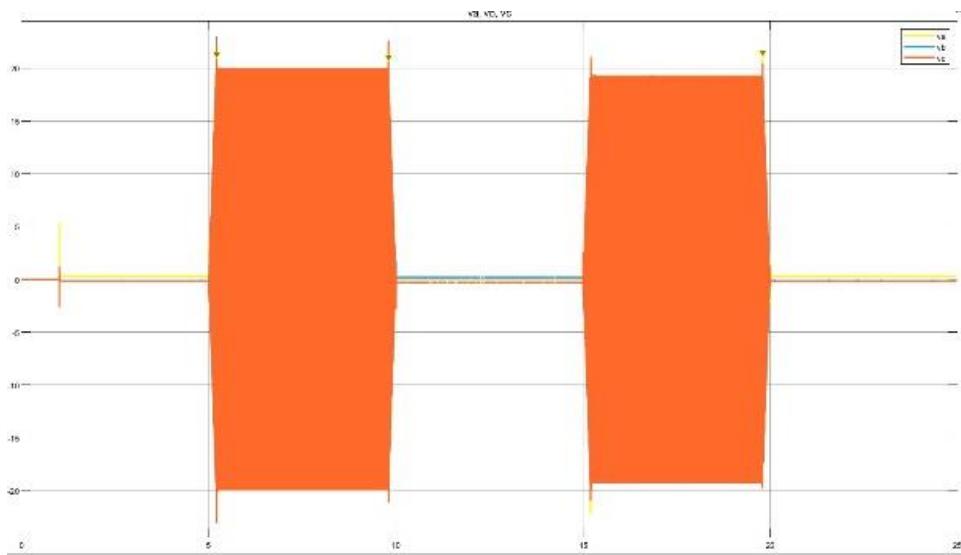


Figura 78 . Respuestas de V_{abc} , para $w_n = 30000 \text{ rad/s}$ en el modular de tensión.

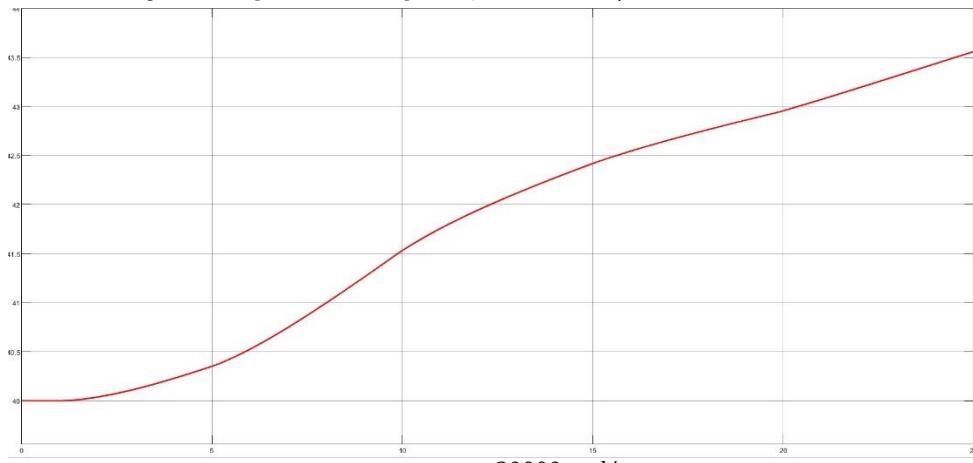


Figura 79 . Respuestas de T_s , para $w_n = 30000 \text{ rad/s}$ en el modular de tensión.

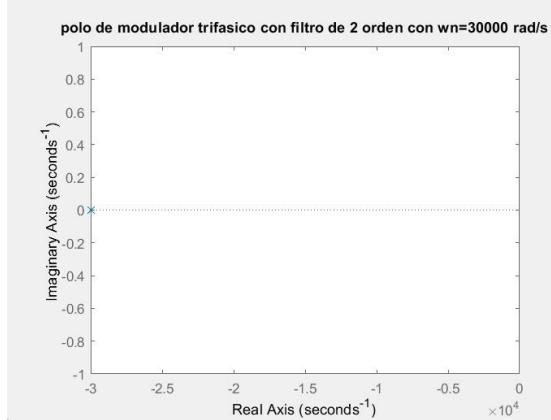


Figura 80 . Polos del modular de tensión como filtro de 2 orden.

6) Versión final:

A continuación, en la Figura 84, se muestra el diagrama no lineal completo final:

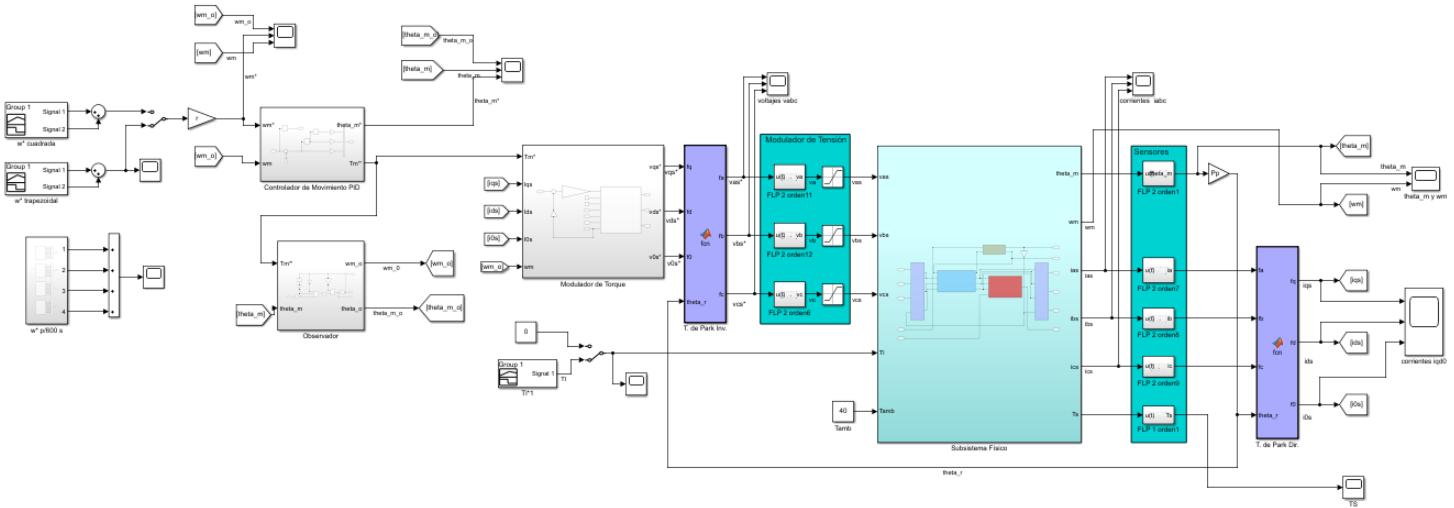


Figura 81. Diagrama NL Completo Final.

Conclusión:

Mediante este trabajo se logró el control de una articulación de un brazo robótico de manera satisfactoria. El diseño del mismo es robusto y cumple con las especificaciones de operación y sigue correctamente la consigna de posición dada. Cabe destacar que para esto se modificó la consigna (perfil de velocidad angular) para obtener una aproximación (perfil de posición) más suave.

Se vio también la importancia de tener un estimador, ya que se pudo prescindir del uso de un sensor de velocidad angular. Se agrego un integrador en la planta del estimador para poder evitar errores de estado estacionario. El control PID funciona correctamente, se dieron consignas de velocidad para evitar el posible error generado al usar un derivador en el control.

El desarrollo de este trabajo integrador sirvió tanto para consolidar los conceptos aprendidos durante el cursado de la materia, como para comprender de manera integral algunos métodos de control y su implementación en la práctica. También se comprendió que muchas veces el modelo teórico no puede ser llevado a la práctica o que su éxito depende de otras variables prácticas o económicas, por lo que se deben llevar a cabo otras implementaciones.

Referencias:

- [1] Julián Gabriel. Guía de trabajo para el Proyecto Global Integrador. Universidad Nacional de Cuyo, 2021.
- [2] Julián Gabriel. Material de clases. Universidad Nacional de Cuyo, 2021.
- [3] Katsuhiko Ogata. Modern Control Engineering. 5.a ed.
- [4] William J. Palm III. System Dynamics. Third Edition.