第三节 二维连续型随机变量

1. 填空题.

(1) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

则常数$C=$ $\frac{1}{\pi}$.

(2) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases},$$

则当 $0\le y\le 1$ 时，(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度函数

$f_Y(y)=$ $\begin{cases} \frac{1}{2}+y & 0\le y\le 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

(3) 已知二维随机变量(X,Y)服从区域$G: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2$上的均匀分布，则$P(0\le Y\le \frac{1}{2})=$ $\frac{1}{4}$；$f_Y(1)=$ $\frac{1}{2}$.

(4) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, x>0, y>0 \\ 0, \quad 其他 \end{cases},$$

则$P(X<Y)=$ $\frac{1}{3}$.

(5) 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy, & 0<x<1, 0<y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

则常数$C=$ 1；$F(1,1)=$ $\frac{1}{4}$.

$P(X=Y)=$ 0；$P(X+Y<1)=$ $\frac{1}{24}$.

(6) 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y \\ 0, \quad 其他 \end{cases},$$

则关于 X 的边缘概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

2. 设随机变量(X,Y)在由 $x=1, x=e, y=\frac{1}{x}, y=0$ 围成的区域内均匀分布. 求：

（1）(X,Y)的联合概率密度函数；

（2）$P(X+Y<2)$.

解：(1) $f(x,y)=\begin{cases} C, 1<x<e, 0<y<\frac{1}{x} \\ 0, 其他 \end{cases}$

$\therefore \int_1^e\int_0^{\frac{1}{x}} C\,dy\,dx=1$

$C=1$

$\therefore f(x,y)=\begin{cases} 1, 1<x<e, 0<y<\frac{1}{x} \\ 0, 其它 \end{cases}$

(2) $P(X+Y<2)=$

$\int_1^2\int_0^{2-x} 1\,dy\,dx$

$=\frac{1}{2}$

3. 设二维随机变量(X,Y)在以原点为圆心，R 为半径的圆上服从均匀分布，试求(X,Y)的联合概率密度和边缘概率密度.

解：$f(x,y)=\begin{cases} C, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

~~$\int_0^R\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} C\,dy\,dx=1$~~

$\int_0^R\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} C\,dy\,dx=0$

$C=\frac{1}{R^2\pi}$

$\therefore f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{R^2\pi}, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R^2\pi}dy$

$=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{R^2\pi}dy$

$=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R^2\pi}$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R^2\pi}, & -R<x<R \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y)=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$

$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R^2\pi}, & -R<y<R \\ 0, & 其它 \end{cases}$

4. 已知二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(1-x)y, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

求：(1) 常数k；

(2) X 及 Y 的边缘概率密度函数.

解：(1)

$\int_0^1\int_0^x k(1-x)y\,dy\,dx=1$

$\int_0^1 \frac{k}{2}(1-x)x^2\,dx=1$

$\frac{k}{24}=1$

$k=24$

(2)

$f_X(x)=\int_0^x 24(1-x)y\,dy=12(x^2-x^3)$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases} 12(x^2-x^3), 0<x<1 \\ 0, 其它 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_y^1 24(1-x)y\,dx=12y-24y^2+12y^3$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

5. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 6x, & 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

求：(1) X 及 Y 的边缘概率密度函数；

(2) $P(X+Y<1)$.

解：$f_X(x)=\int_x^1 6x\,dy=6x-6x^2$

$\therefore f_X(x)=\begin{cases} 6x(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_0^y 6x\,dx=3y^2$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases} 3y^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

(2) $P(X+Y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x} 6x\,dy\,dx=\frac{1}{4}$