第五章 大数定理和中心极限定理

1. 填空题.　$\mu=\frac{1}{2}$　$D(x)=\frac{1}{12}$

(1) 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，由切比雪夫不等式得 $P(\left|X-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{\sqrt{3}})\leq$ $\frac{1}{4}$.

(2) 设 $E(X)=-1,D(X)=4$,则由切比雪夫不等式得 $P(-4<X<2)\geq$ $\frac{5}{9}$.

(3) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$都服从参数为 2 的泊松分布，且相互独立，则当 n 充分大的时候，由中心极限定理得随机变量

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

近似服从 $N(2n,2n)$.

(4) 设随机变量 $X\sim B(100,0.2)$，用中心极限定理可以求得 $P(X>10)\approx$ 0.9988. ($\Phi(2.5)=0.9988$)

2. 选择题.

(1) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$都服从 $N(\mu,\sigma^2)$，且相互独立，令

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式得$\bar{X}$满足(C).

(A) $P(\left|\bar{X}-n\mu\right|<\varepsilon)\geq\frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$　(B) $P(\left|\bar{X}-\mu\right|<\varepsilon)\geq1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

(C) $P(\left|\bar{X}-\mu\right|\geq\varepsilon)\leq1-\frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$　(D) $P(\left|\bar{X}-n\mu\right|\geq\varepsilon)\leq\frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2}$

$E=2$　$\lambda=4$

(2) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为独立同分布的随机变量，且都服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布，则当 n 充分大时，随机变量

$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

近似服从(D).

(A) $N(2,4)$　(B) $N(2,\frac{4}{n})$　(C) $N(\frac{1}{2},\frac{1}{4n})$　(D) $N(2n,4n)$

(3) 设 $E(X)=-2,E(Y)=2,D(X)=1,D(Y)=4,\rho_{XY}=-0.5$，根据切比雪夫不等式得 $P(|X+Y|\geq6)$的上界为(A).

(A) 1/12　(B) 11/12　(C) 7/36　(D) 5/36

3. 由 100 个相互独立起作用的部件组成的一个系统在运行过程中，每个部件能正常工作的概率都为 90%.为了使整个系统能正常运行，至少必须有 85%的部件在正常工作，用中心极限定理求整个系统能正常运行的概率.

解:　$E(X)=90$

$X\sim B(100,0.9)$　$D(X)=9$

$P(X\geq85)=\cancel{P\{85\leq X<\infty\}}$

$P\{85\leq X<+\infty\}$

$=P\{\frac{85-90}{\sqrt{9}}\leq\frac{X-90}{\sqrt{9}}\leq\frac{+\infty-90}{\sqrt{9}}\}$

$\approx1-\Phi(-\frac{5}{3})=0.9525$

4. 利用中心极限定理确定当投掷一枚均匀硬币时，需投掷多少次才能保证使得正面出现的频率在 0.4 到 0.6 之间的概率不小于 90%.

解: $X \sim B(n, 0.5)$ $E(X)=0.5n$

$D(X)=0.25n$

$P(0.4n<X<0.6n)>0.9$

$\therefore P\left\{\frac{0.4n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}<\frac{X-0.5n}{\sqrt{0.25n}}<\frac{0.6n-0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right\}>0.9$

$\cancel{\Phi\left\{\frac{0.1\sqrt{n}}{0.5}\right\}}$ $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\right)>0.9$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)>0.95$

$\therefore \frac{\sqrt{n}}{5}>1.65$

$n>68$

5. 某学校有 20000 名住校生，每个人去本校食堂就餐的概率为 0.8，每个人是否去食堂就餐是相互独立的.试问，食堂应至少设多少座位，才能以 0.99 的概率保证去就餐的学生都有座位？

6. 设一条自动生产线的产品合格率为 0.8，要使一批产品的合格率在 76%与 84%之间的概率不小于 90%，试用（1）切比雪夫不等式和（2）中心极限定理两种方法求这批产品至少要生产多少件？对结果做出你的评价.