$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$

一、选择题（本大题共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

D 1、甲袋中有 3 个红球 1 个白球，乙袋中有 1 个红球 2 个白球，从两袋中分别取出一个球，则两个球颜色相同的概率是。

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{5}{12}$

B 2、若 $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A-B)=0.3$，则 $P(A\cup B)=$。 $P(AB)=0.2$

(A) 0.6 (B) 0.7 (C) 0.8 (D)0.5

B 3、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x^2, 0\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$，则 $P(0.2<X<0.3)=$。

$F(0.3)-F(0.2)=0.05$

(A) 0.01 (B) 0.05 (C) 0.1 (D) 0.4

D 4、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 与 Y 的分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$，令 $Z=\min(X,Y)$，则 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 为。

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$
$=1-P\{Z>z\}$
$=1-P\{\min(x,y)>z\}$
$=1-P\{x>z, y>z\}$

(A) $F_X(z)F_Y(z)$ (B) $1-F_X(z)F_Y(z)$

(C) $(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$ (D) $1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

B 5、设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)$，则 $P(X>1)=$。

(A) $\int_{-\infty}^{1}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ (B) $\int_{1}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

(C) $\int_{-\infty}^{1}f(x,y)dy$ (D) $\int_{1}^{+\infty}f(x,y)dy$

A 6、设随机变量 $X\sim B\left(10,\frac{1}{3}\right)$，则 $\frac{D(X)}{E(X)}=$。

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{10}$

C 7、设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为独立同分布的随机变量，且都服从参数为 2 的指数分布，则当 n 充分大时，随机变量 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从。

$\lambda=2$ $E(X)=\frac{1}{2}$ $D(X)=\frac{1}{4}$

(A) $N(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ (B) $N(2,4)$ (C) $N(\frac{n}{2},\frac{n}{4})$ (D) $N(2n,4n)$

A 8、若 $E(X)=E(Y)=2$，$Cov(X,Y)=-\frac{1}{6}$，则 $E(XY)=$。

(A) $\frac{23}{6}$ (B) 4 (C) $\frac{25}{6}$ (D) $-\frac{1}{6}$

$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)$

$E(x)=\mu \quad D(x)=\sigma^2$

B 9、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则 $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从分布。 $\frac{1}{6^2}$

(A) $\chi^2(n-1)$　　(B) $\chi^2(n)$ (C) $t(n-1)$　　(D) $t(n)$

A 10、设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值与样本方差。在 σ^2 已知时，对假设检验 $H_0:\mu=\mu_0$ 应选用的检验统计量是。

(A) $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　(B) $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ (C) $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n-1}}$　　(D) $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$

$\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=0.85$　　0.068　　$0.85\cdot 0.08$

二、填空题(本大题共 12 空格，每空格 2 分，共 24 分)

1、设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B\mid\bar{A})=0.85$，则 $P(AB)=$，0.862

$P(A\cup B)=$。 $0.92+0.93-0.862=0.988$

2、设连续随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}cx, 0<x<2\\ 0, \text{其他}\end{cases}$，则常数 $c=$，$\frac{1}{2}$

$\int_0^2 cx\,dx=1$

$P(-1\le X\le 1)=$。 $\frac{1}{4}$

3、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 与 Y 的分布律分别为

X	0	1
P	1/4	3/4

Y	0	1
P	2/5	3/5

则 $P(X+Y=1)=$ $\frac{9}{20}$，$E(XY)=$。 $\frac{9}{20}$

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{20}$

0 4 1

4、设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1), Y\sim \pi(2)$，令 $Z=X+2Y+1$，则 $E(Z)=$，5

$D(Z)=$。 9

$D(X+2Y+1)=D(X)+D(2Y)+E(X(2Y+1))-E(X)E(2Y+1)$

5、设总体 $X\sim B(1,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值与样本方差。则 $D(\bar{X})=$，$E(S^2)=$。

$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X)=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D(X)=\frac{p(1-p)}{n}$

6、设总体 X 服从 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，$\theta>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则 θ 的矩估计量为。 $\frac{\bar{X}}{2}$

7、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，S^2 为样本方差，要检验 $H_0:\sigma^2=1$，则应采用的检验统计量为。 $(n-1)S^2$

三、（12 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$E(X)=0.5$

$E(Y)=-0.5$

$E(X^2)=1$

$E(Y^2)=1$

$D(X)=0.75$

$D(Y)=0.75$

Y \ X	-1	1
-1	0.25	0
1	0.5	0.25

求：(1) $E(X),E(Y),D(X),D(Y)$；

(2) $Cov(X,Y),\rho_{XY}$。

$E(XY)=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0+0.25=0.25$

$\rho_{XY}=\frac{0.25}{\sqrt{0.75\,0.75}}=\frac{1}{3}$

四、(12 分) 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}kxy, 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, 其他.\end{cases}$$

求：(1) 常数k； $k=8$ $\int_0^1\int_0^x kxy=1$

(2) X和Y的边缘概率密度函数。

$f_X(x)=\int_0^x 8xy\,dy=4x^3$ $f_Y(y)=\int_y^1 8xy\,dy=4y(1-y^2)$

五、(12 分) 设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$，其中$0<\theta<\infty$，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本。

(1) 验证θ的最大似然估计量是$\hat{\theta}=\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$；

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^n}(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{\theta}-1}$

$\ln L(\theta)=-n\ln\theta+(\frac{1}{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+(-\frac{1}{\theta^2})\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$ $\hat{\theta}=\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$

(2) 证明$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

$E(\hat{\theta})$
$=E(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)$
$=-E(\ln x)$
$=-\int_0^1\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}\ln x\,dx$
$=\theta$

六、(10 分) 设某批零件的长度$X\sim N(\mu,0.09)$ (单位：cm)，现从这批零件中抽取 9 个，测其长度作为样本，并算得样本均值$\bar{x}=43$，求μ的置信度为 0.95 的置信区间。

(备用数据：$u_{0.025}=1.96, u_{0.05}=1.645, t_{0.025}(8)=2.3060, t_{0.05}(8)=1.8595$)

解：

$1-\alpha=0.95$

$[\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}]$

$\therefore [42.804, 43.196]$