第二章第六节

第六节 随机变量函数的分布

1. 填空题.

(1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1
p	1/6	1/3	1/2

则 $Y=2X-1$ 的概率分布律为

Y	-3	-1	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$Z=X^2$ 的概率分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(2) 已知随机变量 $X\sim N(0,1)$，则随机变量 $Y=2X+1$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=$ $\cancel{\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}}$. $\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$

(3) 设随机变量 $X\sim N(2,9)$，则 $Z=\frac{X-2}{3}\sim$ $N(0,1)$ 分布.

(4) 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	1/8	3/8	1/16	7/16

且 $Y=X^2$，记随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(3)=$ $\frac{9}{16}$.

(5) 若随机变量 $X\sim E(1)$，令 $Y=\begin{cases}0, X<2\\1, X\geq 2\end{cases}$，则 Y 的概率分布为

$\lambda e^{-\lambda x}$ $P(X)=e^{-x}$

Y	0	1
P	$1-e^{-2}$	e^{-2}

(6) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 Y 的概率密度函数为 $f_Y(y)=$ $\cancel{-2(1-f_X(-\frac{y}{2}))}$ $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

2. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，求：

(1) $Y=2X+1$ 的概率密度函数；

(2) $Y=-2\ln X$ 的概率密度函数.

解：(1)

$\cancel{f_Y(y)=f_Y(Y)}$

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)$$
$$=P(2X+1\leq y)$$
$$=P(X\leq\frac{y-1}{2})$$
$$=F_X(\frac{y-1}{2})$$
$$\therefore f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X(\frac{y-1}{2})$$
$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\leq x\leq 3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(2)

$$F_{Y}(y)=P(Y\leq y)$$
$$=P(-2\ln X\leq y)$$
$$=P(X\geq e^{-\frac{y}{2}})$$
$$=1-F_X(e^{-\frac{y}{2}})$$
$$\therefore f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X(e^{-\frac{y}{2}})$$
$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}.$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度函数.

解：

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)$$
$$=P(X^2\leq y)$$
$$=\cancel{P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})}\ P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})$$
$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$
$$=F_X(\sqrt{y})$$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{f_X(\sqrt{y})}{2x}$$

$\cancel{f_Y(y)}$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

第三章第二节

第二节 二维随机变量的联合分布函数

1. 填空题.

(1) 设二维随机向量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$，其联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.2	0	0.1
0	0	0.4	0
1	0.1	0	0.2

则$F(1,1)=$ 0.7 ；$F_X(0)=$ 0.7 .

$$F_X(x)=\begin{cases}1 & x\geq 1\\ 0.7 & 1>x\geq 0\\ 0.3 & 0>x\geq -1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

(2) 设二维随机变量(X,Y),的联合分布函数为$F(x,y)$，则(X,Y)关于Y的边缘分布函数$F_Y(y)=$________ .

2. 从一只装有3个黑球和2个白球的口袋中取球两次，每次任取一个不放回，令$X=\begin{cases}0,第一次取出白球\\1，第一次取出黑球\end{cases}$，$Y=\begin{cases}0,第二次取出白球\\1，第二次取出黑球\end{cases}$.求$(X,Y)$的联合分布律和关于$X$的边缘分布函数$F_X(x)$.

3. 将一枚硬币连掷三次，X表示三次中出现正面的次数，Y表示三次中出现正面次数与出现反面次数之差的绝对值. 求：

（1）(X,Y)的联合概率分布律；

（2）$P(Y>X)$；

（3）$F(1,3)$.

解：(1)

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	0	$\frac{3}{8}$	0
2	0	$\frac{3}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0

(2) $P(Y>X)=\frac{1}{2}$

(3) $F(1,3)=\frac{1}{2}$