第四节 协方差与相关系数 矩

1. 填空题.

(1) 设 X 和 Y 为随机变量，且 $D(X+Y)=7, D(X)=4, D(Y)=1$，则 $Cov(X,Y)=$ ___2___.

(2) 设(X,Y)为二维随机变量，$D(X)=16, D(Y)=25$，$\rho_{XY}=0.6$，则有 $Cov(X,Y)=$ ___~~18~~ 12___.

(3) 设 $E(X)=2, E(Y)=3, E(XY)=7$，则 $Cov(2X,Y)=$ ___2___.

(4) 设X_1, X_2, Y 均为随机变量，已知 $Cov(X_1,Y)=-1$，$Cov(X_2,Y)=3$，则 $Cov(X_1+2X_2,Y)=$ ___5___.

(5) 设 $E(X)=E(Y)=2$，$Cov(X,Y)=-\frac{1}{6}$，则 $E(XY)=$ ___$\frac{23}{6}$___.

(6) 设 X 和 Y 为随机变量，且已知 $D(X)=25, D(Y)=16$，$Cov(X,Y)=8$，则$\rho_{XY}=$ ___0.4___.

(7) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望与方差都存在，若 $Y=-3X+5$，则$\rho_{XY}=$ ___-1___.

(8) 将长度为 1 米的木棒随机截成两段，则两段长度的相关系数为 ___. -1

(9) 设随机变量(X,Y)在区域 $D: x^2+y^2\le 1$ 上均匀分布，则 X 和 Y 的相关系数为 ___0___.

(10) 若随机变量$X_i (i=1,2,3,4)$相互独立且同分布，$E(X_i)=0, D(X_i)=\sigma^2, (i=1,2,3,4)$，令 $X=X_1+X_2+X_3, Y=X_2+X_3+X_4$,则 $\rho_{XY}=$ ___$\frac{2}{3}$___.

2. 选择题.

(1) 设 X 和 Y 的相关系数$\rho=0$，则(C).

(A) X 和 Y 相互独立 (B) X 和 Y 不一定相关

(C) X 和 Y 必不相关 (D) X 和 Y 必相关

(2) 设随机变量 X 和 Y 的期望和方差都存在，且 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$,则下列说法哪个是不正确的. (D)

(A) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(B) $E(XY)=E(X)E(Y)$

(C) X 和 Y 不相关

(D) X 和 Y 相互独立

(3) 设二维随机变量（X，Y）的分布律为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0

则 $Cov(X,Y)=$ (B).

(A) 0 (B) -1/9 (C) 1/3 (D) 1/4

(4) 已知随机变量 $X\sim N(1,9), Y\sim N(0,16), \rho_{XY}=0.5$，令 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$，则 $\rho_{XZ}=$ (B).

(A) 1/2 (B) $2/\sqrt{7}$ (C) $2/\sqrt{5}$ (D) $2/\sqrt{11}$

3. 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} k, & 0<x<1, \quad 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 常数 k;

(2) $E(XY), Cov(X,Y)$.

解: (1)

$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)}\, dx$

$$\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=1$$

$$k=2$$

(2)

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 2\,dy\,dx = \frac{1}{4}$$

$\cancel{Cov(X,Y)=}$ $E(X)=\int_0^1\int_0^x x\cdot 2\,dy\,dx=\frac{2}{3}$

$$E(Y)=\int_0^1\int_0^x y\cdot 2\,dy\,dx=\frac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$$

4. 设随机变量 $Y\sim E(1)$，令随机变量

$$X_k=\begin{cases} 0, & 若 Y\le k \\ 1, & 若 Y>k \end{cases} \quad (k=1,2).$$

求 $Cov(X_1,X_2)$; $\rho_{X_1X_2}$.

解: ~~$E(X_k)=$~~

~~$P(X_1=0, X_2=0)=$~~

~~$E(X_1)=$~~ $\int\int_{-\infty}^{0}$

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-\frac{1}{e}$	0
1	$\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e^2}$

$$P(X_1=0)=P(y\le 1)= 1-e^{-1}$$

$$P(X_1=1)=P(y>1)=\int_1^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-1}$$

$$P(X_2=1)=P(y>2)=\int_2^{+\infty} e^{-y}dy=e^{-2}$$

$$P(X_2=0)=P(y\le 2)=1-e^{-2}$$

$$\therefore E(X_1)=e^{-1} \quad E(X_2)=e^{-2}$$

$$E(X_1X_2)=\frac{1}{e^2}$$

$$\therefore Cov(X_1,X_2)=\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^3}=\frac{1}{e^2}(1-\frac{1}{e})$$

$$D(X_1)=\frac{1}{e}(1-\frac{1}{e}) \quad D(X_2)=\frac{1}{e^2}(1-\frac{1}{e^2})$$

$$\therefore \rho_{X_1X_2}=\frac{\frac{1}{e^2}\cdot(1-\frac{1}{e})}{\sqrt{\frac{1}{e^3}(1-\frac{1}{e})(1-\frac{1}{e^2})}}$$

$\rho_{X_1X_2}=$

$$\therefore \rho_{X_1X_2}=\sqrt{\frac{1}{e+1}}$$