第二节 估计量的评选标准
第三节 参数的区间估计
第四节 单个正态分布总体参数的区间估计

1. 选择题.

(1) 设X_1,X_2,X_3为总体 X 的样本，$T=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{6}X_2+CX_3$，则 $C=$ (B) 时，T 是 $E(X)$的无偏估计.

(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/4 (D) 1

(2) 设X_1,X_2,X_3是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$的样本，已知统计量 $c(2X_1^2-X_2^2+X_3^2)$ 是方差σ^2的无偏估计量，则常数$c=$ (B).

(A) 1/4 (B) 1/2 (C) 2 (D) 4

(3) 设X_1,X_2是来自总体 X 的一个容量为 2 的样本，则在下列 $E(X)$的无偏估计量中，最有效的估计量是 (~~B~~ A).

(A) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ (B) $\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$

(C) $\frac{3}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2$ (D) $\frac{3}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2$

(4) 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$为来自总体 $X\sim N(\mu,3^2)$的样本，则μ的置信度为 0.95 的置信区间长度为 (C).（附：$u_{0.025}=1.96$）

(A) 1.96 (B) 11.76 (C) 3.92 (D) 无法确定

(5) 在区间估计中，若置信度增大，则置信区间的长度 (A).

(A) 变短 (B) 变长

(C) 不变 (D) 无法确定

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体 X 的样本，且 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$，证明：$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是σ^2的无偏估计量.

解：证明：$E(\hat{\sigma}^2)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)$

$=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\mu X_i+\mu^2)]$

$D(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2$

$E(X_i^2)=D(X_i)+E(X_i)^2$

$=\mu+\sigma^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{2\mu}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}E(X_i)+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu^2$

$=\cancel{\frac{1}{n}}(\sigma^2+\mu)-2\mu-\mu+\mu^2$

$=\sigma^2$ 可证

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，若统计量

$$D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

是σ^2的无偏估计量，求常数 k.

解：同上题

$E(X_i^2)=\mu+\sigma^2$

$E(D)=k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i-1}-X_i)^2$

$=k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i-1}^2-2X_{i-1}X_i+X_i^2)$

$=\cancel{k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2\mu^2-2\mu^2)}$

$=k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)$

$=2k(n-1)\sigma^2$

$\therefore 2k(n-1)=1$

$k=\frac{1}{2(n-1)}$

4. 设$\widehat{\theta}_1$和$\widehat{\theta}_2$都是θ的无偏估计量，且$\widehat{\theta}_1$和$\widehat{\theta}_2$相互独立，已知$D(\widehat{\theta}_1)=\sigma_1^2$，$D(\widehat{\theta}_2)=\sigma_2^2$，引入$\theta$的一个新的无偏估计量$\widehat{\theta}_3=\alpha\widehat{\theta}_1+(1-\alpha)\widehat{\theta}_2$，试确定常数$\alpha$，使得$D(\widehat{\theta}_3)$达到最小.

解 $E(\theta_1)=\theta \quad E(\theta_2)=\theta$

设$C_1\theta+C_2\theta$是θ的无偏估计量

$E(C_1\theta+C_2\theta)=\theta$

$E(C_1\theta_1+C_2\theta_2)=C_1E(\theta_1)+C_2E(\theta_2)$

$=C_1\theta+C_2\theta \quad \therefore C_1+C_2=1$

$=(C_1+C_2)\theta$ 可证

5. 用传统工艺加工某种水果罐头，每瓶中维生素C的含量为随机变量X（单位：mg）. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ、σ^2均未知. 现抽查16瓶罐头进行测试，测得维生素C的平均含量为20.80mg，样本标准差为1.60mg，试求μ的置信度95%置信区间.

解

$P\{\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\mu<\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

置信区间：$(\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

$\therefore (19.948, 21.650)$

6. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，抽取容量为n的样本，

（1）已知$\sigma=4,\bar{x}=12,n=144$，求$\mu$的置信度为0.95的置信区间；

（2）已知$\sigma=10$，问：要使μ的置信度为0.95的置信区间长度不超过5，样本容量n至少应取多大？

解：

(2)

$P\{\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\frac{\alpha}{2}}\}=0.95=1-\alpha$

$\therefore (\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\frac{\alpha}{2}})-(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\frac{\alpha}{2}})\leq 5$

$\therefore n\leq 62$