第六章 数理统计基础

1. 填空题.

(1) 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$为来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E(\overline{X})=$ 0.

(2) 设总体 $X\sim N(1,9)$，$X_1,X_2,\cdots,X_9$为来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $D(\overline{X})=$ 1.

(3) 设总体 X 服从参数为λ的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体 X 的一个样本，$\overline{X}$、S^2 分别为样本均值与样本方差，则对任意$0\le\alpha\le1$，

$E[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2]=$ λ.

(4) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1,X_2,X_3,X_4是来自 X 的样本，$\overline{X}$是样本均值，S^2 是样本方差，则:

$\overline{X}\sim$ ________；$\dfrac{4(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim$ ________.

$\mathrm{Cov}(2X_1,X_3)=$ ________；$E(S^2)=$________.

$\rho_{X_2X_4}=$ ________；$E[(X_1-X_2)^2]=$ ________.

(5) 设随机变量 X、Y 相互独立, 且 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$

则随机变量$\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim$ ________.

(6) 设随机变量 X、Y 相互独立，且 $X\sim N(0,5)$，$Y\sim\chi^2(5)$，则随机变量 $Z=\dfrac{X}{\sqrt{Y}}$ 服从自由度为 5 的________分布.

(7) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为其样本，S^2 为样本方差，且 $\dfrac{cS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，则常数 $c=$ ________.

(8) 设总体 $X\sim N(0,0.25)$，$X_1,X_2,\cdots,X_7$为来自该总体的一个样本，要使 $a\sum_{i=1}^{7}X_i^2\sim\chi^2(7)$，则应取常数 $a=$ 4；此时 $P(\sum_{i=1}^{7}X_i^2>4)=$ 0.025.

(9) 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$为总体 $X\sim N(0,1)$的一个样本，　16

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2,$$

要使 cY 服从$\chi^2(2)$，则常数 $c=$ $\frac{1}{3}$.

(10) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$, 则 $Y\sim$ ________.

(11) 若总体 $X\sim B(1,p),X_1,X_2,\cdots,X_6$为来自该总体的一个样本，则

$E(\overline{X})=$ ________；$D(\overline{X})=$ ________.

$E(S^2)=$________；$P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_6)<1\}=$ ________.

(12) 查分布表得

$u_{0.025}=$ ________, $t_{0.975}(8)=$ ________.

$\chi^2_{0.05}(9)=$ ________, $F_{0.975}(9,3)=$ ________.

2. 选择题.

(1) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ已知，σ^2未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为其样本，$n\ge2$，则下列说法中正确的是（　　）.

(A) $\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是统计量　　　(B) $\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}$ 是统计量

(C) $\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是统计量　　　(D) $\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}$ 是统计量

(2) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n\geq 2)$为来自正态总体 $N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则有（　　）.

(A) $n\overline{X}\sim N(0,1)$　　　(B) $nS^2\sim\chi^2(n)$

(C) $\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$　　　(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$

(3) 设$X_1,X_2,\cdots,X_6$是来自正态总体 $N(0,1)$的样本，则统计量 $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_4^2+X_5^2+X_6^2}$ 服从（　　）.

(A) 正态分布　(B) χ^2分布　(C) t 分布　(D) F 分布

3. 设总体 $X\sim N(12,4)$,样本$X_1,X_2,\cdots,X_5$来自该总体，求：

(1) 样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率；

(2) $P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_5)<10\}$.

解：(1)

$P\{|\bar{x}-12|>1\}=\cancel{P\left\{\left|\frac{\bar{x}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right|>\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right\}}\ 1-P\{|\bar{x}-12|\leq 1\}$

$=1-P\{-1\leq\bar{x}-12\leq 1\}$

$=1-P\left\{-\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\leq\frac{\bar{x}-12}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\leq\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5}}}\right\}$

$=2-2\Phi(1.12)=0.2628$

$F_N(x)=1-\left[1-\Phi\left(\frac{x-12}{2}\right)\right]^5$

$P\{\min(X_1,X_2\cdots X_5)<10\}$

$=P\{N<10\}$

$=1-\left[1-\Phi\left(\frac{10-12}{2}\right)\right]^5=1-[\Phi(1)]^5=0.5785$

4. 设总体 $X\sim N(5,4)$，从中抽取容量为 20 的样本$X_1,X_2,\cdots,X_{20}$，求 $P(33.04\leq\sum_{i=1}^{20}(X_i-5)^2\leq 125.64)$.

解：$P(33.04\leq\sum_{i=1}^{20}(X_i-5)^2\leq 125.64)$

$=P(8.26\leq\sum_{i=1}^{20}\frac{(X_i-5)^2}{4}\leq 31.41)$

$=0.95-0.01=0.94$

5. 在总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 中随机抽取一容量为16的样本，若μ和σ^2均未知，S^2为样本方差，求 $P(S^2/\sigma^2\leq 2.04)$.