第七章 参数估计

第一节 参数的点估计

1. 填空题.

(1) 设总体 $X \sim E(\lambda)$，其中$\lambda > 0$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体 X 的样本，则λ的矩估计量为__________，若有该样本均值的观测值为 $\bar{x} = 0.2$，则λ的矩估计值为__________.

(2) 设0，1，0，1，1，为来自两点分布总体 $B(1,p)$的样本观测值，则 p的矩估计值为 $\frac{3}{5}$.

(3) 设总体 X 在$[a, 2]$服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是从总体 X 中抽取的样本，则 a 的矩估计量为 $2(1-\bar{x})$.

(4) 已知某路口车辆经过的时间间隔 $X \sim E(\lambda)$，其中$\lambda > 0$ 未知，现在观测到 6 个时间间隔数据（单位：s）：1.8；3.2；4；8；4.5；2.5，则该路口车辆经过的平均时间间隔的最大似然估计值为__________.

(5) 设总体 X 的概率分布律为

X	0	1
	$1-p$	p

其中，p 为未知参数，且$X_1, X_2, \cdots, X_n$为其样本，则 p 的矩估计量为 $\hat{p} =$ $\bar{x}$.

(6) 若总体 $X \sim N(\mu, 1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本，则μ的的矩估计值为 $\bar{x}$.

2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自总体 X 的一个样本，X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

其中$\theta > 0$ 是未知参数，求θ的矩估计.

解：$\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta \frac{2x}{\theta^2} \cdot x \, dx = \cancel{2\int_0^\theta \frac{x^2}{\theta^2} dx} = \frac{2\theta}{3}$

$\therefore \theta = \frac{3}{2}\mu_1$

$\therefore \hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$

3. 设总体 X 的分布律为

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \; k = 1,2,\cdots (0 < p < 1)$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自该总体的一个样本，$x_1 x_2, \cdots, x_n$是其观测值，求未知参数 p 的最大似然估计量.

解：$\cancel{\because P(X=k) = (1-p)^{k-1} p}$

$\cancel{\therefore X \sim B(n,p)}$

$L(p) = \prod_{i=1}^n p(x_i; p) = \cancel{\prod_{i=1}^n (1-p)^{k-1} p}$

$(1-p)^{\prod_{i=1}^n x_i - n} \cdot p^n$

$\therefore \ln L(p) = (\sum_{i=1}^n x_i - n)\ln(1-p) + n\ln p$

$\therefore \frac{d\ln L(p)}{dp} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0$

$\therefore \hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$

4. 设总体 X 的概率分布律为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中，$\theta(0<\theta<1)$为未知参数，已知取得了样本值

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1.$$

试求θ的矩估计值和极大似然估计值.

解: $\mu_1 = E(X) = \cancel{\theta^2+2\theta}\ 1\cdot\theta^2 + 2\cdot 2\theta(1-\theta) + 3\cdot(1-\theta)^2$

$= 3-2\theta$

$\therefore \theta = \dfrac{3-\mu_1}{2}$ $\quad \hat{\theta} = \dfrac{3-\bar{x}}{2} = \dfrac{3-\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{5}{6}$

$L(p) = \prod_{i=1}^{3} p(x_i;p) = \theta^2 \cdot 2\theta(1-\theta)\cancel{(1-\theta)^2}\theta^2$ $\quad P(X_1=1)\cdot P(X_2=2)\cdot P(X_3=1)$

$= 2\theta^5(1-\theta)$

$\ln L(p) = \ln 2 + 5\ln\theta + \ln(1-\theta)$

$\dfrac{d\ln L(p)}{dL} = \dfrac{5}{\theta} - \dfrac{1}{1-\theta} = 0$

$\therefore \hat{\theta} = \dfrac{5}{6}$

5. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是其观测值，分别用矩估计法和最大似然估计法求θ的估计量.