第七章 参数估计

第一节 参数的点估计

1. 填空题.

(1) 设总体 $X \sim E(\lambda)$，其中$\lambda > 0$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体 X 的样本，则λ的矩估计量为__________，若有该样本均值的观测值为 $\bar{x} = 0.2$，则λ的矩估计值为__________.

(2) 设 0，1，0，1，1，为来自两点分布总体 $B(1,p)$的样本观测值，则 p 的矩估计值为 $\frac{3}{5}$.

(3) 设总体 X 在$[a, 2]$服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是从总体 X 中抽取的样本，则 a 的矩估计量为 $2(1-\bar{X})$.

(4) 已知某路口车辆经过的时间间隔 $X \sim E(\lambda)$，其中$\lambda > 0$ 未知，现在观测到 6 个时间间隔数据（单位：s）：1.8；3.2；4；8；4.5；2.5，则该路口车辆经过的平均时间间隔的最大似然估计值为 4.

(5) 设总体 X 的概率分布律为

X	0	1
	$1-p$	p

其中，p 为未知参数，且$X_1, X_2, \cdots, X_n$为其样本，则 p 的矩估计量为

$\hat{p} =$ $\bar{X}$.

(6) 若总体 $X \sim N(\mu, 1)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本，则μ的的矩估计值为 $\bar{X}$.

2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自总体 X 的一个样本，X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta^2}, & 0 < x < \theta \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

$\frac{2\theta}{3}$

其中$\theta > 0$ 是未知参数，求θ的矩估计.

解: $\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta \frac{2x}{\theta^2} \cdot x \, dx = \cancel{2\int_0^\theta \frac{x^2}{\theta^2}dx}$

$\therefore \theta = \frac{3}{2}\mu_1$

$\therefore \hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$

3. 设总体 X 的分布律为

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p,\ k = 1,2,\cdots(0 < p < 1)$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自该总体的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是其观测值，求参数 p 的最大似然估计量.

解: $\cancel{\because P(X=k) = (1-p)^{k-1}p}$

$\cancel{\therefore X \sim B(n,p)}$

$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; p) = \cancel{(\prod_{i=1}^{n} (1-p)^{n}}$

$(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n} \cdot p^n$ $\cancel{(1-p)^{x_i-n} \cdot p}$

$\therefore \ln L(p) = (\sum_{i=1}^{n} x_i - n)\ln(1-p) + n\ln p$

$\therefore \frac{d\ln L(p)}{dp} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0$

$\therefore \hat{p} = \frac{1}{}$

总体 X 的概率分布律为

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

$\theta(0<\theta<1)$为未知参数，已知取得了样本值

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1.$$

θ的矩估计值和极大似然估计值.

$$\mu_1 = E(X) = \cancel{\theta^2+2\theta}\ 1\cdot\theta^2 + 2\cdot 2\theta(1-\theta) + 3\cdot(1-\theta)^2$$

$$= 3-2\theta$$

$$\therefore\ \theta = \frac{3-\mu_1}{2} \qquad \hat{\theta} = \frac{3-\bar{x}}{2} = \frac{3-\frac{4}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{3} p(x_i;p) = \overset{p(X_1=1)\cdot p(X_2=2)\cdot p(X_3=1)}{\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\,\cancel{(1-\theta)^2}\,\theta^2}$$

$$= 2\theta^5(1-\theta)$$

$$\ln L(p) = \ln 2 + 5\ln\theta + \ln(1-\theta)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dL} = \frac{5}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} = 0$$

$$\therefore\ \hat{\theta} = \frac{5}{6}$$

5. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是其观测值，分别用矩估计法和最大似然估计法求θ的估计量.

解:

$$\mu = E(X) = \int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta} = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \mu \qquad \theta = \frac{2\mu-1}{1-\mu} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$$

$$\begin{cases} L(\theta) = (\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1 \\ L(\theta) = 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$

$$\therefore\ \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

第二节 估计量的评选标准
第三节 参数的区间估计
第四节 单个正态分布总体参数的区间估计

1. 选择题.

(1) 设X_1,X_2,X_3为总体 X 的样本，$T=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{6}X_2+CX_3$，则 C=(B) 时，T 是 $E(X)$的无偏估计.

(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/4 (D) 1

(2) 设X_1,X_2,X_3是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$的样本，已知统计量 $c(2X_1^2-X_2^2+X_3^2)$ 是方差σ^2的无偏估计量，则常数 $c=$ (B).

(A) 1/4 (B) 1/2 (C) 2 (D) 4

(3) 设X_1,X_2是来自总体 X 的一个容量为 2 的样本，则在下列 $E(X)$的无偏估计量中，最有效的估计量是 (~~B~~ A).

(A) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ (B) $\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2$

(C) $\frac{3}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2$ (D) $\frac{3}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2$

(4) 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$为来自总体 $X\sim N(\mu,3^2)$的样本，则μ的置信度为 0.95 的置信区间长度为 ( ).（附：$u_{0.025}=1.96$）

(A) 1.96 (B) 11.76 (C) 3.92 (D) 无法确定

(5) 在区间估计中，若置信度增大，则置信区间的长度 ( ).

(A) 变短 (B) 变长

(C) 不变 (D) 无法确定

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体 X 的样本，且 $E(X)=\mu$. $D(X)=\sigma^2$，证明：$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 是σ^2的无偏估计量.

解：证明：$E(\hat{\sigma}^2)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2)$

$=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\mu X_i+\mu^2)]$

$D(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2$

$E(X_i^2)=D(X_i)+E(X_i)^2$

$=\mu+\sigma^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{2\mu}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}E(X_i)+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mu^2$

$=\cancel{\frac{1\times n}{n}}(\sigma^2+\mu)-2\mu-\mu+\mu^2$

$=\sigma^2$ 可证

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，若统计量

$$D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

是σ^2的无偏估计量，求常数 k.

解：同上题

$E(X_i^2)=\mu+\sigma^2$

$E(D)=k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i-1}-X_i)^2$

$=k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i-1}^2-2X_{i-1}X_i+X_i^2)$

$=\cancel{k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)}$

$=k\cdot\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)$

$=2k(n-1)\sigma^2$

$\therefore 2k(n-1)=1$

$k=\frac{1}{2(n-1)}$