

南京工业大学

2022-2023 第二学期《数学建模公选课》大作业

说明：大作业共有五题，每题 20 分，作业上交截止时间为 2023 年 06 月 18 日，
作业发送至邮箱 zhaojian@njtech.edu.cn

1. 为向灾区空投一批救灾物资，共 2000kg，需选购一批降落伞，已知空投高度为 500m，要求降落伞落地时的速度不能超过 20m/s，降落伞的伞面为半径 r 的半球面，用每根长 L 共 16 根绳索连接的物资重 m 位于球心正下方球面处，如图 1 所示。每个降落伞的价格由 3 部分组成，伞面费用 c_1 由伞的半径 r 决定，如表 1 所列；绳索费用 c_2 由绳索总长度及单价 4 元每米决定，固定费用 $c_3 = 200$ 元。

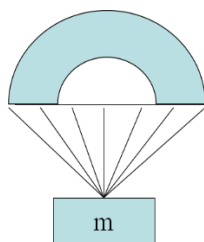


图 1 降落伞空投物资

表 1 伞面费用

r/m	2	2.5	3	3.5	4
$c_1/\text{元}$	65	170	350	660	1000

降落伞在降落过程中除受到重力外，还受到空气的阻力，阻力可以认为与降落的速度平方和伞的面积乘积成正比。为了确定阻力系数，利用半径 $r = 3\text{ m}$ ，载重 $m = 300\text{ kg}$ 的降落伞从 500m 高度作降落试验，测得各个时刻的高度 x ，如表 2 所列。

表 2 降落伞各个时刻的高度

t/s	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
x/m	500	470	425	372	317	264	215	160	108	55	1

试确定降落伞的选购方案，即共需要多少个伞，每个伞的半径多大（在给定的半径的伞中选），在满足空投要求的条件下，使费用最低。

2. 捕食者-被捕食者方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, x(0) = 60, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy, y(0) = 30. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 表示 t 个月之后兔子的总体数量， $y(t)$ 表示 t 个月之后狐狸的总体数量，参数

a, b, c, d 未知。利用表 3 中的 13 个观测值，拟合式(1)中的参数 a, b, c, d 。

表 3 种群数量的观测值

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18
x(t)	60	63	64	63	61	58	53	44	39	38	41	46	53
y(t)	30	34	38	44	50	55	58	56	47	38	30	27	26

3. 非标准指派问题

某连锁超市经营企业为了扩大规模，新租用五个门店，经过装修后再营业。现有四家装饰公司分别对这五个门店的装修费用进行报价，具体数据如表 2.2 所示。为保证装修质量，规定每个装修公司最多承担两个门店的装修任务。则为节省装修费用，该企业该如何分配装修任务？请建立模型，并用 Matlab 或 Lingo 软件求解。

表 4 装修费用表（单位：万元）

费用 装修	门店	1	2	3	4	5
A		15	13.8	12.5	11	14.3
B		14.5	14	13.2	10.5	15
C		13.8	13	12.8	11.3	14.6
D		14.7	13.6	13	11.6	14

4. 装货问题

有七种规格的包装箱要装到两辆铁路平板车上去。包装箱的宽和高是一样的，但厚度（ t ，以厘米计）及重量（ ω ，以千克计）是不同的。下表给出了每种包装箱的厚度、重量以及数量。每辆平板车有 10.2 米长的地方可用来装包装箱（像面包片那样），载重 40 吨。由于当地货运的限制，对于 C_5, C_6, C_7 类包装箱的总数有一个特别的限制：这类箱子所占的空间（厚度）不能超过 302.7 厘米。试把包装箱（见下表）装到平板车上去，使得平板车上使用得到浪费的空间最小。

表 5 包装箱数据

种类	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
t (厘米)	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0
ω (千克)	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000
n (件数)	8	7	9	6	6	4	8

5. 酵母生长曲线

酵母（图 2）作为发酵微生物，广泛应用于酿酒和烘焙等发酵领域，研究人员搜集了某液态环境下酵母菌随时间变化的数量（表 6），

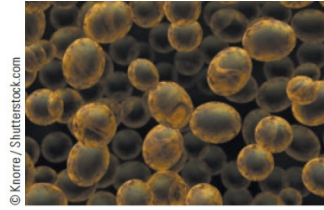


图 2. 酵母菌

表 6. 酵母菌随时间变化的数量

Time (h)	Pop. size ($\times 10^6/\text{mL}$)	Time (h)	Pop. size ($\times 10^6/\text{mL}$)
0	0.200	19	209
1	0.330	20	190
2	0.500	21	210
3	1.10	22	200
4	1.40	23	215
5	3.10	24	220
6	3.50	25	200
7	9.00	26	180
8	10.0	27	213
9	25.4	28	210
10	27.0	29	210
11	55.0	30	220
12	76.0	31	213
13	115	32	200
14	160	33	211
15	162	34	200
16	190	35	208
17	193	36	230
18	190		

(1) 试画出表 6. 对应的散点图。

(2) 生物种群的增长（衰减）往往服从指数增长（衰减）方式。

请尝试使用指数增长模型探索酵母数量的增长规律。若该模型与实际情况不符合，请尝试使用 logistic 增长模型探索酵母数量的增长规律。