Vorlesung 05: Bestandspolitiken

Newsvendor-Problem, (s,q)-Politik, (r,S)-Politik

Tobias Vlćek

1. Das Grundsetting

Nehmen wir an, wir leiten eine kleine Brauerei.

- Jedes Jahr zu Weihnachten brauen wir ein ganz besonderes, limitiertes Festbier. Die Nachfrage ist riesig, aber auch ungewiss.
- Wenn wir zu viel brauen, bleiben wir auf den Flaschen sitzen und machen Verlust.
- Brauen wir zu wenig, sind unsere treuen Kunden enttäuscht, und uns entgeht ein Gewinn.
- Dies ist eine **einmalige Entscheidung**.

Ganz anders sieht es bei unserem Standard-Pils aus.

- Es wird das ganze Jahr über verkauft.
- Hier müssen wir nicht einmal, sondern **laufend** entscheiden: Wann bestellen wir neuen Hopfen und Malz, und wie viel davon?
- Das ist eine **mehrperiodige Entscheidung**.

Beides schauen wir uns nun genauer an.

2. Das Newsvendor-Problem

Das "Zeitungsverkäufer-Problem" (Newsvendor Problem) ist der Klassiker für einmalige Bestandsentscheidungen. Der Name kommt von einem Zeitungsjungen, der morgens entscheiden muss, wie viele Zeitungen er kauft, ohne die genaue Nachfrage des Tages zu kennen. Abends sind die übrigen Zeitungen wertlos.

Dieses Prinzip gilt für viele Produkte:

- Saisonale Modeartikel
- Tickets für ein Konzert oder Sportereignis
- Der Tannenbaumverkauf vor Weihnachten
- **Unser limitiertes Festbier**

Im Kern geht es immer um die Abwägung zweier Risiken:

- **Overage-Kosten (c_O):** Die Kosten für jede Einheit, die wir **zu viel** bestellt haben und die am Ende übrig bleibt.
- **Underage-Kosten (c_U):** Die Kosten für jede nachgefragte Einheit, die wir **zu wenig** bestellt haben (entgangener Gewinn).

Beispiel: Unser Festbier

- **Herstellungskosten pro Flasche:** 3 GE
- **Verkaufspreis pro Flasche:** 8 GE

- **Restwert:** Nicht verkaufte Flaschen können wir für 1 GE pro Stück an einen Restposten-Händler verkaufen.

Daraus berechnen wir die Kosten:

- **Underage-Kosten (c_U):** Wenn uns eine Flasche zur Bedienung der Nachfrage fehlt, entgeht uns der Gewinn.

$$c_U = \text{Verkaufspreis} - \text{Herstellungskosten} = 8 - 3 = 5 \quad \text{GE}$$

- **Overage-Kosten (c_O):** Jede Flasche, die wir zu viel produzieren, verursacht einen Verlust.

$$c_O = \text{Herstellungskosten} - \text{Restwert} = 3 - 1 = 2 \quad \text{GE}$$

Das kritische Verhältnis (Critical Ratio)

Wir suchen die optimale Bestellmenge, die den erwarteten Gewinn maximiert.

- Die Lösung liegt im **kritischen Verhältnis**, auch "Critical Ratio" genannt.
- Es gibt uns den optimalen Servicegrad vor, bei dem der **erwartete Gewinn maximiert wird**.

Die Logik:

- Wir sollten so lange eine zusätzliche Einheit auf Lager nehmen, wie der erwartete Gewinn aus dem Verkauf dieser Einheit größer ist als der erwartete Verlust, falls wir sie nicht verkaufen.
- $c_U \cdot P(\text{Nachfrage} \geq x)$ ist der erwartete Gewinn aus dem Verkauf dieser Einheit.
- $c_O \cdot P(\text{Nachfrage} < x)$ ist der erwartete Verlust, falls wir sie nicht verkaufen.
- **Das kritische Verhältnis ist der Punkt, an dem sich diese beiden die Waage halten.**

$$\text{Kritisches Verhältnis} = F\left(x_{opt}\right) = \frac{c_U}{c_O + c_U}$$

Für unser Festbier bedeutet das:

$$\text{Kritisches Verhältnis} = \frac{5}{2+5} = \frac{5}{7} \approx 0.714$$

Das bedeutet: Wir sollten so viele Flaschen brauen, dass die Wahrscheinlichkeit, die gesamte Nachfrage zu decken, bei ca. 71,4% liegt.

Die optimale Bestellmenge finden

Jetzt, da wir das Ziel kennen (71,4% Servicegrad), müssen wir nur noch die passende Bestellmenge finden. Wie wir das tun, hängt von der Art der Nachfrageverteilung ab.

Fall 1: Diskrete Nachfrage

Stellen wir uns einen Food-Truck vor, der an einem einzigen Tag auf einem Festival ein spezielles, teures Gericht anbietet.

- Die Herstellungskosten liegen bei 8 GE.
- Der Verkaufspreis beträgt 20 GE.
- Reste sind wertlos ($c_O = 8, c_U = 12$).
- Das kritische Verhältnis ist $12/(8+12) = 0.6$.

Die Erfahrung zeigt folgende Nachfrageverteilung:

Nachfrage (x)	P(x)	Kumulierte P(Y<=x)
10 Gerichte	0.20	0.20
11 Gerichte	0.25	0.45
12 Gerichte	0.30	**0.75**
13 Gerichte	0.15	0.90
14 Gerichte	0.10	1.00

Regel:

Wir suchen die **kleinste Bestellmenge x**, für die die kumulierte Wahrscheinlichkeit $F(x) = P(Y \leq x)$ **größer oder gleich** dem kritischen Verhältnis ist.

- $F(10) = 0.20 < 0.6$
- $F(11) = 0.45 < 0.6$
- $F(12) = 0.75 \geq 0.6$ –> **STOPP!**

Die optimale Bestellmenge ist **12 Gerichte**. Obwohl die Wahrscheinlichkeit für 12 verkaufte Gerichte nur bei 30% liegt, ist das die beste Entscheidung, um den erwarteten Gewinn zu maximieren.

Fall 2: Stetige (Normalverteilte) Nachfrage

Zurück zu unserem Beispiel mit dem Festbier unserer Brauerei.

- Bei Tausenden von Kunden ist die Nachfrage eher eine stetige, glockenförmige Kurve.
- Nehmen wir an, die Nachfrage ist **normalverteilt**.
- Wir haben einen Erwartungswert von $\mu = 2000$ Flaschen.
- Ferner schätzen wir eine Standardabweichung von $\sigma = 300$ Flaschen.

Hier nutzen wir die Formel:

$$x_{opt} = \mu + z \cdot \sigma$$

- Der **Sicherheitsfaktor z** ist die Brücke zwischen unserem kritischen Verhältnis und der Bestellmenge.
- Wir finden ihn, indem wir die **inverse Standardnormalverteilung** für unser kritisches Verhältnis von 0.714 berechnen. Je höher der angestrebte Servicegrad (das kritische Verhältnis), desto überproportional größer wird der notwendige Sicherheitsfaktor.

Z-Werte für gängige Servicegrade (Kritisches Verhältnis)

α-Servicegrad	z-Wert	Bedeutung
50%	0.000	Exakt der Erwartungswert (kein Puffer).
55%	0.126	0.126 Standardabweichungen als Puffer.
60%	0.253	0.253 Standardabweichungen als Puffer.
65%	0.385	0.385 Standardabweichungen als Puffer.
70%	0.524	0.524 Standardabweichungen als Puffer.

α-Servicegrad	z-Wert	Bedeutung
75%	0.674	0.674 Standardabweichungen als Puffer.
80%	0.842	0.842 Standardabweichungen als Puffer.
85%	1.036	1.036 Standardabweichungen als Puffer.
90%	1.282	1.282 Standardabweichungen als Puffer.
95%	1.645	1.645 Standardabweichungen als Puffer.
99%	2.326	2.326 Standardabweichungen als Puffer.

Wir gehen wie folgt vor:

1. **z-Wert finden:** $\Phi(z) = 0.714 \Longrightarrow z \approx 0.565$[1]
2. **Optimale Menge berechnen:** $x_{opt} = 2000 + 0.565 \cdot 300 \approx 2000 + 170 = 2170$ Flaschen.
3. **Sicherheitsbestand:** Der Teil über dem Erwartungswert ist unser Puffer gegen Unsicherheit. Sicherheitsbestand = $x_{opt} - \mu = 2170 - 2000 = 170$ Flaschen.

Wir sollten also 2170 Flaschen brauen, um unseren erwarteten Gewinn zu maximieren.

3. Die (s, q)-Politik mit Undershoot

Für Produkte, die wir kontinuierlich führen, brauchen wir eine laufende Strategie. Hier ist die **(s, q)-Politik**, die wir bereits in der letzten Vorlesung kennengelernt haben, eine oft verwendete Strategie.

Zur Erinnerung:

- Wir überwachen den Lagerbestand **kontinuierlich**.
- Fällt der *disponible Bestand* auf oder unter den **Bestellpunkt (s)**, lösen wir eine Bestellung aus.
- Die **Bestellmenge (q)** ist immer fest.

Ein Problem dabei ist das "Unterschießen" des Bestellpunkts, der sogenannte **Undershoot**. Wenn wir den Bestand nur täglich prüfen, kann eine große Nachfrage den Bestand weit unter `s` drücken, bevor wir überhaupt bestellen. Dieser Undershoot (U) ist eine zusätzliche Zufallsgröße, die wir berücksichtigen müssen.

Für eine normalverteilte Tagesnachfrage $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$ können wir den Undershoot so abschätzen:

- **Erwarteter Undershoot:** $E\{U\} \approx \frac{\sigma_D^2 + \mu_D^2}{2\mu_D}$
- **Varianz des Undershoots:** Var $\{U\} \approx \frac{\sigma_D^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma_D^2}{2\mu_D^2}\right) + \frac{\mu_D^2}{12}$

Den Bestellpunkt s bestimmen

Der **Risikozeitraum** ist die Wiederbeschaffungszeit L. Die Nachfrage Y, die unser Bestellpunkt abdecken muss, ist die Summe aus der Nachfrage während der WBZ ($Y^{(L)}$) und dem Undershoot (U).

[1] Mit Excel `NORM.S.INV(0.714)`, Python `norm.ppf(0.714)` oder aus einer Tabelle ablesen.

- Erwartungswert: $\mu_Y = \mu_L + E\{U\} = (L \cdot \mu_D) + E\{U\}$
- Varianz: $\sigma_Y^2 = \sigma_L^2 + \text{Var}\ \{U\} = \left(L \cdot \sigma_D^2\right) + \text{Var}\ \{U\}$

Um den optimalen Bestellpunkt s_{opt} für einen angestrebten **β-Servicegrad** (Fill Rate) zu finden, nutzen wir wieder eine Formel, die auf der Einheiten-Verlustfunktion $G_Z^{(1)}(v)$ basiert.

Zielbedingung: Finde den kleinsten Sicherheitsfaktor v, für den gilt:

$$G_Z^{(1)}(v) \leq \frac{(1 - \beta) \cdot q}{\sigma_Y}$$

Der optimale Bestellpunkt ist dann: $s_{opt} = \mu_Y + v_{opt} \cdot \sigma_Y$.

Den Wert für v_{opt} findet man, indem man den Zielwert für die Verlustfunktion in einer Tabelle nachschlägt oder einfach in einer Software berechnet.

Tabelle der Standard-Verlustfunktion $G_Z^{(1)}(v)$

v	$G_Z^{(1)}(v)$	v	$G_Z^{(1)}(v)$
0.0	0.399	1.1	0.069
0.1	0.359	1.2	0.056
0.2	0.323	**1.25**	**0.051**
0.3	0.291	1.3	0.046
0.4	0.262	1.4	0.038
0.5	0.235	1.5	0.031
0.6	0.211	1.6	0.026
0.7	0.189	1.7	0.021
0.8	0.169	1.8	0.017
0.9	0.148	1.9	0.014
1.0	0.083	2.0	0.011

Beispiel:

- Ein Bauteil hat eine tägliche Nachfrage von $\mu_D = 20, \sigma_D = 5$.
- Die WBZ ist $L = 10$ Tage, die feste Bestellmenge $q = 300$.
- Wir streben $\beta = 97\%$ an.

1. **Undershoot berechnen:** $E\{U\} \approx (5^2 + 20^2)/(2 \cdot 20) = 10.625$ $\text{Var}\ \{U\} \approx 5^2/2 \cdot \left(1 - 5^2/(2 \cdot 20^2)\right) + 20^2/12 \approx 45.42$
2. **Nachfrage im Risikozeitraum:** $\mu_Y = (10 \cdot 20) + 10.625 = 210.625$ $\sigma_Y^2 = \left(10 \cdot 5^2\right) + 45.42 = 295.42 \Longrightarrow \sigma_Y \approx 17.19$
3. **Zielwert für Verlustfunktion:** Target $G_Z^{(1)}(v) = (1 - 0.97) \cdot 300/17.19 \approx 0.523$
4. **v_{opt} finden:**
   - Wir suchen v, sodass $G_Z^{(1)}(v) \leq 0.523$. Dies geschieht durch Nachschlagen in einer Tabelle der Standard-Verlustfunktion oder mittels Software.
   - Die Funktion $G_Z^{(1)}(v)$ hat für $v = 0$ einen Wert von ca. 0.399. Für alle $v > 0$ ist der Funktionswert kleiner.

- Da unser Zielwert von 0.523 größer ist als 0.399, ist die Bedingung bereits für $v = 0$ erfüllt.
- In der Praxis wird in diesem Fall der Sicherheitsfaktor auf 0 gesetzt, da kein positiver Puffer benötigt wird.
- Daher: $v_{opt} \approx 0.0$.

5. **Bestellpunkt s_{opt}:** $s_{opt} = 210.625 + 0.0 \cdot 17.19 \approx 211$ Stück. Der Bestellpunkt sollte auf 211 Stück gesetzt werden.

4. Die periodische Politik (r, S)

Nicht für jedes Produkt lohnt sich eine ständige Überwachung. Für Joghurt im Supermarkt ist es effizienter, nur einmal pro Woche (periodisch) nachzusehen und aufzufüllen. Hierfür eignet sich die **(r, S)-Politik**.

- Wir prüfen den Bestand nur in festen Intervallen, z.B. alle **r=7 Tage**.
- Wir bestellen dann eine variable Menge, um den Bestand auf ein festes **Bestellniveau (S)** aufzufüllen.

Der längere Risikozeitraum: r + L

Hier müssen wir umdenken: Der **Risikozeitraum ist jetzt $r + L$**! Warum? Eine Bestellung, die wir heute aufgeben, muss die Nachfrage so lange decken, bis die *nächste* Lieferung eintrifft. Die nächste Bestellung lösen wir erst in r Tagen aus, und diese braucht dann nochmal L Tage, um anzukommen.

- Nachfrage im Risikozeitraum: $\mu_{r+L} = (r + L) \cdot \mu_d$
- Standardabweichung: $\sigma_{r+L} = \sqrt{r + L} \cdot \sigma_d$

Das Bestellniveau S bestimmen

Auch hier können wir das optimale Bestellniveau S_{opt} für einen Ziel-**β-Servicegrad** bestimmen. Die Logik ist sehr ähnlich zur (s,q)-Politik, aber die Formel für die Zielbedingung ist leicht anders, da die erwartete Fehlmenge ins Verhältnis zur erwarteten Nachfrage im Bestellintervall ($r \cdot \mu_d$) gesetzt wird.

Zielbedingung (vereinfacht):[2] Finde den kleinsten Sicherheitsfaktor v, für den gilt:

$$G_Z^{(1)}(v) \leq \frac{(1 - \beta) \cdot r \cdot \mu_d}{\sigma_{r+L}}$$

Das optimale Bestellniveau ist dann: $S_{opt} = \mu_{r+L} + v_{opt} \cdot \sigma_{r+L}$.

Beispiel: Ein Supermarkt verkauft Frischmilch.

- Bestand wird alle **r=3 Tage** geprüft.
- Die Lieferzeit beträgt **L=1 Tag**.
- Tägliche Nachfrage: $\mu_d = 50$ Packungen, $\sigma_d = 15$.
- Angestrebter Servicegrad: $\beta = 99\%$.

[2] Die Formel ist exakt unter der Annahme, dass die durchschnittliche Bestellmenge genau $r \cdot \mu_d$ ist. In einem System mit Fehlbeständen (Backorders) ist die durchschnittliche Bestellmenge jedoch leicht höher als die durchschnittliche Nachfrage, da in Zyklen nach einem Fehlbestand nicht nur die Nachfrage der aktuellen Periode, sondern auch der aufgestaute Fehlbestand aus der Vorperiode bedient werden muss.

1. **Risikozeitraum:** $r + L = 3 + 1 = 4$ Tage.
2. **Nachfrage im Risikozeitraum:** $\mu_{r+L} = 4 \cdot 50 = 200$ $\sigma_{r+L} = \sqrt{4} \cdot 15 = 30$
3. **Zielwert für Verlustfunktion:** Target $G_Z^{(1)}(v) = (1 - 0.99) \cdot 3 \cdot 50/30 = 0.05$
4. **v_{opt} finden:**
   - Wir suchen den v-Wert, für den $G_Z^{(1)}(v) \leq 0.05$ ist. Aus der Tabelle finden wir, dass $G_Z^{(1)}(1.3) \approx 0.046$ der erste Wert ist, der die Bedingung erfüllt. Also $v_{opt} \approx 1.3$.
5. **Bestellniveau S_{opt}:** $S_{opt} = 200 + 1.3 \cdot 30 = 200 + 39 = 239$ Packungen. Jeden dritten Tag wird so viel Milch bestellt, dass der verfügbare Bestand wieder auf 239 Packungen ansteigt.

5. Welche Politik für welches Problem?

- **Newsvendor-Modell:** Perfekt für **einmalige Bestellentscheidungen** bei saisonalen oder verderblichen Produkten. Es balanciert elegant die Kosten von "zu viel" und "zu wenig".
- **(s, q)-Politik:** Ideal für **wichtige oder teure Produkte**, bei denen sich eine **kontinuierliche Überwachung** lohnt. Sie arbeitet mit einem festen Sicherheitsbestand und einer festen Bestellmenge.
- **(r, S)-Politik:** Die richtige Wahl für **Standardprodukte** mit geringerem Wert, bei denen eine **periodische Überprüfung** ausreicht. Sie ist einfacher zu handhaben, erfordert aber einen höheren Sicherheitsbestand, da der Risikozeitraum länger ist.