

## **Übung 05**

### **Einmalige und mehrperiodige Bestandsentscheidungen**

## Aufgabe 1: Das Newsvendor-Problem

Ein Event-Veranstalter plant den Verkauf von T-Shirts für ein einmaliges Open-Air-Konzert. Die Nachfrage nach den T-Shirts ist unsicher und wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 800 Stück und einer Standardabweichung von 150 Stück geschätzt.

### Kostendaten:

- **Einkaufspreis pro T-Shirt:** 10 GE
- **Verkaufspreis pro T-Shirt:** 25 GE
- **Rückkaufpreis (Restwert) pro nicht verkäuflichem T-Shirt:** 4 GE (Der Lieferant nimmt unverkäufliche Ware zurück)

### Ihre Aufgaben:

1. **Underage- und Overage-Kosten:** Bestimmen Sie die Underage-Kosten ( $c_U$ ) und die Overage-Kosten ( $c_O$ ).
  - $c_U$ : Kosten pro Einheit, die man zu wenig bestellt hat (entgangener Gewinn).
  - $c_O$ : Kosten pro Einheit, die man zu viel bestellt hat (Verlust pro übrig gebliebenem T-Shirt).
2. **Kritisches Verhältnis:** Berechnen Sie das kritische Verhältnis (Critical Ratio).
3. **Optimale Bestellmenge:** Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge ( $x_{opt}$ ), die der Veranstalter ordern sollte, um den erwarteten Gewinn zu maximieren.
4. **Sicherheitsbestand:** Wie hoch ist der resultierende Sicherheitsbestand?

### Lösungshinweise:

## 💡 Tipps und wichtige Formeln

### 1. Underage- und Overage-Kosten

- **Underage-Kosten ( $c_U$ ):** Die Kosten für jede nachgefragte Einheit, die Sie nicht bedienen können (Opportunitätskosten).  $c_U = \text{Verkaufspreis} - \text{Einkaufspreis}$
- **Overage-Kosten ( $c_O$ ):** Die Kosten für jede Einheit, die Sie zu viel bestellt haben und die am Ende übrig bleibt.  $c_O = \text{Einkaufspreis} - \text{Restwert}$

### 2. Kritisches Verhältnis (Critical Ratio)

- Das kritische Verhältnis gibt das Servicelevel an, bei dem der erwartete Gewinn maximiert wird. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachfrage kleiner oder gleich der optimalen Bestellmenge ist.
- **Formel:** Kritisches Verhältnis =  $c_U / (c_O + c_U)$

### 3. Optimale Bestellmenge ( $x_{opt}$ )

- **Grundidee:** Bestelle so viel, dass die Wahrscheinlichkeit, die Nachfrage zu decken, genau dem kritischen Verhältnis entspricht.
- **Formel (Normalverteilung):**
  1. Finde den z-Wert, der dem kritischen Verhältnis entspricht:  $z = F^{-1}(\text{kritisches Verhältnis})$ , wobei  $F^{-1}$  die inverse kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.
  2. Berechne die Bestellmenge:  $x_{opt} = \mu + z * \sigma$

### 4. Sicherheitsbestand

- Der Sicherheitsbestand ist die Menge, die über den Erwartungswert der Nachfrage hinaus bestellt wird, um Unsicherheit abzufedern.
- **Formel:** Sicherheitsbestand =  $x_{opt} - \mu$

#### 1. Kostenberechnung:

- Underage-Kosten ( $c_U$ ):  $25 - 10 = 15 \text{ GE}$
- Overage-Kosten ( $c_O$ ):  $10 - 4 = 6 \text{ GE}$

#### 2. Kritisches Verhältnis:

- $F(x_{opt}) = 15 / (6 + 15) = 0.7143$

#### 3. Optimale Bestellmenge:

- z-Wert für  $F(x)=0.7143$ : 0.5659
- $x_{opt} = 800 + 0.5659 * 150 = 884.89$
- > Der Veranstalter sollte 885 T-Shirts bestellen.

#### 4. Sicherheitsbestand:

- Sicherheitsbestand =  $884.89 - 800 = 84.89 \text{ Stück}$

## Aufgabe 2: Newsvendor mit diskreter Nachfrage

Ein Bäcker muss morgens entscheiden, wie viele eines speziellen Kuchens er für den Tag backen soll. Die Herstellungskosten pro Kuchen betragen 5 GE, der Verkaufspreis liegt bei

12 GE. Nicht verkaufte Kuchen können am Ende des Tages nicht mehr verkauft werden und haben einen Restwert von 0 GE.

Die Nachfrage nach diesem Kuchen ist erfahrungsgemäß wie folgt verteilt:

Nach- frage (Y)	8 Kuchen	9 Kuchen	10 Kuchen	11 Kuchen	12 Kuchen
Wahrschein- lichkeit $P(Y)$	0.10	0.20	0.35	0.25	0.10

### Ihre Aufgaben:

1. **Underage- und Overage-Kosten:** Berechnen Sie die Underage- ( $c_U$ ) und Overage-Kosten ( $c_O$ ).
2. **Kritisches Verhältnis:** Berechnen Sie das kritische Verhältnis.
3. **Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten:** Erstellen Sie eine Tabelle mit der kumulierten Wahrscheinlichkeit  $F(x)$  für jede mögliche Bestellmenge  $x$ .
4. **Optimale Bestellmenge:** Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge  $x_{opt}$ , die der Bäcker backen sollte.

### Lösungshinweise:

#### Tipps und wichtige Formeln

#### Vorgehen bei diskreter Nachfrageverteilung

Das Grundprinzip des Newsvendor-Problems bleibt gleich, aber die Umsetzung ist anders als bei einer stetigen (z.B. normalen) Verteilung.

1. **Underage- und Overage-Kosten ( $c_U, c_O$ ):** Die Berechnung ist identisch zum stetigen Fall.
2. **Kritisches Verhältnis:** Die Formel  $c_U / (c_O + c_U)$  ist ebenfalls identisch.

#### 3. & 4. Optimale Bestellmenge $x_{opt}$ finden

- Wir können keinen z-Wert verwenden. Stattdessen suchen wir die **kleinste Bestellmenge  $x$** , für die die **kumulierte Wahrscheinlichkeit  $F(x) = P(Y \leq x)$  größer oder gleich dem kritischen Verhältnis** ist.
- **Regel:** Finde das kleinste  $x$ , für das gilt:  $F(x) \geq \frac{c_U}{c_O + c_U}$
- **Vorgehen:**
  1. Erstelle eine Tabelle mit den möglichen Nachfragewerten.
  2. Berechne für jeden Wert die Wahrscheinlichkeit  $P(Y = x)$ .
  3. Berechne die kumulierte Wahrscheinlichkeit  $F(x)$  durch Aufsummieren der Einzelwahrscheinlichkeiten.
  4. Vergleiche jeden Wert von  $F(x)$  mit dem kritischen Verhältnis und wähle die erste Bestellmenge, bei der die Bedingung erfüllt ist.

1. Kostenberechnung:

- Underage-Kosten ( $c_U$ ):  $12 - 5 = 7$  GE
- Overage-Kosten ( $c_O$ ):  $5 - 0 = 5$  GE

2. Kritisches Verhältnis:

- Critical Ratio =  $7 / (5 + 7) = 0.5833$

3. & 4. Prüfung der optimalen Bestellmenge:

Bestellmenge (x) | Kumulierte  $P(Y \leq x)$  | Bedingung erfüllt?

-----	-----	-----
8	0.10	Nein
9	0.30	Nein
10	0.65	Ja <- Optimale Menge
11	0.90	Nein
12	1.00	Nein

Die Bedingung  $F(x) \geq 0.5833$  ist erstmals für eine Menge von 10 Kuchen erfüllt.

Antwort: Der Bäcker sollte 10 Kuchen backen.

### Aufgabe 3: Periodische Lagerhaltungspolitik ( $r, S$ )

Ein Fachgeschäft für Wander-Ausrüstung verkauft einen speziellen Typ Wanderstiefel. Die Nachfrage ist annähernd normalverteilt. Der Bestand wird alle 4 Wochen ( $r=4$ ) überprüft. Die Lieferzeit vom Hersteller beträgt konstant 2 Wochen ( $L=2$ ).

**Daten zur wöchentlichen Nachfrage:**

- Erwartungswert ( $\mu_D$ ): 20 Paar
- Standardabweichung ( $\sigma_D$ ): 8 Paar

Das Geschäft strebt einen  $\beta$ -Servicegrad von 98% an. Das bedeutet, dass 98% der gesamten Nachfrage direkt aus dem Lager bedient werden soll.

**Ihre Aufgaben:**

1. **Risikozeitraum:** Bestimmen Sie den Risikozeitraum für diese ( $r, S$ )-Politik.
2. **Nachfrageparameter:** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Nachfrage während des gesamten Risikozeitraums.
3. **Optimales Bestellniveau:** Bestimmen Sie das optimale Bestellniveau  $S_{opt}$ , analog zur Vorlesung.

**Lösungshinweise:**

### 💡 Tipps und wichtige Formeln

#### 1. Risikozeitraum einer (r,S)-Politik

- Bei einer periodischen Überprüfung müssen wir die Nachfrageunsicherheit über das **Überprüfungsintervall (r)** und die **Wiederbeschaffungszeit (L)** abdecken. Eine Bestellung, die heute aufgegeben wird, muss die Nachfrage decken, bis die *nächste* Bestellung eintrifft.
- **Formel:** Risikozeitraum =  $r + L$

#### 2. Nachfrageparameter im Risikozeitraum

- Wenn die wöchentliche Nachfrage unabhängig ist, können die Kennzahlen für den gesamten Risikozeitraum einfach berechnet werden:
- **Erwartungswert:**  $\mu_{r+L} = (r + L) \cdot \mu_D$
- **Varianz:**  $\sigma_{r+L}^2 = (r + L) \cdot \sigma_D^2$
- **Standardabweichung:**  $\sigma_{r+L} = \sqrt{r + L} \cdot \sigma_D$

#### 3. Optimales Bestellniveau $S_{opt}$

- Das Bestellniveau  $S$  (auch “order-up-to level”) ist der Zielbestand, auf den bei jeder Überprüfung aufgefüllt wird.
- **Formel:**  $S_{opt} = \mu_{r+L} + SS = \mu_{r+L} + v_{opt} \cdot \sigma_{r+L}$
- Der Sicherheitsfaktor  $v_{opt}$  wird so bestimmt, dass der angestrebte  $\beta$ -Servicegrad erreicht wird. Dafür wird die **standardisierte Einheiten-Verlustfunktion**  $G_Z^{(1)}(v)$  verwendet.
- **Zielbedingung:** Finde das kleinste  $v$ , für das gilt: 
$$\frac{(1-\beta) \cdot \text{erwartete Nachfrage im Intervall } r}{\sigma_{r+L}} = \frac{(1-\beta) \cdot r \cdot \mu_D}{\sigma_{r+L}}$$
- Da es keine geschlossene Formel zur Umkehrung von  $G_Z^{(1)}(v)$  gibt, muss der Wert für  $v$  iterativ gesucht werden.

1. Risikozeitraum:  $r + L = 4 + 2 = 6$  Wochen

2. Nachfrageparameter im Risikozeitraum (6 Wochen):

- Erwartungswert ( $\mu_6$ ):  $6 \cdot 20 = 120.00$  Paar
- Standardabweichung ( $\sigma_6$ ):  $\sqrt{6} \cdot 8 = 19.60$  Paar

3. Optimales Bestellniveau  $S_{opt}$ :

- Zielwert für  $G_Z(v)$ :  $(1 - 0.98) \cdot 4 \cdot 20 / 19.60 = 0.0816$
- Gefundener optimaler standardisierter Bestellpunkt ( $v_{opt}$ ): 1.0110
- Optimales Bestellniveau  $S_{opt} = 120.00 + 1.0110 \cdot 19.60 = 139.81$
- > Das Bestellniveau  $S$  sollte auf 140 Paar gesetzt werden.
- Der darin enthaltene Sicherheitsbestand beträgt 19.81 Paar.

## Aufgabe 4: Bestellpunkt-Politik (s, q) mit Undershoot

Ein Händler für Elektronikbauteile verwendet für ein bestimmtes Bauteil eine (s, q)-Politik. Die tägliche Nachfrage  $D$  ist normalverteilt mit  $\mu_D = 100$  und  $\sigma_D = 20$ . Die Wiederbeschaffungszeit beträgt  $L = 5$  Tage. Es wird eine feste Bestellmenge von  $q = 800$  Stück verwendet.

Das Unternehmen möchte einen  $\beta$ -Servicegrad von 99% erreichen.

### Ihre Aufgaben:

1. **Undershoot:** Berechnen Sie den Erwartungswert  $E\{U\}$  und die Varianz  $\text{Var}\{U\}$  des Undershoots. Nehmen Sie an, dass die Nachfrageverteilung normalverteilt ist.
2. **Nachfrage im Risikozeitraum:** Berechnen Sie den Erwartungswert  $\mu_Y$  und die Varianz  $\sigma_Y^2$  der Nachfrage im gesamten Risikozeitraum ( $Y = Y^{(L)} + U$ ).
3. **Optimaler Bestellpunkt:** Bestimmen Sie den optimalen Bestellpunkt  $s_{opt}$ , der für den angestrebten Servicegrad nötig ist. Nehmen Sie an, dass der Fehlbestand am Anfang eines Zyklus vernachlässigbar klein ist ( $G_Y^{(1)}(s + q) \approx 0$ ).

### Lösungshinweise:

#### 💡 Tipps und wichtige Formeln

##### Das Konzept des “Undershoot”

Bei einer  $(s, q)$ -Politik wird eine Bestellung ausgelöst, sobald der verfügbare Bestand den Bestellpunkt  $s$  erreicht oder unterschreitet. Da die Nachfrage in diskreten Mengen auftritt, wird der Bestellpunkt oft nicht exakt getroffen, sondern “unterschossen”. Dieser Betrag, um den  $s$  unterschritten wird, wird als **Undershoot (U)** oder Defizit bezeichnet. Er ist eine Zufallsgröße und muss bei der Berechnung des Sicherheitsbestandes berücksichtigt werden.

##### 1. Berechnung des Undershoots

Für eine normalverteilte Nachfrage  $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$  können folgende Approximationen verwendet werden:

- **Erwartungswert:**  $E\{U\} \approx \frac{\sigma_D^2 + \mu_D^2}{2\mu_D}$
- **Varianz:**  $\text{Var}\{U\} \approx \frac{\sigma_D^2}{2} \left(1 - \frac{\mu_D^2}{2\mu_D^2}\right) + \frac{\mu_D^2}{12}$

##### 2. Nachfrage im Risikozeitraum

- Der relevante Risikozeitraum deckt die Nachfrage während der **Wiederbeschaffungszeit** ( $Y^{(L)}$ ) plus den **Undershoot (U)** ab.
- **Gesamtnachfrage im Risikozeitraum:**  $Y = Y^{(L)} + U$
- Da  $Y^{(L)}$  und  $U$  als unabhängig angenommen werden, addieren sich Erwartungswerte und Varianzen:
  - $\mu_Y = \mu_{Y^L} + E\{U\} = (L \cdot \mu_D) + E\{U\}$
  - $\sigma_Y^2 = \sigma_{Y^L}^2 + \text{Var}\{U\} = (L \cdot \sigma_D^2) + \text{Var}\{U\}$

##### 3. Optimaler Bestellpunkt $s_{opt}$

- Die Logik ist analog zur  $(r, S)$ -Politik, aber die Zielgröße für die Einheiten-Verlustfunktion ist anders, da die Bestellmenge  $q$  fix ist.
- **Formel für  $s$ :**  $s_{opt} = \mu_Y + v_{opt} \cdot \sigma_Y$
- **Zielbedingung für  $v_{opt}$ :** Finde das kleinste  $v$ , für das gilt:  $G_Z^{(1)}(v) \leq \frac{(1-\beta) \cdot q}{\sigma_Y}$
- Auch hier muss  $v_{opt}$  iterativ gesucht werden.

1. Undershoot (Defizit):
  - Erwartungswert  $E(U)$ : 52.00

- Varianz  $\text{Var}(U)$ : 1029.33
2. Nachfrage im Risikozeitraum ( $Y = Y_L + U$ ):
- Erwartungswert  $\mu_Y$ :  $500.00 + 52.00 = 552.00$
  - Varianz  $\text{Var}_Y$ :  $2000.00 + 1029.33 = 3029.33$
  - Standardabweichung  $\sigma_Y$ : 55.04
3. Optimaler Bestellpunkt  $s_{\text{opt}}$ :
- Zielwert für  $G_Z(v)$ :  $(1 - 0.99) * 800 / 55.04 = 0.1454$
  - Gefundener  $v_{\text{opt}}$ : 0.6900
  - Optimaler Bestellpunkt  $s_{\text{opt}} = 552.00 + 0.6900 * 55.04 = 589.98$
  - > Der Bestellpunkt  $s$  sollte auf 590 Stück gesetzt werden.
  - Der Sicherheitsbestand beträgt 37.98 Stück.