Einmalige Entscheidungen über die Höhe des Lagerbestands: Das Newsvendor-Problem

Das Newsvendor-Problem

Welcher Vorrat x soll angelegt werden, um eine einmalige Bedarfsmenge Y zu erfüllen?

Legt man sich zuviel Vorrat an, dann fallen Overage-Kosten an:
$\Longrightarrow c_O$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit
Legt man sich zu wenig Vorrat an, dann fallen Underage-Kosten an:
$\Longrightarrow c_U$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit

Zielfunktion: Minimiere die Summe $Z(x)$ der erwarteten Kosten!

Minimiere $Z(x) = c_U \cdot \mathrm{E}\,\{\max\{Y - x, 0\}\} + c_O \cdot \mathrm{E}\,\{\max\{x - Y, 0\}\}$

Welcher Vorrat x soll angelegt werden, um eine einmalige Bedarfsmenge Y zu erfüllen ?

Legt man sich zuviel Vorrat an, dann fallen Overage-Kosten an:
$\Longrightarrow c_O$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit
Legt man sich zu wenig Vorrat an, dann fallen Underage-Kosten an:
$\Longrightarrow c_U$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit

Zielfunktion: Minimiere die Summe $Z(x)$ der erwarteten Kosten !

Minimiere $Z(x) = c_U \cdot \mathrm{E}\left\{[Y - x]^+\right\} + c_O \cdot \mathrm{E}\left\{[x - Y]^+\right\}$

Minimiere $Z(x) = c_U \cdot \mathrm{E}\left\{[Y-x]^+\right\} + c_O \cdot \mathrm{E}\left\{[x-Y]^+\right\}$

$$
\begin{aligned}
Z(x) &= c_U \cdot \int_x^\infty (y-x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y + c_O \cdot \int_0^x (x-y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= c_U \cdot \left(\int_0^\infty (y-x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^x (y-x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) + c_O \cdot \int_0^x (x-y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= c_U \cdot \int_0^\infty (y-x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y + (c_O + c_U) \cdot \int_0^x (x-y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= c_U \cdot \left(\int_0^\infty y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^\infty x \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) + (c_O + c_U) \cdot \int_0^x (x-y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= c_U \cdot \left(\mathrm{E}\{Y\} - x \cdot \int_0^\infty f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) + (c_O + c_U) \cdot \int_0^x (x-y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= c_U \cdot (\mathrm{E}\{Y\} - x) + (c_O + c_U) \cdot \int_0^x (x-y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$Z(x) = c_U \cdot (\mathrm{E}\left\{Y\right\} - x) + (c_O + c_U) \cdot \int_0^x (x - y) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} = -c_U + (c_O + c_U) \cdot F_Y(x) = 0 \iff x = x_{\mathsf{opt}}$$

Optimalitätsbedingung:

$$F_Y(x_{\mathsf{opt}}) = \frac{c_U}{c_O + c_U} = \text{„Critical Ratio“}$$

Optimale Höhe des Vorrats x:

$$x_{\mathsf{opt}} = F_Y^{-1}\left(\frac{c_U}{c_O + c_U}\right)$$

Konvexität:

$$\left(\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x}\right)' = (c_O + c_U) \cdot f_Y(x) > 0$$

Beispiel **Fußball-Weltmeisterschaft 2014**

- Nachfragemenge Y ist normalverteilt
- Erwartete Nachfragemenge: 50 Mengeneinheiten
- Standardabweichung: 50 Mengeneinheiten
- Underage Costs: $69.95 - 42.00 = 27.95$ Geldeinheiten
- Overage Costs: $42.00 - 19.99 = 22.01$ Geldeinheiten

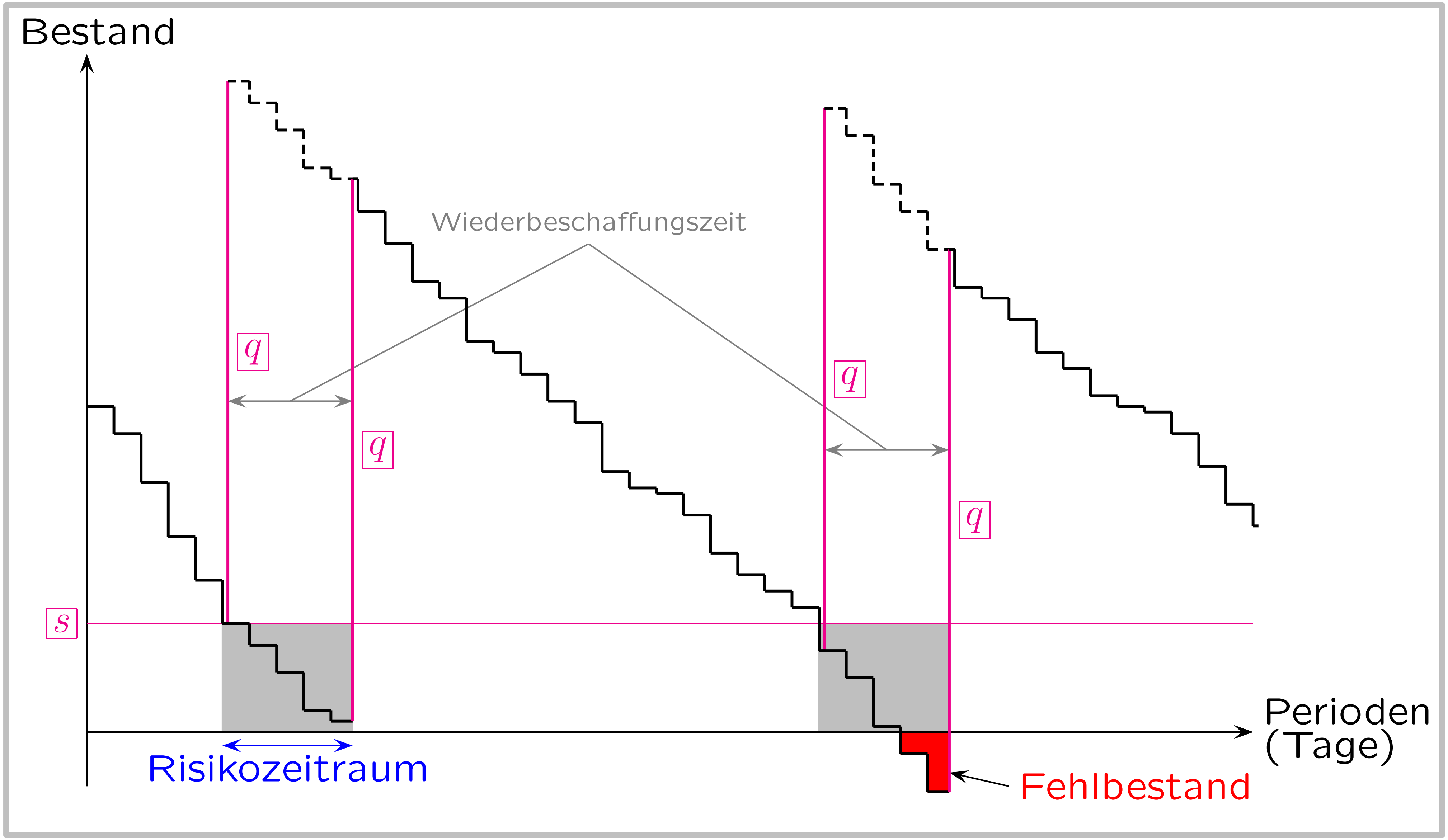
$$\text{Critical Ratio} = \frac{27.95}{22.01 + 27.95} = 0.559447558$$

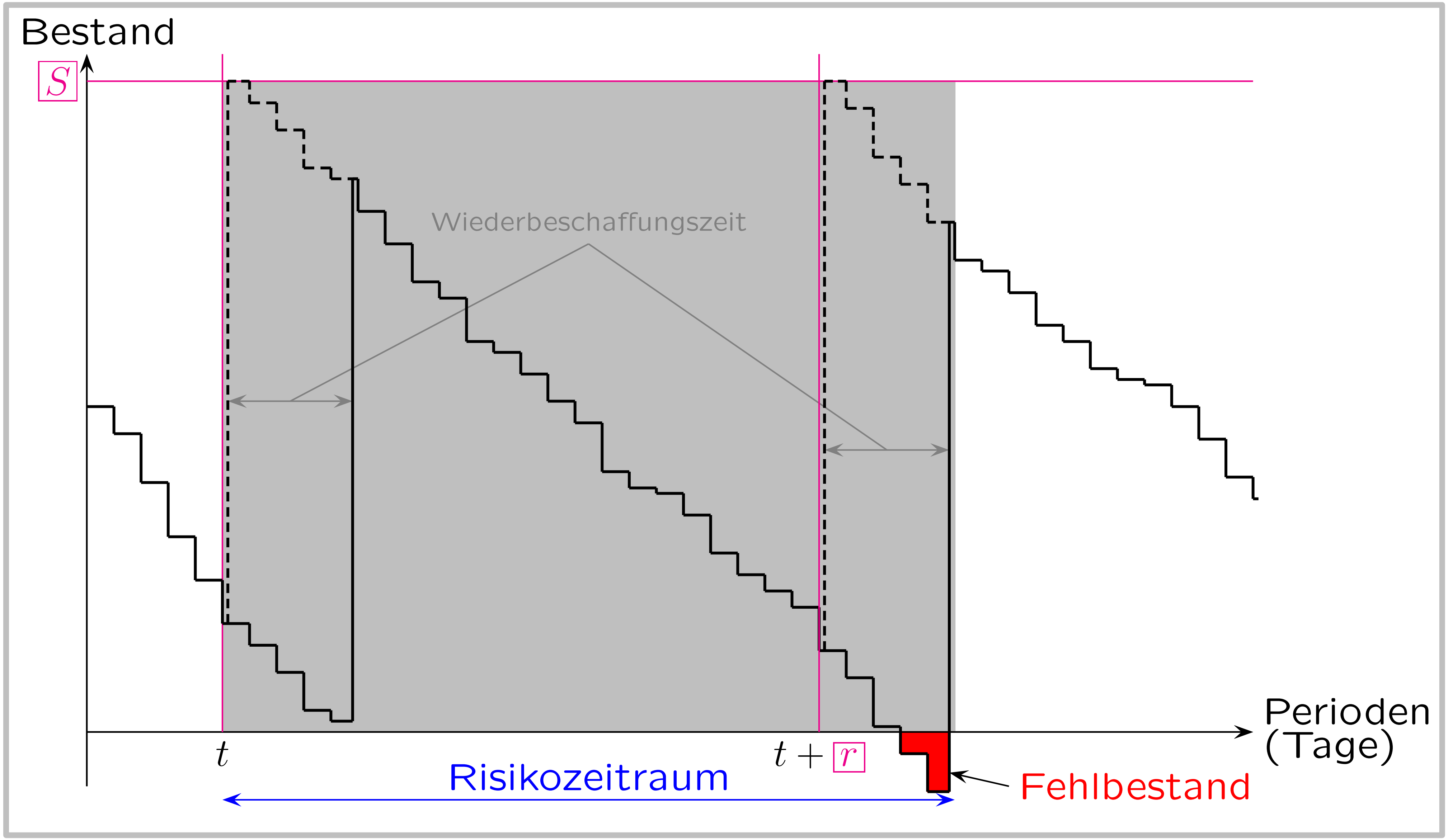
Optimaler Vorrat (Ziellagerbestand): $x_{\text{opt}} = 57.47843628 \approx 58$

$$\text{Sicherheitsbestand} = 58 - 50 = 8$$

$$\alpha\text{-Servicegrad} = 1 - \mathrm{P}\left[Y > 58\right] = \mathrm{P}\left[Y \leq 58\right] = 0.56355946 = 56.356\,\%$$

Mehrperiodige Entscheidungen über die Höhe des Lagerbestands: Lagerhaltungspolitiken


Bestand
Wiederbeschaffungszeit
q
q
q
q
s
Perioden (Tage)
Risikozeitraum
Fehlbestand


Bestand
S
Wiederbeschaffungszeit
Perioden
(Tage)
t
t + r
Risikozeitraum
Fehlbestand

- (r, s, q)-**Politik**
  Überwache den Lagerbestand alle r Perioden und löse eine Bestellung mit der Bestellmenge q aus, wenn der disponible Lagerbestand den Melde-/Restbestand („Bestellpunkt“) erreicht oder unterschritten hat!
  $\Longrightarrow$ Regelfall: $(r = 1, s, q)$-**Politik**, z. B. tägliche Bestandsüberwachung
- (r, S)-**Politik**
  Überwache den Lagerbestand alle r Perioden und löse eine Bestellung aus, die ausreicht, den disponiblen Lagerbestand auf ein maximales Niveau („Bestellniveau“) anzuheben!
- (r, s, S)-**Politik**
  Überwache den Lagerbestand alle r Perioden und löse — wenn der disponible Lagerbestand den Melde-/Restbestand („Bestellpunkt“) erreicht oder unterschritten hat — eine Bestellung aus, die ausreicht, den disponiblen Lagerbestand auf ein maximales Niveau („Bestellniveau“) anzuheben!
  $\Longrightarrow$ Spezialfall: $(r = 1, S - 1, S)$-**Politik** (= „Base-Stock-Politik“)

Minimiere (für ein gegebenes q bzw. r) die Bestandsgrößen s bzw. S

unter Beachtung einer der folgenden Restriktionen:

$$\mathrm{P}\left[\begin{array}{l}\text{Fehlmenge in bezug auf die Nach-}\\ \text{fragemenge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array}\right] \leq 1-\alpha$$

$$\mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Fehlmenge in bezug auf die Nach-}\\ \text{fragemenge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array}\right\} \leq (1-\beta)\cdot \mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Nachfragemenge}\\ \text{im Bestellzyklus}\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{periodenbezogene Fehlbestände im}\\ \text{Bestellzyklus}\end{array}\right\} \leq (1-\gamma)\cdot \mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Nachfragemenge}\\ \text{im Bestellzyklus}\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Reichweite des Anfangsbestands}\\ \text{im Vergleich zur Nachfragemen-}\\ \text{ge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array}\right\} \geq \text{Vorgabewert}$$

Minimiere (für ein gegebenes q bzw. r) die Bestandsgrößen s bzw. S

unter Beachtung einer der folgenden Restriktionen:

$$\mathrm{P}\left[\begin{array}{l}\text{Fehlmenge in bezug auf die Nach-}\\ \text{fragemenge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array}\right] \leq 1-\alpha$$

$$\mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Fehlmenge in bezug auf die Nach-}\\ \text{fragemenge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array}\right\} \leq (1-\beta)\cdot \mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Nachfragemenge}\\ \text{im Bestellzyklus}\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{periodenbezogene Fehlbestände im}\\ \text{Bestellzyklus}\end{array}\right\} \leq (1-\gamma)\cdot \mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Nachfragemenge}\\ \text{im Bestellzyklus}\end{array}\right\}$$

$$\mathrm{P}\left[\begin{array}{l}\text{Reichweite des Anfangsbestands}\\ \text{im Vergleich zur Nachfragemen-}\\ \text{ge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array} \geq \text{Vorgabe}\right] \geq \text{Vorgabewert}$$

$$\mathrm{P}\left[\begin{array}{l}\text{lagerbedingte Lieferzeit der Nach-}\\ \text{fragemenge } Y \text{ im Risikozeitraum}\end{array} \leq \text{Vorgabe}\right] \geq \text{Vorgabewert}$$

Analyse von ausgewählten Lagerhaltungspolitiken

$(r = 1, s, q)$-Lagerhaltungspolitik

Nachfrage-/Bedarfsmenge im Risikozeitraum bei einer $(r = 1, s, q)$-Politik

$Y =$ Summe von L Periodennachfragemengen $D +$ Defizit/Undershoot U

$(r = 1, s, q)$-Politik, $L = \ell$, diskret-verteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen

- Risikozeitraum $= \ell$ Tage Wiederbeschaffungszeit $(+\, 1$ Tag Defizit)
- $Y = \sum_{i=1}^{\ell} D + U = Y^{(\ell)} + U$
- $\mathrm{P}\left[Y^{(\ell)} = y\right] = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{\ell} D = y\right] \Longrightarrow$ ℓ-fache Faltung der Verteilung von D

$(r = 1, s, q)$-Politik, $L = \ell$, kontinuierlich-verteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen

- Risikozeitraum $= \ell$ Tage Wiederbeschaffungszeit $(+\, 1$ Tag Defizit)
- $Y = \sum_{i=1}^{\ell} D + U = Y^{(\ell)} + U$
- $f_{Y^{(\ell)}}(y) = f_{\sum_{i=1}^{\ell} D}(y) \Longrightarrow$ ℓ-fache Faltung der Verteilung von D

Das mögliche Defizit („Undershoot“) bei bestandsorientierter Disposition

Defizit U (Undershoot) (wenn die Nachfragemenge D diskret ist)

$$\mathrm{P}\left[\text{Bestellung}\right] = \frac{1}{q} \cdot \sum_{x=1}^{q} \mathrm{P}\left[D \geq x\right]$$

$$\mathrm{P}\left[U = u\right] \approx \lim_{q \to \infty} \frac{\sum_{x=1}^{q} \mathrm{P}\left[D = x + u\right]}{\sum_{x=1}^{q} \mathrm{P}\left[D \geq x\right]} = \frac{\mathrm{P}\left[D > u\right]}{\mathrm{E}\left\{D\right\}} \qquad (u = 0, 1, 2, \ldots)$$

Defizit U (Undershoot) (wenn die Nachfragemenge D kontinuierlich ist)

$$\mathrm{E}\left\{U\right\} = \frac{\mathrm{E}\left\{D\right\}^2 + \mathrm{Var}\left\{D\right\}}{2 \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}}$$

$$\mathrm{Var}\left\{U\right\} = \frac{\mathrm{E}\left\{\left(D - \mathrm{E}\left\{D\right\}\right)^3\right\}}{3 \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}} + \frac{\mathrm{Var}\left\{D\right\}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{Var}\left\{D\right\}}{2 \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}^2}\right) + \frac{\mathrm{E}\left\{D\right\}^2}{12}$$

Defizit U (Undershoot)

$$\mathrm{E}\{U\} = \frac{\mathrm{E}\{D\}^2 + \mathrm{Var}\{D\}}{2 \cdot \mathrm{E}\{D\}}$$

$$\mathrm{Var}\{U\} = \frac{\mathrm{E}\left\{(D - \mathrm{E}\{D\})^3\right\}}{3 \cdot \mathrm{E}\{D\}} + \frac{\mathrm{Var}\{D\}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{Var}\{D\}}{2 \cdot \mathrm{E}\{D\}^2}\right) + \frac{\mathrm{E}\{D\}^2}{12}$$

Es wird üblicherweise angenommen, dass

$$\mathrm{E}\{Y\} = \mathrm{E}\left\{Y^{(\ell)}\right\} + \mathrm{E}\{U\}$$

$$\mathrm{Var}\{Y\} = \mathrm{Var}\left\{Y^{(\ell)}\right\} + \mathrm{Var}\{U\}$$

Spezialfall: Normalverteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen und Defizit bei einer $(r = 1, s, q)$-Politik

D sei normalverteilt mit den Parametern (μ_D, σ_D), zumindest aber die Summe $Y^{(\ell)}$ von ausreichend vielen aufeinanderfolgenden, beliebig verteilten, täglichen Nachfrage-/Bedarfsmengen D mit $\mathrm{E}\{D\} = \mu_D$ und $\mathrm{Var}\{D\} = \sigma_D^2$.

Dann ist:

$$Y^{(\ell)} = D + D + \cdots D = \sum_{i=1}^{\ell} D \qquad \sim \text{normalverteilt mit } \left(\mu_{Y^{(\ell)}}, \sigma_{Y^{(\ell)}}\right)$$

$$\mathrm{E}\left\{Y^{(\ell)}\right\} = \ell \cdot \mathrm{E}\{D\} = \ell \cdot \mu_D = \mu_{Y^{(\ell)}}$$

$$\mathrm{Var}\left\{Y^{(\ell)}\right\} = \ell \cdot \mathrm{Var}\{D\} = \ell \cdot \sigma_D^2 = \sigma_{Y^{(\ell)}}^2 \iff \sigma_{Y^{(\ell)}} = \sqrt{\ell} \cdot \sigma_D$$

Dann wird üblicherweise angenommen, dass bei bestandsabhängiger Disposition auch die Nachfrage-/Bedarfsmenge im Risikozeitraum, $Y = Y^{(\ell)} + U$, normalverteilt ist mit $\mu_Y = \mathrm{E}\{Y\} \approx \mathrm{E}\{Y^{(\ell)}\} + \mathrm{E}\{U\}$ und $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}\{Y\} \approx \mathrm{Var}\{Y^{(\ell)}\} + \mathrm{Var}\{U\}$.

Die β-Servicegradrestriktion bei einer $(r = 1, s, q)$-Politik

Tatsächlich erreichter zyklusbezogener β-Servicegrad:

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\}}{q}$$

Fehlbestand am Ende eines Bestellzyklus:

$$\mathrm{E}\left\{\max\{Y - s, 0\}\right\} =: \mathrm{E}\left\{[Y - s]^+\right\} =: G_Y^{(1)}(s)$$

Fehlbestand am Anfang eines Bestellzyklus:

$$\mathrm{E}\left\{\max\{Y - (s + q), 0\}\right\} =: \mathrm{E}\left\{[Y - (s + q)]^+\right\} =: G_Y^{(1)}(s + q)$$

Zyklusbezogene Fehlmenge:

$$\mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\} = G_Y^{(1)}(s) - G_Y^{(1)}(s + q)$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (mit Vorgabewert $\widehat{\beta}$):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\}}{q} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\} \overset{!}{\leq} \left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot q$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (mit Vorgabewert $\widehat{\beta}$):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\}}{q} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\} \overset{!}{\leq} \left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot q$$

Optimaler Bestellpunkt:

$$s_{\text{opt}} = \min\left\{ s \;\middle|\; \mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\} \leq (1 - \widehat{\beta}) \cdot q \right\}$$

Standardisierung (bei normalverteilten Nachfrage-/Bedarfsmengen):

$$\mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\} = \sigma_Y \cdot \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} \iff \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} = \frac{1}{\sigma_Y} \cdot \mathrm{E}\left\{B_Y(s)\right\} \text{ mit } Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

$$\mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} := \mathrm{E}\left\{\max\{Z - v, 0\}\right\} =: \mathrm{E}\left\{[Z - v]^+\right\} =: G_Z^{(1)}(v) = G_Z^{(1)}\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$\text{mit } v = \frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (mit Vorgabewert $\widehat{\beta}$):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\{B_Y(s)\}}{q} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \mathrm{E}\{B_Y(s)\} \overset{!}{\leq} \left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot q$$

Optimaler Bestellpunkt:

$$s_{\text{opt}} = \min \left\{ s \;\middle|\; \mathrm{E}\{B_Y(s)\} \leq (1 - \widehat{\beta}) \cdot q \right\}$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (standardisiert):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\{B_Y(s)\}}{q} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \frac{\mathrm{E}\{B_Y(s)\}}{\sigma_Y} = \mathrm{E}\{B_Z(v)\} \overset{!}{\leq} \frac{\left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot q}{\sigma_Y}$$

Optimaler (standardisierter) Bestellpunkt:

$$v_{\text{opt}} = \min \left\{ v \;\middle|\; \mathrm{E}\{B_Z(v)\} \leq \frac{(1 - \widehat{\beta}) \cdot q}{\sigma_Y} \right\} \text{ mit } v = \frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

Optimaler Bestellpunkt:

$$s_{\text{opt}} = v_{\text{opt}} \cdot \sigma_Y + \mu_Y$$

Zusammenhang:

$$Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y) \quad \overset{\text{Standardisierung}}{\Longrightarrow} \quad Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\Downarrow$$

standardisierte Fehlmenge: $\mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} = \int_v^{\infty} (z - v) \cdot f_Z(z) \,\mathrm{d}x$

Optimierung $\Downarrow$

$$s_{\text{opt}} = v_{\text{opt}} \cdot \sigma_Y + \mu_Y \quad \overset{\text{Rückstandardisierung}}{\Longleftarrow} \quad v_{\text{opt}} = \min\left\{ v \;\middle|\; \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} \leq \frac{(1-\beta)\cdot q}{\sigma_Y} \right\}$$

Für normalverteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen kann man eine Beziehung zwischen der Verlustfunktion erster Ordnung und ihrer Inversen analytisch formulieren (vgl. Tijms (1994)):

$$G_Z^{(1)}(v) = \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} = \int_v^{\infty} (z - v) \cdot \phi(z) \,\mathrm{d}z \approx \phi(v) - v \cdot (1 - \Phi(v))$$

Beispiel (s, q)-**Lagerhaltungspolitik**

Die tägliche Nachfragemenge D nach der Tiefkühl-Pizza „Salami" in einem Supermarkt ist mit dem Mittelwert $\mu_D = 50$ und der Standardabweichung $\sigma_D = 8$ normalverteilt. Die fixen Bestellkosten betragen 80 GE. Der Lagerkostensatz beträgt 0.05.

Wie hoch ist der optimale Bestellpunkt in einer (s, q)-Politik, wenn bei einer Wiederbeschaffungszeit L von 4 Tagen der erwartete Fehlbestand am Ende eines Bestellzyklus $1\,\%$ der durchschnittlichen Nachfrage in einem Bestellzyklus nicht überschreiten darf?

- Optimale Bestellmenge: $q_{\text{opt}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot \mu_D \cdot s}{h}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 50 \cdot 80}{0.05}} = 400$

Beispiel $(s, q = 400)$-**Politik**: $D \sim N(\mu_D = 50, \sigma_D = 8)$, $\beta \geq 0.99$, $L = 4$, $r = 1$

Nachfragemenge im Risikozeitraum (= Wiederbeschaffungszeit $\ell = 4$):

$$\mu_{Y(\ell)} = 4 \cdot 50 = 200,\ \sigma_{Y(\ell)} = \sqrt{4 \cdot 8^2} = 2 \cdot 8 = 16$$

Berücksichtigung des Defizits:

$$\mu_Y = \mu_{Y(\ell)} + \mathrm{E}\left\{U\right\} = 200 + \frac{50^2 + 8^2}{2 \cdot 50} = 200 + 25.64 = 225.64$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{Y(\ell)}^2 + \mathrm{Var}\left\{U\right\} = 16^2 + \frac{8^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{8^2}{2 \cdot 50^2}\right) + \frac{50^2}{12} = 256 + 239.924 = 495.924$$

Erwarteter Fehlbestand am Ende des Bestellzyklus:

$$\mathrm{E}\left\{\max\{Y - s, 0\}\right\} = G_Y^{(1)}(s) \iff \sigma_Y \cdot G_Z^{(1)}(v) = \sigma_Y \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Erwarteter Fehlbestand am Anfang des Bestellzyklus:

$$\mathrm{E}\left\{\max\{Y - (s+q), 0\}\right\} = G_Y^{(1)}(s+q) \iff \sigma_Y \cdot G_Z^{(1)}(v) = \sigma_Y \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{s + q - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$G_Z^{(1)}\left(\frac{s + q - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = G_Z^{(1)}\left(\frac{s + 400 - 225.64}{22.2693}\right) = G_Z^{(1)}\left(\frac{s}{22.2693} + 7.82961\right) \approx 0$$

Beispiel $(s,q=400)$-**Politik**: $D \sim N(\mu_D=50, \sigma_D=8)$, $\beta \geq 0.99$, $L=4$, $r=1$

Nachfragemenge im Risikozeitraum (= Wiederbeschaffungszeit $\ell=4$):

$$\mu_{Y(\ell)} = 4\cdot 50 = 200,\ \sigma_{Y(\ell)} = \sqrt{4\cdot 8^2} = 2\cdot 8 = 16$$

Berücksichtigung des Defizits:

$$\mu_Y = \mu_{Y(\ell)} + \mathrm{E}\{U\} = 200 + \frac{50^2+8^2}{2\cdot 50} = 200 + 25.64 = 225.64$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{Y(\ell)}^2 + \mathrm{Var}\{U\} = 16^2 + \frac{8^2}{2}\cdot\left(1-\frac{8^2}{2\cdot 50^2}\right) + \frac{50^2}{12} = 256 + 239.924 = 495.924$$

Fehlmengenrestriktion:

$$\mathrm{E}\{B_Z(v)\} = \sigma_Y \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \leq 0.01\cdot q \iff G_Z^{(1)}\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \leq 0.179619$$

Optimaler (standardisierter) Bestellpunkt:

$$v_{\text{opt}} = \min\{v \mid \phi(v) - v\cdot(1-\Phi(v)) \leq 0.179619\} = 0.31555$$

Optimaler Bestellpunkt:

$$s_{\text{opt}} = v_{\text{opt}}\cdot\sigma_Y + \mu_Y = 0.31555\cdot 22.2693 + 225.64 = 232.667 \implies \text{SB} = 7.02708$$

(r, S)-Lagerhaltungspolitik

Nachfrage-/Bedarfsmenge im Risikozeitraum bei einer (r, S)-Politik

$Y =$ Summe von $r + L$ Periodennachfragemengen D

(r, S)-Politik, $L = \ell$, diskret-verteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen

- Risikozeitraum $= r + \ell$ Tage Wiederbeschaffungszeit
- $Y = \sum_{i=1}^{r+\ell} D = Y^{(r+\ell)}$
- $\mathrm{P}\left[Y^{(r+\ell)} = y\right] = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{r+\ell} D = y\right] \Longrightarrow (r + \ell)$-fache Faltung der Verteilung von D

(r, S)-Politik, $L = \ell$, kontinuierlich-verteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen

- Risikozeitraum $= r + \ell$ Tage Wiederbeschaffungszeit
- $Y = \sum_{i=1}^{r+\ell} D = Y^{(r+\ell)}$
- $f_{Y^{(r+\ell)}}(y) = f_{\sum_{i=1}^{r+\ell} D}(y) \Longrightarrow (r + \ell)$-fache Faltung der Verteilung von D

Normalverteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen bei einer (r, S)-Politik

D sei normalverteilt mit den Parametern (μ_D, σ_D), zumindest aber die Summe $Y^{(r+\ell)}$ von ausreichend vielen aufeinanderfolgenden, beliebig verteilten, täglichen Nachfrage-/Bedarfsmengen D mit $\mathrm{E}\{D\} = \mu_D$ und $\mathrm{Var}\{D\} = \sigma_D^2$.

Dann ist:

$$Y^{(r+\ell)} = D + D + \cdots D = \sum_{i=1}^{r+\ell} D \qquad \sim \text{normalverteilt mit } \left(\mu_{Y^{(r+\ell)}}, \sigma_{Y^{(r+\ell)}}\right)$$

$$\mathrm{E}\left\{Y^{(r+\ell)}\right\} = (r+\ell) \cdot \mathrm{E}\{D\} = (r+\ell) \cdot \mu_D = \mu_{Y^{(r+\ell)}}$$

$$\mathrm{Var}\left\{Y^{(r+\ell)}\right\} = (r+\ell) \cdot \mathrm{Var}\{D\} = (r+\ell) \cdot \sigma_D^2 = \sigma_{Y^{(r+\ell)}}^2$$

$$\sigma_{Y^{(r+\ell)}} = \sqrt{r+\ell} \cdot \sigma_D$$

Die β-Servicegradrestriktion bei einer (r, S)-Politik

Tatsächlich erreichter zyklusbezogener β-Servicegrad:

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\{B_Y(S)\}}{r \cdot \mathrm{E}\{D\}}$$

Fehlbestand am Ende eines Bestellzyklus:

$$\mathrm{E}\left\{\max\left\{Y^{(r+\ell)} - S, 0\right\}\right\} =: \mathrm{E}\left\{[Y^{(r+\ell)} - S]^+\right\} =: G_Y^{(1)}(S)$$

Fehlbestand am Anfang eines Bestellzyklus:

$$\mathrm{E}\left\{\max\left\{Y^{(\ell)} - S, 0\right\}\right\} =: \mathrm{E}\left\{[Y^{(\ell)} - S]^+\right\} =: G_{Y^{(\ell)}}^{(1)}(S)$$

Zyklusbezogene Fehlmenge:

$$\mathrm{E}\{B_Y(S)\} = G_Y^{(1)}(S) - G_{Y^{(\ell)}}^{(1)}(S)$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (mit Vorgabewert $\widehat{\beta}$):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\{B_Y(S)\}}{r \cdot \mathrm{E}\{D\}} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \mathrm{E}\{B_Y(S)\} \overset{!}{\leq} \left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot r \cdot \mathrm{E}\{D\}$$

MERCATOR School of Management

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (mit Vorgabewert $\widehat{\beta}$):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\}}{r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\} \overset{!}{\leq} \left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}$$

Optimales Bestellniveau:

$$S_{\text{opt}} = \min \left\{ S \,\middle|\, \mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\} \leq (1 - \widehat{\beta}) \cdot r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\} \right\}$$

Standardisierung (bei normalverteilten Nachfrage-/Bedarfsmengen):

$$\mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\} = \sigma_Y \cdot \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} \iff \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} = \frac{1}{\sigma_Y} \cdot \mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\} \text{ mit } Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

$$\mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} := \mathrm{E}\left\{\max\{Z - v, 0\}\right\} =: \mathrm{E}\left\{[Z - v]^+\right\} =: G_Z^{(1)}(v) = G_Z^{(1)}\left(\frac{S - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$\text{mit } v = \frac{S - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (mit Vorgabewert $\widehat{\beta}$):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\}}{r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\} \overset{!}{\leq} \left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}$$

Optimales Bestellniveau:

$$S_{\mathrm{opt}} = \min\left\{S \;\middle|\; \mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\} \leq (1 - \widehat{\beta}) \cdot r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}\right\}$$

Zyklusbezogene β-Servicegradrestriktion (standardisiert):

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\}}{r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}} \overset{!}{\geq} \widehat{\beta} \iff \frac{\mathrm{E}\left\{B_Y(S)\right\}}{\sigma_Y} = \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} \overset{!}{\leq} \frac{\left(1 - \widehat{\beta}\right) \cdot r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}}{\sigma_Y}$$

Optimales (standardisiertes) Bestellniveau:

$$v_{\mathrm{opt}} = \min\left\{v \;\middle|\; \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} \leq \frac{(1 - \widehat{\beta}) \cdot r \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\}}{\sigma_Y}\right\} \text{ mit } v = \frac{S - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

Optimales Bestellniveau:

$$S_{\mathrm{opt}} = v_{\mathrm{opt}} \cdot \sigma_Y + \mu_Y$$

Zusammenhang:

$$Y \sim \mathsf{N}(\mu_Y, \sigma_Y) \quad \xRightarrow{\text{Standardisierung}} \quad Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \sim \mathsf{N}(0,1)$$

$$\Downarrow$$

standardisierte Fehlmenge: $\mathrm{E}\{B_Z(v)\} = \int_v^\infty (z - v) \cdot f_Z(z)\,\mathrm{d}x$

Optimierung $\Downarrow$

$$S_{\text{opt}} = v_{\text{opt}} \cdot \sigma_Y + \mu_Y \quad \xLeftarrow{\text{Rückstandardisierung}} \quad v_{\text{opt}} = \min\left\{v \,\middle|\, \mathrm{E}\{B_Z(v)\} \le \frac{(1-\beta)\cdot r \cdot \mu_D}{\sigma_Y}\right\}$$

(mit $Y = Y^{(r+\ell)}$)

Für normalverteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen kann man eine Beziehung zwischen der Verlustfunktion erster Ordnung und ihrer Inversen analytisch formulieren (vgl. Tijms (1994)):

$$G^{(1)Z(v)} = \mathrm{E}\{B_Z(v)\} = \int_v^\infty (z - v) \cdot \phi(z)\,\mathrm{d}z = \phi(v) - v \cdot (1 - \Phi(v))$$

Beispiel $(r = 1, S)$**-Politik**

- tägliche Nachfragemenge D ist normalverteilt mit $\mu_D = 10, \sigma_D = 5$
- Servicegradvorgabe: $\beta \overset{!}{\geq} 95\,\%$
- Wiederbeschaffungszeit: $\ell = 3$ Tage

Beispiel $(r=1,S)$-**Politik**: $D \sim N(\mu_D = 10, \sigma_D = 2)$, $\beta \geq 0.95$, $\ell = 3$

Nachfrage-/Bedarfsmenge in der Wiederbeschaffungszeit ($\ell = 3$):

$$Y^{(\ell)} \sim N\left(\mu_{Y(\ell)} = 10 + 10 + 10 = 30, \sigma_{Y(\ell)} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 3.4641\right)$$

Nachfrage-/Bedarfsmenge im Risikozeitraum ($= r + \ell = 1 + 3 = 4$):

$$Y^{(r+\ell)} \sim N\left(\mu_{Y(r+\ell)} = 10 + 10 + 10 + 10 = 40, \sigma_{Y(r+\ell)} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2} = 4\right)$$

Fehlmengenerwartungswert:

$$\sigma_{Y(r+\ell)} \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{S - \mu_{Y(r+\ell)}}{\sigma_{Y(r+\ell)}}\right) - \sigma_{Y(\ell)} \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{S - \mu_{Y(\ell)}}{\sigma_{Y(\ell)}}\right) \overset{!}{\leq} (1 - 0.95) \cdot 1 \cdot 10 = 0.5$$

Optimales Bestellniveau:

$$S_{\text{opt}} = \min\left\{S \,\middle|\, 4 \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{S-40}{4}\right) - 3.4641 \cdot G_Z^{(1)}\left(\frac{S-30}{3.4641}\right) \overset{!}{\leq} 0.5\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$S_{\text{opt}} = \min\{S \,|0.500063 - 0.000063 = 0.500000\} = 43.110586$$

Stochastische Wiederbeschaffungszeiten

Y = Summe von Periodennachfragemengen D + Defizit/Undershoot U

$(r=1,s,q)$-Politik, L stochastisch, diskret-verteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen

- Risikozeitraum = L Tage Wiederbeschaffungszeit + Defizit
- $Y = Y^{(L)} + U = \sum_{i=1}^{L} D + U$
- $\mathrm{P}\left[Y^{(L)} = y\right] = \sum_{\ell=\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{\ell} D = y\right] \cdot \mathrm{P}\left[L = \ell\right]$

(r,S)-Politik, L stochastisch, diskret-verteilte Nachfrage-/Bedarfsmengen

- Risikozeitraum = r + L Tage Wiederbeschaffungszeit
- $Y = Y^{(r+L)} = \sum_{i=1}^{r+L} D$
- $\mathrm{P}\left[Y^{(r+L)} = y\right] = \sum_{\ell=\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{r+\ell} D = y\right] \cdot \mathrm{P}\left[L = \ell\right]$

Dynamische Entscheidungen über die Höhe des Lagerbestands unter stochastischen Bedingungen

Bestellmengenplanung unter stochastischen Bedingungen

- „Dynamic uncertainty strategy“ (Bookbinder/Tan (1988))
  - dynamische Anpassung der Lagerhaltungspolitiken
  - hohe Planungsnervosität
- „Static-dynamic uncertainty strategy“ (Bookbinder/Tan (1988))
  - dynamische Festlegung der Bestellmengen bzw. Losgrößen
  - immer noch (zu) starke Schwankungen der Bestellmengen
- „Static uncertainty strategy“ (Bookbinder/Tan (1988))
  - vorab ausreichend dimensionierte Produktions-/Bestellmengen bei vorgegebenem Auflagemuster

$\Longrightarrow$ Die dynamischen Mengenvariationen sind nicht mehr (nur) Reaktion auf vergangene stochastische Bedarfsmengen, sondern beinhalten auch Sicherheitsbestand.

Keine dieser „Strategien“ kann knappe Kapazitäten berücksichtigen.