

Übung 04

Bestandsmanagement unter Unsicherheit

Aufgabe 1: Bestandsgrößen im Zeitverlauf

Ein Händler für hochwertige Espressomaschinen nutzt zur Steuerung seines Lagers eine (s, q) -Politik mit kontinuierlicher Überwachung. Die Politik ist wie folgt definiert:

- Bestellpunkt (Meldebestand) s : 80 Maschinen
- Bestellmenge q : 200 Maschinen
- Wiederbeschaffungszeit L : 2 Wochen (deterministisch)

Der Händler startet in Woche 0 mit den folgenden Beständen:

- Physischer Bestand I_0^P : 100 Maschinen
- Bestellbestand (offene Bestellungen) I_0^O : 0 Maschinen

Wöchentliche Nachfragen (deterministisch für diese Aufgabe):

Woche (t)	1	2	3	4	5	6
Nachfrage d_t	40	35	50	40	55	60

Ihre Aufgaben:

1. **Tabelle ausfüllen:** Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Verfolgen Sie alle Bestandsgrößen über den Zeitraum von 6 Wochen. Eine Bestellung wird am Ende der Woche ausgelöst, in der der disponible Bestand den Meldebestand s erreicht oder unterschreitet. Der Wareneingang erfolgt dann genau $L = 2$ Wochen später zu Beginn der Woche.

Woche (t)	Nachfrage d_t	Disp. Bestand (Anfang)	Bestellung? (Menge)	Disp. Bestand (Ende)	Phys. Bestand (Ende)	Bestellbestand (Ende)	Fehlbestand (Ende)
0	-	-	-	100	100	0	0
1	40	100	?	?	?	?	?
2	35	?	?	?	?	?	?
3	50	?	?	?	?	?	?
4	40	?	?	?	?	?	?
5	55	?	?	?	?	?	?
6	60	?	?	?	?	?	?

Lösung:

💡 Tipps und wichtige Formeln

Reihenfolge der Ereignisse

Beachten Sie die korrekte Reihenfolge der Aktionen **innerhalb jeder Woche**:

1. **Wareneingang:** Zu Beginn der Woche kommt eine eventuell vor $L = 2$ Wochen getätigte Bestellung an. Dadurch steigt der physische Bestand und der Bestellbestand sinkt.
2. **Nachfrage-Erfüllung:** Die Nachfrage der aktuellen Woche wird bedient. Dies senkt den physischen und den disponiblen Bestand.
3. **Bestellentscheidung:** Am **Ende der Woche** wird geprüft, ob eine neue Bestellung ausgelöst werden muss.

Die wichtigsten Formeln

- **Disponibler Bestand (I^D):** Die entscheidende Größe für die Bestellung. Er repräsentiert die Summe aus physischem und bestelltem Bestand. $I_t^D(\text{vor Bestellung}) = I_{t-1}^D(\text{Ende}) - d_t$
- **Bestellentscheidung:** Prüfe am Ende der Woche: $I_t^D(\text{vor Bestellung}) \leq s$?
 - ▶ Wenn **Ja**: Löse eine Bestellung über die Menge q aus. Der disponible Bestand erhöht sich **sofort**: $I_t^D(\text{Ende}) = I_t^D(\text{vor Bestellung}) + q$
 - ▶ Wenn **Nein**: Der disponible Bestand bleibt für das Ende der Woche unverändert.
- **Physischer Bestand (I^P):**
 - ▶ $I_t^P(\text{Ende}) = I_{t-1}^P(\text{Ende}) + \text{Wareneingang}_t - d_t$ (kann nicht negativ werden)
- **Bestellbestand (I^O):**
 - ▶ $I_t^O(\text{Ende}) = I_{t-1}^O(\text{Ende}) - \text{Wareneingang}_t + \text{Neue Bestellung}_t$

Die Logik ist wie folgt:

1. **Disponibler Bestand (Anfang):** Ist der disponible Bestand vom Ende der Vorwoche.
2. **Bestellung?:** Prüfe am Ende der Woche: Disponibler Bestand (Anfang) - Nachfrage $\leq s$? Wenn ja, löse Bestellung über q aus.
3. **Disponibler Bestand (Ende):** Disponibler Bestand (Anfang) - Nachfrage.
4. **Physischer Bestand / Fehlbestand:** Physischer Bestand (Anfang) + Wareneingang - Nachfrage.
5. **Bestellbestand:** Bestellbestand (Anfang) + Neue Bestellung - Wareneingang.

Berechnung Schritt für Schritt:

Woche 1: Meldebestand unterschritten ($60 \leq 80$). Bestellung ausgelöst.

Woche 3: Wareneingang von 200 Stück.

Woche 5: Meldebestand unterschritten ($80 \leq 80$). Bestellung ausgelöst.

Vervollständigte Tabelle:

Woche (t)	Nachfrage d_t	Disp. Bestand (A)	Bestellung? (E)	Disp. Bestand (E)	Phys. Bestand (E)	Bestellbestand (E)	Fehlbestand (E)
1	40	100		200			
260	60	200		0			

	2	35	260	0
225		25	200	0
	3	50	225	0
175		175	0	0
	4	40	175	0
135		135	0	0
	5	55	135	200
280		80	200	0
	6	60	280	0
220		20	200	0

Aufgabe 2: Sicherheitsbestand und Servicegrade

Ein Online-Händler für ein populäres Smartphone-Modell möchte seinen Lagerbestand optimieren. Die wöchentliche Nachfrage ist annähernd normalverteilt mit einem **Mittelwert von 60 Stück** und einer **Standardabweichung von 20 Stück**. Die Wiederbeschaffungszeit vom Hersteller beträgt konstant **3 Wochen**. Der Händler nutzt eine Politik der kontinuierlichen Überprüfung.

Ihre Aufgaben:

1. **Mittelwert und Standardabweichung:** Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Nachfrage während der Wiederbeschaffungszeit (dem Risikozeitraum).
2. **Bestellpunkt und Sicherheitsbestand:** Der Händler strebt einen α -Servicegrad (Zyklus-Servicegrad) von 95% an. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlbestands während eines Bestellzyklus soll nur 5% betragen. Welcher Bestellpunkt (reorder point) s muss gewählt werden? Wie hoch ist der resultierende Sicherheitsbestand?
3. **Erwartete Fehlmenge:** Gegeben der Bestellpunkt s aus Teil 2: Berechnen Sie die erwartete Fehlmenge pro Bestellzyklus $E(B)$. Nutzen Sie dafür die in der Vorlesung vorgestellte **standardisierte Einheiten-Verlustfunktion** $G_u(z)$. Die benötigten Werte für $G_u(z)$ finden Sie in den Tabellen der Vorlesung oder in den Lösungen zu dieser Aufgabe.
4. **Servicegrad:** Wenn der Händler eine feste Bestellmenge von $q = 450$ Stück verwendet, welchen β -Servicegrad (Mengen-Servicegrad) erreicht er mit seiner Politik?

Lösung:

💡 Tipps und wichtige Formeln

1. Nachfrage während der Wiederbeschaffungszeit (WBZ)

Der Risikozeitraum ist die Wiederbeschaffungszeit L . Wir müssen die Kennzahlen der Nachfrageverteilung für diesen längeren Zeitraum berechnen. Für unabhängige Perioden gilt:

- Erwartungswert der Nachfrage während WBZ: $\mu_L = L \cdot \mu_{\text{wöchentlich}}$
- Varianz der Nachfrage während WBZ: $\sigma_L^2 = L \cdot \sigma_{\text{wöchentlich}}^2$
- Standardabweichung der Nachfrage während WBZ: $\sigma_L = \sqrt{L} \cdot \sigma_{\text{wöchentlich}}$

2. Bestellpunkt und Sicherheitsbestand

Der Bestellpunkt s deckt die erwartete Nachfrage während der WBZ ab und enthält zusätzlich einen Puffer für Unsicherheit.

- **Bestellpunkt (s):** $s = \mu_L + SS$
- **Sicherheitsbestand (SS):** $SS = z \cdot \sigma_L$
- **Sicherheitsfaktor (z):** Dieser Wert hängt vom gewünschten α -Servicegrad (Zyklus-Servicegrad) ab und wird aus der Standardnormalverteilung abgelesen.

3. Erwartete Fehlmenge ($E(B)$)

Dies ist die durchschnittliche Anzahl an Einheiten, die pro Zyklus aufgrund von zu hoher Nachfrage nicht geliefert werden können.

- **Formel:** $E(B) = \sigma_L \cdot G_u(z)$
- **Standardisierte Verlustfunktion ($G_u(z)$):** $G_u(z) = \phi(z) - z(1 - \Phi(z))$
 - $\phi(z)$: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.
 - $\Phi(z)$: Kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

4. β -Servicegrad (Fill Rate)

Dieser Servicegrad misst den prozentualen Anteil der Gesamtnachfrage, der direkt aus dem Lager bedient wird.

- **Formel:** $\beta = 1 - \frac{E(B)}{q}$

1. Nachfrage während der WBZ:

- Erwartungswert (μ_L): 180.00 Stück
- Standardabweichung (σ_L): 34.64 Stück

2. Bestellpunkt für $\alpha = 95.0\%$:

- Benötigter z -Wert (Sicherheitsfaktor): 1.645
- Sicherheitsbestand: $1.645 \cdot 34.64 = 56.98$ Stück
- Bestellpunkt s : $180.00 + 56.98 = 236.98$ Stück (gerundet: 237.0)
- > Der Meldebestand sollte auf 237.0 Stück gesetzt werden.

3. Erwartete Fehlmenge pro Zyklus $E(B)$:

- $\phi(z=1.645) = 0.1031$
- $E(B) = 34.64 \cdot (0.1031 - 1.645 \cdot 0.05) = 0.7238$ Stück

4. Resultierender beta-Servicegrad:

- $\text{beta} = 1 - (0.7238 / 450) = 0.9984$ oder 99.84%

Aufgabe 3: Diskrete Nachfrage und Faltung

Ein Comic-Laden verkauft eine beliebte wöchentliche Manga-Ausgabe. Die tägliche Nachfrage ist nicht normalverteilt, sondern folgt dieser diskreten Verteilung:

Nachfrage (D) pro Tag	0 Hefte	1 Heft	2 Hefte	3 Hefte
Wahrscheinlichkeit $P(D)$	0.3	0.4	0.2	0.1

Die Wiederbeschaffungszeit beträgt genau **2 Tage**.

Ihre Aufgaben:

1. **Wahrscheinlichkeitsverteilung:** Leiten Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtnachfrage Y_2 über den Risikozeitraum von 2 Tagen her. (Tipp: Nutzen Sie die Faltung der Verteilung mit sich selbst).
2. **Fehlbestandswahrscheinlichkeit:** Wenn der Ladenbesitzer einen Bestellpunkt von $s = 4$ Heften festlegt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem Fehlbestand kommt (d.h. der α -Servicegrad *nicht* eingehalten wird)?
3. **Erwartete Fehlmenge:** Berechnen Sie die erwartete Fehlmenge $E(B)$ für den Bestellpunkt $s = 4$.

Lösung:

Tipps und wichtige Formeln

1. Faltung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wenn Sie die Verteilung der Summe von zwei unabhängigen, diskreten Zufallsvariablen D_1 und D_2 (hier die Nachfrage an zwei aufeinanderfolgenden Tagen) finden wollen, müssen Sie deren Verteilungen "falten". Für die Gesamtnachfrage $Y_2 = D_1 + D_2$ berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Y_2 = k)$ wie folgt: $P(Y_2 = k) = \sum_j P(D_1 = j) \cdot P(D_2 = k - j)$

Beispiel: Um die Wahrscheinlichkeit für eine Gesamtnachfrage von 2 zu finden ($k = 2$), summieren Sie die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Kombinationen auf, die 2 ergeben: $P(Y_2 = 2) = P(D_1 = 0, D_2 = 2) + P(D_1 = 1, D_2 = 1) + P(D_1 = 2, D_2 = 0)$. Da die Tage unabhängig sind, ist $P(D_1 = a, D_2 = b) = P(D = a) \cdot P(D = b)$.

2. Fehlbestandswahrscheinlichkeit ($1 - \alpha$)

Ein Fehlbestand tritt ein, wenn die Nachfrage während der Wiederbeschaffungszeit (Y_2) den Bestellpunkt (s) übersteigt. $P(\text{Fehlbestand}) = P(Y_2 > s)$

3. Erwartete Fehlmenge ($E(B)$)

Die erwartete Fehlmenge ist die Summe aller möglichen Fehlmengen, gewichtet mit ihren jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten. $E(B) = \sum_y \max(0, y - s) \cdot P(Y_2 = y)$. Sie müssen also für jeden möglichen Nachfragewert y die Fehlmenge ($y - s$) berechnen (falls diese positiv ist) und mit der Wahrscheinlichkeit $P(Y_2 = y)$ multiplizieren.

1. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gesamtnachfrage über 2 Tage (Y_2):

Wir müssen alle möglichen Kombinationen der Nachfrage an Tag 1 (D_1) und Tag 2 (D_2) betrachten. Die Gesamtnachfrage ist $Y_2 = D_1 + D_2$. Die möglichen Werte für Y_2 reichen von 0 (0+0) bis 6 (3+3).

- **P($Y_2 = 0$):** $P(D_1 = 0, D_2 = 0) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$
- **P($Y_2 = 1$):** $P(D_1 = 0, D_2 = 1) + P(D_1 = 1, D_2 = 0) = (0.3 \cdot 0.4) + (0.4 \cdot 0.3) = 0.12 + 0.12 = 0.24$
- **P($Y_2 = 2$):** $P(D_1 = 0, D_2 = 2) + P(D_1 = 1, D_2 = 1) + P(D_1 = 2, D_2 = 0) = (0.3 \cdot 0.2) + (0.4 \cdot 0.4) + (0.2 \cdot 0.3) = 0.06 + 0.16 + 0.06 = 0.28$
- **P($Y_2 = 3$):** $P(D_1 = 0, D_2 = 3) + P(D_1 = 1, D_2 = 2) + P(D_1 = 2, D_2 = 1) + P(D_1 = 3, D_2 = 0) = (0.3 \cdot 0.1) + (0.4 \cdot 0.2) + (0.2 \cdot 0.4) + (0.1 \cdot 0.3) = 0.03 + 0.08 + 0.08 + 0.03 = 0.22$
- **P($Y_2 = 4$):** $P(D_1 = 1, D_2 = 3) + P(D_1 = 2, D_2 = 2) + P(D_1 = 3, D_2 = 1) = (0.4 \cdot 0.1) + (0.2 \cdot 0.2) + (0.1 \cdot 0.4) = 0.04 + 0.04 + 0.04 = 0.12$
- **P($Y_2 = 5$):** $P(D_1 = 2, D_2 = 3) + P(D_1 = 3, D_2 = 2) = (0.2 \cdot 0.1) + (0.1 \cdot 0.2) = 0.02 + 0.02 = 0.04$
- **P($Y_2 = 6$):** $P(D_1 = 3, D_2 = 3) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$

Zusammenfassung der Verteilung für Y_2 :

Y_2	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y_2)$	0.09	0.24	0.28	0.22	0.12	0.04	0.01

2. Wahrscheinlichkeit eines Fehlbestands für $s=4$:

Ein Fehlbestand tritt auf, wenn die Nachfrage Y_2 den Bestellpunkt $s = 4$ übersteigt. $P(\text{Fehlbestand}) = P(Y_2 > 4) = P(Y_2 = 5) + P(Y_2 = 6)$ $P(\text{Fehlbestand}) = 0.04 + 0.01 = 0.05$ oder 5%.

Der α -Servicegrad wäre demnach $1 - 0.05 = 0.95$ oder 95%.

3. Erwartete Fehlmenge $E(B)$ für $s=4$:

Die Fehlmenge B ist $\max(0, Y_2 - s)$. Wir berechnen den Erwartungswert, indem wir jede mögliche Fehlmenge mit ihrer Wahrscheinlichkeit multiplizieren.

- Wenn $Y_2 \leq 4$, ist die Fehlmenge 0.
- Wenn $Y_2 = 5$, ist die Fehlmenge $5 - 4 = 1$. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $P(Y_2 = 5) = 0.04$.
- Wenn $Y_2 = 6$, ist die Fehlmenge $6 - 4 = 2$. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $P(Y_2 = 6) = 0.01$.

$$E(B) = \sum \max(0, y - s) \cdot P(Y_2 = y) \quad E(B) = (1 \cdot P(Y_2 = 5)) + (2 \cdot P(Y_2 = 6)) \quad E(B) = (1 \cdot 0.04) + (2 \cdot 0.01) = 0.04 + 0.02 = 0.06$$

Die erwartete Fehlmenge pro Bestellzyklus beträgt 0.06 Hefte.