Bestandsmanagement unter stochastischen Bedingungen (Sicherheitsbestandsplanung)

Bestandsgrößen:

Begriffsabgrenzungen

physischer Lagerbestand (inventory on hand)

I^{P}

Bestellbestand (outstanding orders)

I^{O}

Fehlbestand (backorders)

I^{B}

Fehlmenge (backordered demand) $\Longleftarrow$ Achtung: Stromgröße!

B

Netto-Lagerbestand (net inventory)

$I^{\mathrm{N}} = I^{\mathrm{P}} - I^{\mathrm{B}}$

disponibler Lagerbestand I (inventory position)

$I^{\mathrm{D}} = I^{\mathrm{N}} + I^{\mathrm{O}}$

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248								
Bestellbestand I_t^{O}	—								
Fehlbestand I_t^{B}	—								
Nettobestand I_t^{N}	248								
disponibler Bestand I_t^{D}	248								

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248								
Bestellbestand I_t^{O}	—	0							
Fehlbestand I_t^{B}	—								
Nettobestand I_t^{N}	248								
disponibler Bestand I_t^{D}	248								

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189							
Bestellbestand I_t^{O}	—	0							
Fehlbestand I_t^{B}	—								
Nettobestand I_t^{N}	248								
disponibler Bestand I_t^{D}	248								

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189							
Bestellbestand I_t^{O}	—	0							
Fehlbestand I_t^{B}	—	0							
Nettobestand I_t^{N}	248								
disponibler Bestand I_t^{D}	248								

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189							
Bestellbestand I_t^{O}	—	0							
Fehlbestand I_t^{B}	—	0							
Nettobestand I_t^{N}	248	189							
disponibler Bestand I_t^{D}	248								

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189							
Bestellbestand I_t^{O}	—	0							
Fehlbestand I_t^{B}	—	0							
Nettobestand I_t^{N}	248	189							
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189							

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189							
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	400						
Fehlbestand I_t^{B}	—	0							
Nettobestand I_t^{N}	248	189							
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189							

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189							
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	400	400	400	400	400		
Fehlbestand I_t^{B}	—	0							
Nettobestand I_t^{N}	248	189							
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189							

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189	135	85	2	0	0	255	
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	400	400	400	400	400	0	
Fehlbestand I_t^{B}	—	0	0	0	0	42	99	0	
Nettobestand I_t^{N}	248	189	135	85	2	−42	−99	255	
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189	535	485	402	358	301	255	

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189	135	85	2	0	0	255	201
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	400	400	400	400	400	0	0
Fehlbestand I_t^{B}	—	0	0	0	0	42	99	0	0
Nettobestand I_t^{N}	248	189	135	85	2	-42	-99	255	201
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189	535	485	402	358	301	255	201

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189	135	85	2	0	0	255	201
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	400	400	400	400	400	0	0
Fehlbestand I_t^{B}	—	0	0	0	0	42	99	0	0
Nettobestand I_t^{N}	248	189	135	85	2	-42	-99	255	201
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189	535	485	402	358	301	255	201

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189	135	85	2	0	0	55	1
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	200	200	200	400	400	200	200
Fehlbestand I_t^{B}	—	0	0	0	0	42	99	0	0
Nettobestand I_t^{N}	248	189	135	85	2	-42	-99	55	1
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189	335	285	202	358	301	255	201

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189	135	85	2	0	0	255	201
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	400	400	400	400	400	0	0
Fehlbestand I_t^{B}	—	0	0	0	0	42	99	0	0
Nettobestand I_t^{N}	248	189	135	85	2	−42	−99	255	201
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189	535	485	402	358	301	255	201

Periode t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nachfrage d_t	—	59	54	50	83	44	57	46	54
physischer Bestand I_t^{P}	248	189	135	85	2	0	0	55	1
Bestellbestand I_t^{O}	—	0	200	200	200	400	400	200	200
Fehlbestand I_t^{B}	—	0	0	0	0	42	99	0	0
Nettobestand I_t^{N}	248	189	135	85	2	−42	−99	55	1
disponibler Bestand I_t^{D}	248	189	335	285	202	358	301	255	201

Modellierung der Zeitachse

Überwachungsintervall

- periodische Lagerüberwachung
- kontinuierliche Lagerüberwachung

Eintreffen der Nachfrage

- periodisch
- zeitkontinuierlich

Lieferservicekriterien eines Lagers

Die Lieferserviceleistung eines Lagers: Retrospektive Sicht

α-Servicegrad

$\alpha = 1 -$ relative Häufigkeit des Fehlmengenereignisses

α-Servicegrad

$$\alpha = 1 - \text{relative Häufigkeit des Fehlmengenereignisses}$$

β-Servicegrad

$$\beta = 1 - \frac{\text{durchschnittliche Fehlmenge}}{\text{durchschnittliche Nachfragemenge}}$$

α-Servicegrad

$$\alpha = 1 - \text{relative Häufigkeit des Fehlmengenereignisses}$$

β-Servicegrad

$$\beta = 1 - \frac{\text{durchschnittliche Fehlmenge}}{\text{durchschnittliche Nachfragemenge}}$$

γ-Servicegrad

$$\gamma = 1 - \frac{\text{durchschnittlicher periodenbezogener Fehlbestand}}{\text{durchschnittliche Nachfragemenge}}$$

MERCATOR School of Management

Beispiel

Periode	Nachfrage	Bestand (physisch)	Bestellung oder Wareneingang	Fehlbestand (Periodenende)	Fehlmenge (pro Zyklus)
1	50	350		–	–
2	58	292		–	–
3	44	248		–	–
4	59	189	⇒	–	–
5	54	135		–	–
6	50	85		–	–
7	83	2		–	–
8	44	–		42	–
9	57	–	⇐	99	99
10	46	255		–	–
11	54	201	⇒	–	–
12	74	127		–	–
13	64	63		–	–
14	46	17		–	–
15	57	–		40	–
16	38	–	⇐	78	78
17	34	288		–	–
18	58	230	⇒	–	–
19	53	177		–	–
20	54	123		–	–
21	18	105		–	–
22	44	61		–	–
23	54	7	⇐	0	0
24	46	361		–	–
25	38	323		–	–
26	14	309		–	–
27	55	254		–	–
28	56	198	⇒	–	–
29	36	162		–	–
30	57	105		–	–
31	71	34		–	–
32	60	–		26	–
33	45	–	⇐	71	71
34	42	287		–	–
35	35	252		–	–
36	67	185	⇒	–	–
37	40	145		–	–
38	45	100		–	–
39	59	41		–	–
40	33	8		–	–
41	50	–	⇐	42	42
42	67	291		–	–
43	16	275		–	–
44	46	229	⇒	–	–
45	32	197		–	–
46	40	157		–	–
47	77	80		–	–
48	51	29		–	–
49	28	1	⇐	0	0
50	60	341		–	–

$$\alpha_{\text{Periode}} = 1 - \frac{7}{50} = 86\,\%$$

$$\alpha_{\text{Zyklus}} = 1 - \frac{4}{6} = 33.\bar{3}\,\%$$

$$\beta = 1 - \frac{5.8}{49.18} = 88.21\,\%$$

$$\gamma = 1 - \frac{7.96}{49.18} = 83.81\,\%$$

(aus Tempelmeier (2006))

Lieferservicekriterien im Bestandsmanagement: Prospektive Sicht

α-Servicegrad

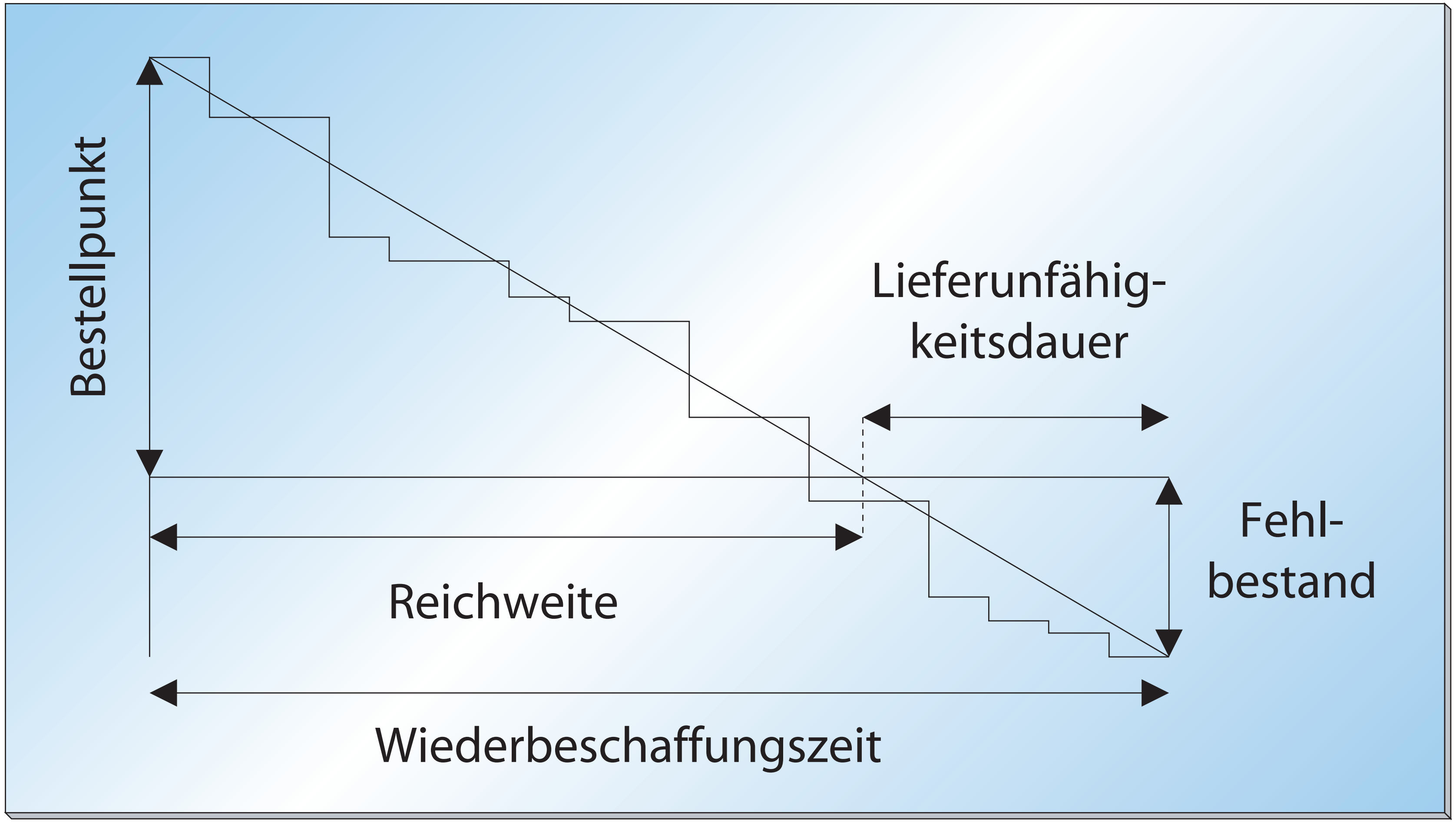
$$\alpha = 1 - \text{relative Häufigkeit des Fehlmengenereignisses}$$

β-Servicegrad

$$\beta = 1 - \frac{\text{durchschnittliche Fehlmenge}}{\text{durchschnittliche Nachfragemenge}}$$

γ-Servicegrad

$$\gamma = 1 - \frac{\text{durchschnittlicher periodenbezogener Fehlbestand}}{\text{durchschnittliche Nachfragemenge}}$$



(aus Tempelmeier (2006))

$$\mathrm{E}\left\{\begin{matrix}\text{Lieferunfähig-}\\ \text{keitsdauer}\end{matrix}\right\} \approx \frac{\mathrm{E}\{\text{Fehlbestand}\}}{\text{Bestand} + \mathrm{E}\{\text{Fehlbestand}\}} \cdot \text{Wiederbeschaffungszeit}$$

α-Servicegrad

$$\alpha = 1 - \mathrm{P}\left[\text{Fehlmenge} > 0\right]$$

β-Servicegrad

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{\text{Fehlmenge}\right\}}{\mathrm{E}\left\{\text{Nachfragemenge}\right\}}$$

γ-Servicegrad

$$\gamma = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{\text{periodenbezogener Fehlbestand}\right\}}{\mathrm{E}\left\{\text{Nachfragemenge}\right\}}$$

(erwartete) Dauer der Lieferunfähigkeit

$$\mathrm{E}\left\{\begin{matrix}\text{Lieferunfähig-}\\ \text{keitsdauer}\end{matrix}\right\} \approx \frac{\mathrm{E}\left\{\text{Fehlbestand}\right\}}{\text{Bestand} + \mathrm{E}\left\{\text{Fehlbestand}\right\}} \cdot \text{Wiederbeschaffungszeit}$$

α-Servicegrad

$$\alpha = 1 - \mathrm{P}\left[\text{Fehlmenge} > 0\right]$$

β-Servicegrad

$$\beta = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{\text{Fehlmenge}\right\}}{\mathrm{E}\left\{\text{Nachfragemenge}\right\}}$$

γ-Servicegrad

$$\gamma = 1 - \frac{\mathrm{E}\left\{\text{periodenbezogener Fehlbestand}\right\}}{\mathrm{E}\left\{\text{Nachfragemenge}\right\}}$$

(erwartete) Dauer der Lieferunfähigkeit

$$\mathrm{E}\left\{\begin{array}{l}\text{Lieferunfähig-}\\ \text{keitsdauer}\end{array}\right\} \approx \frac{\mathrm{E}\left\{\text{Fehlbestand}\right\}}{\text{Bestand} + \mathrm{E}\left\{\text{Fehlbestand}\right\}} \cdot \text{Wiederbeschaffungszeit}$$

(erwartete) Reichweite

$$\mathrm{E}\left\{\text{Reichweite}\right\} = \text{Wiederbeschaffungszeit} - \mathrm{E}\left\{\text{Lieferunfähigkeitsdauer}\right\}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung der **Reichweite** N des Meldebestands s (bei einer (s, q)-Politik; d. h., bei einem Restbestand in Höhe von s wird die Menge q nachbestellt)

[Die periodenbezogenen Nachfragemengen sind unabhängig, stochastisch wie D verteilt.]

$$\mathrm{P}\left[N = 0\right] = \mathrm{P}\left[D > s\right] = 1 - \mathrm{P}\left[D \leq s\right]$$

$$\mathrm{P}\left[N = n\right] = \mathrm{P}\left[\sum_{t=1}^{n} D \leq s\right] - \mathrm{P}\left[\sum_{t=1}^{n+1} D \leq s\right] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Bei normalverteilten Nachfragemengen ($D \sim N(\mu_D, \sigma_D)$):

$$\mathrm{P}\left[N = 0\right] = 1 - \Phi\left(\frac{s - \mu_D}{\sigma_D}\right)$$

$$\mathrm{P}\left[N = n\right] = \Phi\left(\frac{s - n \cdot \mu_D}{\sqrt{n} \cdot \sigma_D}\right) - \Phi\left(\frac{s - (n+1) \cdot \mu_D}{\sqrt{n+1} \cdot \sigma_D}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Beispiel **Reichweite N und Lieferunfähigkeitsdauer J**

- $s = 400$
- $\mu_D = 100$
- $\sigma_D = 30$
- Wiederbeschaffungszeit L

Beispiel **Reichweite N und Lieferunfähigkeitsdauer J**

- $s = 400$
- $\mu_D = 100$
- $\sigma_D = 30$
- Wiederbeschaffungszeit $L = \ell = 5$

$$\mathrm{P}\left[N=0\right] = \mathrm{P}\left[J=5\right] = 1 - \Phi\left(\frac{400-100}{30}\right) \approx 0$$

$$\mathrm{P}\left[N=1\right] = \mathrm{P}\left[J=4\right] = \Phi\left(\frac{400-100}{30}\right) - \Phi\left(\frac{400-200}{\sqrt{2}\cdot 30}\right) = 0.0000$$

$$\mathrm{P}\left[N=2\right] = \mathrm{P}\left[J=3\right] = \Phi\left(\frac{400-200}{\sqrt{2}\cdot 30}\right) - \Phi\left(\frac{400-300}{\sqrt{3}\cdot 30}\right) = 0.0271$$

$$\mathrm{P}\left[N=3\right] = \mathrm{P}\left[J=2\right] = \Phi\left(\frac{400-300}{\sqrt{3}\cdot 30}\right) - \Phi\left(\frac{400-400}{\sqrt{4}\cdot 30}\right) = 0.4728$$

$$\mathrm{P}\left[N=4\right] = \mathrm{P}\left[J=1\right] = \Phi\left(\frac{400-400}{\sqrt{4}\cdot 30}\right) - \Phi\left(\frac{400-500}{\sqrt{5}\cdot 30}\right) = 0.4319$$

Beispiel Reichweite N und Lieferunfähigkeitsdauer J

- $s = 400$
- $\mu_D = 100$
- $\sigma_D = 30$
- Wiederbeschaffungszeit $L = \ell = 5$

n	$j = \ell - n$	$v_1 = \frac{s-n\cdot\mu_D}{\sqrt{n}\cdot\sigma_D}$	$\Phi(v_1)$	$v_2 = \frac{s-(n+1)\cdot\mu_D}{\sqrt{n+1}\cdot\sigma_D}$	$\Phi(v_2)$	$\mathrm{P}[N = n] = \mathrm{P}[J = j]$
1	4	10.00	0.9999	4.71	0.9999	0.0000
2	3	4.71	0.9999	1.92	0.9728	0.0271
3	2	1.92	0.9728	0.00	0.5000	0.4728
4	1	0.00	0.5000	−1.49	0.0681	0.4319
5	0	−1.49	0.0681	−2.72	0.0098	0.0583

Beispiel **Reichweite N und Lieferunfähigkeitsdauer J**

- $s = 400,\ q = 1000$
- $\mu_D = 100$
- $\sigma_D = 30$
- Wiederbeschaffungszeit $L = \ell = 5$

n	$j = \ell - n$	$v_1 = \frac{s-n\cdot\mu_D}{\sqrt{n}\cdot\sigma_D}$	$\Phi(v_1)$	$v_2 = \frac{s-(n+1)\cdot\mu_D}{\sqrt{n+1}\cdot\sigma_D}$	$\Phi(v_2)$	$\mathrm{P}[N=n] = \mathrm{P}[J=j]$
1	4	10.00	0.9999	4.71	0.9999	0.0000
2	3	4.71	0.9999	1.92	0.9728	0.0271
3	2	1.92	0.9728	0.00	0.5000	0.4728
4	1	0.00	0.5000	−1.49	0.0681	0.4319
5	0	−1.49	0.0681	−2.72	0.0098	0.0583

$$\mathrm{E}\{J\} \approx \frac{100}{400+100} \cdot 5 = 1$$

Beispiel **Reichweite N und Lieferunfähigkeitsdauer J**

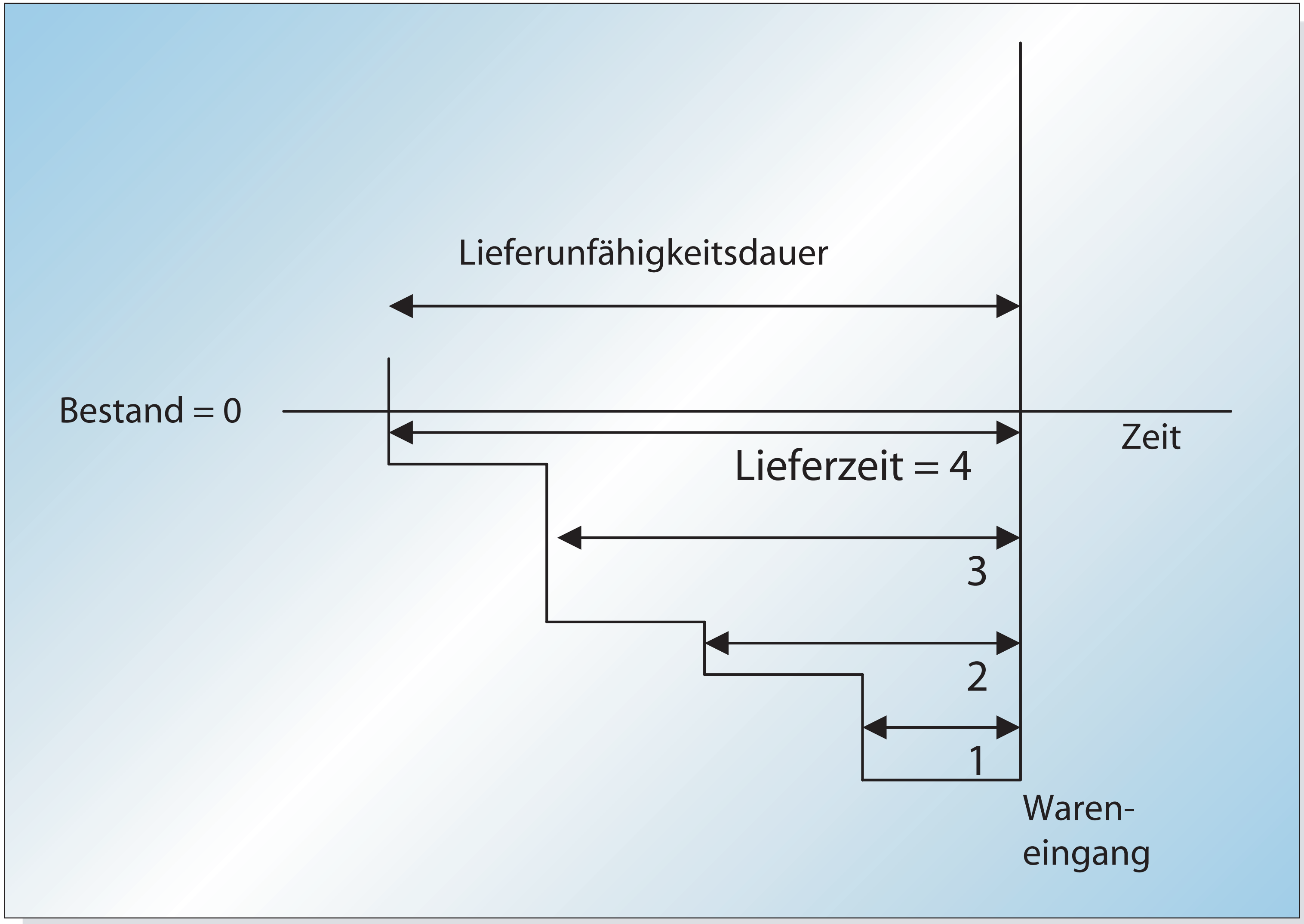
- $s = 400,\ q = 1000$
- $\mu_D = 100$
- $\sigma_D = 30$
- Wiederbeschaffungszeit $L = \ell = 5$

n	$j = \ell - n$	$v_1 = \frac{s-n\cdot\mu_D}{\sqrt{n}\cdot\sigma_D}$	$\Phi(v_1)$	$v_2 = \frac{s-(n+1)\cdot\mu_D}{\sqrt{n+1}\cdot\sigma_D}$	$\Phi(v_2)$	$\mathrm{P}[N=n] = \mathrm{P}[J=j]$
1	4	10.00	0.9999	4.71	0.9999	0.0000
2	3	4.71	0.9999	1.92	0.9728	0.0271
3	2	1.92	0.9728	0.00	0.5000	0.4728
4	1	0.00	0.5000	−1.49	0.0681	0.4319
5	0	−1.49	0.0681	−2.72	0.0098	0.0583

$$\mathrm{E}\{J\} \approx \frac{100}{400+100} \cdot 5 = 1$$

laut Tabelle: $\mathrm{E}\{J\} = 1.4588$

Lieferunfähigkeitsdauer ist Obergrenze für die
lagerbedingte Lieferzeit (Kundenwartezeit)



(aus Tempelmeier (2006))

Beispiel

Periode	Nachfrage	Bestand (physisch)	Bestellung oder Wareneingang	Fehlbestand (Periodenende)	Fehlmenge (pro Zyklus)
1	50	350		–	–
2	58	292		–	–
3	44	248		–	–
4	59	189	$\Rightarrow$	–	–
5	54	135		–	–
6	50	85		–	–
7	83	2		–	–
8	44	–		42	–
9	57	–	$\Leftarrow$	99	99
10	46	255		–	–
11	54	201	$\Rightarrow$	–	–
12	74	127		–	–
13	64	63		–	–
14	46	17		–	–
15	57	–		40	–
16	38	–	$\Leftarrow$	78	78
17	34	288		–	–
18	58	230	$\Rightarrow$	–	–
19	53	177		–	–
20	54	123		–	–
21	18	105		–	–
22	44	61		–	–
23	54	7	$\Leftarrow$	0	0
24	46	361		–	–
25	38	323		–	–
26	14	309		–	–
27	55	254		–	–
28	56	198	$\Rightarrow$	–	–
29	36	162		–	–
30	57	105		–	–
31	71	34		–	–
32	60	–		26	–
33	45	–	$\Leftarrow$	71	71
34	42	287		–	–
35	35	252		–	–
36	67	185	$\Rightarrow$	–	–
37	40	145		–	–
38	45	100		–	–
39	59	41		–	–
40	33	8		–	–
41	50	–	$\Leftarrow$	42	42
42	67	291		–	–
43	16	275		–	–
44	46	229	$\Rightarrow$	–	–
45	32	197		–	–
46	40	157		–	–
47	77	80		–	–
48	51	29		–	–
49	28	1	$\Leftarrow$	0	0
50	60	341		–	–

$$\alpha_{\text{Periode}} = 1 - \frac{7}{50} = 86\,\%$$

$$\alpha_{\text{Zyklus}} = 1 - \frac{4}{6} = 33.\bar{3}\,\%$$

$$\beta = 1 - \frac{5.8}{49.18} = 88.21\,\%$$

$$\gamma = 1 - \frac{7.96}{49.18} = 83.81\,\%$$

(aus Tempelmeier (2006))

Beispiel Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lieferzeit

$$\mathrm{P}\left[W = 0\right] = 0.86$$
$$\mathrm{P}\left[W = 1\right] = 0.08$$
$$\mathrm{P}\left[W = 2\right] = 0.06$$

Beispiel **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lieferzeit**

$$\mathrm{P}[W=0]=0.86$$
$$\mathrm{P}[W=1]=0.08$$
$$\mathrm{P}[W=2]=0.06$$

Kundenorientierte Servicevorgaben:

- $\mathrm{P}[W=0] \geq 90\,\%,\ \mathrm{P}[W \leq 1] \geq 95\,\%,\ \mathrm{P}[W \leq 2] = 100\,\%$

Beispiel **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lieferzeit**

$$\mathrm{P}[W=0]=0.86$$
$$\mathrm{P}[W=1]=0.08$$
$$\mathrm{P}[W=2]=0.06$$

Kundenorientierte Servicevorgaben:

- $\mathrm{P}[W=0] \geq 90\,\%$, $\mathrm{P}[W \leq 1] \geq 95\,\%$, $\mathrm{P}[W \leq 2] = 100\,\%$
- $\mathrm{P}[W=0] \geq 90\,\% = \beta$
- $\mathrm{P}[W \leq 1] \geq 95\,\%$
- $\mathrm{E}\{W\} \leq 0.5$

Beispiel Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lieferzeit

- vier Lieferanten mit unterschiedlichen Wiederbeschaffungszeiten
- $(s, q = 500)$-Lagerhaltungspolitik
- $\mu_D = 100$, $\sigma_D = 30$
- $\beta = 90\,\%$

Beispiel **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lieferzeit**

- vier Lieferanten mit unterschiedlichen Wiederbeschaffungszeiten
- $(s, q = 500)$-Lagerhaltungspolitik
- $\mu_D = 100$, $\sigma_D = 30$
- $\beta = 90\,\%$

Wiederbeschaffungszeit ℓ	Lieferzeit W 0	1	2	3	4	5	$\mathrm{E}\{W\}$	$\sqrt{\mathrm{Var}\{W\}}$
5	0.90	0.0828	0.0168	0.0004	0.0000	0.0000	0.1176	0.3739
10	0.90	0.0759	0.0216	0.0024	0.0001	0.0000	0.1267	0.4116
15	0.90	0.0708	0.0244	0.0044	0.0004	0.0000	0.1344	0.4431
30	0.90	0.0613	0.0275	0.0089	0.0020	0.0003	0.1525	0.5173

Ein abnehmender Händler bräuchte für

- $\beta = 95\,\%$ bei $\ell = 5$ ein $s = 228$, bei $\ell = 30$ ein $s = 250$
- $\beta = 99\,\%$ bei $\ell = 5$ ein $s = 312$, bei $\ell = 30$ ein $s = 383$

Kundenklassen im Bestandsmanagement

Gemeinsamer Lagerbestand

— s. o. —

Getrennter Lagerbestand

Rationierung/Trennung der Bestände nach Kundenklassen

Offerierung verschieden langer Lieferzeiten oder unterschiedlich hoher Serviceniveaus

Reservierung/Rationierung eines Teil des Lagerbestands; ab einem gewissen kritischen Bestand (critical level) werden nur noch Kunden höherer Priorität beliefert

- differenzierte Marktbearbeitung möglich
  (im Gegensatz zu einem gemeinsamen Sicherheitsbestand)
- Ausgleichseffekte bis zum kritischen Bestand möglich
  (im Gegensatz zu einem getrennten Lagerbestand)

Entscheidungen über die Höhe des Sicherheitsbestands

Überschuss des Ziellagerbestands („Vorrat“ x) über die erwartete zu deckende Nachfrage-/Bedarfsmenge $\mathrm{E}\{Y\}$ im Risikozeitraum, der zu überbrücken ist

$$\text{Sicherheitsbestand} = x - \mathrm{E}\{Y\}$$

Nachfrage-/Bedarfsmenge im Risikozeitraum

Nachfragemenge über zwei Tage hinweg als Summe von zwei täglichen Nachfragemengen D

$$Y^{(2)} = D + D \Longrightarrow \mathrm{P}\left[Y^{(2)} = y\right] = \sum_{d=\max\{0,y-d_{\mathsf{max}}\}}^{\min\{y,d_{\mathsf{max}}\}} \mathrm{P}\left[D = d\right] \cdot \mathrm{P}\left[D = y - d\right]$$

Nachfragemenge über drei Tage hinweg als Summe von drei täglichen Nachfragemengen D (mit $Y^{(2)} = D+D$ als Summe über zwei Tage hinweg)

$$Y^{(3)} = D + Y^{(2)} \Longrightarrow \mathrm{P}\left[Y^{(3)} = y\right] = \sum_{d=\max\{0,y-d_{\mathsf{max}}\}}^{\min\{y,d_{\mathsf{max}}\}} \mathrm{P}\left[D = d\right] \cdot \mathrm{P}\left[Y^{(2)} = y - d\right]$$

Nachfragemenge über n Tage hinweg als Summe von n täglichen Nachfragemengen D (mit $Y^{(n-1)} = D+\cdots+D$ als Summe über $n-1$ Tage hinweg)

$$Y^{(n)} = D + Y^{(n-1)} \Longrightarrow \mathrm{P}\left[Y^{(n)} = y\right] = \sum_{d=\max\{0,y-d_{\mathsf{max}}\}}^{\min\{y,d_{\mathsf{max}}\}} \mathrm{P}\left[D = d\right] \cdot \mathrm{P}\left[Y^{(n-1)} = y - d\right]$$

Beispiel **Länge des Risikozeitraums ($n = 3$ Tage)**

Bedarfsmenge über 3 Tage hinweg als Summe von 3 täglichen Nachfragemengen D (mit $Y^{(2)} = D + D$ als Summe über 2 Tage hinweg)

$$Y^{(3)} = D + Y^{(2)} \Longrightarrow \mathrm{P}\left[Y^{(3)} = y\right] = \sum_{d=\max\{0,y-d_{\mathsf{max}}\}}^{\min\{y,d_{\mathsf{max}}\}} \mathrm{P}\left[D = d\right] \cdot \mathrm{P}\left[Y^{(2)} = y - d\right]$$

$$Y^{(2)} = D + Y^{(1)} = D + D \Longrightarrow \mathrm{P}\left[Y^{(2)} = y\right] = \sum_{d=\max\{0,y-d_{\mathsf{max}}\}}^{\min\{y,d_{\mathsf{max}}\}} \mathrm{P}\left[D = d\right] \cdot \mathrm{P}\left[D = y - d\right]$$

- Bedarfsmenge D

d	0 ME	1 ME	2 ME
$\mathrm{P}[D = d]$	0.25	0.5	0.25

- Bedarfsmenge $Y^{(2)}$

y	0 ME	1 ME	2 ME	3 ME	4 ME
$\mathrm{P}\left[Y^{(2)} = y\right]$	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

-

y	0 ME	1 ME	2 ME	3 ME	4 ME	5 ME	6 ME
$\mathrm{P}\left[Y^{(3)} = y\right]$	0.015625	0.09375	0.234375	0.3125	0.234375	0.09375	0.015625

Erwartungswert der täglichen Nachfragemenge D

$$\mathrm{E}\{D\} = \sum_{d=0}^{d_{\text{max}}} d \cdot \mathrm{P}[D = d] =: \mu_D$$

Varianz der täglichen Nachfragemenge D

$$\mathrm{Var}\{D\} = \sum_{d=0}^{d_{\text{max}}} (d - \mu_D)^2 \cdot \mathrm{P}[D = d] =: \sigma_D^2$$

Standardabweichung der täglichen Nachfragemenge D

$$\sqrt{\mathrm{Var}\{D\}} = \sqrt{\sigma_D^2} = \sigma_D$$

Variationskoeffizient der täglichen Nachfragemenge D

$$\mathrm{CV}\{D\} = \frac{\sigma_D}{\mu_D}$$

Erwartete Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{E}\left\{Y\right\} = n \cdot \mathrm{E}\left\{D\right\} = n \cdot \mu_D =: \mu_Y$$

Varianz der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{Var}\left\{Y\right\} = n \cdot \mathrm{Var}\left\{D\right\} = n \cdot \sigma_D^2 =: \sigma_Y^2$$

Standardabweichung der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left\{Y\right\}} = \sqrt{n \cdot \mathrm{Var}\left\{D\right\}} = \sqrt{n \cdot \sigma_D^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma_D =: \sqrt{\sigma_Y^2} = \sigma_Y$$

Variationskoeffizient der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{CV}\left\{Y\right\} = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$$

Erwartete Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{E}\{Y\} = n \cdot \mathrm{E}\{D\} = n \cdot \mu_D =: \mu_Y$$

Varianz der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{Var}\{Y\} = n \cdot \mathrm{Var}\{D\} = n \cdot \sigma_D^2 =: \sigma_Y^2$$

Standardabweichung der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\{Y\}} = \sqrt{n \cdot \mathrm{Var}\{D\}} = \sqrt{n \cdot \sigma_D^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma_D =: \sqrt{\sigma_Y^2} = \sigma_Y$$

Variationskoeffizient der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{CV}\{Y\} = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$$

Beispiel **Länge des Risikozeitraums ($n = 3$ Tage)**

y	0 ME	1 ME	2 ME	3 ME	4 ME	5 ME	6 ME
$\mathrm{P}[Y = y]$	0.015625	0.09375	0.234375	0.3125	0.234375	0.09375	0.015625

Erwartete Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{E}\{Y\} = n \cdot \mathrm{E}\{D\} = n \cdot \mu_D =: \mu_Y$$

Varianz der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{Var}\{Y\} = n \cdot \mathrm{Var}\{D\} = n \cdot \sigma_D^2 =: \sigma_Y^2$$

Standardabweichung der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\{Y\}} = \sqrt{n \cdot \mathrm{Var}\{D\}} = \sqrt{n \cdot \sigma_D^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma_D =: \sqrt{\sigma_Y^2} = \sigma_Y$$

Variationskoeffizient der Nachfragemenge im Risikozeitraum von n Tagen:

$$\mathrm{CV}\{Y\} = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$$

Beispiel **Länge des Risikozeitraums ($n = 3$ Tage)**

$\mathrm{E}\{Y\} = 3 \cdot \mathrm{E}\{D\} = 3 \cdot 1 = 3, \quad \mathrm{Var}\{Y\} = 3 \cdot \mathrm{Var}\{D\} = 3 \cdot 0.5 = 1.5$

Normalverteilte Nachfragemengen — Dichtefunktion/Momente:

$$f_D(d) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)^2} \iff \mathrm{E}\{D\} =: \mu_D \iff \mathrm{Var}\{D\} =: \sigma_D^2$$

$$\mu_Y = n \cdot \mu_D \iff \sigma_Y^2 = n \cdot \sigma_D^2 \iff \sigma_Y = \sqrt{n} \cdot \sigma_D$$

Normalverteilte Nachfragemengen — Dichtefunktion/Momente:

$$f_D(d) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)^2} \iff \mathrm{E}\{D\} =: \mu_D \iff \mathrm{Var}\{D\} =: \sigma_D^2$$

$$\mu_Y = n \cdot \mu_D \iff \sigma_Y^2 = n \cdot \sigma_D^2 \iff \sigma_Y = \sqrt{n} \cdot \sigma_D$$

Es gilt die Reproduktionseigenschaft ! Ebenso für ...

Gammaverteilte Nachfragemengen — Dichtefunktion/Momente:

$$f_D(d) = \frac{\lambda^\alpha \cdot d^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\lambda \cdot d} \iff \mathrm{E}\{D\} = \frac{\alpha}{\lambda} =: \mu_D \iff \mathrm{Var}\{D\} = \frac{\alpha}{\lambda^2} =: \sigma_D^2$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\sigma_D^2}{\lambda^2} \iff \lambda = \frac{\alpha}{\mu_D} \Longrightarrow \mathrm{CV}\{D\} = \frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}}{\frac{\alpha}{\lambda}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \iff \alpha = \frac{1}{\mathrm{CV}\{D\}^2}$$

$$\alpha_Y = \frac{1}{\mathrm{CV}\{Y\}^2} = \left(\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 = \left(\frac{n \cdot \mu_D}{\sqrt{n} \cdot \sigma_D}\right)^2 = \frac{n^2 \cdot \mu_D^2}{n \cdot \sigma_D^2} = n \cdot \frac{\mu_D^2}{\sigma_D^2} = n \cdot \frac{1}{\mathrm{CV}\{D\}^2} = n \cdot \alpha$$

$$\lambda_Y = \frac{\alpha_Y}{\mu_Y} = \frac{n \cdot \alpha}{n \cdot \mu_D} = \frac{\alpha}{\mu_D} = \lambda$$

Fehlmengen

Eine Fehlmenge B tritt auf, wenn die Nachfrage-/Bedarfsmenge Y im Risikozeitraum den Vorrat x übersteigt.

$$\mathrm{P}\left[B = y - x\right] = \mathrm{P}\left[Y - x = y - x\right] = \mathrm{P}\left[Y = y\right] \qquad (y > x)$$

$$f_B(y - x) = f_{Y-x}(y - x) = f_Y(y) \qquad (y > x)$$

$$\mathrm{P}\left[B = 0\right] = \mathrm{P}\left[Y - x \leq 0\right] = \mathrm{P}\left[Y \leq x\right] \qquad (y \leq x)$$

$$\mathrm{P}\left[\text{Fehlmenge}\right] = 1 - \mathrm{P}\left[B = 0\right] = \mathrm{P}\left[Y > x\right]$$

$$1 - \mathrm{P}\left[\text{Fehlmenge}\right] = \mathrm{P}\left[B = 0\right] = \mathrm{P}\left[Y \leq x\right] = \alpha\text{-Servicegrad}$$

$$B = \max\{Y - x, 0\} =: [Y - x]^+$$

$$\mathrm{E}\left\{B\right\} = \begin{cases} \mathrm{E}\left\{[Y - x]^+\right\} = \displaystyle\int_{y=x}^{y_{\text{max}}} (y - x) \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y & (x \geq 0) \\[2ex] \mathrm{E}\left\{Y\right\} = \displaystyle\int_{y=0}^{y_{\text{max}}} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y & (x < 0) \end{cases}$$

Vielfach wird angenommen, dass Y normalverteilt sei mit den Parametern μ_Y und σ_Y — mit der Rechtfertigung, dass

- ... auch D normalverteilt ist.
- ... der Risikozeitraum so lang ist, dass — gemäß zentralem Grenzwertsatz — die Summe Y von aufeinanderfolgenden (unabhängigen) Nachfragemengen D eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

Dann gilt:

- $Z := \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ ist standardnormalverteilt mit $\mu_Z = 0$ und $\sigma_Z = 1$.
- $\mathrm{P}\left[Y \leq y\right] = F_Y(y) = F_Z\left(\dfrac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = \Phi\left(\dfrac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$
- $\mathrm{P}\left[Y > x\right] = 1 - \mathrm{P}\left[Y \leq x\right] = 1 - \Phi\left(\dfrac{x-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - \Phi(v)$ mit $v = \dfrac{x-\mu_Y}{\sigma_Y}$
- $\mathrm{E}\left\{[Y-x]^+\right\} = \mathrm{E}\left\{B_Y(x)\right\} = \displaystyle\int_x^\infty (y-x)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \sigma_Y \cdot \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\}$
- $\mathrm{E}\left\{[Z-v]^+\right\} = \mathrm{E}\left\{B_Z(v)\right\} = \displaystyle\int_v^\infty (z-v)\cdot \phi(z)\,\mathrm{d}z \approx \phi(v) - v\cdot(1-\Phi(v))$