Übung 05

Einmalige und mehrperiodige Bestandsentscheidungen

Aufgabe 1: Das Newsvendor-Problem

Ein Event-Veranstalter plant den Verkauf von T-Shirts für ein einmaliges Open-Air-Konzert. Die Nachfrage nach den T-Shirts ist unsicher und wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 800 Stück und einer Standardabweichung von 150 Stück geschätzt.

Kostendaten:

- **Einkaufspreis pro T-Shirt:** 10 GE
- **Verkaufspreis pro T-Shirt:** 25 GE
- **Rückkaufpreis (Restwert) pro nicht verkäuflichem T-Shirt:** 4 GE (Der Lieferant nimmt unverkäufliche Ware zurück)

Ihre Aufgaben:

1. **Underage- und Overage-Kosten:** Bestimmen Sie die Underage-Kosten (c_U) und die Overage-Kosten (c_O).
   - c_U: Kosten pro Einheit, die man zu wenig bestellt hat (entgangener Gewinn).
   - c_O: Kosten pro Einheit, die man zu viel bestellt hat (Verlust pro übrig gebliebenem T-Shirt).
2. **Kritisches Verhältnis:** Berechnen Sie das kritisches Verhältnis (Critical Ratio).
3. **Optimale Bestellmenge:** Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge (x_{opt}), die der Veranstalter ordern sollte, um den erwarteten Gewinn zu maximieren.
4. **Sicherheitsbestand:** Wie hoch ist der resultierende Sicherheitsbestand?

Lösung:

Tipps und wichtige Formeln

1. Underage- und Overage-Kosten

- **Underage-Kosten (c_U):** Die Kosten für jede nachgefragte Einheit, die Sie nicht bedienen können (Opportunitätskosten). `c_U = Verkaufspreis - Einkaufspreis`
- **Overage-Kosten (c_O):** Die Kosten für jede Einheit, die Sie zu viel bestellt haben und die am Ende übrig bleibt. `c_O = Einkaufspreis - Restwert`

2. Kritisches Verhältnis (Critical Ratio)

- Das kritische Verhältnis gibt das Servicelevel an, bei dem der erwartete Gewinn maximiert wird. Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nachfrage kleiner oder gleich der optimalen Bestellmenge ist.
- **Formel:** `Kritisches Verhältnis = c_U / (c_O + c_U)`

3. Optimale Bestellmenge (x_{opt})

- **Grundidee:** Bestelle so viel, dass die Wahrscheinlichkeit, die Nachfrage zu decken, genau dem kritischen Verhältnis entspricht.
- **Formel (Normalverteilung):**
  1. Finde den z-Wert, der dem kritischen Verhältnis entspricht: `z = F^-1(kritisches Verhältnis)`, wobei `F^-1` die inverse kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.
  2. Berechne die Bestellmenge: `x_opt = μ + z * σ`

4. Sicherheitsbestand

- Der Sicherheitsbestand ist die Menge, die über den Erwartungswert der Nachfrage hinaus bestellt wird, um Unsicherheit abzufedern.
- **Formel:** `Sicherheitsbestand = x_opt - μ`

```
1. Kostenberechnung:
   - Underage-Kosten (c_U): 25 - 10 = 15 GE
   - Overage-Kosten (c_O): 10 - 4 = 6 GE

2. Kritisches Verhältnis:
   - F(x_opt) = 15 / (6 + 15) = 0.7143

3. Optimale Bestellmenge:
   - z-Wert für F(x)=0.7143: 0.5659
   - x_opt = 800 + 0.5659 * 150 = 884.89
   -> Der Veranstalter sollte 885 T-Shirts bestellen.

4. Sicherheitsbestand:
   - Sicherheitsbestand = 884.89 - 800 = 84.89 Stück
```

Aufgabe 2: Newsvendor mit diskreter Nachfrage

Ein Bäcker muss morgens entscheiden, wie viele eines speziellen Kuchens er für den Tag backen soll. Die Herstellungskosten pro Kuchen betragen 5 GE, der Verkaufspreis liegt bei 12 GE. Nicht verkaufte Kuchen können am Ende des Tages nicht mehr verkauft werden und haben einen Restwert von 0 GE.

Die Nachfrage nach diesem Kuchen ist erfahrungsgemäß wie folgt verteilt:

Nachfrage (Y)	8 Kuchen	9 Kuchen	10 Kuchen	11 Kuchen	12 Kuchen
Wahrscheinlichkeit P(Y)	0.10	0.20	0.35	0.25	0.10

Ihre Aufgaben:

1. **Underage- und Overage-Kosten:** Berechnen Sie die Underage- (c_U) und Overage-Kosten (c_O).
2. **Kritisches Verhältnis:** Berechnen Sie das kritische Verhältnis.
3. **Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten:** Erstellen Sie eine Tabelle mit der kumulierten Wahrscheinlichkeit $F(x)$ für jede mögliche Bestellmenge x.
4. **Optimale Bestellmenge:** Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge x_{opt}, die der Bäcker backen sollte.

Lösung:

💡 Tipps und wichtige Formeln

Vorgehen bei diskreter Nachfrageverteilung

Das Grundprinzip des Newsvendor-Problems bleibt gleich, aber die Umsetzung ist anders als bei einer stetigen (z.B. normalen) Verteilung.

1. **Underage- und Overage-Kosten (c_U, c_O):** Die Berechnung ist identisch zum stetigen Fall.
2. **Kritisches Verhältnis:** Die Formel `c_U / (c_O + c_U)` ist ebenfalls identisch.

3. & 4. Optimale Bestellmenge x_{opt} finden

- Wir können keinen z-Wert verwenden. Stattdessen suchen wir die **kleinste Bestellmenge x**, für die die **kumulierte Wahrscheinlichkeit $F(x) = P(Y \leq x)$ größer oder gleich dem kritischen Verhältnis** ist.
- **Regel:** Finde das kleinste x, für das gilt: $F(x) \geq \frac{c_U}{c_O + c_U}$
- **Vorgehen:**
  1. Erstelle eine Tabelle mit den möglichen Nachfragewerten.
  2. Berechne für jeden Wert die Wahrscheinlichkeit $P(Y = x)$.
  3. Berechne die kumulierte Wahrscheinlichkeit $F(x)$ durch Aufsummieren der Einzelwahrscheinlichkeiten.
  4. Vergleiche jeden Wert von $F(x)$ mit dem kritischen Verhältnis und wähle die erste Bestellmenge, bei der die Bedingung erfüllt ist.

```
1. Kostenberechnung:
   - Underage-Kosten (c_U): 12 - 5 = 7 GE
   - Overage-Kosten (c_O): 5 - 0 = 5 GE

2. Kritisches Verhältnis:
   - Critical Ratio = 7 / (5 + 7) = 0.5833

3. & 4. Prüfung der optimalen Bestellmenge:
   Bestellmenge (x) | Kumulierte P(Y<=x) | Bedingung erfüllt?
   -------------------|-------------------------|--------------------
   8                  | 0.10                    | Nein
   9                  | 0.30                    | Nein
   10                 | 0.65                    | Ja  <- Optimale Menge
   11                 | 0.90                    | Nein
   12                 | 1.00                    | Nein

Die Bedingung F(x) >= 0.5833 ist erstmals für eine Menge von 10 Kuchen
erfüllt.
Antwort: Der Bäcker sollte 10 Kuchen backen.
```

Aufgabe 3: Periodische Lagerhaltungspolitik (r, S)

Ein Fachgeschäft für Wander-Ausrüstung verkauft einen speziellen Typ Wanderstiefel. Die Nachfrage ist annähernd normalverteilt. Der Bestand wird alle 4 Wochen (r=4) überprüft. Die Lieferzeit vom Hersteller beträgt konstant 2 Wochen (L=2).

Daten zur wöchentlichen Nachfrage:

- **Erwartungswert (μ_D):** 20 Paar
- **Standardabweichung (σ_D):** 8 Paar

Das Geschäft strebt einen β-Servicegrad von 98% an. Das bedeutet, dass 98% der gesamten Nachfrage direkt aus dem Lager bedient werden soll.

Ihre Aufgaben:

1. **Risikozeitraum:** Bestimmen Sie den Risikozeitraum für diese (r, S)-Politik.
2. **Nachfrageparameter:** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Nachfrage während des gesamten Risikozeitraums.
3. **Optimales Bestellniveau:** Bestimmen Sie das optimale Bestellniveau S_{opt}, analog zur Vorlesung.

Lösung:

Tipps und wichtige Formeln

1. Risikozeitraum einer (r,S)-Politik

- Bei einer periodischen Überprüfung müssen wir die Nachfrageunsicherheit über das **Überprüfungsintervall (r)** und die **Wiederbeschaffungszeit (L)** abdecken. Eine Bestellung, die heute aufgegeben wird, muss die Nachfrage decken, bis die *nächste* Bestellung eintrifft.
- **Formel:** `Risikozeitraum = r + L`

2. Nachfrageparameter im Risikozeitraum

- Wenn die wöchentliche Nachfrage unabhängig ist, können die Kennzahlen für den gesamten Risikozeitraum einfach berechnet werden:
- **Erwartungswert:** $\mu_{r+L} = (r+L) \cdot \mu_D$
- **Varianz:** $\sigma^2_{r+L} = (r+L) \cdot \sigma^2_D$
- **Standardabweichung:** $\sigma_{r+L} = \sqrt{r+L} \cdot \sigma_D$

3. Optimales Bestellniveau S_{opt}

- Das Bestellniveau S (auch "order-up-to level") ist der Zielbestand, auf den bei jeder Überprüfung aufgefüllt wird.
- **Formel:** $S_{opt} = \mu_{r+L} + SS = \mu_{r+L} + v_{opt} \cdot \sigma_{r+L}$
- Der Sicherheitsfaktor v_{opt} wird so bestimmt, dass der angestrebte β-Servicegrad erreicht wird. Dafür wird die **standardisierte Einheiten-Verlustfunktion** $G_Z^{(1)}(v)$ verwendet.
- **Zielbedingung:** Finde das kleinste v, für das gilt: $G_Z^{(1)}(v) \leq \frac{(1-\beta)\cdot \text{ erwartete Nachfrage im Intervall r}}{\sigma_{r+L}} = \frac{(1-\beta)\cdot r \cdot \mu_D}{\sigma_{r+L}}$
- Da es keine geschlossene Formel zur Umkehrung von $G_Z^{(1)}(v)$ gibt, muss der Wert für v iterativ gesucht werden.

```
1. Risikozeitraum: r + L = 4 + 2 = 6 Wochen

2. Nachfrageparameter im Risikozeitraum (6 Wochen):
   - Erwartungswert (mu_6): 6 * 20 = 120.00 Paar
   - Standardabweichung (sigma_6): sqrt(6) * 8 = 19.60 Paar

3. Optimales Bestellniveau S_opt:
   - Zielwert für G_Z(v): (1 - 0.98) * 4 * 20 / 19.60 = 0.0816
   - Gefundener optimaler standardisierter Bestellpunkt (v_opt): 1.0110
   - Optimales Bestellniveau S_opt = 120.00 + 1.0110 * 19.60 = 139.81
   -> Das Bestellniveau S sollte auf 140 Paar gesetzt werden.
   - Der darin enthaltene Sicherheitsbestand beträgt 19.81 Paar.
```

Aufgabe 4: Bestellpunkt-Politik (s, q) mit Undershoot

Ein Händler für Elektronikbauteile verwendet für ein bestimmtes Bauteil eine (s, q)-Politik. Die tägliche Nachfrage D ist normalverteilt mit $\mu_D = 100$ und $\sigma_D = 20$. Die Wiederbeschaffungszeit beträgt $L = 5$ Tage. Es wird eine feste Bestellmenge von $q = 800$ Stück verwendet.

Das Unternehmen möchte einen β-Servicegrad von 99% erreichen.

Ihre Aufgaben:

1. **Undershoot:** Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}\{U\}$ und die Varianz $\mathrm{Var}\ \{U\}$ des Undershoots. Nehmen Sie an, dass die Nachfrageverteilung normalverteilt ist.
2. **Nachfrage im Risikozeitraum:** Berechnen Sie den Erwartungswert μ_Y und die Varianz σ_Y^2 der Nachfrage im gesamten Risikozeitraum ($Y = Y^{(L)} + U$).
3. **Optimaler Bestellpunkt:** Bestimmen Sie den optimalen Bestellpunkt s_{opt}, der für den angestrebten Servicegrad nötig ist. Nehmen Sie an, dass der Fehlbestand am Anfang eines Zyklus vernachlässigbar klein ist ($G_Y^{(1)}(s + q) \approx 0$).

Lösung:

Tipps und wichtige Formeln

Das Konzept des "Undershoot"

Bei einer (s, q)-Politik wird eine Bestellung ausgelöst, sobald der verfügbare Bestand den Bestellpunkt s *erreicht oder unterschreitet*. Da die Nachfrage in diskreten Mengen auftritt, wird der Bestellpunkt oft nicht exakt getroffen, sondern "unterschossen". Dieser Betrag, um den s unterschritten wird, wird als **Undershoot (U)** oder Defizit bezeichnet. Er ist eine Zufallsgröße und muss bei der Berechnung des Sicherheitsbestandes berücksichtigt werden.

1. Berechnung des Undershoots

Für eine normalverteilte Nachfrage $D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$ können folgende Approximationen verwendet werden:

- **Erwartungswert:** $\mathrm{E}\{U\} \approx \frac{\sigma_D^2+\mu_D^2}{2\mu_D}$
- **Varianz:** $\mathrm{Var}\ \{U\} \approx \frac{\sigma_D^2}{2}\left(1 - \frac{\sigma_D^2}{2\mu_D^2}\right) + \frac{\mu_D^2}{12}$

2. Nachfrage im Risikozeitraum

- Der relevante Risikozeitraum deckt die Nachfrage während der **Wiederbeschaffungszeit ($Y^{(L)}$)** plus den **Undershoot (U)** ab.
- **Gesamtnachfrage im Risikozeitraum:** $Y = Y^{(L)} + U$
- Da $Y^{(L)}$ und U als unabhängig angenommen werden, addieren sich Erwartungswerte und Varianzen:
  - $\mu_Y = \mu_{YL} + \mathrm{E}\{U\} = (L \cdot \mu_D) + \mathrm{E}\{U\}$
  - $\sigma_Y^2 = \sigma_{YL}^2 + \mathrm{Var}\ \{U\} = (L \cdot \sigma_D^2) + \mathrm{Var}\ \{U\}$

3. Optimaler Bestellpunkt s_{opt}

- Die Logik ist analog zur (r, S)-Politik, aber die Zielgröße für die Einheiten-Verlustfunktion ist anders, da die Bestellmenge q fix ist.
- **Formel für s:** $s_{opt} = \mu_Y + v_{opt} \cdot \sigma_Y$
- **Zielbedingung für v_{opt}:** Finde das kleinste v, für das gilt: $G_Z^{(1)}(v) \le \frac{(1-\beta)\cdot q}{\sigma_Y}$
- Auch hier muss v_{opt} iterativ gesucht werden.

```
1. Undershoot (Defizit):
   - Erwartungswert E(U): 52.00
   - Varianz Var(U): 1029.33

2. Nachfrage im Risikozeitraum (Y = Y_L + U):
   - Erwartungswert mu_Y: 500.00 + 52.00 = 552.00
   - Varianz Var_Y: 2000.00 + 1029.33 = 3029.33
   - Standardabweichung sigma_Y: 55.04

3. Optimaler Bestellpunkt s_opt:
   - Zielwert für G_Z(v): (1 - 0.99) * 800 / 55.04 = 0.1454
   - Gefundener v_opt: 0.6900
   - Optimaler Bestellpunkt s_opt = 552.00 + 0.6900 * 55.04 = 589.98
```

```
    -> Der Bestellpunkt s sollte auf 590 Stück gesetzt werden.
    - Der Sicherheitsbestand beträgt 37.98 Stück.
```