

# Übung 01

## Grundlagen & Standortplanung

### Aufgabe 1 - Standortplanung ohne Kapazitätsbeschränkung

Ein Unternehmen plant die Belieferung von drei Abnehmern ( $j \in \{1, 2, 3\}$ ) von potentiellen Standorten ( $i \in \{A, B, C\}$ ) mit unbegrenzter Kapazität. Folgende Daten sind gegeben:

Transportkosten  $c_{ij}$  [€/ME] und Fixkosten  $f_i$  [€]:

| Standort $i$ | Abnehmer 1 | Abnehmer 2 | Abnehmer 3 | Fixkosten $f_i$ |
|--------------|------------|------------|------------|-----------------|
| A            | 10         | 20         | 30         | 1.000           |
| B            | 50         | 40         | 50         | 2.000           |
| C            | 80         | 30         | 40         | 2.500           |

Bedarfe:  $d_1 = 100$  ME,  $d_2 = 150$  ME,  $d_3 = 200$  ME

- Bestimmen Sie den/die kostenminimalen Standort(e) unter der Annahme, dass jeder Abnehmer vollständig vom günstigsten Standort beliefert wird.
- Wie viele Kombinationsmöglichkeiten müssten theoretisch geprüft werden, wenn Sie alle möglichen Standortkombinationen untersuchen wollten?
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus a). Warum ist diese Lösung in der Praxis möglicherweise nicht optimal?

### Caution

Lösung:

a) Bestimmung der kostenminimalen Standorte:

Schritt 1: Berechnung der Gesamtkosten für jeden einzelnen Standort (vollständige Belieferung):

- Standort A:  $K_A = f_A + c_{A1} \cdot d_1 + c_{A2} \cdot d_2 + c_{A3} \cdot d_3$   
 $K_A = 1.000 + 10 \cdot 100 + 20 \cdot 150 + 30 \cdot 200 = 1.000 + 1.000 + 3.000 + 6.000 = 11.000 \text{ €}$
- Standort B:  $K_B = 2.000 + 50 \cdot 100 + 40 \cdot 150 + 50 \cdot 200$   
 $K_B = 2.000 + 5.000 + 6.000 + 10.000 = 23.000 \text{ €}$
- Standort C:  $K_C = 2.500 + 80 \cdot 100 + 30 \cdot 150 + 40 \cdot 200$   
 $K_C = 2.500 + 8.000 + 4.500 + 8.000 = 23.000 \text{ €}$

Ergebnis: Standort A ist mit 11.000 € die kostenminimale Lösung.

b) Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten:

Bei 3 Standorten gibt es  $2^3 - 1 = 7$  nicht-leere Kombinationen:

- Einzelstandorte: {A}, {B}, {C}
- Zweierkombinationen: {A,B}, {A,C}, {B,C}
- Alle drei: {A,B,C}

c) Interpretation:

Die Lösung mit nur Standort A minimiert zwar die Kosten, birgt aber Risiken:

- Keine Redundanz: Bei Ausfall von A bricht die gesamte Versorgung zusammen
- Keine Flexibilität: Keine Reaktionsmöglichkeit auf Nachfrageschwankungen
- Transportrisiken: Alle Transporte gehen von einem Punkt aus
- In der Praxis würde man möglicherweise einen zweiten Standort als Backup in Betracht ziehen

## Aufgabe 2 - Mathematische Modellierung

Gegeben sei ein Standortplanungsproblem mit  $I$  potentiellen Standorten und  $J$  Abnehmern.

- Formulieren Sie die vollständige mathematische Modellierung des Standortplanungsproblems mit Kapazitätsbeschränkungen (Zielfunktion und alle Nebenbedingungen).
- Erläutern Sie, aus welchen zwei Teilproblemen das Standortplanungsproblem besteht.
- Formulieren Sie explizit die Zielfunktion für eine konkrete Instanz mit 3 Standorten (A, B, C) und 3 Abnehmern (1, 2, 3) mit folgenden Daten:
  - Fixkosten:  $f_A = 1.000$ ,  $f_B = 1.200$ ,  $f_C = 900$

- Transportkosten:  $c_{A1} = 1, c_{A2} = 2, c_{A3} = 3, c_{B1} = 4, c_{B2} = 5, c_{B3} = 6, c_{C1} = 7, c_{C2} = 8, c_{C3} = 9$
- d) Welche Nebenbedingung stellt sicher, dass Standorte nur genutzt werden können, wenn sie auch errichtet wurden? Formulieren Sie diese für Standort B.

#### Caution

Lösung:

a) Siehe Vorlesung:

b) Die zwei Teilprobleme:

1. Standortauswahlproblem: Welche Standorte sollen errichtet werden? (Entscheidung über  $\gamma_i$ )
2. Transportproblem: Wie sollen die Abnehmer von den gewählten Standorten beliefert werden? (Entscheidung über  $x_{ij}$ )

Diese Probleme sind gekoppelt, da die Transportentscheidung von der Standortwahl abhängt.

c) Explizite Zielfunktion:

$$Z = 1.000 \cdot \gamma_A + 1.200 \cdot \gamma_B + 900 \cdot \gamma_C + 1 \cdot x_{A1} + 2 \cdot x_{A2} + 3 \cdot x_{A3} + 4 \cdot x_{B1} + 5 \cdot x_{B2} + 6 \cdot x_{B3} + 7 \cdot x_{C1} + 8 \cdot x_{C2} + 9 \cdot x_{C3}$$

d) Kapazitätsbeschränkung für Standort B:

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq b_B \cdot \gamma_B$$

Diese Nebenbedingung stellt sicher, dass:

- Wenn  $\gamma_B = 0$  (Standort B nicht errichtet):  $x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 0$ , d.h. keine Lieferung möglich
- Wenn  $\gamma_B = 1$  (Standort B errichtet):  $x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq b_B$ , d.h. Kapazität begrenzt Lieferungen

## Aufgabe 3 - Standortplanung mit Kapazitätsbeschränkung

Betrachten Sie folgendes Standortplanungsproblem:

Daten:

| Standort $i$ | $c_{i1}$ | $c_{i2}$ | $c_{i3}$ | Fixkosten $f_i$ | Kapazität $b_i$ |
|--------------|----------|----------|----------|-----------------|-----------------|
| A            | 1        | 2        | 3        | 1.000           | 400             |
| B            | 4        | 5        | 6        | 1.200           | 400             |
| C            | 7        | 8        | 9        | 900             | 400             |

Bedarfe:  $d_1 = 200, d_2 = 300, d_3 = 250$

a) Gegeben sei folgende Lösung:  $\gamma_A = 1, \gamma_B = 1, \gamma_C = 0$

- Abnehmer 1 wird vollständig von A beliefert:  $x_{A1} = 200$
  - Abnehmer 2 wird je zur Hälfte von A und B beliefert:  $x_{A2} = 150, x_{B2} = 150$
  - Abnehmer 3 wird vollständig von B beliefert:  $x_{B3} = 250$  Berechnen Sie den Zielfunktionswert dieser Lösung.
- b) Prüfen Sie die Zulässigkeit dieser Lösung bezüglich aller Nebenbedingungen.
- c) Ist folgende alternative Belieferung zulässig: Abnehmer 2 wird vollständig von A beliefert ( $x_{A2} = 300$ )? Begründen Sie.
- d) Schlagen Sie eine verbesserte Lösung vor und begründen Sie Ihre Wahl.

### Caution

Lösung:

a) Berechnung des Zielfunktionswerts:

$$\text{Fixkosten: } f_A \cdot \gamma_A + f_B \cdot \gamma_B + f_C \cdot \gamma_C = 1.000 \cdot 1 + 1.200 \cdot 1 + 900 \cdot 0 = 2.200$$

Transportkosten:

- Von A:  $c_{A1} \cdot x_{A1} + c_{A2} \cdot x_{A2} = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 150 = 500$
- Von B:  $c_{B2} \cdot x_{B2} + c_{B3} \cdot x_{B3} = 5 \cdot 150 + 6 \cdot 250 = 2.250$

$$\text{Gesamtkosten: } Z = 2.200 + 500 + 2.250 = 4.950$$

b) Prüfung der Zulässigkeit:

Bedarfsdeckung (NB 1):

- Abnehmer 1:  $x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} = 200 + 0 + 0 = 200 = d_1 \checkmark$
- Abnehmer 2:  $x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} = 150 + 150 + 0 = 300 = d_2 \checkmark$
- Abnehmer 3:  $x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} = 0 + 250 + 0 = 250 = d_3 \checkmark$

Kapazitätsbeschränkung (NB 2):

- Standort A:  $x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} = 200 + 150 + 0 = 350 \leq 400 = b_A \cdot 1 \checkmark$
- Standort B:  $x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} = 0 + 150 + 250 = 400 \leq 400 = b_B \cdot 1 \checkmark$
- Standort C:  $x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} = 0 + 0 + 0 = 0 \leq 0 = b_C \cdot 0 \checkmark$

Ergebnis: Die Lösung ist zulässig.

c) Alternative mit vollständiger Belieferung von Abnehmer 2 durch A:

Bei  $x_{A2} = 300$  wäre die Auslastung von A:  $x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} = 200 + 300 + 0 = 500 > 400 = b_A$

Nein, diese Lösung ist nicht zulässig, da die Kapazität von Standort A überschritten wird.

d) Verbesserte Lösung:

Bei den geöffneten Standorten A und B kann die Belieferung optimiert werden:

Optimale Belieferungsstrategie:

- Abnehmer 1: vollständig von A beliefern (da  $c_{A1} = 1 < c_{B1} = 4$ )
- Abnehmer 2: möglichst viel von A beliefern (da  $c_{A2} = 2 < c_{B2} = 5$ )
- Abnehmer 3: von B beliefern

Verbesserte Lösung:  $\gamma_A = 1, \gamma_B = 1, \gamma_C = 0$

- $x_{A1} = 200$  (Abnehmer 1 vollständig von A)
- $x_{A2} = 200$  (maximale Belieferung von Abnehmer 2 durch A)
- $x_{B2} = 100$  (Restbedarf von Abnehmer 2)
- $x_{B3} = 250$  (Abnehmer 3 vollständig von B)

$$\text{Gesamtkosten: } Z = 2.200 + 600 + 2.000 = 4.800$$

Verbesserung: Die ursprüngliche Lösung kostete 4.950, die verbesserte Lösung kostet 4.800, was eine Ersparnis von 150 bedeutet.

Begründung: Durch die stärkere Nutzung des günstigeren Standorts A für Abnehmer 2 (200 statt 150 Einheiten) werden die Transportkosten reduziert, während alle Kapazitätsbeschränkungen eingehalten bleiben.

## Aufgabe 4 - Heuristiken zur Standortplanung

Ein mittelständisches Unternehmen plant die Versorgung von drei regionalen Abnehmern. Folgende Daten liegen vor:

Transportkosten  $c_{ij}$  [€/ME], Fixkosten und Kapazitäten:

| Standort $i$ | Ab-<br>nehmer 1 | Ab-<br>nehmer 2 | Ab-<br>nehmer 3 | Fixkosten $f_i$ | Kapazität $b_i$ |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| A            | 4               | 4               | 9               | 60              | 25              |
| B            | 8               | 7               | 2               | 60              | 20              |
| C            | 6               | 3               | 5               | 70              | 25              |

Bedarfe:  $d_1 = 20$ ,  $d_2 = 10$ ,  $d_3 = 10$

- Wenden Sie die Add-Heuristik an, um eine Lösung zu bestimmen. Dokumentieren Sie jeden Schritt.
- Sind heuristische Lösungen optimal? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Auf welcher Managementebene sind Standortentscheidungen angesiedelt und warum?

## Caution

Lösung:

a) Add-Heuristik:

Schritt 1: Bestimme den besten Einzelstandort für vollständige Belieferung aller Abnehmer:

- Standort A: Fixkosten 60 + Transportkosten  $(4 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 9 \cdot 10) = 60 + 210 = 270 \text{ €}$
- Standort B: Fixkosten 60 + Transportkosten  $(8 \cdot 20 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 10) = 60 + 250 = 310 \text{ €}$
- Standort C: Fixkosten 70 + Transportkosten  $(6 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 10) = 70 + 200 = 270 \text{ €}$

Start mit Standort A (270 €, willkürlich)

Schritt 2: Prüfe Vorteilhaftigkeit eines zweiten Standorts:

Zusätzlich Standort B:

- Abnehmer 3: Wechsel von A zu B  $\rightarrow$  Einsparung:  $(9 - 2) \cdot 10 = 70 \text{ €}$
- Zusätzliche Fixkosten: 60 €
- Nettovorteil:  $70 - 60 = 10 \text{ €} \checkmark$

Zusätzlich Standort C:

- Abnehmer 2: Wechsel von A zu C  $\rightarrow$  Einsparung:  $(4 - 3) \cdot 10 = 10 \text{ €}$
- Abnehmer 3: Wechsel von A zu C  $\rightarrow$  Einsparung:  $(9 - 5) \cdot 10 = 40 \text{ €}$
- Zusätzliche Fixkosten: 70 €
- Nettovorteil:  $50 - 70 = -20 \text{ €} \times$

Wähle Standort B zusätzlich

Schritt 3: Prüfe dritten Standort C (mit A und B bereits gewählt):

- Abnehmer 2: Wechsel von A zu C  $\rightarrow$  Einsparung:  $(4 - 3) \cdot 10 = 10 \text{ €}$
- Zusätzliche Fixkosten: 70 €
- Nettovorteil:  $10 - 70 = -60 \text{ €} \times$

Ergebnis Add-Heuristik:

- Standorte: A und B
- Zuordnung: Abnehmer 1 und 2 von A, Abnehmer 3 von B
- Kosten:  $60 + 60 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 120 + 80 + 40 + 20 = 260 \text{ €}$

b) Optimalität:

Heuristische Lösungen sind nicht notwendigerweise optimal, da:

- Sie nur lokale Verbesserungen betrachten
- Nicht alle Kombinationen systematisch geprüft werden

~~Die tatsächlich optimale Lösung müsste durch vollständige Enumeration oder Optimalitätskriterien ermittelt werden. Standortentscheidungen sind auf der strategischen Managementebene angesiedelt, da sie:~~

c) Managementebene:

- Langfristige Auswirkungen haben (mehrere Jahre bis Jahrzehnte)