

# Übung 04

## Operative Produktionsplanung

### Aufgabe 1 - Aggregierte Produktionsplanung

Ein Unternehmen produziert zwei Produkte (P1, P2) für die folgenden Nachfragermengen in den nächsten vier Perioden ermittelt wurden:

$d_{k,t}$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
P1	20	50	30	20
P2	50	20	60	30

Weitere Daten:

- Kapazitätsbedarf P1: 1 Maschinenstunde, 1,5 Personenstunden pro Einheit
  - Kapazitätsbedarf P2: 2 Maschinenstunden, 0,5 Personenstunden pro Einheit
  - Verfügbare Kapazität pro Periode: 150 Maschinenstunden, 70 Personenstunden
  - Maximale Überstunden: 50 pro Periode
  - Lagerkostensatz: 1 GE/(Einheit·Periode) für beide Produkte
  - Überstundenkostensatz: 2 GE/Stunde (alle Perioden)
  - Anfangslagerbestände:  $y_{1,0} = y_{2,0} = 0$
- a) Formulieren Sie das vollständige mathematische Modell zur Beschäftigungsglättung.
  - b) Berechnen Sie für jede Periode den gesamten Kapazitätsbedarf bei vollständiger Bedarfsdeckung ohne Lagerhaltung.
  - c) Bestimmen Sie, in welchen Perioden Überstunden erforderlich sind und wie viele.
  - d) Wie könnte das Modell erweitert werden, um Mindestproduktionsmengen zu berücksichtigen?

### ⚠ Caution

Lösung:

a) Vollständiges mathematisches Modell:

Siehe Foliensatz.

b) Kapazitätsbedarf bei vollständiger Bedarfsdeckung:

Periode $t$	$d_{1t}$	$d_{2t}$	Maschinen-bedarf	Personal-bedarf
1	20	50	$1 \cdot 20 + 2 \cdot 50 = 120$	$1,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 50 = 55$
2	50	20	$1 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 90$	$1,5 \cdot 50 + 0,5 \cdot 20 = 85$
3	30	60	$1 \cdot 30 + 2 \cdot 60 = 150$	$1,5 \cdot 30 + 0,5 \cdot 60 = 75$
4	20	30	$1 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 80$	$1,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 30 = 45$

c) Überstunden-Analyse:

Verfügbare Personenstunden: 70 pro Periode Überstunden erforderlich in:

- Periode 2:  $85 - 70 = 15$  Überstunden
- Periode 3:  $75 - 70 = 5$  Überstunden

Beide liegen unter der Maximalgrenze von 50 Überstunden.

d) Berücksichtigung von Mindestproduktionsmengen:

$$x_{kt} \geq \underline{x}_{kt}$$

## Aufgabe 2 - Losgrößenplanung mit verschiedenen Verfahren

Für ein Endprodukt liegen folgende periodenbezogene Bedarfsprognosen vor:  $d_1 = 30, d_2 = 90, d_3 = 20, d_4 = 0, d_5 = 50$ .

Gegeben: Lagerkostensatz  $h = 2 \text{ €/(Einheit · Periode)}$ , Rüstkostensatz  $s = 250 \text{ €/Rüstvorgang}$

- Formulieren Sie das vollständige SIULSP-Modell für dieses Problem.
- Welchen Wert muss "Big-M" mindestens annehmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie eine Lösung mit dem Silver-Meal-Verfahren.
- Bestimmen Sie eine Lösung mit dem Groff-Verfahren.
- Bestimmen Sie die optimale Lösung mit dem Wagner-Whitin-Verfahren (Kürzeste-Wege-Interpretation).
- Vergleichen Sie die Lösungsqualität der drei Verfahren und bewerten Sie deren praktische Anwendbarkeit.

## Caution

## Lösung:

a) SIULSP-Modell für das gegebene Problem:

Siehe Foliensatz.

b) Bestimmung von Big-M:

Die maximale Losgröße ist die Summe aller verbleibenden Bedarfe:

$$M \geq \max\{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5, d_2 + d_3 + d_4 + d_5, \dots, d_5\}$$

$$M \geq \max\{190, 160, 70, 50, 50\} = 190$$

Antwort:  $M \geq 190$

c) Silver-Meal-Verfahren:

Das Verfahren minimiert die durchschnittlichen Kosten pro Periode für jedes Los.

Kostenkriterium:  $c_{\tau,t} = \frac{s+h \cdot \sum_{j=\tau}^t (j-\tau) \cdot d_j}{t-\tau+1}$

### Iteration 1 (Start $\tau = 1$ ):

- $c_{1,1} = \frac{250+2 \cdot 0 \cdot 30}{1} = 250$
  - $c_{1,2} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30 + 1 \cdot 90)}{2} = \frac{430}{2} = 215 \text{ (besser)}$
  - $c_{1,3} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 20)}{3} = \frac{510}{3} = 170 \text{ (besser)}$
  - $c_{1,4} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 0)}{4} = \frac{510}{4} = 127,5 \text{ (besser)}$
  - $c_{1,5} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 50)}{5} = \frac{910}{5} = 182 \text{ (schlechter)}$

### Los 1: Perioden 1-4, $q_1 = 140$

Iteration 2 (Start  $\tau = 5$ ): -  $c_{5,5} = \frac{250+2 \cdot 0.50}{1} = 250$

## Los 2: Periode 5, $q_5 = 50$

## Silver-Meal-Lösung:

- $q_1 = 140, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0, q_5 = 50$
  - Lagerbestände:  $y_1 = 110, y_2 = 20, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0$
  - Gesamtkosten:  $2 \cdot 250 + 2 \cdot (110 + 20) = 760 \text{ €}$

d) Groff-Verfahren:

Das Verfahren verwendet das Kriterium:  $d_j \cdot j \cdot (j + 1) \leq 2s/h = 250$

### Iteration 1 ( $\tau = 1$ ):

- $j = 0: 30 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \leq 250$
  - $j = 1: 90 \cdot 1 \cdot 2 = 180 \leq 250$
  - $j = 2: 20 \cdot 2 \cdot 3 = 120 \leq 250$
  - $j = 3: 0 \cdot 3 \cdot 4 = 0 \leq 250$
  - $j = 4: 50 \cdot 4 \cdot 5 = 1000 > 250$

Perioden 3 und 4: Produktionsplan 9, Gesamtkosten 760 €, Rechenaufwand  
 Berechnung mit gleichen Kosten. Dies ist ein Zufall und tritt in der Praxis nicht  
 regelmäßig auf.  $q_1 = 140, q_5 = 50 \rightarrow 760$  €, Mittel  $\frac{140 + 50}{2} = 250 + 660 = 910$  €  
 •  $10 \cdot 0.30 + 1 = 0 \leq 250$   
 • Gesamtkosten  $760 \text{ €} (0.30) = 0 + 250 + 0 = 250$

## Aufgabe 3 - Kapazitätsbeschränkte Losgrößenplanung

Erweitern Sie das SIULSP-Modell aus Aufgabe 2 um folgende Kapazitätsbeschränkungen:

- Verfügbare Produktionskapazität: 80 Einheiten pro Periode
  - Rüstzeit: 10 Stunden pro Rüstvorgang
  - Verfügbare Rüstkapazität: 15 Stunden pro Periode
  - Produktionszeit: 0,5 Stunden pro Einheit
- a) Formulieren Sie die zusätzlichen Nebenbedingungen für das kapazitätsbeschränkte Problem.
  - b) Analysieren Sie, ob die Lösung aus Aufgabe 2 e) noch zulässig ist.
  - c) Welche Auswirkungen könnten Kapazitätsbeschränkungen auf die Anwendbarkeit der heuristischen Verfahren haben?

### Caution

Lösung:

a) Zusätzliche Nebenbedingungen:

Produktionskapazitätsbeschränkung:

$$q_t \leq 80 \quad \text{für alle } t = 1, 2, 3, 4, 5$$

Rüstkapazitätsbeschränkung:

$$10 \cdot \gamma_t + 0,5 \cdot q_t \leq 15 \quad \text{für alle } t = 1, 2, 3, 4, 5$$

b) Zulässigkeitsprüfung der Lösung aus 2 e):

Optimale Lösung:  $q_1 = 140, q_5 = 50$

Periode 1:

- Produktionskapazität:  $140 > 80 \rightarrow$  Verletzt!
- Rüstkapazität:  $10 \cdot 1 + 0,5 \cdot 140 = 80 > 15 \rightarrow$  Verletzt!

Periode 5:

- Produktionskapazität:  $50 \leq 80 \checkmark$
- Rüstkapazität:  $10 \cdot 1 + 0,5 \cdot 50 = 35 > 15 \rightarrow$  Verletzt!

Antwort: Die Lösung ist nicht zulässig.

c) Auswirkungen auf heuristische Verfahren:

Silver-Meal und Groff-Verfahren:

- Müssen modifiziert werden, um Kapazitätsbeschränkungen zu berücksichtigen
- Los-Bildung muss gestoppt werden, wenn Kapazitätsgrenzen erreicht sind
- Lösungsqualität kann deutlich schlechter werden

Praktische Konsequenz:

Kapazitätsbeschränkte Losgrößenprobleme erfordern weiter angepasste Algorithmen oder die Verwendung von Mixed-Integer-Programming-Solvern.