

Übung 04

Operative Produktionsplanung

Aufgabe 1 - Aggregierte Produktionsplanung

Ein Unternehmen produziert zwei Produkte (P1, P2) für die folgenden Nachfragermengen in den nächsten vier Perioden ermittelt wurden:

| $d_{k,t}$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| P1 | 20 | 50 | 30 | 20 |
| P2 | 50 | 20 | 60 | 30 |

Weitere Daten:

- Kapazitätsbedarf P1: 1 Maschinenstunde, 1,5 Personenstunden pro Einheit
 - Kapazitätsbedarf P2: 2 Maschinenstunden, 0,5 Personenstunden pro Einheit
 - Verfügbare Kapazität pro Periode: 150 Maschinenstunden, 70 Personenstunden
 - Maximale Überstunden: 50 pro Periode
 - Lagerkostensatz: 1 GE/(Einheit·Periode) für beide Produkte
 - Überstundenkostensatz: 2 GE/Stunde (alle Perioden)
 - Anfangslagerbestände: $y_{1,0} = y_{2,0} = 0$
- a) Formulieren Sie das vollständige mathematische Modell zur Beschäftigungsglättung.
 - b) Berechnen Sie für jede Periode den gesamten Kapazitätsbedarf bei vollständiger Bedarfsdeckung ohne Lagerhaltung.
 - c) Bestimmen Sie, in welchen Perioden Überstunden erforderlich sind und wie viele.
 - d) Wie könnte das Modell erweitert werden, um Mindestproduktionsmengen zu berücksichtigen?

⚠ Caution

Lösung:

a) Vollständiges mathematisches Modell:

Siehe Foliensatz.

b) Kapazitätsbedarf bei vollständiger Bedarfsdeckung:

| Periode t | d_{1t} | d_{2t} | Maschinen-bedarf | Personal-bedarf |
|-------------|----------|----------|---------------------------------|------------------------------------|
| 1 | 20 | 50 | $1 \cdot 20 + 2 \cdot 50 = 120$ | $1,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 50 = 55$ |
| 2 | 50 | 20 | $1 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 90$ | $1,5 \cdot 50 + 0,5 \cdot 20 = 85$ |
| 3 | 30 | 60 | $1 \cdot 30 + 2 \cdot 60 = 150$ | $1,5 \cdot 30 + 0,5 \cdot 60 = 75$ |
| 4 | 20 | 30 | $1 \cdot 20 + 2 \cdot 30 = 80$ | $1,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 30 = 45$ |

c) Überstunden-Analyse:

Verfügbare Personenstunden: 70 pro Periode Überstunden erforderlich in:

- Periode 2: $85 - 70 = 15$ Überstunden
- Periode 3: $75 - 70 = 5$ Überstunden

Beide liegen unter der Maximalgrenze von 50 Überstunden.

d) Berücksichtigung von Mindestproduktionsmengen:

$$x_{kt} \geq \underline{x}_{kt}$$

Aufgabe 2 - Losgrößenplanung mit verschiedenen Verfahren

Für ein Endprodukt liegen folgende periodenbezogene Bedarfsprognosen vor: $d_1 = 30, d_2 = 90, d_3 = 20, d_4 = 0, d_5 = 50$.

Gegeben: Lagerkostensatz $h = 2 \text{ €/(Einheit · Periode)}$, Rüstkostensatz $s = 250 \text{ €/Rüstvorgang}$

- Formulieren Sie das vollständige SIULSP-Modell für dieses Problem.
- Welchen Wert muss "Big-M" mindestens annehmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie eine Lösung mit dem Silver-Meal-Verfahren.
- Bestimmen Sie eine Lösung mit dem Groff-Verfahren.
- Bestimmen Sie die optimale Lösung mit dem Wagner-Whitin-Verfahren (Kürzeste-Wege-Interpretation).
- Vergleichen Sie die Lösungsqualität der drei Verfahren und bewerten Sie deren praktische Anwendbarkeit.

⚠ Caution

Lösung:

a) SIULSP-Modell für das gegebene Problem:

Siehe Foliensatz.

b) Bestimmung von Big-M:

Die maximale Losgröße ist die Summe aller verbleibenden Bedarfe:

$$M \geq \max\{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5, d_2 + d_3 + d_4 + d_5, \dots, d_5\}$$

$$M \geq \max\{190, 160, 70, 50, 50\} = 190$$

Antwort: $M \geq 190$

c) Silver-Meal-Verfahren:

Das Verfahren minimiert die durchschnittlichen Kosten pro Periode für jedes Los.

Kostenkriterium: $c_{\tau,t} = \frac{s+h \cdot \sum_{j=\tau}^t (j-\tau) \cdot d_j}{t-\tau+1}$

Iteration 1 (Start $\tau = 1$):

- $c_{1,1} = \frac{250+2 \cdot 0 \cdot 30}{1} = 250$
- $c_{1,2} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30+1 \cdot 90)}{2} = \frac{430}{2} = 215$ (besser)
- $c_{1,3} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30+1 \cdot 90+2 \cdot 20)}{3} = \frac{510}{3} = 170$ (besser)
- $c_{1,4} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30+1 \cdot 90+2 \cdot 20+3 \cdot 0)}{4} = \frac{510}{4} = 127,5$ (besser)
- $c_{1,5} = \frac{250+2 \cdot (0 \cdot 30+1 \cdot 90+2 \cdot 20+3 \cdot 0+4 \cdot 50)}{5} = \frac{910}{5} = 182$ (schlechter)

Los 1: Perioden 1-4, $q_1 = 140$

Iteration 2 (Start $\tau = 5$): - $c_{5,5} = \frac{250+2 \cdot 0 \cdot 50}{1} = 250$

Los 2: Periode 5, $q_5 = 50$

Silver-Meal-Lösung:

- $q_1 = 140, q_2 = 0, q_3 = 0, q_4 = 0, q_5 = 50$
- Lagerbestände: $y_1 = 110, y_2 = 20, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0$
- Gesamtkosten: $2 \cdot 250 + 2 \cdot (110 + 20) = 760 \text{ €}$

d) Groff-Verfahren:

Das Verfahren verwendet das Kriterium: $d_j \cdot j \cdot (j+1) \leq 2s/h = 250$

Iteration 1 ($\tau = 1$):

- $j = 0: 30 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \leq 250$
- $j = 1: 90 \cdot 1 \cdot 2 = 180 \leq 250$
- $j = 2: 20 \cdot 2 \cdot 3 = 120 \leq 250$
- $j = 3: 0 \cdot 3 \cdot 4 = 0 \leq 250$
- $j = 4: 50 \cdot 4 \cdot 5 = 1000 > 250$

Verfahren "Groff" ist ein Verfahren, das den optimalen Losgrößenplan bestimmt. Es basiert auf dem Prinzip der Minimierung der Durchschnittskosten pro Periode. Das Verfahren ist ein Sonderfall des Silver-Meal-Verfahrens mit gleichem Kriterium. Dies ist ein Zufall und tritt in der Praxis nicht auf. Die Lösung ist $q_1 = 140, q_5 = 50 \text{ €}$. Der Mittelwert $(250+660)/2 = 455 \text{ €}$ ist höher als die tatsächlichen Kosten von 760 € .

- Gesamtkosten: $760 \text{ €} (0 \cdot 30) = 0 + 250 + 0 = 250$

Aufgabe 3 - Kapazitätsbeschränkte Losgrößenplanung

Erweitern Sie das SIULSP-Modell aus Aufgabe 2 um folgende Kapazitätsbeschränkungen:

- Verfügbare Produktionskapazität: 80 Einheiten pro Periode
 - Rüstzeit: 10 Stunden pro Rüstvorgang
 - Verfügbare Rüstkapazität: 15 Stunden pro Periode
 - Produktionszeit: 0,5 Stunden pro Einheit
- a) Formulieren Sie die zusätzlichen Nebenbedingungen für das kapazitätsbeschränkte Problem.
 - b) Analysieren Sie, ob die Lösung aus Aufgabe 2 e) noch zulässig ist.
 - c) Welche Auswirkungen könnten Kapazitätsbeschränkungen auf die Anwendbarkeit der heuristischen Verfahren haben?

Caution

Lösung:

a) Zusätzliche Nebenbedingungen:

Produktionskapazitätsbeschränkung:

$$q_t \leq 80 \quad \text{für alle } t = 1, 2, 3, 4, 5$$

Rüstkapazitätsbeschränkung:

$$10 \cdot \gamma_t + 0,5 \cdot q_t \leq 15 \quad \text{für alle } t = 1, 2, 3, 4, 5$$

b) Zulässigkeitsprüfung der Lösung aus 2 e):

Optimale Lösung: $q_1 = 140, q_5 = 50$

Periode 1:

- Produktionskapazität: $140 > 80 \rightarrow$ Verletzt!
- Rüstkapazität: $10 \cdot 1 + 0,5 \cdot 140 = 80 > 15 \rightarrow$ Verletzt!

Periode 5:

- Produktionskapazität: $50 \leq 80 \checkmark$
- Rüstkapazität: $10 \cdot 1 + 0,5 \cdot 50 = 35 > 15 \rightarrow$ Verletzt!

Antwort: Die Lösung ist nicht zulässig.

c) Auswirkungen auf heuristische Verfahren:

Silver-Meal und Groff-Verfahren:

- Müssen modifiziert werden, um Kapazitätsbeschränkungen zu berücksichtigen
- Los-Bildung muss gestoppt werden, wenn Kapazitätsgrenzen erreicht sind
- Lösungsqualität kann deutlich schlechter werden

Praktische Konsequenz:

Kapazitätsbeschränkte Losgrößenprobleme erfordern weiter angepasste Algorithmen oder die Verwendung von Mixed-Integer-Programming-Solvern.