5. kontrolna naloga
2. A, 21. 5. 2024

$p = -\frac{b}{2a}$

$q = -\frac{D}{4a}$

Ime in priimek: MITJA ŠEVERKAR

dosežene točke	možne točke	odstotki	ocena
33	36	92	5

1. Dani sta kompleksni števili $z_1 = i^{58723} - \frac{i}{2-i}$ in $z_2 = (2-2i)^6 \cdot (1+i)$.

   a) Izračunaj $|z_1|$. [5t] 5

$$z_1 = i^3 - \frac{i}{2+i} = -i - \frac{i(2-i)}{4+1} = -i - \frac{2i+1}{5} =$$

$$= \frac{-5i-2i-1}{5} = -\frac{7}{5}i - \frac{1}{5}$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{25} + \frac{1}{25}} = \cancel{\sqrt{\frac{26}{9}}}$$

$$= \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$$

   b) Določi vrednost realnega števila a, da bo $z_2 + 4a$ čisto imaginarno število. [5t] 5

$$\frac{64 \cdot 8}{512}$$

$$512 : 4 = 128$$
11
32

$$z_2 + 4a = bi \qquad b \in \mathbb{R}$$

$$(2-2i)^6 \cdot (1+i) = -4a + bi$$

$$2^6(1-i)^6 \cdot (1+i) = -4a + bi$$

$$64(1-2i-1)^3 \cdot (1+i) = -4a + bi$$

$$64(-2i)^3 \cdot (1+i) = -4a + bi$$

$$64 \cdot (-8) \cdot (-i) \cdot (1+i) = -4a + bi$$

$$512i \cdot (1+i) = -4a + bi$$

$$512i - 512 = -4a + bi$$

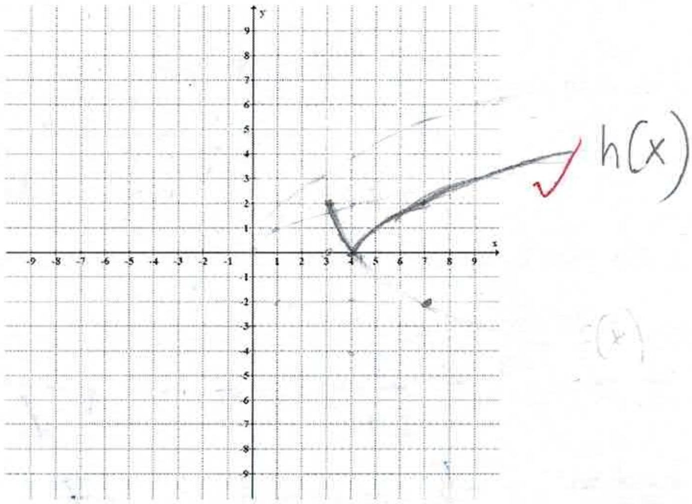
$$-512 + 512i = -4a + bi$$

$$-512 = -4a \qquad a = 128$$

$g(x) = \sqrt{x}$

2. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = -2\sqrt{x-3} + 2$.

   a) Nariši graf funkcije $h(x) = |f(x)|$. [4t] 4



   b) Graf funkcije g dobimo tako, da graf funkcije f najprej prezrcalimo čez ordinatno os, nato premaknemo za dve enoti v levo in na koncu raztegnemo v smeri ordinatne osi s koeficientom raztega $k = 3$. Zapiši predpis funkcije g. [3t] 1

$g_1(x) = f(-x)$

$g_2(x) = g_1(x + \cancel{3})$ 2

$g_3(x) = 3g_2(x)$

$g(x) = 3g_1(x+3) = 3f(-x-3) =$

$= 3\left(-2\sqrt{-x-3-3} + 2\right) =$

$= 3\left(-2\sqrt{-x-6} + 2\right) =$

$= -6\sqrt{-x-\cancel{6}} + 6$

3. a) V splošni obliki zapiši enačbo kvadratne funkcije, ki ima ničli $x_1 = -2$ in $x_2 = 1$ ter teme v točki $T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$. [4t] 4

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = a\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{2} =$

$= ax^2 + ax + \left(\frac{1}{4}a - \frac{9}{2}\right)$

$-1 = -1$

$y = ax^2 + ax + \left(\frac{1}{4}a - \frac{9}{2}\right)$

$0 = a(-2)^2 + a(-2) + \left(\frac{1}{4}a - \frac{9}{2}\right)$

$0 = 4a - 2a + \frac{1}{4}a - \frac{9}{2}$

$\frac{9}{2} = 2a + \frac{1}{4}a \qquad \frac{9}{2} = \frac{9}{4}a \qquad a = 2$

$a \neq 0$

$2x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) =$

$= 2x^2 + 2x - \frac{8}{2} =$

$f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

b) Za katere vrednosti x parabola z enačbo $y = 2x^2 + 2x - 4$ leži pod premico z enačbo $y = 1 - 2x$? [5t] 4

$x \in \left(-1 - \frac{3\sqrt{6}}{4}, -1 + \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)$

$1 - 2x > 2x^2 + 2x - 4$

$0 > 2x^2 + 4x - 5$ ✓

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+40}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{56}}{4}$ ✓ $= -1 \pm \frac{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 9}}{4} =$

$= -1 \pm \frac{3\sqrt{6}}{4}$

56

4. Dana je družina kvadratnih funkcij $f(x) = (m-1)x^2 + (2m-4)x - m$, $m \in \mathbb{R}$ in $m \neq 1$.

a) Izračunaj realno vrednost m, da bo imela funkcija iz te družine ekstremno vrednost pri $x = 1$. [3t] 3

$D = (2m-4)^2 - 4(m-1)\cdot(-m) = 4m^2 - 16m + 16 + 4m^2$

$x = \frac{-(2m-4) \pm \sqrt{D}}{2(m-1)}$

$1 = \frac{-(2m-4)}{2(m-1)}$ $\quad 1 = \frac{-2(m-2)}{2(m-1)}$ $\quad m - 1 = -m + 2$

$2m = 3$ $\quad m = \frac{3}{2}$ ✓

b) Izračunaj realno vrednost m, da bo med ničlama funkcije x_1 in x_2 veljala zveza $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}$. [5t] 5

$\frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{2}{3}$

$\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{2}{3}$ ✓

$\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{2}{3}$

$-\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$

$-\frac{(2m-4)}{-m} = \frac{2}{3}$

$3(2m-4) = 2m$

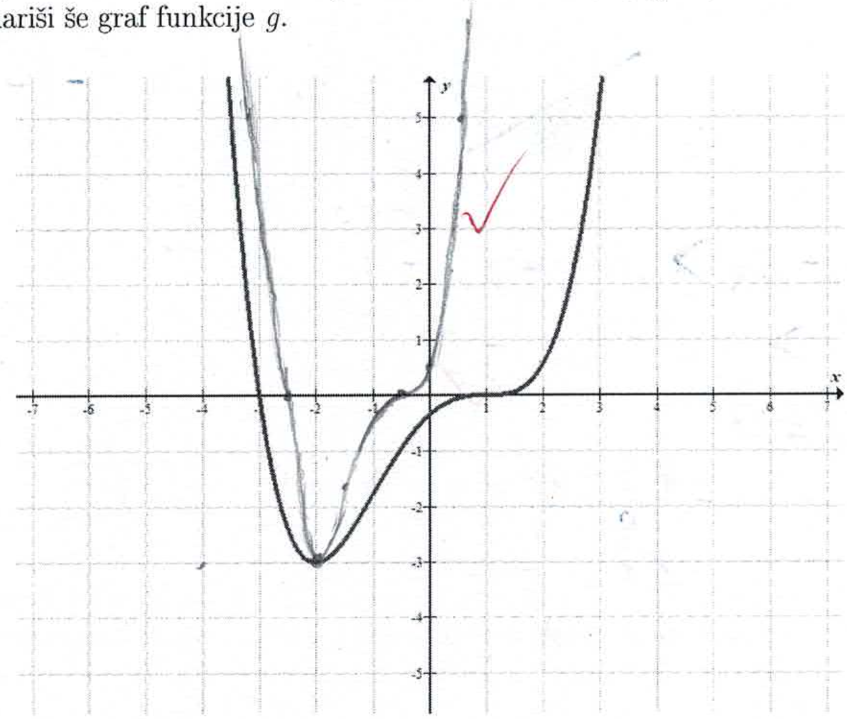
$6m - 12 = 2m$

$4m = 12$

$m = 3$ ✓

$g(x) \quad g\left(\frac{1}{2}(x-2)\right)$

5. V spodnjem koordinatnem sistemu je narisan graf funkcije $g(\frac{x}{2}-1)$. V isti koordinatni sistem nariši še graf funkcije g. [2t] 2



DODATNA NALOGA:

Dana je družina parabol $y = x^2 + (n+2)x - n + 3$, $n \in \mathbb{R}$. Določi enačbo krivulje, na kateri ležijo temena parabol te družine. [3t] 0

$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{n+2}{2}$

$x = \frac{-n-2 \pm \sqrt{(n+2)^2 - 4(n+3)}}{2} = \frac{-n-2 \pm \sqrt{n^2+4n+4-4n-12}}{2}$

$= \frac{-n-2 \pm \sqrt{n^2-8}}{2}$

$\cancel{y = \frac{-x-2}{2}}$