Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Хрусталев Влад Николаевич

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Построить модель гармонического осцилятора.

2 Задание

Вариант 12

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 4x = 0,$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0,$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 4x = 5sin(2t),$$

На интервале $t \in [0; 55]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 0,\ y_0 = -2$.

3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени t от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); A — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность A совпадает с размерностью x; ω (радиан/с, градус/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 с;

$(\omega t + \varphi_0) = \varphi$ (радиан, градус) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);

φ_0 (радиан, градус) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины x) в момент времени $t = 0$. Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

[1].

4 Выполнение лабораторной работы

Мой вариант - это (1132222011 % 70) + 1 = 12

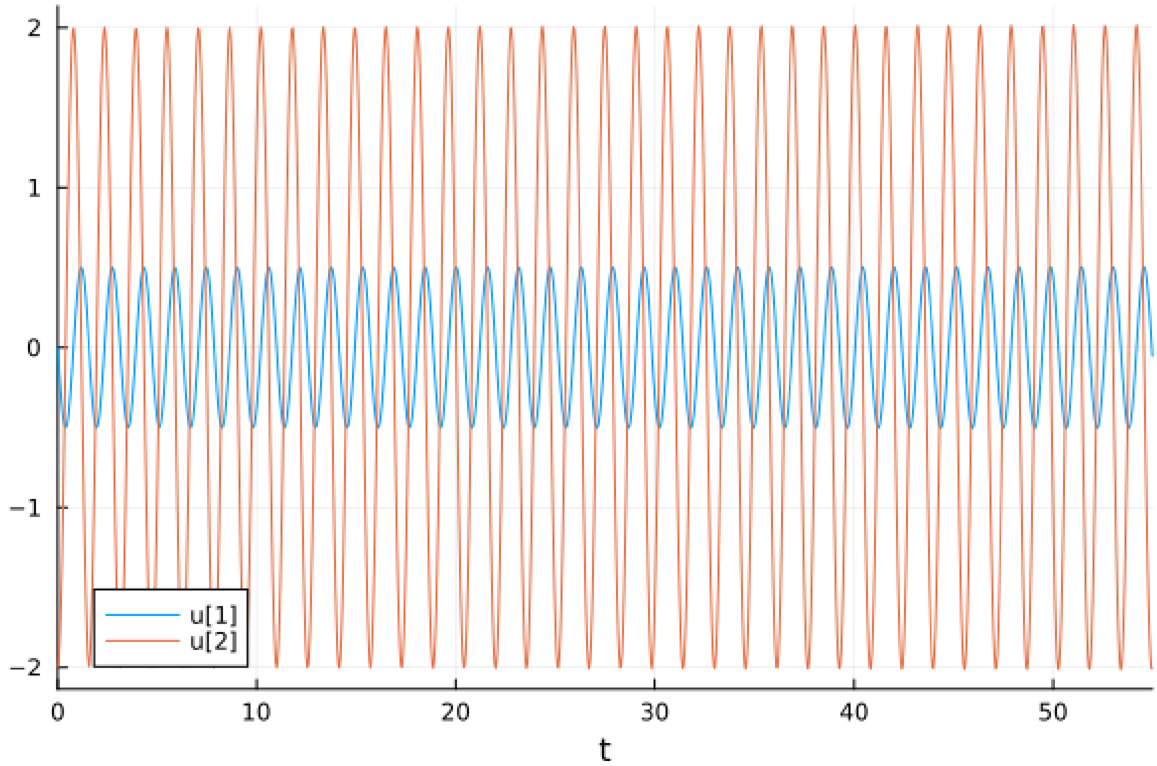
4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действия внешней силы

Для начала реализуем данную модель на языке Julia.

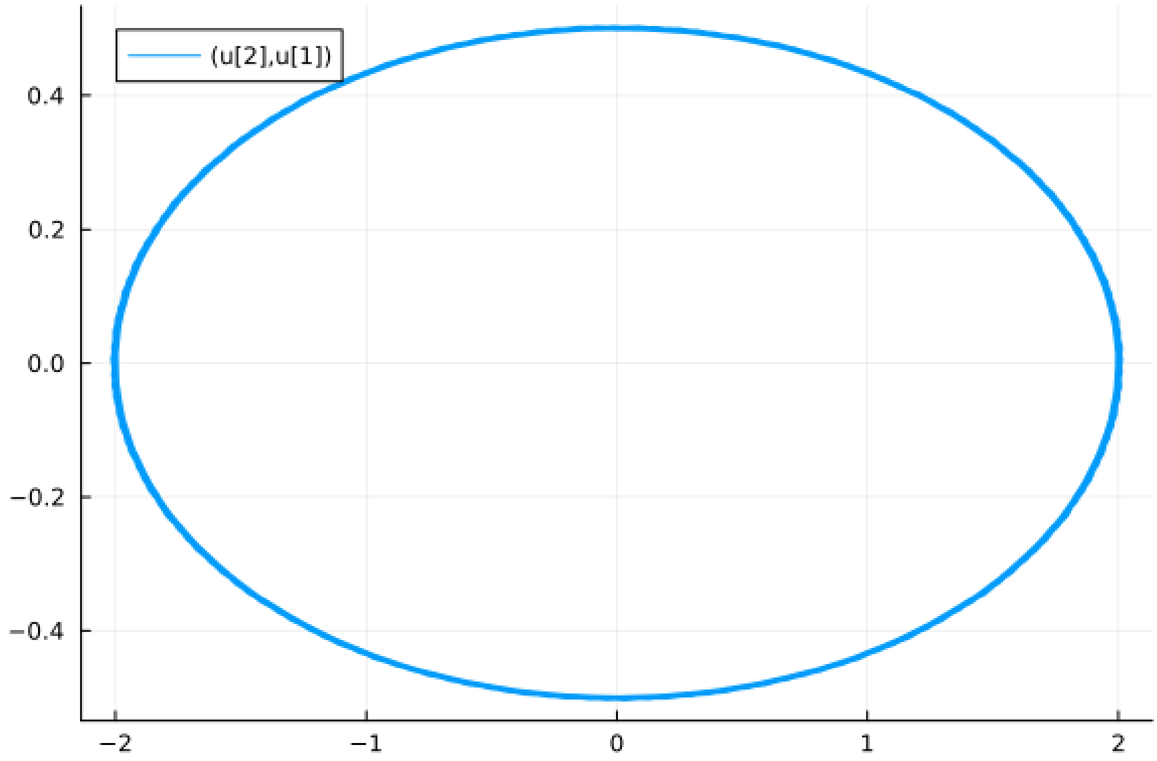
```
using DifferentialEquations, Plots; gr()

tspan = (0,55)
u0 = [0, -2]
p1 = [0, 4]
step = 0.05

function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end
```

```
problem1 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
sol1 = solve(problem1, Tsit5(), saveat = step)

plot(sol1)
savefig("lab4_1_sol.png")

plot(sol1, vars=(2,1))
savefig("lab4_1_ph.png")
```

В результате выполнения программы мы получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. **??**) и его фазового портрета (рис. **??**).



{#fig:001, width=70%}



{#fig:002, width=70%}

Как мы видим, колебания осциллятора переодичное и график не затухает.

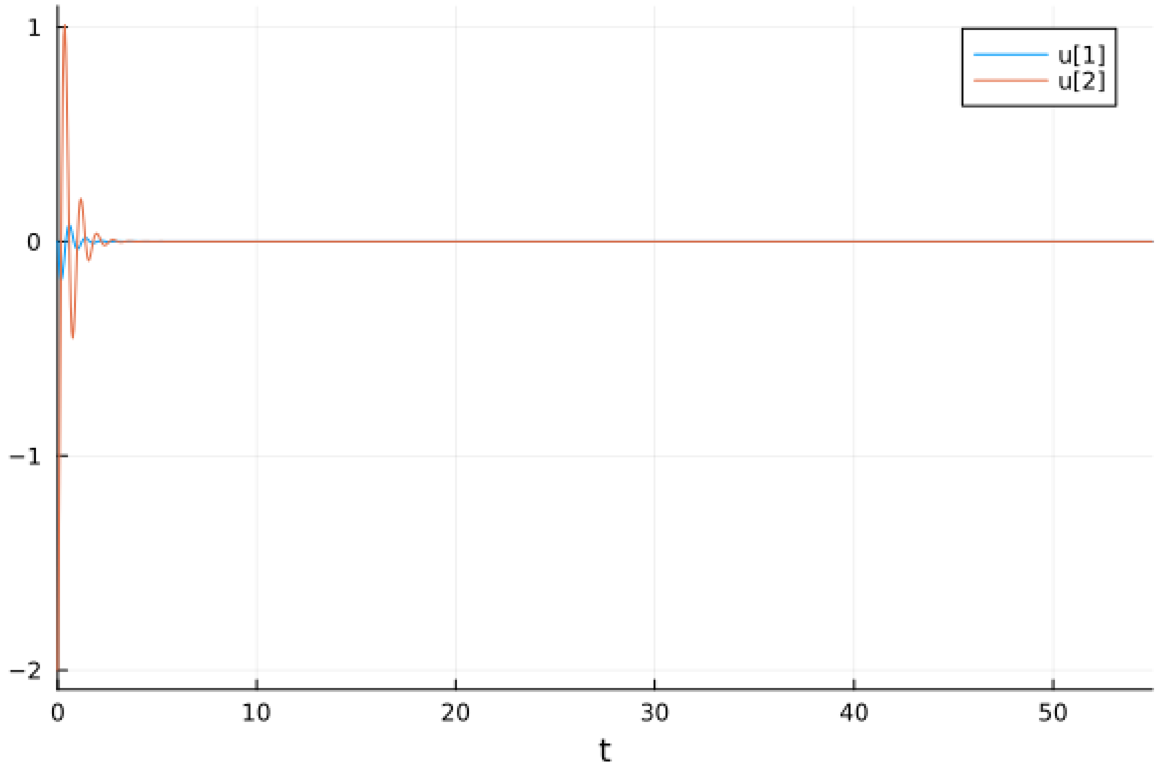
4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действия внешней силы

Реализуем данную модель на языке Julia.

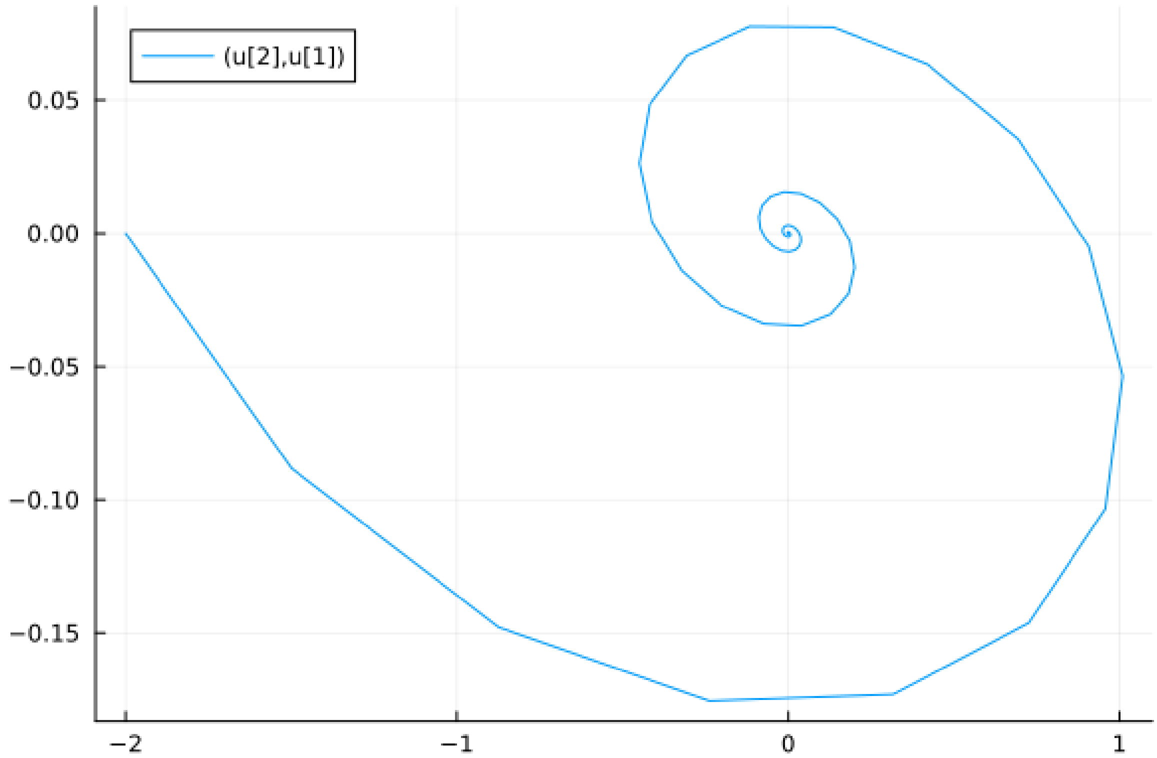
```
using DifferentialEquations, Plots; gr()


tspan = (0,55)
u0 = [0, -2]
p1 = [4, 8]
step = 0.05
```

```julia
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end

problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
sol2 = solve(problem2, Tsit5(), saveat = step)

plot(sol2)
savefig("lab4_2_sol.png")

plot(sol2, vars=(2,1))
savefig("lab4_2_ph.png")
```

В результате выполнения программы мы получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. **??**) и его фазового портрета (рис. **??**).



{#fig:003, width=70%}



{#fig:004,

width=70%}

В этом случае видно как происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, так как есть параметр, который отвечает за потери энергии.

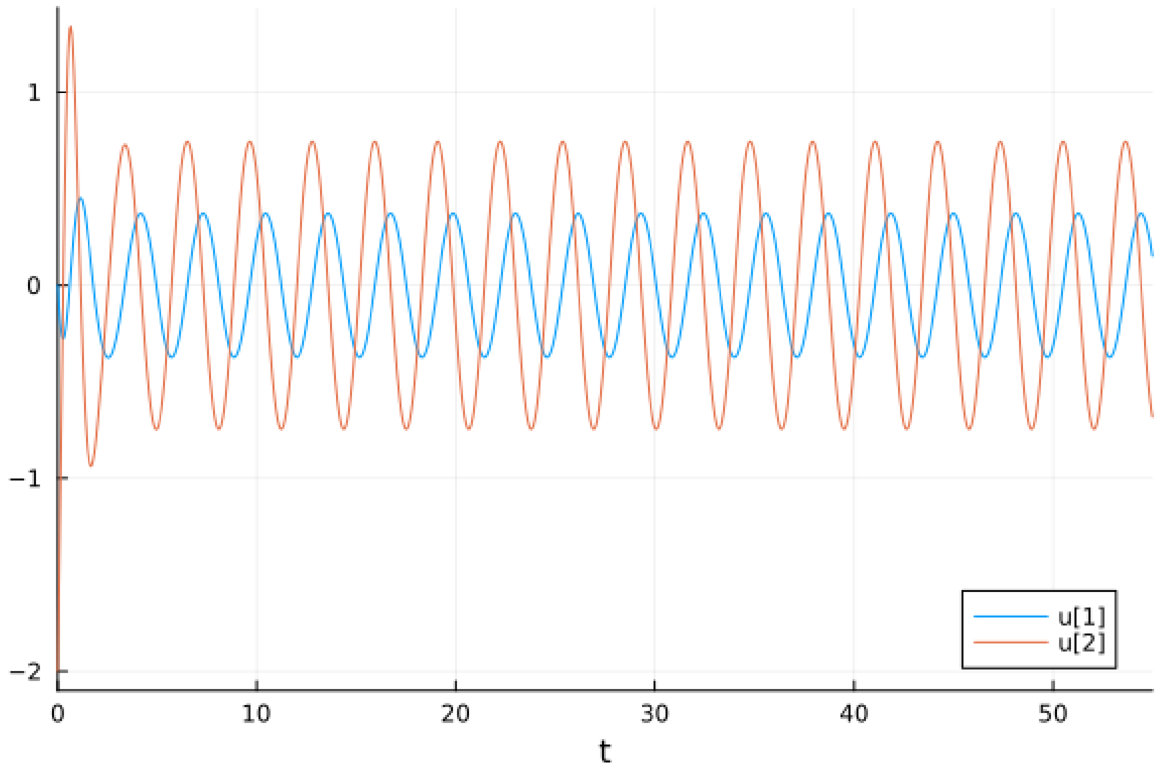
4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действия внешней силы

Реализуем данную модель на языке Julia.

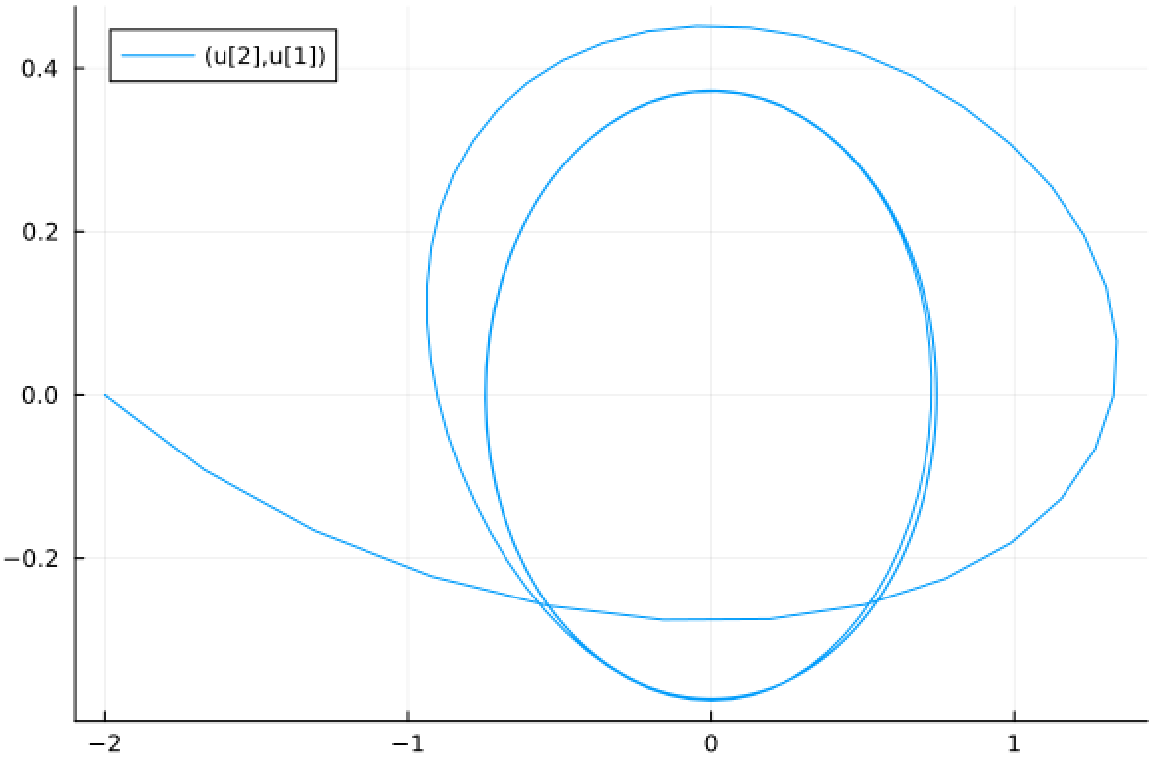
```
using DifferentialEquations, Plots; gr()

tspan = (0,55)
u0 = [0, -2]
p1 = [3, 4]
step = 0.05

f(t) = 5*sin(2*t)

function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x .+f(t)
    return [dx, dy]
end

problem3 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)
sol3 = solve(problem3, Tsit5(), saveat = step)
```

```
plot(sol3)
savefig("lab4_3_sol.png")

plot(sol3, vars=(2,1))
savefig("lab4_3_ph.png")
```

В результате выполнения программы мы получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. **??**) и его фазового портрета (рис. **??**).



{#fig:005, width=70%}



{#fig:006, width=70%}

5 Ответы на вопросы к лабораторной работе

5.1 1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Простейшая модель гармонических колебаний — это уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора без затухания:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

где: - x — переменная, описывающая состояние системы (например, смещение грузика или заряд конденсатора), - ω_0 — собственная частота колебаний, - $\ddot{x}$ — вторая производная x по времени, т.е. ускорение.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка описывает консервативную систему, в которой энергия сохраняется.

5.2 2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор — это система, способная совершать колебания.
Линейный гармонический осциллятор — это модель, описывающая колебательные процессы, например, в механике (грузик на пружине), электротехнике (заряд в колебательном контуре), биологии и других областях. Он описывается линей-

ным дифференциальным уравнением второго порядка. При отсутствии потерь система является консервативной, и ее энергия остается постоянной во времени.

5.3 3. Запишите модель математического маятника

Математический маятник описывается следующим уравнением:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

где: - θ — угол отклонения от положения равновесия, - g — ускорение свободного падения, - l — длина маятника.

При малых колебаниях можно использовать приближение $\sin\theta \approx \theta$, тогда уравнение принимает вид:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

что совпадает по форме с уравнением гармонического осциллятора.

5.4 4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Алгоритм:

1. Вводим обозначение: $y = \dot{x}$ (первая производная x по времени).

2. Исходное уравнение $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ преобразуется в систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

3. Начальные условия:

   $x(0) = x_0$,

   $y(0) = y_0$

Таким образом, получаем систему двух уравнений первого порядка, которая описывает ту же динамику, что и исходное уравнение второго порядка.

5.5 5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовая траектория — это кривая в фазовой плоскости, задающая изменение состояния системы во времени. Каждая точка этой кривой соответствует определённому значению координаты x и скорости $y = \dot{x}$ в момент времени t.

Фазовый портрет — это совокупность фазовых траекторий, построенных для различных начальных условий. Он позволяет визуально оценить поведение системы в фазовом пространстве и понять её динамику при различных параметрах и условиях.

6 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я построил модель гармонического осцилятора на языке Julia.

Список литературы

1. Гармонические колебания [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонические_колебания.