Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Хрусталев Влад Николаевич

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 5,9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 1,9 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [1].

4 Выполнение лабораторной работы

Мой вариант - это (1132222011 % 70) + 1 = 12

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{1.9v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{1.9v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{1.9v} \text{ – в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{1.9v} \text{ – во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{5.9}{2.9}$ и $x_2 = \frac{5.9}{0,9}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{3.61v^2 - v^2} = \sqrt{2.61}v$$

Отсюда выводим:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2.61}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dr}{dt} = v \\
r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{2.61}v
\end{cases}
$$

С начальными условиями для первого случая:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = 0 \\
r_0 = \dfrac{5.9}{2.9}
\end{cases} \tag{1}
$$

Или для второго:

$$
\begin{cases}
\theta_0 = -\pi \\
r_0 = \dfrac{5.9}{0.9}
\end{cases} \tag{2}
$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$
\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{2.61}}
$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

4.1 Построение модели / Программы

```
using DifferentialEquations, Plots, Printf


# Параметры задачи
k = 5.9            # расстояние от лодки до катера при обнаружении (км)
n = 1.9            # отношение скоростей: скорость катера = n * скорость лодки
□ = sqrt(n^2 - 1)  # □ = sqrt(2.61) ≈ 1.616
fi = 3*pi/4        # направление движения лодки (радианы)
v = 1.0            # скорость лодки (единица, для построения графика)
```

```
# Определяем ОДУ для фазового уравнения движения катера:
# Решаем уравнение: dr/d□ = r / □
# Здесь u = r, независимая переменная обозначена как □.
f(u, p, t) = u / □  # функция с тремя аргументами

##############################################################################
# СЛУЧАЙ 1
##############################################################################

# Начальные условия: катер начинает поворот с r = k/2.9 при □ = 0
r0_case1 = k / 2.9
□span1 = (0.0, fi)

prob1 = ODEProblem(f, r0_case1, □span1)
sol1 = solve(prob1, saveat=0.01)

# В точке □ = fi получаем радиус пересечения
r_int1 = sol1.u[end]

# Траектория лодки: движется вдоль постоянного угла fi, радиус равен r = t (при v=1)
t_vals = 0:0.01:r_int1
□_boat = fill(fi, length(t_vals))
r_boat = t_vals

# Формируем строку с рассчитанными значениями точки пересечения
intersection_label1 = @sprintf("Точка пересечения (r,□) = (%.2f, %.2f)", r_int1, fi)

# Построение графика (случай 1)
```

```julia
plt1 = plot(sol1.t, sol1.u, proj=:polar, lw=2,
    label="Траектория катера (случай 1)")
plot!(□_boat, r_boat, proj=:polar, lw=2,
    label="Траектория лодки")
scatter!([fi], [r_int1], marker=(:circle, 10),
    label=intersection_label1)
savefig(plt1, "lab2_01.png")


################################################################################
# СЛУЧАЙ 2
################################################################################

# Начальные условия: катер начинает поворот с r = k/0.9 при □ = -π
r0_case2 = k / 0.9
□span2 = (-pi, fi)

prob2 = ODEProblem(f, r0_case2, □span2)
sol2 = solve(prob2, saveat=0.01)

r_int2 = sol2.u[end]

# Траектория лодки: движение вдоль угла fi, r = t (при v=1)
t_vals2 = 0:0.01:r_int2
□_boat2 = fill(fi, length(t_vals2))
r_boat2 = t_vals2

# Формируем строку с рассчитанными значениями точки пересечения
intersection_label2 = @sprintf("Точка пересечения (r,□) = (%.2f, %.2f)", r_int2, fi)
```

```
# Построение графика (случай 2)
plt2 = plot(sol2.t, sol2.u, proj=:polar, lw=2,
    label="Траектория катера (случай 2)")
plot!(□_boat2, r_boat2, proj=:polar, lw=2,
    label="Траектория лодки")
scatter!([fi], [r_int2], marker=(:circle, 10),
    label=intersection_label2)
savefig(plt2, "lab2_02.png")
```

В результате получаем график для первого варианта(рис. 4.1) и для второго(рис. 4.2).

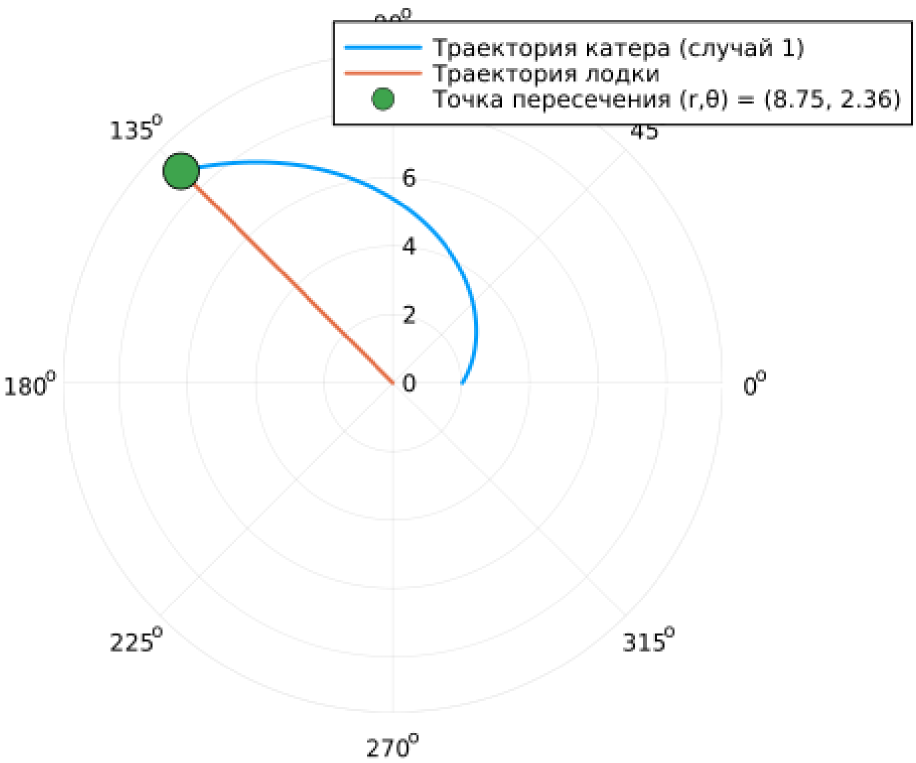

Рис. 4.1: Траекория движения катера и лодки (вариант 1)

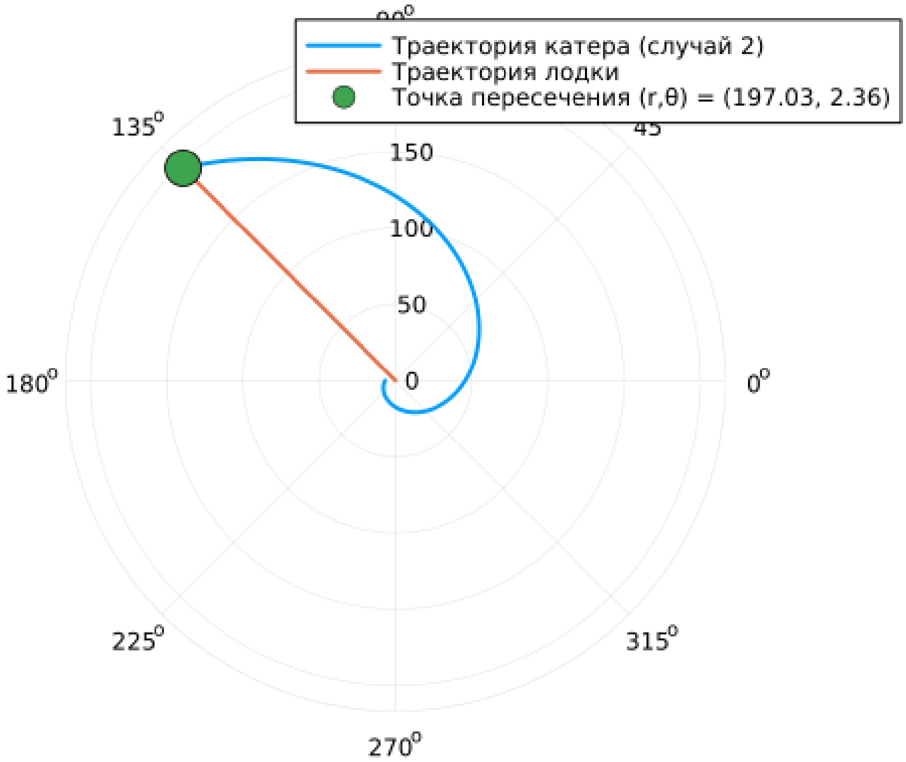

Рис. 4.2: Траекория движения катера и лодки (вариант 2)

Из графикиков можно получить ответы:

Для варианта 1:

```
Точка пересечения (r,□) = (8.75, 2.36)
```

для вариант 2:

```
Точка пересечения (r,□) = (197.03, 2.36)
```

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_погони.