Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Хрусталев Влад Николаевич

Содержание

# 1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

# 2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 5,9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 1,9 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

# 3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [1].

# 4 Выполнение лабораторной работы

Мой вариант - это (1132222011 % 70) + 1 = 12

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за , – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров (), а полярная ось проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время катер и лодка окажутся на одном расстоянииx от полюса. За это время лодка пройдет , а катер (или , в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как или (во втором случае ). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниеx можно найти из следующего уравнения:

Отсюда мы найдем два значения и , задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: - радиальная скорость и - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, . Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем .

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус , .

Получаем:

Отсюда выводим:

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

С начальными условиями для первого случая:

Или для второго:

Исключая из полученной системы производную по , можно перейти к следующему уравнению:

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

## 4.1 Построение модели / Программы

using DifferentialEquations, Plots, Printf  
  
# Параметры задачи  
k = 5.9 # расстояние от лодки до катера при обнаружении (км)  
n = 1.9 # отношение скоростей: скорость катера = n \* скорость лодки  
α = sqrt(n^2 - 1) # α = sqrt(2.61) ≈ 1.616  
fi = 3\*pi/4 # направление движения лодки (радианы)  
v = 1.0 # скорость лодки (единица, для построения графика)  
  
# Определяем ОДУ для фазового уравнения движения катера:  
# Решаем уравнение: dr/dθ = r / α  
# Здесь u = r, независимая переменная обозначена как θ.  
f(u, p, t) = u / α # функция с тремя аргументами  
  
########################################################################  
# СЛУЧАЙ 1  
########################################################################  
  
# Начальные условия: катер начинает поворот с r = k/2.9 при θ = 0  
r0\_case1 = k / 2.9  
θspan1 = (0.0, fi)  
  
prob1 = ODEProblem(f, r0\_case1, θspan1)  
sol1 = solve(prob1, saveat=0.01)  
  
# В точке θ = fi получаем радиус пересечения  
r\_int1 = sol1.u[end]  
  
# Траектория лодки: движется вдоль постоянного угла fi, радиус равен r = t (при v=1)  
t\_vals = 0:0.01:r\_int1  
θ\_boat = fill(fi, length(t\_vals))  
r\_boat = t\_vals  
  
# Формируем строку с рассчитанными значениями точки пересечения  
intersection\_label1 = @sprintf("Точка пересечения (r,θ) = (%.2f, %.2f)", r\_int1, fi)  
  
# Построение графика (случай 1)  
plt1 = plot(sol1.t, sol1.u, proj=:polar, lw=2,  
 label="Траектория катера (случай 1)")  
plot!(θ\_boat, r\_boat, proj=:polar, lw=2,  
 label="Траектория лодки")  
scatter!([fi], [r\_int1], marker=(:circle, 10),  
 label=intersection\_label1)  
savefig(plt1, "lab2\_01.png")  
  
  
########################################################################  
# СЛУЧАЙ 2  
########################################################################  
  
# Начальные условия: катер начинает поворот с r = k/0.9 при θ = -π  
r0\_case2 = k / 0.9  
θspan2 = (-pi, fi)  
  
prob2 = ODEProblem(f, r0\_case2, θspan2)  
sol2 = solve(prob2, saveat=0.01)  
  
r\_int2 = sol2.u[end]  
  
# Траектория лодки: движение вдоль угла fi, r = t (при v=1)  
t\_vals2 = 0:0.01:r\_int2  
θ\_boat2 = fill(fi, length(t\_vals2))  
r\_boat2 = t\_vals2  
  
# Формируем строку с рассчитанными значениями точки пересечения  
intersection\_label2 = @sprintf("Точка пересечения (r,θ) = (%.2f, %.2f)", r\_int2, fi)  
  
# Построение графика (случай 2)  
plt2 = plot(sol2.t, sol2.u, proj=:polar, lw=2,  
 label="Траектория катера (случай 2)")  
plot!(θ\_boat2, r\_boat2, proj=:polar, lw=2,  
 label="Траектория лодки")  
scatter!([fi], [r\_int2], marker=(:circle, 10),  
 label=intersection\_label2)  
savefig(plt2, "lab2\_02.png")

В результате получаем график для первого варианта(рис. 1) и для второго(рис. 2).

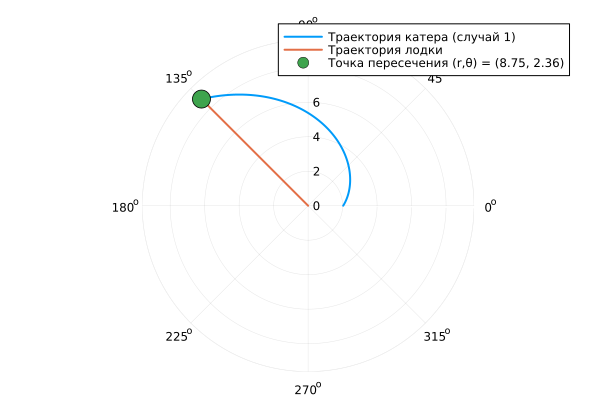


Рис. 1: Траекория движения катера и лодки (вариант 1)



Рис. 2: Траекория движения катера и лодки (вариант 2)

Из графикиков можно получить ответы:

Для варианта 1:

Точка пересечения (r,θ) = (8.75, 2.36)

для вариант 2:

Точка пересечения (r,θ) = (197.03, 2.36)

# 5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

# Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_погони>.