Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Хрусталев Влад Николаевич

Содержание

# 1 Цель работы

Построить модель гармонического осцилятора.

# 2 Задание

**Вариант 12**

Построить фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
2. Колебания гармонического осциллятора c затуханием и без действий внешней силы
3. Колебания гармонического осциллятора c затуханием и под действием внешней силы

На интервале (шаг 0.05) с начальными условиями

# 3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид

или

где — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность совпадает с размерностью ; (радиан/с, градус/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 с;

(радиан, градус) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);

(радиан, градус) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины ) в момент времени . Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет вид

[1].

# 4 Выполнение лабораторной работы

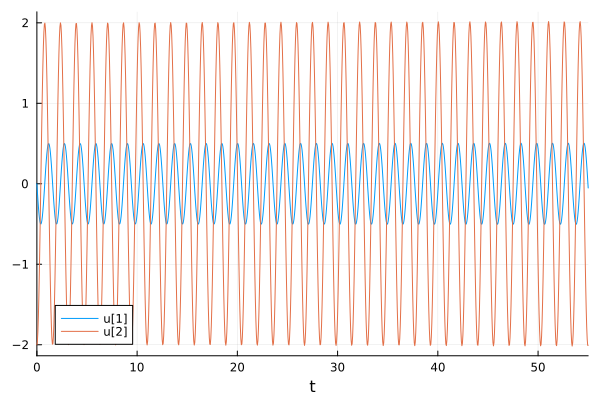
Мой вариант - это (1132222011 % 70) + 1 = 12

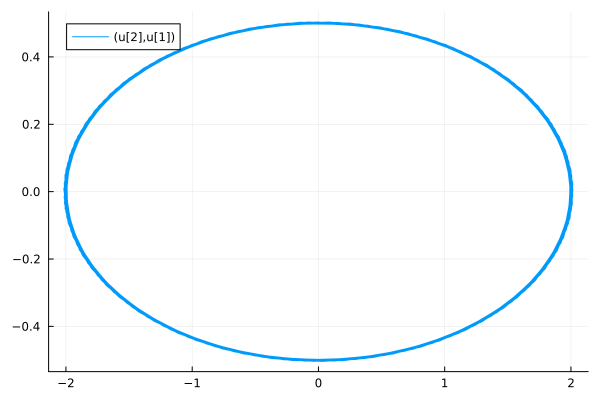
## 4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действия внешней силы

Для начала реализуем данную модель на языке Julia.

using DifferentialEquations, Plots; gr()  
  
tspan = (0,55)  
u0 = [0, -2]  
p1 = [0, 4]  
step = 0.05  
  
function f1(u, p, t)  
 x, y = u  
 g, w = p  
 dx = y  
 dy = -g .\*y - w^2 .\*x  
 return [dx, dy]  
end  
  
problem1 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)  
sol1 = solve(problem1, Tsit5(), saveat = step)  
  
plot(sol1)  
savefig("lab4\_1\_sol.png")  
  
plot(sol1, vars=(2,1))  
savefig("lab4\_1\_ph.png")

В результате выполнения программы мы получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. **¿fig:001?**) и его фазового портрета (рис. **¿fig:002?**).

{#fig:001, width=70%}

{#fig:002, width=70%}

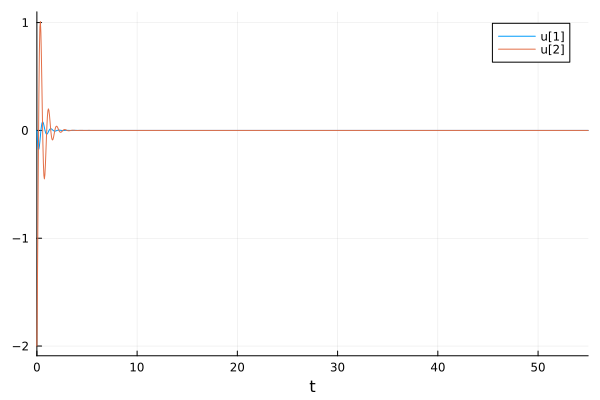
Как мы видим, колебания осциллятора переодичное и график не затухает.

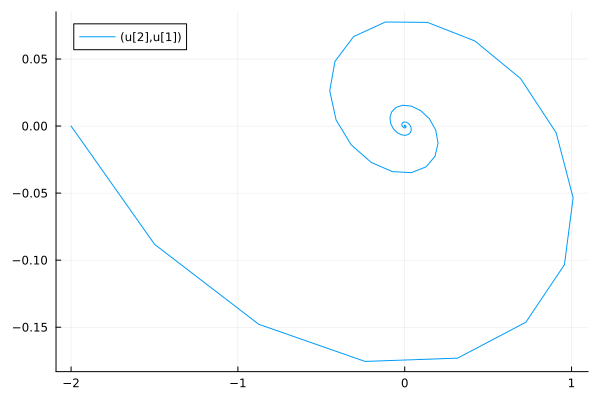
## 4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действия внешней силы

Реализуем данную модель на языке Julia.

using DifferentialEquations, Plots; gr()  
  
tspan = (0,55)  
u0 = [0, -2]  
p1 = [4, 8]  
step = 0.05  
  
function f1(u, p, t)  
 x, y = u  
 g, w = p  
 dx = y  
 dy = -g .\*y - w^2 .\*x  
 return [dx, dy]  
end  
  
problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)  
sol2 = solve(problem2, Tsit5(), saveat = step)  
  
plot(sol2)  
savefig("lab4\_2\_sol.png")  
  
plot(sol2, vars=(2,1))  
savefig("lab4\_2\_ph.png")

В результате выполнения программы мы получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. **¿fig:003?**) и его фазового портрета (рис. **¿fig:004?**).

{#fig:003, width=70%}

{#fig:004, width=70%}

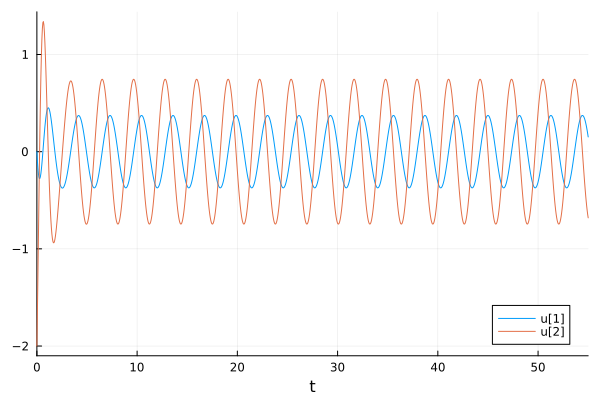
В этом случае видно как происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, так как есть параметр, который отвечает за потери энергии.

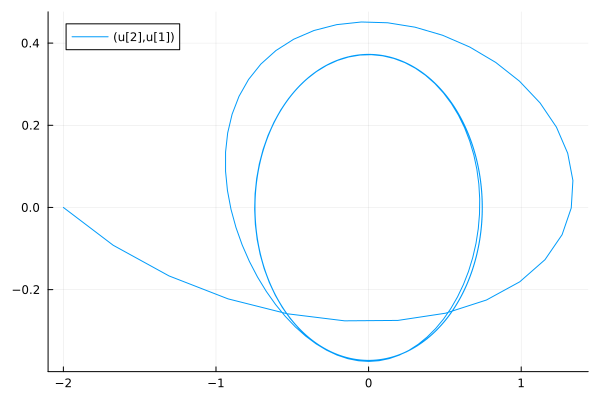
## 4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действия внешней силы

Реализуем данную модель на языке Julia.

using DifferentialEquations, Plots; gr()  
  
tspan = (0,55)  
u0 = [0, -2]  
p1 = [3, 4]  
step = 0.05  
  
f(t) = 5\*sin(2\*t)  
  
function f1(u, p, t)  
 x, y = u  
 g, w = p  
 dx = y  
 dy = -g .\*y - w^2 .\*x .+f(t)  
 return [dx, dy]  
end  
  
problem3 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p1)  
sol3 = solve(problem3, Tsit5(), saveat = step)  
  
plot(sol3)  
savefig("lab4\_3\_sol.png")  
  
plot(sol3, vars=(2,1))  
savefig("lab4\_3\_ph.png")

В результате выполнения программы мы получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. **¿fig:005?**) и его фазового портрета (рис. **¿fig:006?**).

{#fig:005, width=70%}

{#fig:006, width=70%}

# 5 Ответы на вопросы к лабораторной работе

## 5.1 1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Простейшая модель гармонических колебаний — это уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора без затухания:

где: - — переменная, описывающая состояние системы (например, смещение грузика или заряд конденсатора), - — собственная частота колебаний, - — вторая производная по времени, т.е. ускорение.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка описывает консервативную систему, в которой энергия сохраняется.

## 5.2 2. Дайте определение осциллятора

**Осциллятор** — это система, способная совершать колебания.  
Линейный гармонический осциллятор — это модель, описывающая колебательные процессы, например, в механике (грузик на пружине), электротехнике (заряд в колебательном контуре), биологии и других областях. Он описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка. При отсутствии потерь система является консервативной, и ее энергия остается постоянной во времени.

## 5.3 3. Запишите модель математического маятника

Математический маятник описывается следующим уравнением:

где: - — угол отклонения от положения равновесия, - — ускорение свободного падения, - — длина маятника.

При малых колебаниях можно использовать приближение , тогда уравнение принимает вид:

что совпадает по форме с уравнением гармонического осциллятора.

## 5.4 4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Алгоритм:

1. Вводим обозначение: (первая производная по времени).
2. Исходное уравнение преобразуется в систему:
3. Начальные условия:  
   ,

Таким образом, получаем систему двух уравнений первого порядка, которая описывает ту же динамику, что и исходное уравнение второго порядка.

## 5.5 5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

**Фазовая траектория** — это кривая в фазовой плоскости, задающая изменение состояния системы во времени. Каждая точка этой кривой соответствует определённому значению координаты и скорости в момент времени .

**Фазовый портрет** — это совокупность фазовых траекторий, построенных для различных начальных условий. Он позволяет визуально оценить поведение системы в фазовом пространстве и понять её динамику при различных параметрах и условиях.

# 6 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я построил модель гармонического осцилятора на языке Julia.

# Список литературы

1. Гармонические колебания [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонические_колебания>.