Wybieranie Szemerediego - Gracz vs Komputer

Jakub Bezubik
Hubert Grochowski
Tomasz Kapelka

5 kwietnia 2020

Spis treści

1 Opis teoretyczny

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Definicja 1.1. Niech $n \in N$. Zdefiniujemy zbiór $[n]$ jako zbiór wszystkich liczb naturalnych od 1 do n tj. $[n] \coloneqq \{1, 2, ..., n\}$.

Definicja 1.2. Niech $k \in \mathbb{N}$. Ciąg $(a_i)_{i=1}^{k}$ o wyrazach naturalnych nazwiemy ciągiem arytmetycznym, gdy istnieje liczba naturalna $r \in \mathbb{N}$, taka, że ciąg jest dany wzorem $a_j = a_1 + (j-1)r$ dla $j \in [k]$. Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

Definicja 1.3. Niech $n, r \in N$. Kolorowaniem liczb ze zbioru $[n]$ nazwiemy funkcję $\chi : [n] \to [r]$.

1.2 Wstęp

Podejmowana gra to Wybieranie Szemerediego. Na wstępie mamy ustalone liczby $n, k \in \mathbb{N}$. Każdy z dwóch graczy ma ustalony swój kolor. Celem jest utworzenie przez gracza k-elementowego ciągu arytmetycznego z liczb w swoim kolorze o wyrazach z $[n]$.
W rundach parzystych jeden gracz losuje 2 niepokolorowane liczby ze zbioru $[n]$, a drugi gracz wybiera, którą z tych dwóch liczb pokolorować na swój kolor. W rundach nieparzystych następuje zamiana ról. Gra toczy się dopóki nie pojawi się wyżej wspomniany ciąg arytmetyczny.

1.3 Twierdzenia i definicje

Twierdzenie 1.4 (Van der Waerden, 1927). Ustalmy dowolne $r, k \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego kolorowania liczb $\chi : [n] \to [r]$ istnieje ciąg arytmetyczny w pewnym kolorze długości k.

Dowód. Udowodnimy szczególny przypadek tego twierdzenia - dla $r = 2$ i $k = 3$. Niech $n = 325$. Weźmy dowolne $\chi : [325] \to [2]$. Zdefiniujemy $B_i \coloneqq \{5i + 1, 5i + 2, 5i + 3, 5i + 4, 5(i + 1)\}$ dla $i \in [32] \cup \{0\}$. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnego $i \in [32] \cup \{0\}$ blok B_i może być pokolorowany na 32 sposoby. Jest tak dlatego, bo $\#B_i = 5$, a każdą liczbę możemy pokolorować na 2 sposoby, a $32 = 2^5$. Bloków B_i jest jednak 33, więc będą istniały z zasady szufladkowej Dirichleta dwa bloki pokolorowane identycznie. Niech B_a i B_b takimi blokami. Ponieważ mamy 2 kolory, to w bloku B_a wśród liczb $5a+1, 5a+2, 5a+3$ istnieją dwie pokolorowane tak samo. Niech $5a + x, 5a + y$ pokolorowane w tym samym kolorze, gdzie $x, y \in [3] \wedge x < y$. Bez straty ogólności $\chi(5a + x) = \chi(5a + y) = 1$. Jeśli $\chi(5a+2y-x) = 1$, to koniec dowodu. Niech więc zatem $\chi(5a+2y-x) = 2$. Ponieważ bloki B_a oraz B_b są pokolorowane identycznie, to też $\chi(5b+2y-x) = 2$. Niech $\xi = 2b-a \leq 2\cdot 32-0 = 64$. Zatem $5\xi+2y-x \leq 325$. Jeśli $\chi(\xi+2y-x) = 1$, to $5a + x, 5b + y, 5\xi + 2y - x$ tworzą ciąg arytmetyczny w tym samym kolorze. Jeśli $\chi(\xi + 2y - x) = 2$, to $5a + 2y - x, 5b + 2y - x, 5\xi + 2y - x$ tworzą ciąg arytmetyczny w tym samym kolorze. Zatem istnieje ciąg arytmetyczny w tym samym kolorze długości 3. c.n.d

Definicja 1.5. Niech $r, k \in \mathbb{N}$. Najmniejszą liczbę n spełniającą Twierdzenie 1.4 nazwiemy liczbą Van der Waerdena.

Przedstawimy teraz twierdzenie, które dają nam ograniczenie na liczby Van der Waerdena.

Twierdzenie 1.6. Niech $r, k \in \mathbb{N}$. Dla liczby Van der Waerdena $w(r, k)$ zachodzi

$$w(r,k) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}$$

Twierdzenie 1.4 zostało uogólnione przez Szemerediego. Początkowo była to hipoteza, która potem została udowodniona.

Twierdzenie 1.7 (Szemeredi). Niech $\lambda \in (0, 1]$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje liczba naturalna $N(\lambda, k)$ taka, że dowolny podzbiór $[N(\lambda, k)]$ o mocy większej lub równej $\lambda \cdot N(\lambda, k)$ ma ciąg arytmetyczny długości k.

2 Strategie

W naszym modelu ma grać komputer z graczem. Przygotowaliśmy dla komputera trzy rodzaje strategii, które opisujemy poniżej. Nazwiemy je strategiami losowymi, pojedynkowymi i egoistycznymi.

2.1 Strategia losowa

W strategii losowej komputer wybiera losowo 2 wolne pola z dostępnych i podaje je przeciwnikowi.

2.2 Strategia egoistyczna

W dużym skrócie - polega na tym, aby przeciwnik nie odebrał komputerowi potencjalnych szans na zwycięstwo, skupia się na sobie. Niech X będzie zbiorem liczb z $[n]$, które jeszcze nie zostały wybrane. Rozumowanie przedstawia poniższy pseudokod:

Algorytm egoistyczny
suma=tab[index:X].wypełnij(0) //Utwórz tablice zer indeksowaną zbiorem X
for $x \in X$ **do**
  PC_x = wszystkie podciągi arytmetyczne, do których należy x
  for $c \in PC_x$ **do**
    suma[x]+=Ile pól w ciągu c jest pokolorowanych kolorem komputera
  end for
end for
return $(x_1,\, x_2)$ takie, że suma[x_i] najmniejsze i nie skończy się gra

Przedstawimy rozumowanie na przykładzie dla $n = 8$ i $k = 3$. Niech obecna plansza to:

$$(1,1),(2,0),(3,1),(4,2),(5,2),(6,0),(7,0),(8,0)$$

gdzie para (l, i) jest przedstawiana jako l - liczba, a i - kolor (0 to pole niepokolorowane, 1 to kolor gracza, a 2 to kolor komputera). Wtedy podciągi to:

- Dla 2: $(1,2,3),(2,3,4),(2,4,6),(2,5,8)$, a suma[2]= $0+1+1+1 = 3$
- Dla 6: $(4,5,6),(5,6,7),(6,7,8),(4,6,8),(2,4,6)$, a suma[6]= $0+2+1+1+1 = 5$
- Dla 7: $(5,6,7),(6,7,8),(3,5,7),(1,4,7)$, a suma[7]= $1+1+1+0 = 3$
- Dla 8: $(6,7,8),(4,6,8),(2,5,8)$, a suma[8]=$0+1+1 = 2$

Widzimy, że para minimalna to $(2, 8)$ lub $(7, 8)$. Wybór 2 da jednak ciąg arytmetyczny o długości 3 i różnicy 1 w kolorze gracza, więc nie jest to `return` z naszego algorytmu. Para $(7, 8)$ nie zakończy gry, a zatem komputer zwróci w tej strategii parę liczb $(7, 8)$.
Jeśli chodzi o rozumowanie służące wyborowi własnej liczby do pokolorowania, odbędzie się podobne rozumowanie mające zwrócić korzystniejszy wynik dla komputera.

2.3 Strategia pojedynkowa

W jej zamyśle chodzi o to, żeby komputer jak najbardziej utrudnił grę przeciwnikowi. Działa ona bardzo podobnie, co strategia egoistyczna, tylko, że w drugiej pętli dodajemy ilość pokolorowanych na kolor przeciwnika.