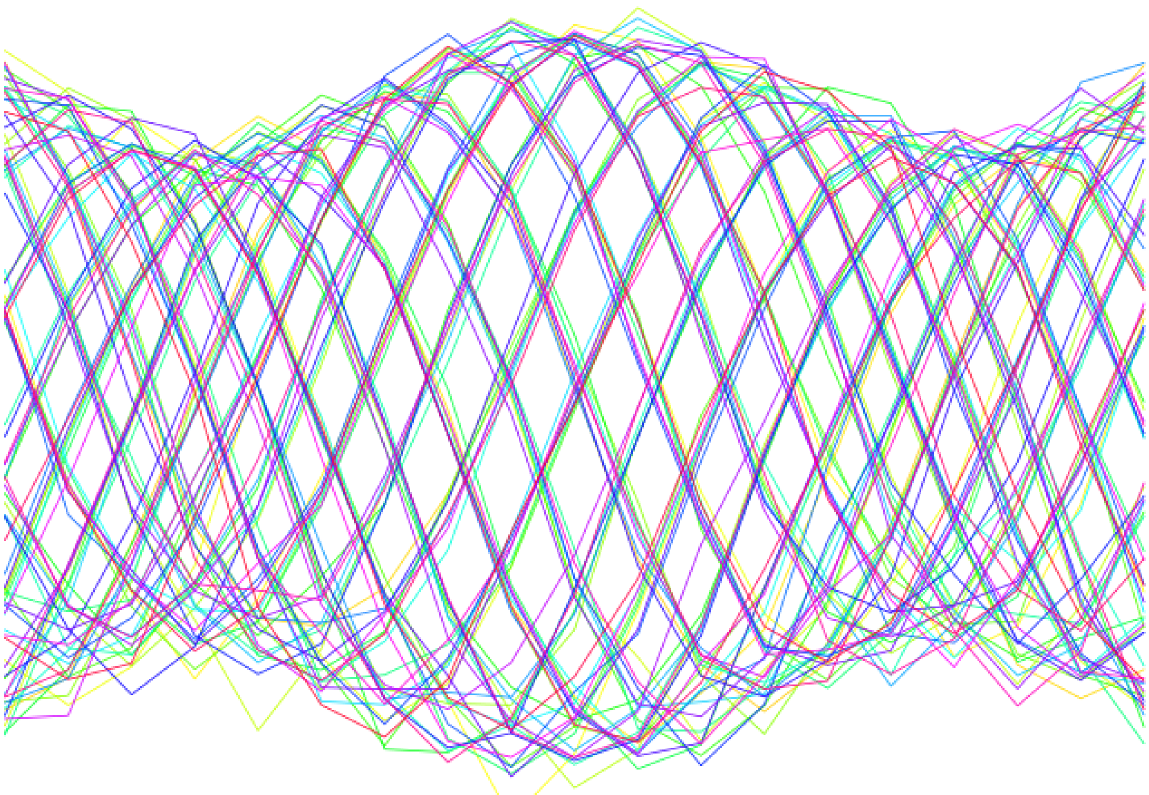
Fabio Bani

Racconti e riflessioni di un insegnante di matematica in formazione

L'esperienza di tirocinio al Laboratorio DiCoMat



Università degli Studi di Trento
A.A. 2023/2024
Laurea Magistrale in Matematica
Curriculum Teaching and Scientific Communication
Tirocinio presso il Dipartimento di Matematica
Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica (DiCoMat)
Tutor *Prof.ssa Elisabetta Ossanna*

UNIVERSITÀ DI TRENTO

Il docente-ricercatore e il docente, una volta conosciuti i risultati della ricerca, cambiano. Cambiano radicalmente il proprio atteggiamento che si fa più attento, più critico, meno disponibile a dare per scontato che vi siano attività vincenti solo perché suggerite ad alto livello (o ritenuto tale) o perché vi è di tali attività una pratica ormai tradizionale. [...] Cambiano, dicevo, gli atteggiamenti: fatalmente, l'insegnante che entra in contatto con certi risultati di ricerca non può più ignorarli, dopo averli conosciuti; vede, riconosce nel comportamento dei propri studenti in aula e nel proprio agire professionale, la conferma di quei risultati e di conseguenza la propria interpretazione delle condotte subisce una modifica.

[FANDIÑO PINILLA, 2023b]

Indice

Introduzione

Nel corso dell'anno accademico 2023/2024, il secondo della mia laurea magistrale in Matematica presso l'Università di Trento, ho avuto l'occasione di fare un tirocinio presso il Laboratorio DiCoMat (Didattica e Comunicazione della Matematica) del dipartimento di Matematica, sotto la guida della prof.ssa Elisabetta Ossanna. L'interesse per questa attività nasce a seguito degli stimoli che mi ha offerto il corso *Laboratory Techniques for Mathematics Teaching*, che ho frequentato nel primo semestre, e che è stato fondamentale nel mio percorso di formazione professionale come insegnante. Esso mi ha portato a ridiscutere completamente le convinzioni e l'esperienza accumulata nel mio (seppur breve) anno di insegnamento in una secondaria di secondo grado, coincidente con il mio ultimo anno di studi in Ingegneria Matematica al Politecnico di Milano. Era quindi mia intenzione proseguire nella stessa direzione, sicuro del grande valore che questa nuova esperienza avrebbe potuto avere nel mio futuro professionale.

Vista la possibilità di abbinare il tirocinio con la tesi, il prof. Luigi Amedeo Bianchi, in qualità di relatore, mi ha proposto, insieme alla prof.ssa Ossanna, di dedicare parte del tirocinio alla sperimentazione del laboratorio oggetto della tesi. Infatti il mio lavoro di tesi, che si è svolto in parte parallelamente al tirocinio, sarebbe consistito nella riprogettazione didattica di un laboratorio di statistica già sperimentato, dal titolo *We live in a closed system. Data analysis useful for investigating environmental sustainability.* Si tratta di un laboratorio nel quale gli studenti degli ultimi anni della secondaria di secondo grado, mediante il linguaggio di programmazione R, devono analizzare dei dataset sulla sostenibilità ambientale (ad esempio, dati sulla fusione dei ghiacciai o sulla qualità dell'aria) con l'obiettivo di produrre delle efficaci rappresentazioni grafiche dei dati; queste poi vengono impiegate come supporto in un'argomentazione volta al sostegno di una determinata tesi inerente all'ambito scelto. Il mio compito sarebbe stato quello di rendere il laboratorio adatto all'uso da parte del solo insegnante di matematica, nelle ore curricolari, senza bisogno di una formazione specifica sul linguaggio R: per fare ciò, avrei dovuto sostituire alla parte di programmazione l'interazione con degli applet *R Shiny*, ovvero applicazioni di semplice utilizzo che permettessero di produrre e visualizzare grafici senza dover scrivere codice.

Devo ammettere che all'epoca le premesse mi avevano lasciato un po' perplesso: la statistica non è mai stata il mio campo preferito della matematica, e, soprattutto, non avevo alcuna esperienza di programmazione in R. Nonostante ciò, decisi di accettare comunque, e menomale! A posteriori posso dire che l'attività di tirocinio ha superato ogni mia aspettativa: l'idea iniziale di riprogettazione ha assunto gradualmente una forma inaspettata, dando alla fine origine a un'attività del tutto nuova, di grande valore didattico e fortemente multidisciplinare, incentrata sulla crisi climatica e sul ruolo che la matematica può avere nell'aiutarci a comprenderla. Tale attività è stata frutto del lavoro corale di un incredibile gruppo di insegnanti, instancabili, competenti e motivati, con cui ho avuto il piacere di collaborare, ed è stata presentata nel corso di un workshop estivo dedicato ai docenti di matematica, e infine sperimentata in classe.

Inoltre, nel tirocinio hanno trovato spazio vari altri laboratori e attività, cui ho sempre preso parte con grande piacere, e che sono stati per me importanti occasioni di miglioramento personale e professionale. Come naturale conseguenza, l'esperienza ha rinnovato il mio interesse per la matematica e per la sua didattica in particolare, interesse che mi ha spinto ad approfondire la letteratura sul tema, nella speranza di rispondere al bisogno interno di strumenti interpretativi professionali più specifici per la mia carriera futura di insegnante, bisogno che il tirocinio stesso ha contribuito ad alimentare, come vorrebbe lasciar trasparire la citazione in apertura.

Il testo che di seguito presento è la relazione conclusiva della mia esperienza di tirocinio, dove provo a raccontare, oltre ai contenuti del tirocinio stesso, anche le riflessioni che ne sono derivate e il cambiamento di convinzioni cui ha dato atto. Nel tentativo di preservare questo atteggiamento di fondo di autoosservazione e autocritica, ho cercato di cristallizzare le attività cui ho preso parte nel loro ordine cronologico, distinguendo il più possibile il racconto dell'esperienza e le osservazioni sul momento - di cui ho tenuto traccia in una sorta di diario personale - da rielaborazioni e considerazioni a posteriori.

Desidero infine ringraziare tutte le persone con cui, a vario titolo, ho avuto l'opportunità di lavorare nel corso del tirocinio, e che, direttamente o meno, ho cercato di citare nel resoconto. Di ciascuna di esse serbo solo ricordi positivi, scorci sul senso e sul modo di essere insegnante.

Fabio Bani
Bergamo, 10 dicembre 2024

1 Probabilità e decisioni

La prima attività cui ho preso parte nel corso del mio tirocinio, in qualità principalmente di osservatore, è il laboratorio *Probabilità nella realtà: osservare, interpretare e scegliere*. Questo si è svolto dall'11 al 15 marzo 2024 con un gruppo di 21 studenti provenienti da due diverse classi quarte del Liceo B. Russell di Cles, indirizzo scientifico. L'attività, inquadrata come esperienza di ASL/PCTO, è stata distribuita su cinque giorni, per un totale di 40 ore (6 ore al giorno in aula e 10 ore complessive di lavoro autonomo a casa). Il laboratorio in presenza si è svolto in parte presso la School Of Innovation (SOI) dell'Università di Trento e in parte presso l'aula STEAM del Liceo Russell. Gli incontri sono stati tenuti in parte dalla prof.ssa Ossanna, e in parte da Angelica Piselli, assegnista di ricerca presso il Laboratorio DiCoMat.

Quanto segue è la rielaborazione dei miei appunti personali sull'esperienza, rielaborazione effettuata pochi giorni dopo la conclusione del laboratorio, e quindi con il ricordo ancora fresco in memoria. Nel rileggerla ora, a tirocinio concluso, sono stato tentato di riscriverne alcune parti, di esprimere alcune mie osservazioni in modo diverso, di modificarne, a volte, l'interpretazione. Riflettendoci, ho deciso di non farlo, e di lasciare il testo così com'era: d'altronde, mi pareva di commettere una frode contro me stesso; molto meglio, credo, sfruttare l'occasione per lasciare traccia di come l'esperienza di tirocinio abbia contribuito, a lungo termine, a modificare alcune mie convinzioni e strumenti interpretativi. Per questo, le osservazioni sulle osservazioni sono relegate alle note a piè di pagina.

1.1 Contenuti e obiettivi

Il laboratorio *Probabilità nella realtà: osservare, interpretare e scegliere* vuole rendere consapevoli gli studenti della rilevanza, nelle scelte del vivere quotidiano, del calcolo delle probabilità. Il percorso si sviluppa a partire dall'analisi di alcuni quesiti-stimolo, il cui scopo è in particolare far emergere il conflitto tra il pensiero intuitivo, che può entrare in gioco quando si deve fare una valutazione di probabilità, e il pensiero logico-razionale, che sarebbe corretto adottare. Successivamente si passa allo studio di alcune situazioni in ambito medico e legale, prese dalla letteratura, in cui l'errato uso del ragionamento probabilistico ha avuto conseguenze estremamente rilevanti. Gli studenti saranno invitati ad analizzare i casi assegnati, lavorando in gruppi, al fine di realizzare un momento di comunicazione e divulgazione matematica nella forma di un breve filmato.

Per quanto riguarda il contenuto matematico, è necessario che gli studenti abbiano una buona familiarità con la probabilità e possiedano le nozioni inerenti alla probabilità condizionata. Non è invece indispensabile la conoscenza del teorema di Bayes: il laboratorio potrebbe essere un'occasione per introdurlo in un contesto pratico di realtà.

In sostanza, quindi, gli obiettivi principali del laboratorio sono:

- far acquisire consapevolezza agli studenti dell'importanza del calcolo della probabilità nella vita quotidiana, sia affrontando problemi comuni e legati ad aspetti tradizionali che investigando come il pensiero bayesiano possa aiutare gli esperti in campi non matematici ad affrontare questioni rilevanti e a prendere decisioni in merito;

- comprendere come comunicare in maniera efficace e comprensibile la matematica ad un pubblico non specialistico e che quindi non possiede tutti gli strumenti necessari per interpretare il formalismo matematico, utilizzando un linguaggio appropriato;

- far sperimentare agli studenti una modalità di approccio a una situazione problematica attraverso l'indagine di situazioni reali, andando oltre il risultato numerico attraverso un commento collettivo e una discussione di analisi delle strade risolutive possibili;

- mettere in luce gli aspetti principali di un ambiente lavorativo in cui il lavoro viene svolto a gruppi nei quali ciascuno ricopre uno specifico ruolo e ha la responsabilità di un determinato aspetto, pur contribuendo in ogni parte alla realizzazione del progetto.

1.2 Struttura dell'attività

Il laboratorio si apre con un breve sondaggio che propone alcune semplici situazioni quotidiane in cui entra in gioco la probabilità (ad esempio, i numeri ritardatari al lotto) per stimolare una riflessione sul ruolo giocato dal pensiero intuitivo, che porta spesso a soluzioni scorrette. Si vuole far riflettere in particolare su quale potrebbe essere la reazione di un pubblico non specialistico di fronte a tali domande. Successivamente vengono posti dei quesiti la cui risoluzione richiede il calcolo probabilistico, e in particolare la nozione di probabilità condizionata. I ragazzi lavorano in gruppo per un primo momento di confronto e risoluzione, che sfocia poi in una discussione collettiva volta a far emergere l'efficacia delle rappresentazioni tramite diagramma ad albero o tabella; si leggono quindi le risposte, per la maggior parte errate, date agli stessi quesiti da alcuni esperti nei settori di riferimento. In questa fase si coglie anche l'occasione per richiamare eventualmente alcune nozioni matematiche non del tutto padroneggiate dagli studenti, al fine di renderli autonomi nel lavoro di analisi dei testi che li attende.

Conclusa la fase introduttiva, si passa alla divisione della classe in gruppi fra loro omogenei, in base alle competenze proprie di ciascuno studente: a tal fine ci si avvale di un questionario nel quale gli studenti dichiarano le proprie abilità in relazione ai ruoli fondamentali che verranno assegnati all'interno di ciascun gruppo: il leader, il responsabile della parte tecnica (montaggio video, design, etc.) il responsabile della parte matematica, il responsabile della comunicazione, l'osservatore. A ciascun gruppo viene quindi consegnato il materiale bibliografico inerente al caso sul quale dovrà essere realizzato il filmato. Inizialmente si chiede ai gruppi di predisporre un primo momento di comunicazione "alla lavagna" per i compagni, seguendo alcune domande guida fornite anticipatamente. I temi affrontati, uno per ciascun gruppo, sono i seguenti:

1) HIV: perché è necessario effettuare un secondo test se si risulta positivi al primo

2) HIV: il valore predittivo positivo dipende dalla diffusione del virus nella popolazione di riferimento

3) HIV e Covid: misinformazione nei consultori degli anni Novanta; valore predittivo positivo dei test Covid a maggio 2020 (all'incirca del 50% e quindi affidabili quanto il lancio di una moneta)

4) O.J. Simpson: il ragionamento probabilistico fallace che garantisce la vittoria alla difesa in un processo per omicidio di una donna da parte del marito a seguito di violenza domestica

5) Mayfield: un caso eclatante di fallacia dell'accusatore

Successivamente, il laboratorio prevede l'intervento di un insegnante di scienze per approfondire i temi di HIV e analisi del DNA, nonché di un docente di italiano per fornire indicazioni in merito alla stesura di una sceneggiatura (la coesione testuale, realizzare una divulgazione scientifica efficace, etc.).

Ha quindi inizio la parte centrale del laboratorio, che è anche quella che impegna il maggior numero di ore. I vari gruppi predispongono una scaletta e poi una sceneggiatura, tenendo conto del target a cui è rivolta la comunicazione; si prevedono momenti di confronto sia collettivi, per fare il punto della situazione e condividere suggerimenti ed eventuali difficoltà, sia con l'insegnante, per la revisione del testo, il controllo della correttezza della parte matematica, e per la scelta delle strategie di comunicazione.

Una volta che la sceneggiatura viene approvata dal docente si passa alla fase di realizzazione vera e propria: i ragazzi lavorano sulle animazioni, i materiali di scena, le riprese e il montaggio del filmato. Una volta ultimati i prodotti di comminuzione, i gruppi li presenteranno in un momento finale di confronto. A conclusione del laboratorio vengono raccolti i feedback degli studenti tramite sondaggio. Inoltre, per tutta la durata dell'attività, gli studenti sono stati invitati a compilare giornalmente una sorta di diario di bordo che permettesse loro di tenere traccia dei progressi fatti e del lavoro svolto come gruppo, e che potesse poi risultare utile per la stesura di una relazione.

1.3 Osservazioni sul campo

Nel corso del primo giorno di attività si palesano fin da subito alcune difficoltà uniformemente diffuse tra tutti gli studenti. Per quanto riguarda il contenuto matematico, nonostante il graduale percorso di ripresa dei concetti di base effettuato tramite i quesiti, si rileva una scarsa familiarità con la probabilità condizionata; la qual cosa costituisce un immediato ostacolo all'analisi dei casi proposti e alla costruzione degli schemi ad albero. Emerge una tendenza generale ad applicare formule preconfezionate alle probabilità espresse in percentuale o come numero decimale, approccio che paradossalmente i ragazzi sembrano prediligere al più semplice e naturale ragionamento in termini di frequenze, tant'è vero che, nella fase di riproposizione alla classe del contenuto matematico del proprio caso, un gruppo rappresenta inizialmente il problema con le frequenze, per poi trasformarle in probabilità in un tentativo poco efficace di spiegare il ragionamento sottostante la costruzione dell'albero![1] Inoltre, si osserva in generale una scarsa comprensione del testo assegnato, che si ferma agli episodi narrativi della fabula senza riuscire a cogliere le connessioni logiche e quindi l'aspetto argomentativo, a prescindere dal contenuto matematico. Se a tali elementi di difficoltà si unisce anche la timidezza iniziale nel prendere parte alle discussioni collettive e a esporsi nei momenti di restituzione alla classe, è naturale che ne risulti una comunicazione tra pari e con l'insegnante davvero poco efficace. La comprensione dell'oggetto della comunicazione costituisce prerequisito essenziale alla comunicazione stessa: in parole povere, bisogna avere capito prima di parlare! Su tutti questi aspetti si lavorerà con maggiore attenzione nei giorni seguenti.

Un altro elemento di interesse emerso fin da subito riguarda la tendenza all'inattività dei gruppi di lavoro nei momenti di autonomia. Innanzitutto, lasciare un compito al gruppo senza stabilire un tempo limite non si rivela certo una buona scelta, anzi, costituisce un ostacolo per il gruppo, che non è in grado di organizzare in proprio la gestione del tempo.[2] A tal proposito è risultato fondamentale l'aver assegnato dei ruoli ben precisi ai componenti dei singoli gruppi: i responsabili dei diversi ambiti controllano ciascuno ciò che è di loro competenza, ma non devono svolgere in prima persona tutto il lavoro, sostituendosi agli altri. In particolare, quando è stato chiesto di preparare il momento di comunicazione iniziale sul caso assegnato, è stato specificato che a parlare al resto della classe, a nome del gruppo, sarebbe stato il responsabile della comunicazione: ciò ha obbligato tutti a lavorare per aiutare il compagno, che diventa così egli stesso elemento attivo di stimolo, spronando gli altri componenti a collaborare.

A seguito degli interventi dei professori di scienze e italiano, nel secondo giorno di attività, viene dedicata un'ulteriore ora alla comprensione dell'aspetto matematico: dietro la guida dell'insegnante, alcuni gruppi si alternano nel riproporre il ragionamento probabilistico soggiacente alla costruzione dello schema ad albero. Si tratta di un momento particolarmente faticoso, al termine del quale tutti hanno costruito il proprio schema ad albero e compreso, chi più chi meno, la sua logica. Le difficoltà emerse in questa fase sono le seguenti:

- uso impreciso di termini tecnici (specificità, sensibilità, valore predittivo positivo) legato a una insufficiente comprensione del loro significato probabilistico;[3]

- confusione tra probabilità dell'intersezione di eventi e probabilità condizionata (un errore che si presenta spesso è quello di scambiare la probabilità dell'evento A dato l'evento B con

[1] In un argomento complesso come quello della probabilità condizionata, il senso è facilmente sacrificabile: la strada della comprensione concettuale è faticosa e piena di ostacoli, sia didattici che epistemologici; non banale nemmeno la padronanza della conversione tra registri semiotici richiesta per un uso efficace dello schema ad albero. In un insegnamento troppo orientato ai prodotti, questo mi sembra un argomento in cui l'affidarsi a formule pronte permetta di raggiungere l'obiettivo metadidattico (il voto), evitando di passare per quello didattico (l'effettivo apprendimento).

[2] Credo manchi in generale un'abitudine al lavorare in gruppo in modo efficace: non è un'abilità che si sviluppa da sola. Come metodologia, potrebbe entrare nella quotidianità della classe, a patto che venga gestita dall'insegnante in maniera esplicita, fatta oggetto di discussione.

[3] Attribuzione causale fin troppo lapidaria, io stesso ho avuto difficoltà a fare mio l'uso di questi termini tecnici, ho avuto bisogno di tempo e di rifletterci autonomamente. Il tirocinante (l'insegnante) ha tutta una serie di motivazioni (anche esterne) che "obbligano" la devoluzione dell'apprendimento (tornerò più avanti su questo curioso aspetto su cui ho avuto modo di riflettere nel corso del tirocinio), ma lo studente è in una posizione ben diversa. Nell'attività, la comprensione di questi termini era cruciale, e avrebbe forse richiesto un momento di lavoro dedicato.

la probabilità di A e B; in particolare nel caso dei test per l'HIV si confonde la probabilità per un individuo di un certo campione di essere infetto sapendo di aver ricevuto un esito positivo con la probabilità di essere infetto e positivo);

- difficoltà nel replicare il ragionamento probabilistico in autonomia (il terzo gruppo in ordine di esposizione ancora non riesce a costruire l'albero senza aiuto da parte dell'insegnante, pur essendo uguale a quello presentato dai gruppi precedenti).[4]

Nel pomeriggio i gruppi vengono lasciati liberi di lavorare sulla stesura della sceneggiatura, per procedere poi nei giorni seguenti alla realizzazione effettiva del filmato. In questa fase, che impegna il tempo maggiore dell'attività di laboratorio, i ragazzi si avvalgono del supporto del docente di italiano e del responsabile del laboratorio, che intervengono sia attivamente sia dietro richiesta nei vari gruppi per eventuali chiarimenti e per monitorare lo stato dei lavori. Emergono diversi elementi di interesse:

- tutti gli studenti sono concentrati e operativi, compresi i ragazzi che inizialmente parevano più svogliati, perché i gruppi hanno ora un obiettivo concreto, un prodotto da realizzare entro una scadenza fissata (il pomeriggio del quinto giorno, l'ultimo). Sicuramente influisce positivamente la rilevanza dei temi trattati, che hanno forti legami con l'attualità, e in cui la matematica si insinua in aspetti della realtà a volte inaspettati, come si evince leggendo i diari di bordo di alcuni studenti;

- progressivamente viene a cadere una credenza della nostra epoca digitale, nella quale i reel e gli short sui social sono tanto popolari tra i giovani: all'immediatezza comunicativa di un prodotto audiovisivo non corrisponde un'immediatezza di progettazione e realizzazione (a patto che ci sia l'intenzione di trasmettere un contenuto significativo in maniera efficace, evidentemente); si scopre invece come dietro a un breve filmato, in particolare se di divulgazione, vi sia un lavoro molto approfondito di ricerca e analisi di testi;

- si presenta un aspetto della matematica in genere del tutto ignoto agli studenti: comunicare matematica è difficile, soprattutto a un pubblico non specialistico.[5] Per realizzare un buon filmato è indispensabile che il testo della parte matematica presenti un'argomentazione chiara, semplice, coerente e coesa. Per rispondere a questa esigenza è necessaria, insospettabilmente, anche una buona capacità di produzione di un testo! Quest'ultima mi sembra essere particolarmente carente negli studenti, che appartengono pur sempre a classi quarte di un liceo scientifico: le bozze di sceneggiatura contengono errori ortografici e morfosintattici, ma soprattutto non sono coese. Infatti, mancano i connettivi e a volte interi passaggi logici: su questo punto in particolare si concentra l'intervento dell'insegnante, che, piuttosto che apportare correzioni, rende consapevoli i ragazzi di tali

[4] Replicare? L'obiettivo non è certo replicare, ma ricostruire da sé. Se non altro, l'episodio conferma lo scarso valore didattico dell'imitazione, che si palesa soprattutto in argomenti complessi, dove nessuna strategia metadidattica può camuffare la mancanza di senso: situazioni analoghe, rappresentazioni analoghe, eppure...

[5] Ignoto principalmente perché, tra le molte componenti dell'apprendimento in matematica, quella comunicativa è spesso ignorata dall'insegnante, che si fa carico completamente dell'interpretazione delle produzioni degli studenti, scritte o orali che siano, rimanendo di fatto l'unico detentore della capacità comunicativa. Io per primo mi sono reso conto di avere questo dannoso vizio, e, nel corso del tirocinio, a una acquisizione di consapevolezza ho cercato di far seguire uno sforzo esplicito di autocontenimento, ma c'è ancora molto da fare. Anche su questo punto tornerò più avanti.

mancanze e li sprona a intervenire con una revisione del testo.

Riassumendo, è chiaro anche a un osservatore superficiale che ciò a cui si assiste in questi pochi giorni di laboratorio è un processo di apprendimento estremamente dinamico e variegato quanto inusuale per la classe tradizionale: c'è l'interazione tra pari, in cui ognuno mette a disposizione proprie conoscenze, abilità e competenze;[6] c'è l'interazione e il confronto con l'insegnante, che fornisce continui riscontri e suggerimenti, limitando il più possibile interventi diretti di correzione e spiegazione; c'è la ricerca e l'approfondimento personale, sia nella stesura del testo che nell'esplorazione degli aspetti tecnici necessari alla realizzazione del filmato. Insomma, è evidente la centralità dello studente, che viene posto in un ambiente in cui c'è ampio spazio - e tempo - per la costruzione attiva di significati e competenze.

I risultati positivi di tale esperienza sono evidenti anche nei prodotti finali realizzati dagli studenti: tutti hanno prodotto un filmato quantomeno discretamente efficace dal punto di vista della comunicazione, ponendo al centro l'aspetto matematico; gli obiettivi del laboratorio si possono quindi considerare, se non totalmente, almeno parzialmente raggiunti.

In conclusione, una nota di colore emersa dai diari di bordo: sono diversi i ragazzi che si dichiarano molto soddisfatti del filmato realizzato e del laboratorio in generale, nonostante - e sottolineo, nonostante - le aspettative, nella formazione delle quali peso particolare sembra aver avuto la scarsa fiducia, perlomeno in fase iniziale, nelle capacità del proprio gruppo - formato a volte da studenti che non si conoscevano - di portare a termine un simile lavoro.

[6] Forse ridondante. La competenza include già conoscenza e abilità, sapere e saper fare, una distinzione ormai superata seguendo [D'AMORE et al., 2003] e [FANDIÑO PINILLA, 2023a].

2 Funzioni e grafici

Nel corso dei mesi di aprile e maggio 2024 ho avuto l'occasione di sperimentare un percorso didattico su funzioni e grafici, lavorando con la prof.ssa Letizia Corazzolla del Liceo G. Galilei di Trento in una delle sue classi, una seconda di liceo scientifico, opzione scienze applicate. L'attività si è svolta in modo continuativo nelle ore curricolari di matematica, per un totale di 17 ore distribuite su poco più di un mese, dal 15 aprile al 17 maggio.[7] Il percorso ha preso il via da un laboratorio preesistente, dal titolo *Funzioni e grafici*, che era stato oggetto di studio nel corso *Laboratory Techniques for Mathematics Teaching* tenuto dalla prof.ssa Ossanna. Il laboratorio, brevemente descritto nella sezione seguente, ha costituito il punto di partenza di un percorso di introduzione alle funzioni, alla lettura dei loro grafici, per arrivare infine a una risoluzione consapevole di disequazioni e sistemi di disequazioni razionali.

Il tratto distintivo della sperimentazione di questo laboratorio è stato, credo, la dinamicità. Infatti, ho avuto modo di partecipare alla progettazione dell'attività, di tenere io stesso una parte delle lezioni, o, in altri momenti, di assistere Letizia ed Elisabetta, e di osservare gli studenti al lavoro. Alla fine di ciascuna lezione, ci confrontavamo per discutere i punti di forza e di debolezza dell'incontro appena terminato, per interpretare eventuali difficoltà, e soprattutto per ridefinire le attività e i compiti della lezione successiva: l'insegnante potrà anche avere in mente la scaletta della lezione perfetta, ma, una volta entrati in classe, non si sa mai cosa può succedere. In base alle reazioni degli studenti alle attività proposte, gli incontri potevano prendere anche pieghe del tutto inaspettate, costringendoci a cambiare continuamente in corso d'opera le strategie ed eventualmente anche a ripianificare gli interventi successivi.

La scelta di presentare i contenuti e le mie osservazioni in forma di diario, incontro per incontro, è stata presa a scapito della chiarezza per cercare di salvaguardare questa componente di dinamicità, di revisione continua, di lavoro sempre in divenire, che temevo potesse perdersi proponendo un resoconto più organico. Nel seguito riporto quindi, dopo una breve introduzione al laboratorio stesso, una rielaborazione - di forma, più che di contenuto - degli appunti che ho preso giorno per giorno nel corso dell'attività.

2.1 Contenuti e obiettivi

Il laboratorio *Funzioni e grafici* vuole introdurre il concetto di funzione e le sue possibili rappresentazioni, per arrivare alla fine al grafico cartesiano. L'obiettivo principale è far sì che gli studenti abbiano delle motivazioni valide per l'uso della rappresentazione cartesiana e com-

[7] In questo capitolo, per "ore" si intende "ore scolastiche", della durata di 50 min nel liceo in cui si è tenuto il laboratorio.

prendano il significato di grafico cartesiano, sapendo cogliere le informazioni che da esso si possono leggere in riferimento alla funzione rappresentata. Si evita inizialmente di introdurre funzioni per mezzo dell'espressione analitica, per evitare la formazione della misconcezione che le funzioni possano essere definite esclusivamente tramite un algoritmo, e per prevenire un diffuso cortocircuito: come dare senso all'espressione analitica, se prima non si è fatto proprio il concetto di funzione?

Il laboratorio mette al centro alcune delle difficoltà tipiche dell'insegnamento-apprendimento delle funzioni:

- in geometria analitica abbiamo espressioni (parole) ibride come "l'equazione di una retta" la cui interpretazione è possibile solo attraverso un dialogo tra il registro algebrico e il registro geometrico. Uno degli aspetti importanti del grafico è la sua natura geometrica che rende possibile visualizzare alcune delle proprietà della funzione che non sono facilmente riconoscibili nella sua espressione analitica;

- sembra che per gli studenti manchi una relazione esplicita tra funzione, grafico, ed eventuale rappresentazione algebrica;

- difficoltà a interpretare le informazioni grafiche in termini di funzione; gli studenti in generale non considerano il grafico di una funzione come la rappresentazione della relazione che esiste tra le variabili e non sono in grado di spostarsi dall'una all'altra; hanno problemi a cogliere l'idea di funzione come relazione tra variabili (una dipendente dall'altra), favorendo invece una visione discreta (una funzione mette in relazione coppie separate di numeri, ogni numero può essere considerato come un input che dà come risultato un altro numero, ovvero gli alunni ritengono che esista una relazione tra i numeri, ma la relazione è concepita separatamente per ogni coppia).

La nozione cruciale dell'idea di funzione è quella di variazione o più precisamente di covariazione, cioè relazione tra due variazioni. Infatti uno scopo dell'oggetto matematico funzione è presentare come cambiano le cose. Le caratteristiche dinamiche dei sistemi di geometria dinamica (nel nostro caso, *GeoGebra*) possono fornire la visualizzazione di ciascuna variazione e della dipendenza tra le due variazioni.

Alla base del laboratorio si situa la seguente ipotesi: la mancanza di esperienza di dipendenza funzionale in modo qualitativo può essere considerata una fonte di difficoltà degli studenti. Questo è il motivo per cui assumiamo che sia importante iniziare in un ambiente che fornisca un'esperienza qualitativa di dipendenza funzionale indipendentemente da un contesto numerico. La definizione moderna di funzione - come relazione tra due insiemi, cioè insieme di coppie ordinate di un prodotto cartesiano di due insiemi - non coglie l'idea di base di funzione come relazione di dipendenza tra variabili. Inoltre, l'idea di variazione è facilmente comprensibile quando è coinvolta una certa continuità (in senso ingenuo), e per questo motivo il percorso che abbiamo sperimentato in aula prende il via da un fenomeno (contesto non numerico) con una certa "continuità": il moto di un carrello legato a una molla lungo un binario inclinato.

2.2 Diario di bordo

2.2.1 I incontro - 3 ore - Lunedì 15 aprile

La classe viene divisa in gruppi da quattro studenti ciascuno; tutti hanno a disposizione un computer con un libro *GeoGebra*, ovvero un insieme di attività e grafici interattivi. Inizialmente viene mostrato il video del moto di un carrello vincolato da una molla su un binario inclinato (il comportamento della molla viene anche illustrato ricorrendo a una molla giocattolo in plastica colorata). Gli studenti sono poi lasciati liberi di esplorare un applet *GeoGebra* (figura 1) contenente una rappresentazione molto particolare della posizione del carrello in funzione del tempo (ovviamente per il momento non si parla di funzione, ma solo di rappresentazione del fenomeno, in generale): si tratta del cosiddetto "grafico in parallelo", in cui l'asse arancione rappresenta il tempo e quello blu la posizione del carrello.

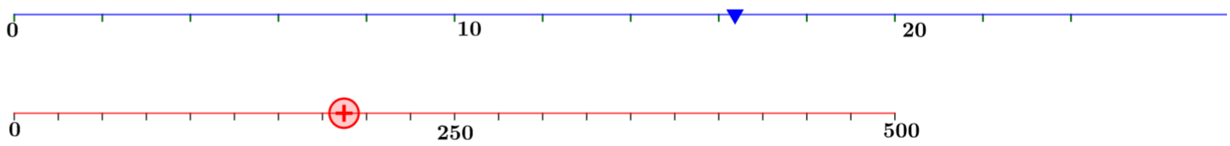


Figura 1

Trascinando il cursore rosso a forma di croce, il triangolo blu si muove di conseguenza, indicando la posizione del carrello nell'istante individuato dal cursore rosso. Evidentemente, non è possibile agire direttamente sul triangolo blu, che rappresenta appunto la variabile dipendente. Gli studenti sono invitati a rispondere alle seguenti domande, cui fa seguito una discussione con tutta la classe:

1) Cosa in questa rappresentazione potrebbe rappresentare il tempo? Cosa la posizione?

2) I punti presenti hanno la possibilità di muoversi? In che modo?

3) Siete d'accordo sul fatto che questo grafico rappresenti il fenomeno? Motiva la tua risposta.

L'obiettivo della discussione è capire perché non sia possibile scegliere la posizione e determinare l'istante di tempo di conseguenza, facendo emergere la presenza di un rapporto di dipendenza, nonché le evidenti limitazioni della rappresentazione in parallelo (non è possibile leggere la direzione del moto, la velocità, il numero di volte che si passa per uno stesso punto a meno di far ricorso alla dinamicità, confrontando con istanti di tempo precedenti/successivi).

Nella fase esplorativa, un ragazzo insisteva nel tentativo di muovere il triangolino blu, che rappresenta la posizione. Proseguendo con l'esplorazione, e dietro esortazione dell'insegnante, scopre che può spostare la croce rossa che rappresenta il tempo, e che la posizione varia di conseguenza. Nella discussione, emerge che *se muovessi il triangolino blu, la croce rossa non mi* *verrebbe dietro* perché *alla stessa posizione corrispondono più tempi* e *se muovessi il triangolino blu solo in avanti andrebbe bene, ma rappresenterei solo una parte del fenomeno* (riferimento, ovviamente inconsapevole, a una restrizione iniettiva). In maniera del tutto naturale, nel corso della discussione trovano posto espressioni come *dipende da*, *funzione di*, *associato a*, *a seconda di*, *in base a*, *a sua volta* che fanno riferimento al concetto di dipendenza funzionale.[8]

La seconda parte del laboratorio consiste nella lettura di informazioni dalla rappresentazione in parallelo. Gli studenti hanno a disposizione un video di una passeggiata, con relativo grafico del numero di passi in funzione del tempo (figura 2). La richiesta è quella di ricostruire fisicamente la passeggiata, rispettando tempi e velocità. In seguito, gli studenti dovevano ricostruire una seconda passeggiata, ma basandosi unicamente sul grafico in parallelo, senza avere a disposizione il video. Il metodo adottato bene o male da tutti i gruppi è stato quello di posizionare il cursore su ciascun secondo, leggere il numero di passi, annotare il dato in una tabella, per poi segnare per terra i passi con lo scotch e ricostruire la passeggiata, con uno studente deputato a tenere il tempo, ad esempio battendo le mani (questo incontro è l'unico che non si è svolto in aula, ma in un salone molto ampio del liceo, in cui tutti i gruppi avevano spazio sufficiente per lavorare contemporaneamente).

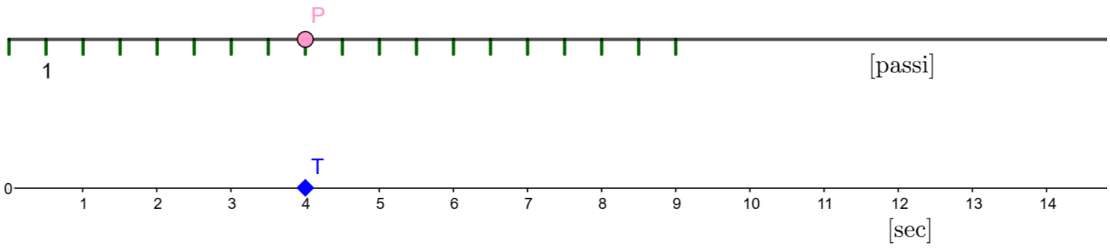


Figura 2

La terza parte dell'attività è finalizzata all'introduzione della rappresentazione cartesiana. Sul pavimento sono stati segnati con dello scotch i due assi del grafico in parallelo del moto del carrello (con opportuni aggiustamenti di scala). Gli studenti si sono disposti a coppie (circa una decina) sugli assi, ognuno rappresentando un'assegnata coppia (tempo, posizione), collegati da un filo. Il risultato è un intreccio caotico di fili: si chiede agli studenti se hanno idee per migliorare la situazione. Idealmente, tutti gli studenti "posizione" dovrebbero disporsi di fronte al corrispondete studente "tempo", sbrogliando l'intreccio. In tal modo, però, l'informazione sulla posizione viene persa (si è costretti a tenerla a mente), ma il filo conserva la relazione. L'idea a questo punto è di trasferire questa informazione nel filo, tendendolo perpendicolarmente

[8]Nel corso della discussione notiamo una forte tendenza a esprimersi in termini di x e y, in riferimento agli assi cartesiani, che ovviamente gli studenti hanno già incontrato in altri contesti (lezioni passate di matematica, ma anche in fisica, e alle scuole medie). Per l'esperto, si tratta di un innocuo abuso di linguaggio, ma per lo studente potrebbe celare un "congelamento" del piano cartesiano e della sua versatilità: l'asse delle ascisse e delle ordinate possono rappresentare variabili numeriche o grandezze qualsiasi, che non per forza sono indicate da x e y. Cosa accadrà quando lo studente si troverà a dover invertire una funzione? Si tratta di una misconcenzione evitabile, causata dalla prassi di un uso, spesso acritico, di rappresentazioni stereotipate, anche legate alle espressioni analitiche delle funzioni.

all'asse dei tempi per una lunghezza pari alla posizione. Infine, agli studenti doveva essere chiesto di riprodurre il grafico ottenuto su un cartellone.

Purtroppo, la prima parte del laboratorio ha richiesto più tempo del previsto, e di conseguenza l'attività con i fili è stata fatta alla fine del blocco di tre ore, momento in cui la classe era stanca e poco collaborativa, ed è risultata un po' confusionale (non poteva essere rimandata per motivi contingenti, il salone non era più disponibile, e l'aula era troppo piccola). In particolare, è risultato difficile comprendere il passaggio in cui il filo passa dal rappresentare la sola relazione a rappresentare la relazione e il valore della posizione associata, mediante la propria lunghezza. Ne concludiamo che perché questa attività riesca bene, c'è bisogno di più tempo e calma, e di riflettere con gli studenti su ciascun passaggio. Lungi dal farci abbattere dallo sconforto, per non perdere del tutto il potenziale didattico dell'esperienza, a Elisabetta è venuta un'idea per riprendere l'attività in classe nell'incontro successivo, prima di passare ai cartelloni (vedi sezione successiva).

Alla fine dell'incontro abbiamo lasciato agli studenti alcune domande di compito:

1) Ripensa all'attività svolta oggi in classe. Abbiamo visto il grafico in parallelo che rappresenta il movimento del carrello, quali sono i limiti della rappresentazione in parallelo?

2) Nella seconda parte della lezione vi siete disposti su due linee, una rappresentava il tempo e l'altra la posizione. Spiega come vi siete disposti e cosa rappresenta ogni coppia di studenti legati dal filo.

3) Spiega come si potrebbe risolvere il problema di intreccio dei fili.

Interessante come nel rispondere alla prima domanda, in generale gli studenti elenchino le informazioni di difficile lettura dal grafico in parallelo, ma senza porre l'attenzione sul fatto che sia comunque possibile ricavarle sfruttando la dinamicità della rappresentazione, mentre un uso statico, ovvero la visualizzazione di una sola coppia (tempo, posizione), non lo permette. Inoltre, una costante nelle risposte degli studenti è la questione legata alla precisione dei valori di tempo e posizione, del tutto irrilevante nel contesto del laboratorio: il fatto che non sia possibile leggere la "misura esatta", ma solo una stima più o meno grossolana (si veda nuovamente la figura 1), è visto come un limite della rappresentazione.[9] Ecco alcune delle risposte degli studenti (riportate senza alcuna modifica o correzione):

- *non si può capire la direzione, non si può capire il punto in cui si ferma, dalla scala non si capisce la misura esatta, non si può capire quando l'oggetto si muove avanti e indietro e di quanto*;

- *non si può capire la direzione in cui il carrello si muove. Non si capisce il punto in cui il carrello si ferma per poi tornare indietro. Per farlo, bisogna per forza spostare in avanti*

[9]Trovo questo aspetto particolarmente interessante perché è sorto spontaneamente dagli studenti; in alcun modo noi abbiamo fatto riferimento alla precisione della misura, o posto l'attenzione sul fatto che la rappresentazione non permettesse di leggere il valore preciso, perché di fatto non era di interesse. Questa esigenza di precisione - che tra l'altro, in generale, non viene soddisfatta nemmeno dal grafico cartesiano - potrebbe essere legata a una qualche clausola del contratto didattico: in matematica bisogna fornire risposte precise, dire il "numero esatto", non è permesso ragionare in modo qualitativo o fare delle stime.

il cursore. Dalla scala, non si può capire la misura esatta;

- *il grafico in parallelo non era molto chiaro, perché: non si può capire la direzione in cui il carrello si muove, non si capisce quando cambia verso, a causa della scala usata non si capisce la misura esatta*;

- *il grafico in parallelo ci impedisce di capire la direzione (avanti/indietro) del carrello, non si capisce se il carrello passa sugli stessi punti più di una volta, non si capisce inoltre il punto in cui esso si ferma*;

- *durante l'attività svolta in classe abbiamo riscontrato dei limiti per la rappresentazione in parallelo. Un problema riscontrato è che non possiamo dedurre se il carrello si è spostato in avanti oppure indietro e di quanto. Un altro limite riscontrato è che dalla scala, utilizzata per il grafico, non si riesce a dedurre la misura esatta e quindi dove si ferma esattamente il carrello*;

- *il limite è che più punti della linea superiore corrispondono a uno stesso valore nella linea sottostante.*[10]

Nella seconda domanda, quasi tutti gli studenti fanno riferimento esplicito alla relazione tempo-posizione, mostrando di aver compreso cosa si voleva rappresentare con la coppia unita dal filo:

- *ci siamo disposti lungo due linee su cui erano segnati dei valori diversi, relativi rispettivamente al tempo e alla distanza. Ogni coppia di studenti rappresentava una coppia di valori tempo-distanza e si disponeva sui relativi valori tempo-distanza delle linee disegnate per terra (tutto ciò leggendo i dati di un grafico a linee parallele). Le coppie erano collegate da un filo e abbiamo notato che i fili tra di loro si intrecciavano*;

- *ci siamo disposti su due linee parallele rappresentanti una il tempo e l'altra la distanza. Noi, disposti a coppie e uniti da un filo, rappresentavamo una coppia di valori tempo-distanza in relazione*;

- *ci siamo disposti in due file una di fronte all'altra, per terra c'erano due strisce di scotch attaccate (una striscia per fila), con su scritte diversi dati che corrispondevano alla posizione e al tempo. Abbiamo creato delle coppie e ogni coppia si posizionava in una posizione e nel suo rispettivo tempo. Ogni coppia aveva un filo che si intrecciavano tra di essi*;[11]

- *ci siamo disposti in modo che ogni coppia di studenti rappresentasse un istante di tempo e la posizione del carrello in quel momento, ogni coppia era legata da un filo che rappresentava la relazione tra le due misure che sono tempo e posizione.*

[10] Quest'ultimo non costituisce un limite di per sé, il problema è che per capire quante volte il carrello passa per uno stesso punto si è costretti a percorrere tutto l'asse dei tempi, sfruttando ancora una volta l'elemento dinamico. Si tratta comunque di un problema che viene risolto adottando la rappresentazione cartesiana.

[11] In realtà, sulle strisce di scotch erano segnati solo i valori in corrispondenza delle tacche degli assi: si noti la difficoltà nel descrivere e comunicare efficacemente usando i termini tecnici del linguaggio matematico, una difficoltà che è stata riscontrata e fatta oggetto di attenzione esplicita durante tutte le attività del tirocinio, e sui cui tornerò più avanti. In ogni caso lo studente mostra di aver compreso l'aspetto funzionale, come denota l'uso del termine "rispettivo".

Come ci aspettavamo, il terzo quesito ha ricevuto una serie di risposte non soddisfacenti, anche se qualche studente mostra comunque di aver compreso il passaggio verso la rappresentazione cartesiana:

- *per risolvere il problema dell'intreccio senza sciogliere il legame nelle coppie, si può misurare con il filo la distanza di un punto sulla linea della distanza da punto 0 e posizionarsi in seguito uno di fronte all'altro mantenendo la distanza rilevata prima con il filo. In questo modo non si perde la relazione tra tempo e distanza e i fili non si intrecciano*;

- *Il problema si potrebbe risolverlo tramite: ogni coppia che aveva con sé un filo dovevano cercare una posizione in cui le due persone si trovavano di fronte e quindi il filo risultava parallelo in verticale e la stessa cosa lo facevamo con le altre coppie. Abbiamo poi ragionato per arrivare ad una soluzione: ogni coppia doveva mantenere gli stessi dati (cioè a ogni dato del tempo doveva corrispondere un dato di posizione). I fili tirati dovevano essere ordinati e non intrecciati l'uno all'altro. Abbiamo così trovato una soluzione la quale consisteva nel misurare con uno spago la distanza dal punto zero dalla linea della posizione fino al dato della posizione del tempo richiesto e così mettendo di fronte i due membri alla distanza dello spago abbiamo disfato il groviglio.*[12]

2.2.2 II incontro - 1 ora - Mercoledì 17 aprile

Decidiamo di ripercorrere l'attività con i fili riproducendola alla LIM, muovendo degli omini stilizzati per simulare le azioni compiute dagli studenti nell'incontro precedente. Inizialmente, prendiamo in considerazione solo tre coppie di studente, e, dietro indicazione degli studenti, le posiziono sugli assi, collegandole con un segmento che rappresenta il filo (figura 3).

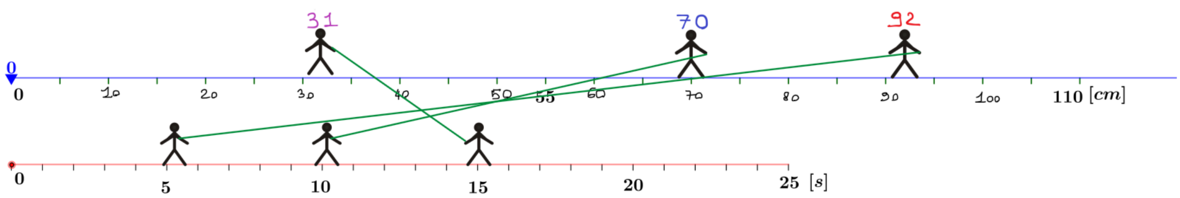


Figura 3

Per sbrogliare l'intreccio, disponiamo gli omini posizione di fronte ai rispettivi omini tempo: in questo modo viene persa l'informazione sulla posizione, che gli omini sono costretti a tenere a mente (figura 4).

[12]Risposta di difficile lettura a causa della sintassi e della costruzione della frase un po' "libera", ma si deve apprezzare il grande sforzo dell'autore nel descrivere con precisione tutti i passaggi che hanno portato a sbrogliare l'intreccio, descrizione tra l'altro corretta. Si noti anche l'espressione "parallelo in verticale", un esempio di mescolamento di linguaggio naturale e termini tecnici della matematica; in questo caso, però, il senso è mantenuto.

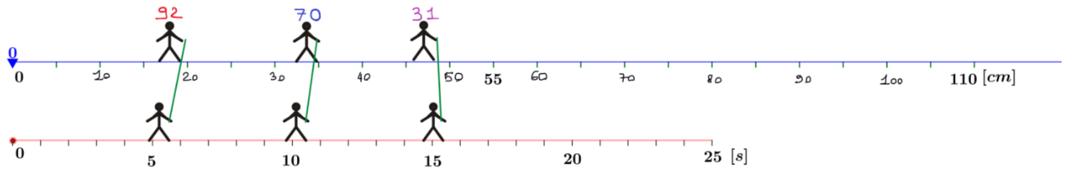


Figura 4

Per recuperare l'informazione sulla posizione prendiamo il filo virtuale di una coppia, posizioniamo un estremo sullo zero dell'asse della posizione e lo allunghiamo o accorciamo in maniera tale che l'altro estremo finisca proprio sul valore della posizione della coppia considerata. A questo punto, mantenendo l'omino posizione di fronte al rispettivo omino tempo, lo disponiamo a una distanza pari a quella del filo (figura 5).

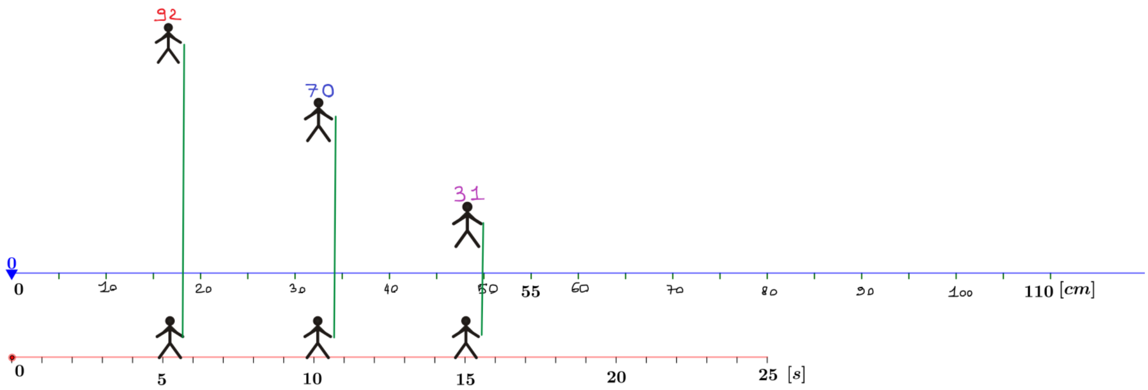


Figura 5

Infine, per riprodurre la situazione cui avremmo dovuto giungere nello scorso incontro, aggiungiamo le altre coppie di studenti (figura 6).

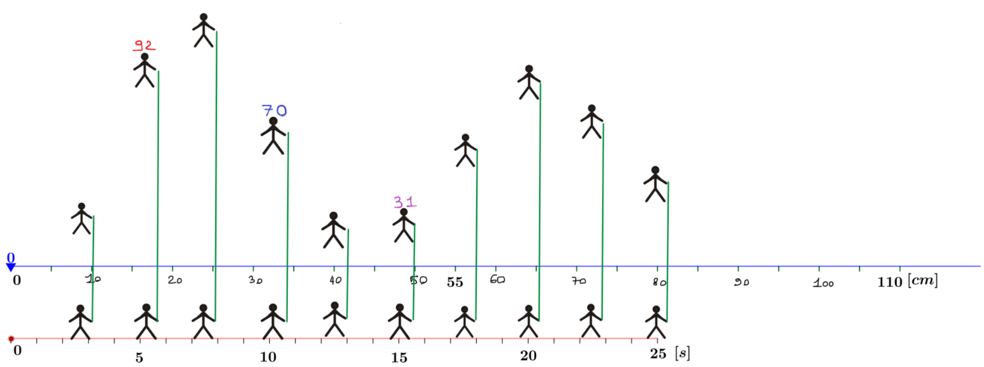


Figura 6

Risulta evidente, nel corso dell'attività, come alcuni passaggi non fossero chiari a tutti gli studenti, e come la dinamicità della rappresentazione con gli omini favorisca la comprensione. Decidiamo quindi di procedere alla realizzazione di un cartellone: la classe viene divisa in quattro gruppi, e a ciascuno vengono assegnati quattro o cinque istanti di tempo con la relativa posizione, sempre inerenti il fenomeno del moto del carrello. La richiesta è di tagliare fili di rafia della lunghezza opportuna e di posizionarli sul cartellone correttamente (in fondo è stato incollato un metro di carta come asse dei tempi, dove i centimetri sono diventati secondi). A causa del poco tempo a disposizione, distribuiamo tre cartelloni trasparenti e uno cartaceo, in modo tale che alla fine si possa assemblare un unico cartellone incollando quelli trasparenti sopra quello cartaceo (figura 7; è stato lasciato appeso in classe per avere un riferimento durante gli incontri successivi). Infine, avviamo una discussione sui problemi della rappresentazione in parallelo che sono stati risolti da questo nuovo tipo di grafico (che ancora non è quello cartesiano, manca un ultimo passaggio, che non abbiamo avuto tempo di compiere in questo secondo incontro: eliminare i fili in favore dei loro estremi, che bastano per rappresentare l'informazione, a patto di introdurre anche l'asse delle ordinate).

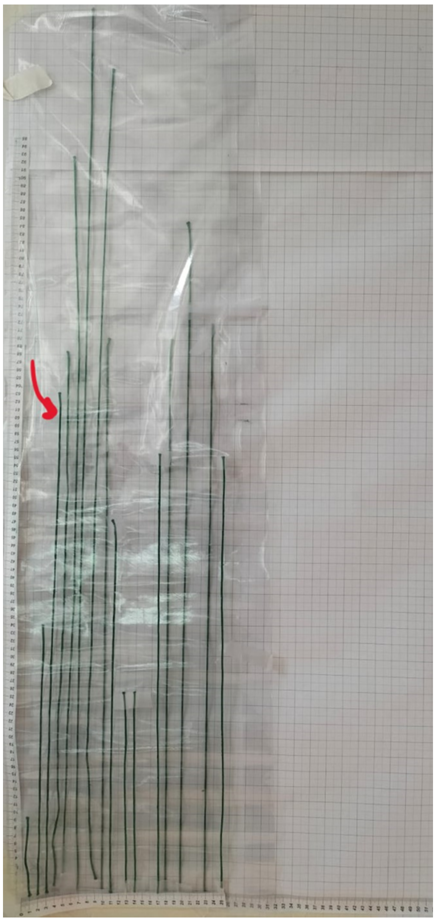


Figura 7

Durante la discussione, inevitabilmente i ragazzi hanno fatto riferimento alle conoscenza pregresse sul piano cartesiano, tant'è vero che, come si vede anche dalla figura 7, il gruppo che aveva il cartellone ha deciso autonomamente di incollarci un asse delle ordinate, usando il metro di carta aggiuntivo che avevamo fornito per misurare la lunghezza dei fili!

Alla fine, agli studenti abbiamo lasciato alcuni compiti:

1) Descrivi i diversi passaggi dell'attività di rappresentazione del moto del carrello con i fili che abbiamo svolto in aula corredando ciascuna delle immagini di una didascalia.[13]

2) Nell'immagine allegata[14] è rappresentato il grafico a fili costruito in aula. Spiega come abbiamo fatto a costruirlo e spiega cosa rappresenta il filo indicato dalla freccia.

3) Rappresenta sul quaderno, mediante il grafico con i fili, la passeggiata che abbiamo riprodotto in classe durante la lezione di lunedì. Scegli almeno otto istanti di tempo. Per i dati utilizza l'applet al seguente link.[15]

Un compito come il primo[16] fornisce all'insegnante moltissime informazioni sul livello di apprendimento raggiunto dallo studente. Infatti, costringe lo studente a mettere in cambio le proprie capacità di argomentazione e di descrizione, ovvero a comunicare matematica in una forma meno codificata, quella testuale, contribuendo a svelare i propri processi e modelli interni. Ecco un esempio di descrizione particolarmente ben fatto: *all'inizio dell'attività, ci siamo suddivisi in coppie. Ogni coppia era collegata da un filo, il quale simboleggiava la correlazione tra una misura del tempo e la relativa misura della posizione. Tuttavia, quasi immediatamente, ci siamo accorti di un problema: i fili erano tutti intrecciati. Per risolvere l'intreccio dei fili, prima di tutto, ogni persona della coppia si è posizionata di fronte all'altra. Questo cambiamento nella disposizione ha comportato una variazione nell'informazione rappresentata, poiché la distanza tra lo zero dell'origine della linea blu e la posizione del carrello in quel secondo non è stata più mantenuta. Di conseguenza, ogni membro della coppia si è allontanato l'uno dall'altro in modo tale che la lunghezza del filo corrispondesse esattamente alla distanza tra l'origine della linea di posizione e la posizione del carrello in quel determinato secondo.*

2.2.3 III incontro - 1 ora - Venerdì 19 aprile

L'incontro si apre con una discussione sul lavoro svolto dagli studenti per compito, per passare poi alla spiegazione di un tool *GeoGebra* creato appositamente da noi per il laboratorio: con questo strumento è possibile creare in automatico dei segmenti verticali, così da permettere agli studenti di agire su un applet *GeoGebra* nello stesso modo in cui hanno agito per preparare il cartellone. Proviamo insieme a usare lo strumento sull'applet della passeggiata (figura 8) e, successivamente, passiamo dai fili ai punti, introducendo anche l'asse delle ordinate. Muovendo il cursore e attivando la traccia per l'estremo superiore del segmento, otteniamo il grafico della funzione: siamo giunti alla rappresentazione cartesiana.

[13] Le immagini sono le figure dalla 3 alla 6.

[14] Figura 7.

[15] Ci si riferisce alla passeggiata simulata nel primo incontro: produrre il grafico a fili partendo da quello in parallelo, disponibile in forma di applet *GeoGebra*.

[16] Potrebbe essere collocato nella categoria dei TEP, anche se non abbiamo specificato il destinatario, che quindi di fatto è l'insegnante.

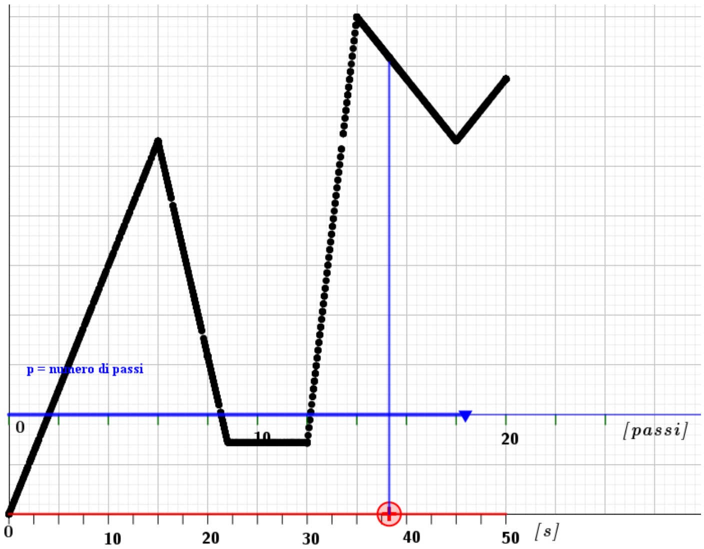


Figura 8

Nel corso della lezione lavoriamo ancora sul cartellone, introducendo gradualmente l'argomento della risoluzione di equazioni e disequazioni con approccio grafico: quante volte il carrello passa dalla posizione 50 cm? Come lo capisco? In quali istanti di tempo il carrello si trova oltre i 40 cm? Quando si trova compreso tra 20 cm e 30 cm?

Infine, esaminiamo alcuni grafici cartesiani di semplici moti (sempre posizione in funzione del tempo, i grafici sono delle spezzate), cercando di descrivere il moto, anche solo qualitativamente, a partire dal grafico. Agli studenti lasciamo un compito a conclusione di questa attività, e chiediamo loro anche di sperimentare con lo strumento fili sull'applet del moto del carrello (figura 9).

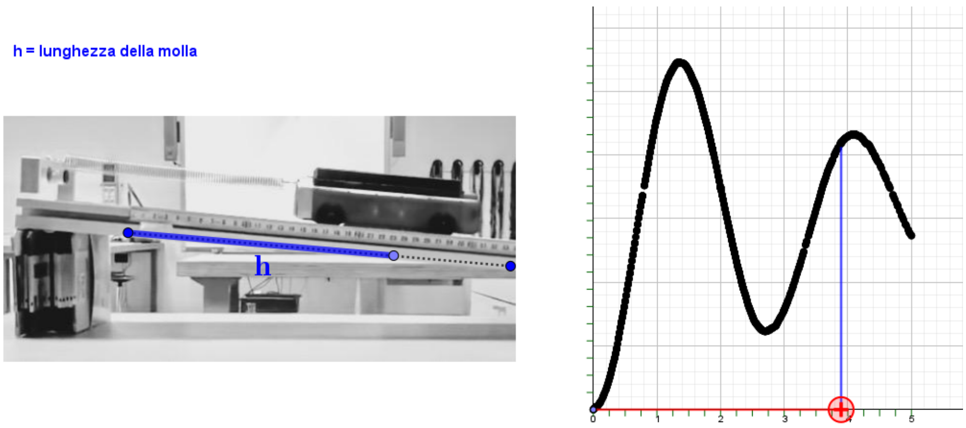


Figura 9

2.2.4 IV incontro - 2 ore - Lunedì 22 aprile

La prima parte dell'incontro è dedicata alla revisione dei compiti, in particolare decidiamo di dedicare ancora del tempo alla lettura dei grafici sui moti. In questi momenti di lezione dialogata, o meglio, di discussione di gruppo, notiamo che non sempre tutta la classe è partecipe, ma anzi tendono a intervenire sempre le stesse persone, come se il resto della classe avesse conferito loro una sorta di delega. Non sempre è facile coinvolgere tutti, ognuno con i propri tempi e le proprie specificità, e gestire questi momenti collettivi è estremamente impegnativo per l'insegnante, che deve essere molto abile a interpretare le reazioni degli studenti sul momento e a prendere in continuazione decisioni su tempi e modalità di intervento.[17] In ogni caso, si vedono i primi risultati dell'attività: chi interviene dimostra di essere in grado di leggere il grafico abbastanza agevolmente, e di essere in grado di rispondere a domande su semplici disequazioni. Sempre protagonista la grande difficoltà nell'esprimersi, nel comunicare; a volte ho l'impressione che sia diffusa una sorta di "pigrizia linguistica", dovuta senz'altro sia alla scarsa abitudine all'argomentare in matematica, soprattutto oralmente, sia alla clausola contrattuale della "devoluzione dello sforzo interpretativo", che vede l'insegnante farsi abitudinariamente carico appunto dello sforzo di interpretare positivamente e riformulare le frasi incomplete e a volte prive di significato degli alunni.

Successivamente, per verificare ulteriormente lo stato dell'apprendimento degli studenti, organizziamo una sorta di gioco a coppie: uno studente ha a disposizione un computer con un applet *GeoGebra* (figura 10) con un grafico cartesiano, e deve descrivere il grafico al secondo studente, che tenterà di riprodurlo, ovviamente senza poter vedere il grafico, ma basandosi unicamente sulla descrizione del compagno; i ruoli vengono poi invertiti.

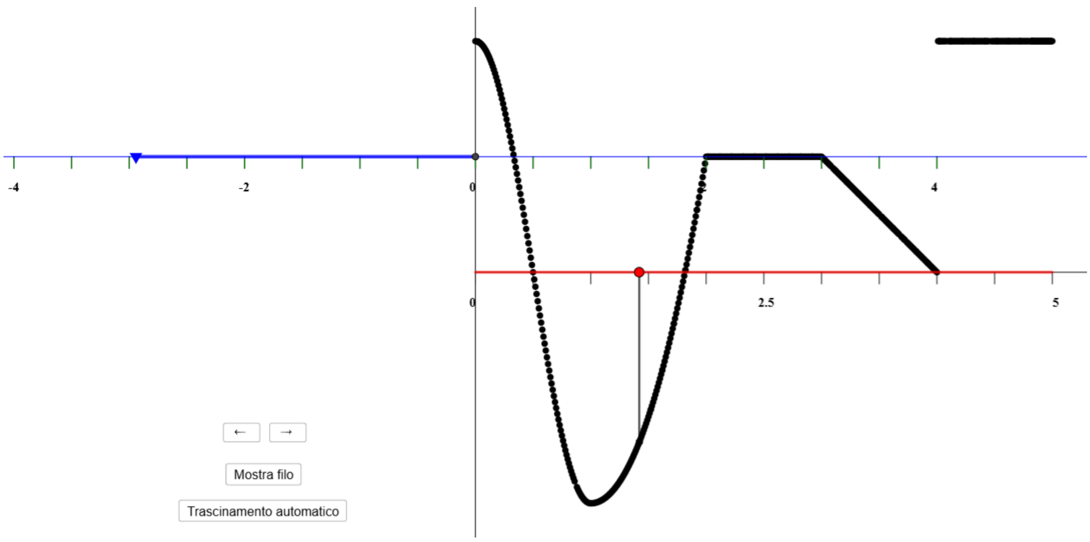


Figura 10

[17] Anche questo è un aspetto su cui ho avuto modo di riflettere nel corso del tirocinio, durante il quale ho assistito o condotto in prima persona momenti collettivi non sempre efficaci, a volte dispersivi. Mi sembra una componente davvero ardua da dominare per l'insegnante, estremamente faticosa, ma allo stesso tempo sfidante e stimolante.

L'esito del gioco è inatteso, probabilmente anche perché non siamo stati abbastanza chiari nella consegna: quasi tutti comunicano al compagno le coordinate di pochi punti del grafico, che provvede poi a unirle tramite segmenti; un comportamento ben lontano da quello atteso. Decidiamo di insistere sulla differenza tra discreto (nel senso di scegliere pochi punti) e continuo (nel senso di dare una descrizione qualitativa dell'andamento complessivo del grafico), illustrando prima un grafico in cui pochi punti sono collegati da segmenti e poi da una curva con ondulazioni, soffermandoci sul fatto che solo nella retta la pendenza è sempre costante, per qualunque coppia di punti.

2.2.5 V incontro - 2 ore - Venerdì 26 aprile

A questo incontro non ho potuto essere presente, ma ho pensato di inserirlo lo stesso per completezza, affidandomi al racconto di Letizia, l'insegnante di matematica della classe. L'obiettivo era di cominciare a introdurre alcuni termine tecnici legati alle funzioni (dominio, codominio, immagine, etc.); ciò è stato fatto inizialmente riprendendo il grafico della passeggiata, per rimanere in una situazione familiare.

Dopodiché, è stato presentato il problema dei rettangoli isoperimetrici,[18] la cui modellizzazione porta a una funzione di secondo grado, permettendoci così di introdurre la parabola e la ricerca del suo massimo/minimo. Gradualmente, nel linguaggio dell'insegnante comincia a entrare la terminologia delle funzioni, sempre legata a un preciso contesto. Infine, sfruttando sempre l'idea del filo, si comincia a cercare di disegnare il grafico di $f(x) = x^2$.[19]

Agli studenti abbiamo lasciato il compito in figura 11.

[18] Qual è, fra i rettangoli di perimetro fissato, ad esempio 60 cm, quello di area massima?

[19] Risulta chiara la volontà di mantenere il concetto di grafico strettamente legato a quello di funzione anche favorendo la notazione $f(x) = x^2$ rispetto a $y = x^2$, che risulta forse troppo ermetica, oltre che statica, per quanto più snella nelle manipolazioni algebriche: in questa fase iniziale rischia di generare confusione.

Il seguente grafico rappresenta una passeggiata, sull'asse delle x è riportato il tempo e sull'asse delle y la posizione. La relazione fra il tempo e la posizione è descritta da una funzione $f(x)$ il cui grafico è riportato in figura.

a) Dominio:
b) Immagine:
c) Determina l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 3$.
d) Per quale valore di x, $f(x)$ ha valore massimo?
e) Determina l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 2$
f) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1$?
g) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \frac{5}{2}$?
h) Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 4$?
i) Determina, al variare di k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$
j) Determina l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = -2x + 4$
k) Determina per quali valori di x si ha $f(x) \geq \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Figura 11

2.2.6 VI incontro - 2 ore - Lunedì 29 aprile

Perseguendo il lavoro dello scorso incontro, rappresentiamo alcune funzioni ($2x, x^2, -x^2, (x+1)^2, x^2+1$) alla lavagna (i ragazzi sul quaderno), parlando anche di semplici trasformazioni geometriche. Validiamo sempre i nostri disegni usando *GeoGebra* e lo strumento filo. In particolare, nella costruzione del grafico di $f(x) = x^2$, poniamo particolare attenzione a cosa succede per $0 < x < 1$, tratto in cui il grafico della parabola si trova sotto a quello della bisettrice del primo e terzo quadrante, e per $x > 1$, dove invece il grafico si trova sopra. Abbiamo quindi risolto graficamente $f(x) < g(x)$.

Successivamente abbiamo ripreso il problema dei rettangoli isoperimetrici, tracciando il grafico di $f(x) = 30x - x^2$ e cercando quando assume valore massimo; poi abbiamo risolto sempre graficamente $f(x) < 0$ e $f(x) > 0$, chiedendoci quale tratto della funzione avesse senso considerare nel contesto del problema.

Infine, introduciamo l'uso della parabola nella procedura di risoluzione di disequazioni con lo studio dei segni, in maniera tale da poter considerare in un colpo solo i fattori di secondo grado, senza dover scomporre e studiare separatamente i due fattori di primo grado. Avendo già visto come fare lo studio del segno, la novità per gli studenti era proprio quella di rappresentare la parabola, senza scomporre il polinomio e rappresentare due rette. Lasciamo dei compiti su questo argomento.

2.2.7 VII incontro - 2 ore - Lunedì 6 maggio

Per motivi esterni[20] scegliamo di dedicare una lezione all'introduzione dei parametri, partendo dal problema dei rettangoli isoperimetrici, indicando con il simbolo S il semiperimetro. L'idea era di farsi aiutare dalla visualizzazione dinamica su *GeoGebra* per capire il significato del parametro. Successivamente, uscendo dal contesto del problema, volevamo passare al ruolo del parametro nelle funzioni $x^2 + c$ e ax^2 per poi riflettere sul significato di una funzione di secondo grado con due parametri liberi (di quante informazioni ho bisogno per determinarli?). Il nostro obiettivo era quello di portare gli studenti a scrivere dei sistemi di equazioni di cui potessero padroneggiare il senso di condizioni sui parametri, non arrendendoci a un insegnamento-apprendimento puramente procedurale.

[20] Approfondisco la motivazione esterna perché è stato interessante rendersi conto di come anche fattori indipendenti dall'insegnante possano influenzarne il lavoro, e, a volte, direzionarne, anche indirettamente, le scelte didattiche. Infatti, la programmazione e la scelta degli argomenti facenti parte del percorso sono stati guidati sì, dalle scelte dell'insegnante prese rispetto agli obiettivi che ci si era posti, nel rispetto delle linee guida e del programma dell'istituto, ma anche dalla necessità di preparare gli studenti delle classi seconde del liceo ad affrontare una prova parallela uguale per tutti. Personalmente trovo questo approccio perlomeno discutibile, avendo già avuto modo di sperimentarlo sulla mia pelle nell'anno di insegnamento che ha preceduto il mio percorso di laurea. Già allora ero rimasto alquanto perplesso, ma per me il problema di coniugare l'esigenza istituzionale di allineamento delle classi e delle competenze in uscita (e magari anche di sacrosanta verifica dell'operato dell'insegnante!) con l'individualizzazione dell'insegnamento-apprendimento anche limitandosi al singolo gruppo classe, con tutte le sue specificità, rimane tutt'ora aperto. In ogni caso, tornando alla nostra situazione, nella prova parallela aveva trovato posto un esercizio dove si chiedeva di determinare tre parametri di una funzione, note tre condizioni. In realtà il senso dell'esercizio era più che altro quello di verificare la capacità degli studenti di risolvere un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite. Ne è nata un'interessante discussione nel nostro gruppo di lavoro: qual è il senso di un esercizio con tre parametri all'interno di una prova del genere? Che cosa significa, dal punto di vista matematico, che una funzione ha tre parametri? Abbiamo concluso che si tratta di una situazione difficilissima da immaginare, che necessita di essere costruita gradualmente. Per quanto riguarda invece il suo inserimento in una prova di verifica, se sono interessato solo a valutare la procedura di sostituzione dei valori, tanto vale mettere un parametro solo, e se mi interessa valutare la risoluzione di un sistema, tanto vale assegnare direttamente la risoluzione di un sistema! Quanti studenti di seconda, anche se magari in grado di risolvere l'esercizio, potrebbero mai essere davvero consapevoli di quanto stanno facendo? Devo ammetterlo: questo è un aspetto a cui non avevo mai pensato prima. Ma quanti insegnati sono invischiati nella ragnatela della prassi, del "si fa perché si è sempre fatto", e hanno smesso, o più realisticamente, non hanno mai cominciato, a porsi domande di senso? Questo è, credo, il merito maggiore che riconosco all'esperienza di tirocinio, e agli studi connessi alla didattica che sto facendo: avermi dato l'occasione di assumere il ruolo di un osservatore privilegiato, permettendomi di vedere la realtà della scuola da fuori, attraverso le lenti di una maggiore consapevolezza, che ovviamente mi sono state fornite dalle persone che mi hanno accompagnato in questo percorso. Tentando un paragone letterario che capiranno a dir tanto venticinque persone, che sono comunque venticinque in più di quelle che leggeranno questa lunga nota, mi sono sentito come il quadrato protagonista di *Flatlandia* che guarda il suo mondo dall'esterno, sollevato da una sfera. Purtroppo, inquietato più che meravigliato. Tra l'altro, il quadrato non fa una bella fine una volta tornato nel suo mondo, quindi meglio lasciar perdere il riferimento. Per concludere, tornando alla monotonia bidimensionale del foglio di una prova scritta, si ragionava infine sul senso stesso di una prova di verifica. Questa non può essere troppo densa: se mi interessa verificare la comprensione, non ha senso inserire calcoli complicati, o puntare sulla velocità. Se voglio invece testare le abilità di calcolo, tanto vale ammetterlo esplicitamente e preparare una prova apposita.

Purtroppo, capiamo in fretta[21] che la classe non è pronta per affrontare un argomento così astratto. L'introduzione al parametro genera molta confusione, e la lezione, che comunque abbiamo cercato di tenere il più possibile aperta al dialogo, viene monopolizzata da una studentessa che ha grandi difficoltà di comprensione e chiede continuamente riscontro all'insegnante, creando uno spiacevole effetto "ping-pong": la partita si gioca tra sole due persone, che si passano la pallina in continuazione, escludendo il resto della classe, che nel caso ideale osserva la partita, e in quello reale si mette a fare altro. Decidiamo quindi di sospendere la questione parametri.[22]

Senza perderci d'animo, e per risollevare il momentaneo clima di inconcludenza venutosi a creare in classe,[23] proponiamo un'attività a gruppi di revisione di un argomento già affrontato, la lettura di grafici. Giriamo tra i banchi per vedere come lavorano i ragazzi: si notano certamente dei miglioramenti, nonostante ci sia ancora chi fa confusione e scruta l'asse delle ascisse alla ricerca delle immagini. Data l'importanza dell'argomento, insistiamo assegnando qualche altro compito di, similmente allo scorso incontro.

2.2.8 VIII incontro - 1 ora - Mercoledì 9 maggio

La lezione si apre con la correzione di alcuni compiti sulla lettura di grafici di funzione; a turno agli studenti viene chiesto di rispondere ad alcune domande relative ai grafici, sempre sulla falsariga di quelle della figura 11, motivando opportunamente. Infatti, l'impressione generale è che gli studenti si siano un po' "seduti", e che a casa stiano lavorando molto poco (alcuni dei compiti consegnati sono inaccettabili). Per questo decidiamo di assumere un atteggiamento più severo ed esigente, mantenendo sempre il dialogo ma lasciando meno spazio a interventi dispersivi; la lezione ne risente positivamente.[24]

[21]Leggasi: dopo un'ora di tentativi.

[22]Egoisticamente, si è trattata di un'esperienza negativa per la classe, ma davvero significativa per me come tirocinante, fonte di molti spunti di riflessione, di cui alcuni esposti nelle note di questa sezione.

[23]Non vuole essere una giustificazione, ma mi sembra doveroso riportare che nel corso di questa lezione l'insegnante non ha potuto presenziare per motivi contingenti. Tutto è quindi affidato ai "soli" esperti esterni. Personalmente, ho trovato molto interessante il cambiamento di atteggiamento: nonostante il buon rapporto instaurato con gli studenti, l'attenzione cala bruscamente. La presenza dell'insegnante è fondamentale. Infatti, anche se magari non ne sono consapevoli, solo a lui gli studenti riconoscono il ruolo di rappresentante dell'istituzione, di garante dell'insegnamento-apprendimento, forse anche perché è l'unico a impugnare "l'arma" della valutazione. Al di là di ciò, mi sembra di poter trarre dall'esperienza la seguente considerazione "opposta", che esula totalmente dal caso specifico: l'insegnante non può pensare di risolvere i problemi di apprendimento della propria classe ricorrendo a continui interventi dell'esperto esterno; non può, in sostanza, esimersi dal farsi carico della responsabilità del mancato apprendimento da parte dei propri studenti, con un atto di devoluzione all'esperto e rinuncia all'implicazione. Non è del tutto pertinente, ma tutto ciò mi ha portato alla mente uno degli effetti del contratto didattico, l'effetto Dienes: in questo caso, non relativo ad artefatti, ma a persone! Questa riflessione può sembrare del tutto fuori contesto, ma si ripresenterà nuovamente nel corso del tirocinio.

[24]Un'altra osservazione trasversale a tutte le esperienze in classe che ho vissuto nel corso del tirocinio: in matematica, come in altre discipline, purtroppo, lo studente è abituato a lavorare su tempi brevi, ad argomenti compartimentati, e ad ascoltare l'insegnante senza spendersi in prima persona (il fenomeno della scolarizzazione del sapere, ad esempio in [D'AMORE, 1999] e [D'AMORE, 2001]). Pensare di poter cambiare questo stato di cose con un percorso di breve durata, e peraltro limitato a una singola disciplina, è del tutto irrealistico: è necessario un impegno condiviso da parte di tutti i docenti del consiglio di classe, ciascuno nelle proprie ore. In ogni caso, il punto che volevo sottolineare è che in alcuni casi l'atteggiamento passivo da parte dello studente è talmente radicato (il mestiere dello studente, di cui si parla sempre in [D'AMORE, 2001]), da rendere davvero difficile portare in aula attività occasionali diverse dalla lezione frontale tradizionale. Infatti, queste attività

La seconda parte della lezione è dedicata ai sistemi di disequazioni, che introduciamo sempre partendo dal problem dei rettangoli isoperimetrici. Tra i rettangoli di perimetro 8 cm, cerchiamo quelli con area maggiore di $3\,\text{cm}^2$ e con un lato minore dei 3/4 dell'altro. Dopo aver modellizzato il problema e trasformato le condizioni in disequazioni, procediamo con la risoluzione del sistema. Ancora una volta, l'esito è diverso da quello atteso, ma questa volta la didattica della matematica aveva da tempo suonato il campanello d'allarme: nel disegno che faccio alla lavagna, rappresento con la variabile x la lunghezza del lato del rettangolo più corto (più corto nella rappresentazione particolare che è il mio disegno, s'intende), e questo genera molta confusione. Si tratta del problema dei concetti figurali; per cogliere la generalità nella particolarità della rappresentazione è richiesto un grande sforzo di astrazione, al quale gli studenti vanno guidati. Su suggerimento dei ragazzi, aggiungo al sistema una condizione che impone che uno dei due lati sia maggiore dell'altro, proprio come si vede dal disegno. In questo modo ho complicato il problema, che richiede ora la risoluzione di un sistema con tre disequazioni, ma nella mia testa c'era l'intenzione di arrivare alla soluzione finale per poi interpretare il risultato, facendo vedere come con l'aggiunta della condizione si siano perse delle soluzioni (a livello algebrico di valori assunti da x, geometricamente non si perde nulla, sarebbero infatti i rettangoli "ruotati di 90°"). Il lato positivo è che avevo sul momento un'ottima padronanza del problema, e un chiaro obiettivo, grazie al fatto che mi ero studiato per bene il problema a casa, prima di portarlo in classe. Il lato negativo è che sul momento non ho tenuto conto del tempo a disposizione, e dando troppo spazio agli interventi degli studenti, sono stato interrotto dalla campanella. Un altro aspetto su cui lavorare: la gestione del pochissimo tempo a disposizione in classe.

2.2.9 IX incontro - 1 ora - Lunedì 13 maggio

Iniziamo riprendendo il sistema della scorsa volta, e d'accordo con Letizia sorvolo sui dettagli esposti in precedenza: ancora una volta, un compromesso. L'intersezione delle soluzioni viene abbastanza naturale, non si riscontrano particolari difficoltà. Lasciamo agli studenti due sistemi da risolvere autonomamente, che poi correggiamo insieme alla lavagna. Non manca la classica domanda *ma devo mettere i segni?*, riferita allo schema per l'intersezione, fortunatamente un caso isolato. Le domande si alternano tra puntuali e ridicole in base a chi le pone, perché alcuni studenti hanno ancora difficoltà legate alle disequazioni, non tanto al sistema in sé. Come è lecito aspettarsi, qualcuno degli studenti con apprendimenti meno consolidati stenta a riconoscere il quadrato come positivo, o effettua il prodotto al posto di scomporre per risolvere la disequazione.

D'altro canto, una cosa che mi colpisce in positivo è la dimestichezza che la maggior parte degli studenti sembra aver acquisito con le notazioni legate alla rappresentazione delle soluzioni, con i vari trattamenti annessi. L'uso dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ è ancora un po' incerto, ma per il resto gli alunni passano senza problemi dalla rappresentazione per caratteristica a quella di intervallo con parentesi tonde e quadre. Personalmente, mi sembra un traguardo notevole

diverse possono creare un certo senso di disorientamento che risulta in atteggiamenti dispersivi, disincentivando lo studente, che non è abituato a lavorare su obiettivi di apprendimento di lungo periodo. Da parte nostra, si è trattato di trovare un compromesso: ridefinire l'orizzonte temporale percepito dagli studenti incalzandoli con un ritmo più martellante, con richieste più precise e puntuali, limitando il confronto di classe a un dialogo più serrato. Una situazione simile si ripresenterà quando sperimenteremo nella stessa classe, l'anno scolastico successivo, il laboratorio sulla crisi climatica (vedi sezione 4.3).

per una seconda. Tra l'altro, d'accordo con Letizia, abbiamo abolito l'uso dei quantificatori universali nella rappresentazione algebrica delle soluzioni, evitando notazioni come $\forall x \in \mathbb{R}$ che pur trovandosi nei libri di testo sono di per sé prive di significato.[25]

2.2.10 X incontro - 1 ora - Mercoledì 15 maggio

Questo incontro è interamente dedicato a esercizi individuali in classe sui sistemi di disequazioni. Durante la lezione giro tra i banchi, mentre gli studenti lavorano; l'impressione complessiva, di Letizia e mia, è molto positiva: la maggior parte della classe risolve senza troppi problemi gli esercizi assegnati. Emergono però alcuni limiti interessanti dell'approccio grafico:

- due studenti diversi mi chiedono come comportarsi di fronte a $x^3(x-1) > 0$, non sapendo disegnare il grafico della cubica. Il suggerimento è di scomporre in x^2x e ragionare di conseguenza, per aggirare il problema. Uno studente vorrebbe studiare direttamente il prodotto, in un'unica riga: di fatto i segni sono gli stessi della parabola $x(x-1)$ e quindi la procedura funziona, violando però le proprie regole interne. C'è da dire, però, che lo studente che mi ha posto la domanda sembra assolutamente in grado di cogliere la sfumatura. In ogni caso, stabiliamo che per il momento sia meglio studiare i due fattori separatamente;

- la tecnica dei pallini vuoti e pieni per indicare zeri e punti dove la funzione non è definita ha i suoi limiti, gli studenti producono tabelle dei segni piene di pallini inutili. Ci sono più fonti di difficoltà:

  – il pallino va solo sugli zeri del fattore in considerazione, quindi non tutti i nodi della griglia dovranno avere dei pallini, e questo confonde chi non padroneggia il significato;

  – polisemia; i pallini nella tabella dei segni hanno un significato diverso (gli zeri) da quelli usati nello schema dell'intersezione (valori inclusi/esclusi);

  – i pallini nella tabella dei segni possono essere pieni o vuoti in base alla presenza di > 0 o ≥ 0 all'interno della disequazione.

Su questo argomento mi sembra altissimo il rischio di uno scivolamento metadidattico,[26] ovvero

[25] Osservazione fuori contesto, ma comunque interessante. Sono arrivato in anticipo in classe per l'incontro, e ho avuto così modo di partecipare agli ultimi venti minuti di una lezione di geometria nella quale si stavano facendo esercizi sui teoremi di Euclide e Pitagora. Letizia ha appena rispiegato la differenza tra poligono inscritto e circoscritto a una circonferenza. Pochi minuti dopo, agli studenti viene chiesto di risolvere un esercizio disegnando anche una figura. Il testo recita *ad un rettangolo di perimetro* 10 *è circoscritta una circonferenza*: non solo il testo inverte la sintassi, ma ora l'essere circoscritto fa riferimento alla circonferenza e non al poligono! Si tratta di un testo difficilissimo da interpretare, e che richiede una grande padronanza lessicale e delle strutture morfosintattiche tipiche del linguaggio della matematica, a volte lontane dal linguaggio naturale. Infatti, girando tra i banchi mi accorgo di almeno quattro studenti che fanno il disegno sbagliato, con la circonferenza interna al rettangolo, e non viceversa (con una certa fantasia, perché non si può inscrivere una circonferenza in un rettangolo, a meno che si tratti di un quadrato: effettivamente c'è questo livello di controllo, che però richiede la piena comprensione della definizione di circonferenza inscritta in un poligono). Non correggo direttamente, ma invito a suggerire di rileggere il testo e a riflettere sul significato della frase.

[26] Si veda ad esempio [D'AMORE - FANDIÑO PINILLA].

di sostituire all'insegnamento-apprendimento della risoluzione di una disequazione quello della costruzione procedurale dello schema dei segni, perdendo il senso per strada. Rimango dell'idea che sia necessario snellire lo schema, legandone la costruzione al comportamento dei singoli fattori: quando sono positivi, quando negativi, quando si annullano. Per questo rimango ancorato alla tecnica che ho imparato al liceo, che mi sembra più efficace in questo senso: i pallini sono del tutto aboliti, e si usano due simboli diversi per indicare, sotto il corrispondente valore, se si tratta di uno zero della funzione o di un punto dove la funzione non è definita (ad esempio io uso rispettivamente 0 e $\nexists$). In tal modo nell'ultima riga della tabella si ottiene una descrizione completa del comportamento della funzione (dove è positiva, negativa, nulla, non definita), che è utilissima anche ai fini dello studio di funzione. Unendo questo approccio a quello grafico (quando studio ad esempio il fattore di secondo grado ho in mente, o addirittura disegno, la parabola) mi sembra si ottenga un metodo potente e versatile. La questione non è comunque così importante, finché c'è consapevolezza, sia da parte dell'insegnante che dello studente.

2.2.11 XI incontro - 1 ora - Venerdì 17 maggio

L'ultima lezione del percorso ha per oggetto i grafici delle funzioni cubica e radice quadrata, anche con traslazioni. Lavoriamo ancora una volta sia alla lavagna che con *GeoGebra*, e insistiamo sulla lettura ponendo qualche domanda (dominio, immagine, disequazioni grafiche, etc.).

2.3 Considerazioni conclusive

Cosa concludere alla fine di questo lungo percorso? Se come misura del successo prendiamo gli esiti della conseguente prova scritta, che conteneva un esercizio con diverse richieste legate alla lettura di un grafico di funzione, allora senz'altro possiamo ritenerci soddisfatti, visto che è stato svolto correttamente dalla gran parte degli studenti. D'altronde, un'analisi di questo tipo è senz'altro riduttiva e non del tutto soddisfacente. Molto più rilevanti a questo scopo i momenti di osservazione in classe degli studenti all'opera e la revisione dei loro compiti.

Credo di poter affermare che si è trattato di un percorso molto complesso, con il grande merito di aver fatto emergere moltissime difficoltà legate all'apprendimento delle funzioni, che con un approccio più tradizionale correrebbero il rischio di rimanere occultate nelle pagine del curriculum nascosto degli studenti.

Non mi dilungo oltre, perché ho già avuto modo di condividere diverse considerazioni nelle sezioni precedenti. Dunque, mi limito a concludere segnalando che ho trovato molto significativa la ricontestualizzazione dell'argomento disequazioni e sistemi all'interno di un percorso coerente e coeso di costruzione di significato, che parte dal concetto di funzione e di grafico di funzione. Infatti, ripensandoci, la parte prettamente laboratoriale ha occupato solo le prime quattro o cinque ore dell'intero percorso, per poi lasciare spazio ad attività più classiche, ma meglio collocate. Un'opportunità che, in fin dei conti, pur con alcune revisioni suggerite dalle tante criticità emerse, e sempre compatibilmente con il contesto classe, mi sembra perfettamente spendibile all'interno delle ore curricolari dall'insegnante di matematica.

3 La scuola estiva di statistica

Come accennato nell'introduzione, il principale obiettivo del tirocinio era la riprogettazione didattica di un laboratorio di statistica dal titolo *We live in a closed system. Data analysis useful for investigating environmental sustainability.* Si trattava di un laboratorio che io personalmente non conoscevo, e non avevo mai avuto occasione di vedere svolgersi; quindi è stato necessario, al fine di approcciarne la riprogettazione con cognizione di causa, sperimentarlo nella sua forma originale.

Evidentemente, prima di poter proporre agli studenti un'attività di questo genere - come qualunque altra - l'insegnante deve padroneggiarla al meglio delle proprie capacità: difficile, soprattutto se l'insegnante in questione non ha mai usato prima il linguaggio di programmazione attorno al quale è costruito l'intero laboratorio, ovvero R. Non per nulla, come già detto, uno dei miei compiti sarebbe stato quello di eliminare questo requisito, per rendere il percorso più snello da portare in classe per l'insegnante. Fortunatamente, nel corso del tirocinio sono stato affiancato a una persona straordinaria, Angelica Piselli, assegnista di ricerca presso il Laboratorio DiCoMat, che con un personale corso "istantaneo" di statistica di base e di R mi ha in brevissimo tempo reso in grado di svolgere autonomamente le attività di programmazione che gli studenti avrebbero dovuto fare nel corso del laboratorio, aiutandomi ad acquisire una discreta dimestichezza con il linguaggio stesso, in modo da poter essere d'aiuto concreto agli studenti.

Abbiamo deciso di dare al laboratorio la forma di una scuola estiva, che per gli studenti si configura come esperienza di ASL/PCTO: una settimana di attività intensiva in università, da lunedì 17 a venerdì 21 giugno 2024 (quindi ad anno scolastico concluso), dalle 9:00 alle 13:00 e dalle 14:30 alle 16:30. Le attività sono state tenute da Angelica e da me, sempre con il supporto della prof.ssa Ossanna. La partecipazione, volontaria ma su iscrizione, era aperta a tutti gli studenti delle classi terze e quarte delle SSSG locali, per un totale di 24 studenti. Si introduce quindi un elemento di novità rispetto a tutti gli altri laboratori sperimentati durante il tirocinio: gli studenti hanno scelto di propria volontà di prendere parte alla scuola estiva, ed erano quindi fortemente motivati in partenza. Si tratta di un fattore che emergerà più volte nel corso dell'esperienza della scuola estiva, che è raccontata nel seguito sempre sotto forma di diario, dopo una breve introduzione ai contenuti e agli obiettivi del laboratorio. Non mi soffermerò eccessivamente sul contenuto matematico e non scenderò nei dettagli delle attività svolte, perché esse verranno riportate con maggiore precisione e contesto all'interno del mio lavoro di tesi.

3.1 Contenuti e obiettivi

Il laboratorio vuole portare all'attenzione degli studenti il ruolo giocato dall'analisi dei dati al giorno d'oggi, facendoli lavorare direttamente su dataset legati a problemi di fondamentale importanza nel corrente dibattito sul futuro del pianeta, nell'ambito dei cambiamenti climatici. Infatti, l'analisi dei dati può permetterci di elaborare possibili interpretazione di ciò che avviene intorno a noi, contribuendo alla crescita complessiva della conoscenza di un certo argomento, e mettendoci nelle condizioni di poter prendere decisione ragionate in merito. Insomma, un laboratorio che affronta tematiche di estrema attualità.

Più nello specifico, gli studenti apprendono un linguaggio di programmazione (R con interfaccia *RStudio*) specifico per l'analisi dei dati, e provano a usarlo, prima guidati dai tutor e poi in autonomia, per analizzare alcuni dataset reali (dati sulla fusione dei ghiacciai e sulla qualità dell'aria), con l'obiettivo, tra gli altri, di produrre delle efficaci rappresentazioni grafiche dei dati, le quali potranno essere usate come supporto in un'argomentazione volta al sostegno di una determinata tesi inerente all'ambito scelto. Il lavoro svolto dovrà infine concretizzarsi nella stesura di un report.

Gli obiettivi principali del percorso sono i seguenti:

- introdurre o rafforzare la conoscenza di vari concetti di statistica descrittiva, tra cui, in particolare:
  - alcuni indici statistici (media aritmetica, media mobile, mediana, moda);
  - il concetto di serie storica;
  - il concetto di modello statistico e, nello specifico, un esempio di modello additivo di decomposizione di una serie storica;
- costruire alcune competenze di base di analisi dei dati che consentano la descrizione e l'interpretazione di un dataset, lavorando su una varietà di aspetti, tra cui le rappresentazioni grafiche dei dati e le capacità argomentative, stimolando il ragionamento statistico;
- introdurre gli studenti al linguaggio di programmazione R, concepito proprio per l'analisi di dati;
- stimolare il pensiero computazionale;
- rafforzare la multidisciplinarietà in ottica STEM, sostenendo lo sviluppo di competenze trasversali che stimolino gli studenti ad applicare le conoscenze matematiche in contesti di realtà;
- rafforzare le competenze di lavoro di squadra e le capacità di interazione con un tutor.

Durante il corso della scuola estiva, a tutti gli studenti è stato chiesto di scrivere un "diario di bordo" giornaliero, in modo da tenere traccia della propria esperienza e dei propri progressi. Si tratta in generale di uno strumento incredibile, che fornisce all'insegnante una quantità enorme di informazioni preziose sui propri studenti, sullo stato del loro apprendimento, nonché una panoramica sugli aspetti emotivi.[27] Nelle sezioni che seguono ho riportato alcuni estratti significativi dai diari di bordo degli studenti (i cui nomi sono puramente fittizi), a corredo delle mie osservazioni. Lascio di seguito alcune delle domande guida che abbiamo deciso di inserire all'interno dei diari:

- Riassumi per punti o in poche righe il lavoro fatto nel corso della giornata.
- Quale dei contenuti presentati oggi ti ha colpito di più? Perché?
- Stai trovando qualche difficoltà nell'apprendimento di RStudio? Se sì, quali?
- Come è stata la giornata di oggi? Dai un giudizio da 1 a 10, dove 1 sta per "confusionaria" e 10 sta per "comprensibile". Motiva poi il tuo giudizio, specificando eventuali punti non chiari.
- Come è stata la giornata di oggi? Dai un giudizio da 1 a 10, dove 1 sta per "inutile" e 10 sta per "arricchente". Motiva, poi, il tuo giudizio.
- Hai la sensazione che le tue abilità nell'uso del software RStudio stiano migliorando? Motiva la tua risposta, riportando eventualmente i problemi riscontrati.
- Complessivamente, ti ritieni soddisfatto del tuo lavoro di oggi? Motiva la tua risposta.
- Oggi hai lavorato con il tuo gruppo. Parla della vostra organizzazione. Com'è andato il lavoro per quanto riguarda l'interazione e i ruoli? Sei soddisfatto di come avete lavorato?

[27] Un altro dei fili conduttori dell'esperienza di tirocinio in classe è stata la centralità dello studente, e dell'importanza dei canali di comunicazione tra insegnante e studente. Un ampio tema, nel quale trova posto anche lo strumento del diario di bordo, che nel corso di questa esperienza ci ha permesso di monitorare continuamente le opinioni degli studenti in merito all'attività stessa, alla sua efficacia, al livello di coinvolgimento, alle eventuali difficoltà riscontrate. Tutte queste informazioni sono state utilissime sia per una valutazione a posteriori dell'attività, sia, soprattutto, per orientarne la direzione in corso d'opera, in una sorta di circolo virtuoso di feedback. In questo caso, però, la comunicazione è stata diretta solo nel senso studente-insegnante, perché non abbiamo fatto mai riferimento esplicito ai contenuti dei diari con gli studenti. Invece, un esempio di scambio diretto in entrambe le direzioni si avrà nel prossimo capitolo, quando daremo dei feedback su alcune consegne degli studenti, chiedendo loro di rielaborarle di conseguenza. Mi rendo conto, scrivendo, della totale banalità di queste considerazioni. Il fatto è che per me risultano banali *ora*, ma non lo erano affatto prima che fossero oggetto di una riflessione personale consapevole. Quante volte, quando si insegna, si chiede riscontro direttamente allo studente della propria situazione, o, ancora peggio, degli aspetti legati alla sfera emozionale, nei limiti di competenza dell'insegnante di matematica? Esiste un intero filone di ricerca in didattica della matematica dedicato proprio ai temi dell'affettività nel processo di insegnamento-apprendimento! Quante volte davvero nella pratica didattica si prendono decisioni in funzione dello studente, basate su un'analisi critica delle sue difficoltà, che poi risultano davvero efficaci? Non è forse l'insegnante sempre al centro, quando sceglie cosa fare in classe, rispondendo a esigenze esterne e a volte del tutto incoerenti con gli obiettivi dichiarati? Credo si tratti di riflessioni molto personali, e non approfondisco oltre: volevo limitarmi a segnalare come, ancora una volta, non è per nulla scontato per l'insegnante soffermarsi su queste questioni fondamentali, quasi deontologiche, a meno che qualcuno o qualcosa non le obblighi esplicitamente alla sua attenzione. Nel mio caso, quel qualcuno sono state le tantissime persone con cui ho avuto l'opportunità di interagire nel corso del tirocinio, di cui dirò ancora più avanti, e quel qualcosa è stato senz'altro il mio (a oggi) libro preferito di didattica della matematica, ovvero [ZAN, 2007], nella cui conclusione sono perfettamente riassunte, ovviamente in modo incomparabilmente più completo, elegante, e forse sottilmente ironico, tutte le questioni che ho qui sollevato.

Vorresti cambiare qualcosa? Motiva la risposta e, se ci sono stati problemi, scrivili qui.

- Complessivamente, sei soddisfatto del report che hai creato assieme al tuo gruppo? Pensi che il prodotto che avete realizzato sia un report efficace? Motiva la tua risposta.

3.2 Diario di bordo

3.2.1 I giornata - Lunedì 17 giugno

Dopo una breve presentazione del progetto, chiariamo fin da subito con gli studenti cosa ci aspettiamo come prodotto finale; mostriamo alcuni esempi di report statistici ben fatti per dare un'idea della struttura dell'elaborato (abbiamo anche preparato un documento riassuntivo con diversi suggerimenti per la stesura e aspetti cui prestare attenzione).

L'attività vera e propria ha inizio con un'introduzione al linguaggio di programmazione R, spiegando l'interfaccia di *RStudio* e i comandi di base. Dopodiché, ci avviamo verso il primo argomento centrale del percorso: il fenomeno di fusione dei ghiacciai. Dividiamo gli studenti in gruppi da quattro e chiediamo loro di leggere alcuni articoli di giornale inerenti e preparare una breve esposizione rivolta alla classe, sul contenuto dell'articolo e sulla modalità di presentazione, evidenziando l'eventuale presenza di formulazioni poco chiare o termini tecnici non spiegati. Le mie aspettative sul livello della comprensione del testo e della comunicazione in fase di esposizione vengono di gran lunga superate. Tra l'altro, gli articoli sono di bassa qualità, soprattutto dal punto di vista della forma, cosa che alcuni studenti non mancano di sottolineare, dimostrando anche un buon senso critico (purtroppo non abbiamo trovato alternative migliori, limitandoci per scelta ad articoli di giornali non specialistici, e pubblicati online).

Successivamente, presentiamo agli studenti il primo dataset, che contiene i rilevamenti estivi e invernali sulla fusione del ghiacciaio dell'Adamello, dal 2008 al 2021; ci soffermiamo sulla particolare unità di misura usata dai glaciologi (i millimetri di acqua equivalenti). Prima di procedere, riserviamo del tempo anche a ripassare i diversi tipi di grafici che si possono usare per rappresentare i dati, in particolare quello a dispersione e quello a barre (o a rettangoli separati), che spesso gli studenti confondono con l'istogramma. Tutto il resto della giornata è dedicato all'analisi del dataset, inizialmente guidata e poi sempre più autonoma; creiamo con R tutta una serie di grafici diversi per rappresentare i dati, e cerchiamo di trarne alcune considerazioni in merito al fenomeno di fusione di questo particolare ghiacciaio. Di seguito riporto alcuni esempi di grafici prodotti in questa fase dell'attività.

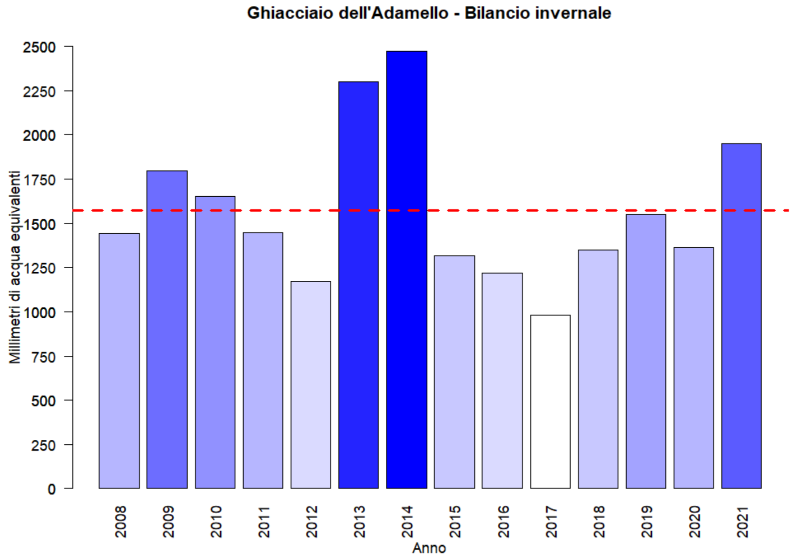


Figura 12. Il grafico permette di visualizzare l'andamento dei soli bilanci invernali e la loro media, la cui rappresentazione tramite una retta non è didatticamente scontata. Si noti anche l'uso della gradazione di colore per evidenziare l'ordinamento dei dati: una raffinatezza non immediata da implementare nel codice, che abbiamo lasciato come approfondimento per i più volenterosi.

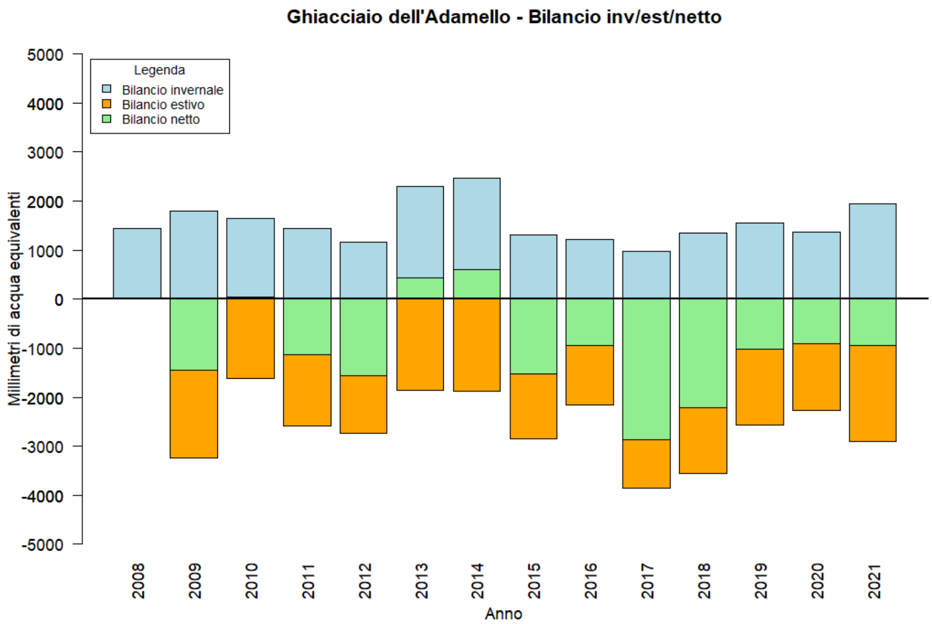


Figura 13. A volte è utile rappresentare più dati su uno stesso grafico, per effettuare confronti. Il bilancio netto è ottenuto sommando quello invernale a quello estivo (che è negativo). Si noti l'assenza del dato relativo all'estate 2008, mancante nel dataset, il cui valore quindi non è zero: semplicemente, non è noto; è importante specificarlo all'interno di un eventuale report, per non creare confusione o dare adito a interpretazioni fuorvianti.

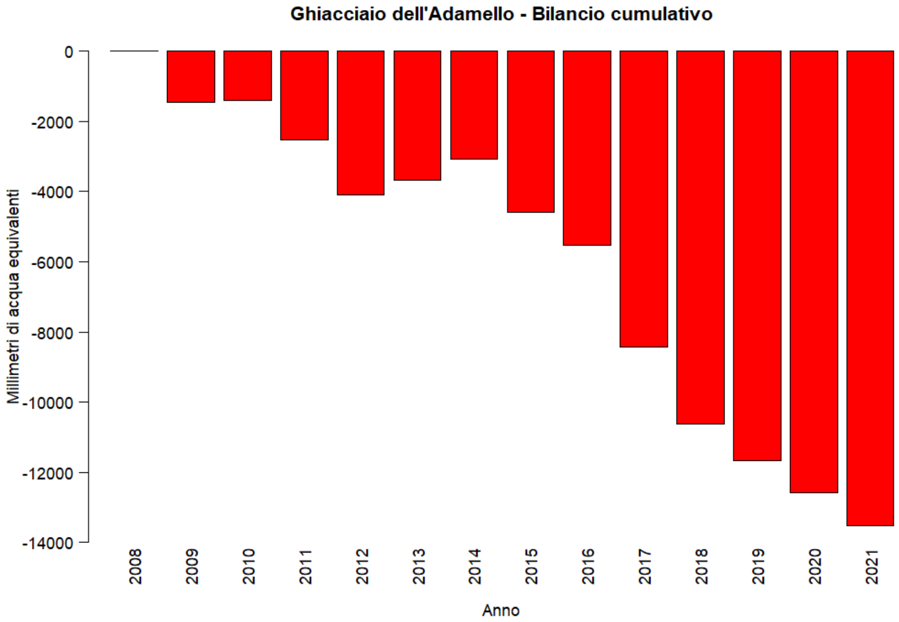


Figura 14. Per cogliere l'effetto sul lungo periodo è utile ricorrere alla serie cumulata, che mostra un chiaro e preoccupante andamento: in 13 anni il ghiacciaio ha perso, in media, 14 m *di altezza.*

Nel complesso, nel corso della giornata gli studenti sono attenti, motivati e interessati: una situazione atipica rispetto a quella di classe, ma come già osservato in precedenza, la loro presenza è dovuta a una scelta volontaria. Chi ha già esperienza di programmazione risulta avvantaggiato (vi sono alcuni studenti del liceo scientifico a indirizzo scienze applicate), mentre per qualcuno è difficile restare al passo, nonostante il supporto del secondo tutor. La parte di lezione dedicata all'introduzione a R risulta forse troppo lunga e pesante, anche perché astratta, avulsa da un contesto; a tal proposito Elisabetta suggerisce di posticipare alcune nozioni al momento in cui la loro necessità si paleserà dal contesto concreto (per esempio, nel corso della prima giornata non c'è la necessità di usare le matrici, che quindi rimandiamo). Il pomeriggio, interamente dedicato alla costruzione dei primi grafici sui ghiacciai, vede gli studenti coinvolti e partecipi; ci vengono poste sia domande di chiarimento che di approfondimento (soprattutto sulla personalizzazione dei grafici, che affascina).

Curiosando tra i diari di bordo,[28] leggo quasi esclusivamente commenti positivi, e i voti assegnati alla chiarezza e all'utilità sono molto alti, con osservazioni puntuali e significative. Una studentessa alla prima esperienza di programmazione scrive che sarebbe meglio rallentare un pochino, e che si lascia troppo poco tempo per sperimentare con i nuovi comandi. Un altro studente, d'altro canto, scrive che è stato dedicato troppo tempo alla parte introduttiva sui comandi di base. Ci aspettavamo questo tipo di discrepanza, per le quali crediamo comunque di aver trovato un buon compromesso. D'altronde, proprio queste differenze si riveleranno preziose nella divisione dei compiti nel momento in cui gli studenti lavoreranno in gruppo alla stesura dei report.

[28] Solo una decina scarsa sono stati compilati entro le 19:30, ma non avevamo dato indicazioni in merito.

3.2.2 II giornata - Martedì 18 giugno

Il secondo giorno è dedicato principalmente a terminare l'attività di analisi del dataset sul ghiacciaio dell'Adamello. Infatti, chiediamo agli studenti di consegnarci, entro fine giornata, il proprio codice R adeguatamente commentato. Gli studenti sono sempre attenti e interessati, e si mettono in gioco nello scrivere il codice. Anche chi all'inizio era più in difficoltà, consegna entro il pomeriggio uno script R completo e commentato. Come appunto per eventuali repliche, ci segniamo di insistere di più sul fatto che lo script deve essere autosufficiente, ovvero, una volta eseguito, mostrare tutti i grafici richiesti. Infatti, diversi dei codici consegnati omettono dichiarazioni di variabili, probabilmente fatte nella console, e che quindi non vengono salvate nello script.[29]

Nell'arco della giornata trovano spazio anche alcuni momenti di orientamento universitario, nati dalle domande degli studenti, che sono curiosi di conoscere l'esperienza di Angelica e mia all'interno dell'università, e le differenze tra i vari corsi di studio rispetto al contenuto matematico.

Nel frattempo, chiediamo anche di compilare un questionario sulle competenze che ci aiuti nella creazione di gruppi di lavoro equilibrati. Al termine della giornata comunichiamo i gruppi e come prima consegna assegniamo una breve attività di ricerca su alcuni inquinanti dell'aria (polveri sottili, biossido di zolfo, etc.), da esporre brevemente alla classe il giorno successivo.

Per concludere l'attività sui ghiacciai mostriamo due filmati[30] molto ben realizzati che mostrano dei time-lapse impressionanti in cui il fenomeno della perdita dei ghiacciai si manifesta in tutta la sua crudezza. La visione è sicuramente impattante, ed è seguita da un momento di silenzio nato dall'inquietudine; comprensibilmente nessuno ha commenti da fare o qualcosa da aggiungere.

I diari di bordo degli studenti segnalano un riscontro nel complesso molto positivo: essenzialmente, tutti dichiarano di stare imparando qualcosa di utile, interessante, e nessuno segnala difficoltà importanti. Mi sorprende anche la cura con cui quasi tutti i diari sono scritti, nel senso che le risposte sono argomentate e spesso non banali. Le poche criticità segnalate fanno riferimento alle tempistiche: alcuni ritengono le spiegazioni troppo rapide, ma altri lamentano momenti di monotonia. Effettivamente, gli studenti con pregressa esperienza di programmazione concludono il lavoro molto prima degli altri; per loro le spiegazioni sono probabilmente troppo pesanti e a tratti superflue, ma ritengo in ogni caso che l'equilibrio trovato nel corso della scuola estiva sia stato un buon compromesso. Riporto di seguito alcuni estratti dai diari che mi sembrano degni di nota.

[29] Uno dei vantaggi di *RStudio* è una comoda interfaccia suddivisa in console e script. I comandi scritti in console vengono eseguiti immediatamente, una sola volta, mentre nello script è possibile scrivere e salvare più linee di codice, ed eseguirle tutte o a blocchi. La combinazione delle due modalità permette un uso estremamente dinamico del codice, ma la non linearità rende difficile ricostruire i passaggi e l'ordine dei comandi usati. Ai fini didattici, è sicuramente molto più utile riportare tutti i comandi nello script e commentarli, in modo che rimangano sempre disponibili e pronti per l'uso, almeno nella fase iniziale. Certamente, è anche opportuno che gli studenti imparino a utilizzare il software al massimo delle sue potenzialità, ma magari solo successivamente.

[30] I filmati sono disponibili pubblicamente su *YouTube* ai seguenti link:

- https://www.youtube.com/watch?v=rVmGLO2OF7U
- https://www.youtube.com/watch?v=Zb5HysXmOmg

Alessandra, IV scientifico tradizionale
Ho trovato le spiegazioni e gli esercizi molto chiari. Gli insegnanti mi sono sembrati, in ogni caso, disponibili a chiarire tempestivamente eventuali dubbi. Credo che la giornata di oggi sia stata arricchente sia dal punto di vista relazionale che personale e culturale: ho potuto conoscere nuove persone e confrontarmi con loro, ed ho potuto imparare qualcosa di nuovo in un ambito che mi interessa. Inoltre, partecipare a questa iniziativa mi dà la possibilità di entrare, seppur in una mia piccola parte, nel mondo universitario. Sono convinta che questa esperienza potrà contribuire ad orientarmi nella scelta del mio percorso futuro.

Daniele, III scienze applicate
Sono sempre informazioni nuove quindi non è mai uno spreco. Poi lo trovo interessante per integrarlo alle presentazioni che mi capiteranno come compito scolastico, infatti più volte mi è capitato di avere la necessità di fare dei grafici ma non trovandone al caso mio, quindi adesso ho la possibilità di fare un grafico complesso con molte opzioni.
Mi sono divertito ed emozionato guardando i miei grafici prendere forma sul monitor.

Chiara, IV classico
Per quanto mi riguarda personalmente svolgo un corso di studi classici, è la prima volta che mi approccio all'informatica e pertanto per me è tutto nuovo, ne consegue che ovviamente riscontro alcune difficoltà nello stare al passo dal momento che il corso è rivolto a un pubblico che già conosce le basi della materia.
Ho scoperto un mondo a me del tutto nuovo.

Lorenzo, IV scientifico tradizionale
Le lezioni di oggi sono state chiare, ho capito piuttosto rapidamente come utilizzare RStudio per l'analisi dei dati anche se non ho mai utilizzato programmi simili.
La giornata di oggi è stata molto arricchente perché ho imparato ad utilizzare un programma mai adoperato e ho scoperto alcuni aspetti del riscaldamento globale di cui prima non ero mai venuto a conoscenza, per esempio la quantità di acqua persa dal ghiacciaio ogni anno.
Mi ritengo soddisfatto del lavoro svolto oggi poiché non ho incontrato problematiche, i codici scritti generavano i grafici previsti e quando facevo un errore riuscivo ad individuarlo.

Luca, III scientifico tradizionale
A colpirmi di più è stata la parte di programmazione vera e propria, perché il mondo dell'informatica è un mondo che mi potrebbe interessare in futuro. Oggi è stata una giornata interessante, non avendo mai avuto a che fare con un sistema informatico. Ho trovato il corso intrigante, anche se a volte non sono riuscito a seguire tutti i passaggi.
Oggi è stata una giornata in cui ho imparato i rudimenti della programmazione in R, ed è la prima volta che mi affaccio all'informatica. Mi è piaciuto, perché per me si tratta di un mondo tutto da scoprire, e le sue potenzialità mi affascinano. L'unico punto a sfavore, personalmente, è stata la durata delle sessioni, infatti io, non essendo abituato a trascorrere tempo al computer, a metà pomeriggio ho trovato difficoltà a rimanere concentrato e sentivo la testa girare.
Penso che le mie competenze con r studio siano migliorate. Oggi sono riuscito a programmare alcuni grafici con scioltezza, e mi è piaciuto molto.

Mattia, IV scienze applicate
Il mio giudizio per la giornata di oggi è 9, in quanto è stato estremamente comprensibile ma

allo stesso tempo divertente e interessante. Tuttavia credo che su alcuni punti sia stato speso un po troppo tempo, come ad esempio all'introduzione al linguaggio R e ai suoi elementi base. Dal punto di vista dell'arricchimento culturale valuto questa giornata 10, in quanto una grande parte degli argomenti trattati era a me ignota, ed è stato estremamente affascinante approfondire questa branca della statistica.

Teresa, III tecnico informatico
Ho trovato la giornata arricchente nel complesso, specialmente imparare a creare grafici a dispersione. Mi è piaciuto particolarmente il fatto che sono stati visionati dei video/time-lapse che rappresentavano chiaramente i ghiacciai e confrontavano la situazione di oggi con quella di molti anni fa; li ho trovati inquietanti per un certo verso, in quanto sono consapevole che la situazione, oltre a non essere delle migliori, non sta di certo migliorando.

3.2.3 III giornata - Mercoledì 19 giugno

La giornata è dedicata principalmente all'analisi di un dataset fittizio che contiene una serie storica di concentrazioni di un certo gas nel tempo all'interno dell'atmosfera di un pianeta alieno. Gli studenti vengono guidati nell'analisi introducendo gradualmente il modello della decomposizione additiva, implementando su R i vari passaggi. Non entro nei dettagli matematici e didattici della questione, che saranno oggetto del mio lavoro di tesi, e in parte anche della sezione 4.1.3.

Nel corso della giornata trova spazio anche l'intervento della climatologia Simona Bordoni dell'Università di Trento, che propone una lezione sui cambiamenti climatici e sui modelli matematici usati per descriverli. Il seminario è eccezionale a dir poco, e trovo di grandissimo valore formativo per gli studenti poter ascoltare una professionista così chiara e competente, che giustifica sempre le proprie affermazioni facendo ricorso ai dati, argomentando molto efficacemente al fine di smontare alcune tipiche tesi negazioniste (il cambiamento climatico c'è sempre stato, i modelli matematici non sono affidabili perché non sappiamo nemmeno prevedere il meteo di domani, l'effetto dell'uomo sui cambiamenti è trascurabile, etc.), dando risposte comprensibili pur senza sminuire la complessità dei fenomeni. Un altro aspetto che ho estremamente apprezzato è stata la centralità della matematica, anche molto sofisticata, che rende possibile l'analisi e le previsioni.

Purtroppo, non sono del tutto certo che lo stesso entusiasmo sia stato condiviso dagli studenti, i quali non mi sono parsi molto consapevoli del valore dell'intervento. A loro difesa, non ha aiutato il tradizionale stile da lezione universitaria (due ore di lezione frontale con breve pausa), e un leggero eccesso di tecnicismi.[31] Effettivamente, la lettura dei diari di bordo sembra confermare le mie impressioni: tutti descrivono l'incontro come interessante, evidenziando però come molti degli argomenti fossero già stati trattati a scuola, anche se magari meno approfonditamente.[32]

[31]In questo caso forse inevitabile? Nel gruppo di lavoro si rifletteva sul fatto che tra i messaggi che è importante passare agli studenti c'è anche quello che la matematica è una disciplina tecnica e complessa, e (anche) per questo ha un grande valore. Una considerazione che tornerà nel corso della riprogettazione del laboratorio.

[32]Leggendo i commenti, mi sono chiesto se la scuola non sia riuscita anche nell'arduo compito di "scolarizzare", sempre nel senso inteso da D'Amore in [D'AMORE, 2001], anche i saperi relativi a temi di urgentissima attualità come la crisi climatica, alimentandone la disaffezione da parte degli studenti. A posteriori credo di poter affermare che il progetto di tirocinio e del mio lavoro di tesi vada in direzione contraria.

Di seguito riporto alcune note che ho preso durante l'incontro, di scarsissimo valore: trovo davvero difficile prendere appunti completi durante una lezione così densa e interessante. Fortunatamente Angelica ha registrato l'intervento e provveduto a stenderne una trascrizione. Riporto comunque i miei appunti perché credo sintetizzino bene alcuni concetti cardine che saranno al centro della riprogettazione del laboratorio:

- differenza tra meteo (variabili legate alle condizioni atmosferiche osservate in un dato luogo e momento) e clima (media temporale di eventi meteorologici su scale temporali molto più lunghe);

- il clima sulla Terra è influenzato da atmosfera, biosfera, litosfera, criosfera, idrosfera, sole. Le interazioni non sono completamente comprese dalle conoscenze attuali, e sono proprio quelle che noi cerchiamo di riprodurre con i nostri modelli;

- effetto serra: senza l'assorbimento e la riemissione di radiazione da parte dei gas serra la temperatura media terrestre sarebbe di circa $-18\,°\mathrm{C}$. Il problema è che l'attività umana sta alterando molto rapidamente la composizione chimica dell'atmosfera;

- la temperatura media terrestre dal 1880 è aumentata di circa un grado; il riscaldamento non omogeneo, ci sono degli hotspot, quali la regione artica, il Mediterraneo, le montagne (Alpi incluse);

- vi sono alcuni fenomeni di feedback che amplificano il riscaldamento semplicemente dovuto alla forzante energetica; ad esempio l'aumento della temperatura causa una diminuzione nelle nevi e nei ghiacciai, aumentando la radiazione assorbita per effetto albedo e spostando così l'equilibrio verso una temperatura maggiore;

- il problema del buco nell'ozono è stato affrontato e risolto in tempi brevissimi (soluzioni implementate nell'arco di due anni), era molto più semplice e la soluzione non era costosa (eliminare i clorofluorocarburi). Tutt'altra storia per i cambiamenti climatici attuali;

- i modelli matematici per il meteo utilizzano griglie di ampiezza compresa tra gli 8 Km e i 20 Km, mentre quelli per il clima tra 50 Km e 100 Km. Processi su scale più piccole non sono risolti esplicitamente, ma devono essere "parametrizzati", cioè inseriti nel modello in altro modo (si pensi ai temporali locali, che possono avere dimensioni dell'ordine di 1 Km). Inoltre, si tratta di sistemi complessi, ovvero con interazioni non lineari, che li rendono molto sensibili alle condizioni iniziali, dando vita a un comportamento caotico; ciò rende impossibile fare previsioni meteorologiche oltre i 14 giorni;

- tutti i modelli a nostra disposizione sul clima non prevedono l'attuale aumento della temperatura se viene rimossa dal modello stesso la componente antropica.

3.2.4 IV e V giornata - Giovedì 20 e venerdì 21 giugno

Nel corso della mattinata concludiamo l'attività sugli inquinanti dell'aria; ciascun gruppo lavora su un dataset che contiene misure di concentrazione di PM10 in una zona diversa della città di Trento, in forma di serie storica mensile. Gli studenti effettuano la decomposizione additiva cercando di vedere se è possibile individuare una componente di trend e una stagionale. Il risultato dell'indagine viene presentato brevemente alla classe. Le immagini seguenti mostrano alcune esempi di grafici prodotti dagli studenti.

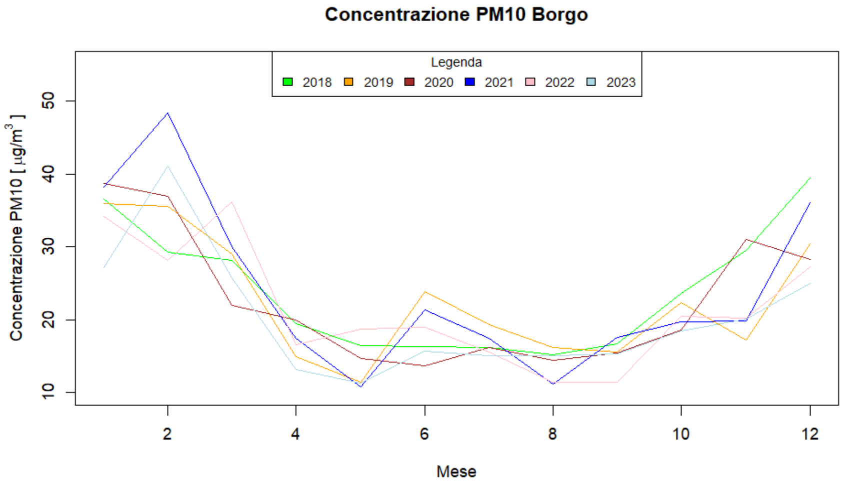


Figura 15. Dopo aver ipotizzato un periodo annuale per la serie storica, i dati vengono rappresentati anno per anno, in modo da mettere in evidenzia l'andamento annuale ricorrente.

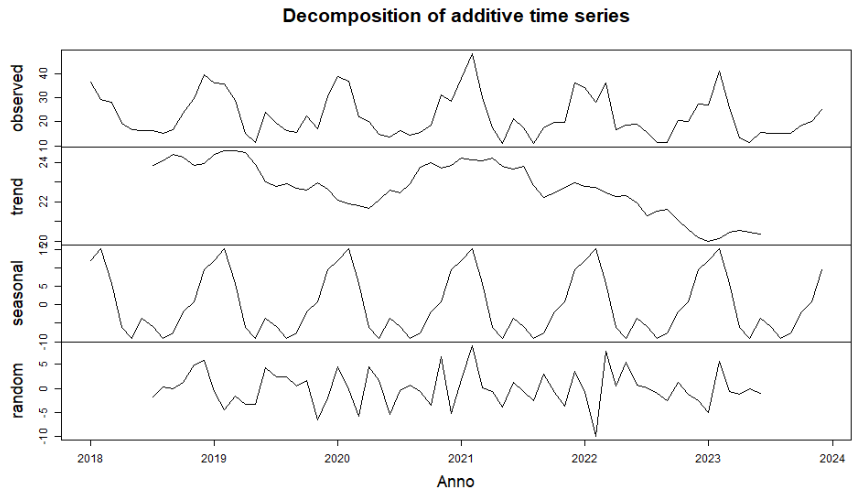


Figura 16. Il grafico mostra le varie componenti della decomposizione additiva della serie storica, ottenute usando il comando decompose di R, che calcola e rappresenta le componenti automaticamente.

Tutto il resto della quarta giornata e l'intero ultimo giorno vengono dedicati alla stesura del report conclusivo. Assegniamo a tre gruppi un dataset inerente il ghiaccio Careser, e agli altri tre il dataset sulla concentrazione di anidride carbonica presso il vulcano Mauna Loa e il Monte Cimone. Gli studenti in autonomia analizzeranno i dati, produrranno dei grafici e prepareranno il report, cercando di mettere in luce ciò che i dati possono rivelare in merito ai due fenomeni climatici coinvolti: nel primo caso, la fusione del ghiacciaio, e nel secondo l'andamento della concentrazione di CO_2 in due zone geografiche così distanti del pianeta.

Al termine del quarto giorno, gli studenti ci consegnano delle bozze per permetterci di fornire dei feedback, su cui lavoreranno nel corso dell'ultimo giorno, prima di consegnare la versione definitiva. Al termine delle attività, lasciamo loro un questionario conclusivo di valutazione della scuola estiva nel suo complesso. Dalla correzione delle bozze e da quanto ho potuto osservare girando tra i gruppi, emergono sostanzialmente due elementi:

- i grafici prodotti sono perlopiù corretti, anche se non sempre chiari: a volte mancano titolo, unità di misura e didascalie. In ogni caso l'obiettivo della scuola estiva inerente l'uso di R per la produzione di grafici si può considerare pienamente raggiunto;

- prevale l'affidamento a quanto già scritto e fatto da altri piuttosto che l'elaborazione di un proprio pensiero critico basato sui dati, pur avendo a disposizione gli strumenti di analisi adatti alla sua costruzione. In parole povere, le bozze dei report abbondano di testo copiato e incollato (ed eventualmente tradotto) dal web, a volte in modo raffazzonato, e non sempre pertinente alla consegna (introduzioni lunghe e generali non richieste, approfondimenti su aspetti di scarsa rilevanza), mentre sono quasi del tutto assenti testi prodotti dagli studenti stessi, elaborazioni di un loro pensiero, esplicitazioni delle riflessioni fatte a partire dai dati e dai grafici, nonostante questo fosse il principale obiettivo del percorso, su cui tanto si è insistito. Ne consegue che l'obiettivo legato alle competenze di analisi dei dati non può considerarsi pienamente raggiunto.

Una volta fornito il nostro feedback sulle bozze, il tiro viene aggiustato, e grazie anche al nostro costante intervento, i report finali sono comunque di un buon livello, come attestano le immagini che seguono.

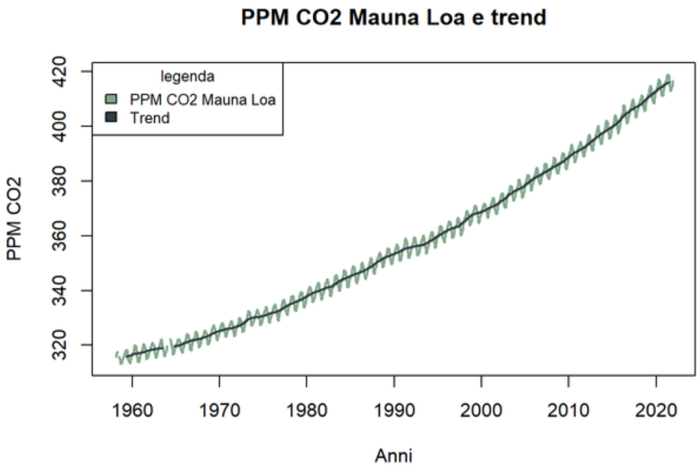


Figura 1.1 - Andamento della concentrazione di CO_2 sul vulcano Mauna Loa con il rispettivo trend.

La figura 1.1 mostra sinteticamente l'**andamento della concentrazione di CO_2** nell'aria nei pressi del **vulcano Mauna Loa dal 1960 al 2022.** Complessivamente, possiamo osservare che **il trend è crescente e che l'andamento annuale presenta una stagionalità,** infatti notiamo continui picchi a intervalli pressoché regolari e che durante l'anno **hanno il loro massimo durante l'inverno e il loro minimo durante l'estate**. Ciò è dovuto principalmente al fatto **che durante l'inverno nelle piante prevale la respirazione** (viene espulsa CO_2), e **che le emissioni di CO_2 da parte delle attività umane** (riscaldamento, combustione di combustibili fossili) **tendono ad aumentare.** Invece, durante l'estate, la concentrazione di CO_2 atmosferica diminuisce per l'aumento della fotosintesi.

La figura 1.2 mostra sinteticamente l'**andamento della concentrazione di CO_2 nell'aria nei pressi del monte Cimone dal 1980 al 2022.** Complessivamente, la situazione è **analoga a quella relativa al vulcano Mauna Loa, fatta eccezione per qualche differenza nell'andamento del trend e nell'ampiezza delle oscillazioni.** Una motivazione per quest'ultima è la **vicinanza** del Monte Cimone a **grandi aree urbane e industriali** che possono causare un aumento di CO_2 **durante i mesi invernali,** quando il riscaldamento e l'uso industriale di combustibili fossili sono più elevati, e **una riduzione durante i mesi estivi** quando le attività diminuiscono e la vegetazione assorbe più CO_2.

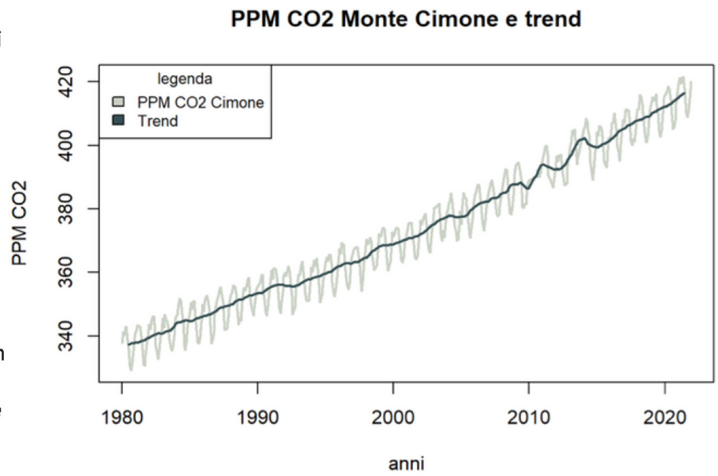


Figura 1.2 - Andamento della concentrazione di CO_2 sul monte Cimone con il rispettivo trend

Figura 17. Gli studenti hanno rappresentato le due serie storiche di concentrazioni di CO_2 sovrapposte ciascuna al proprio trend, per mettere in evidenza l'andamento crescente. Inoltre, cercano dare una spiegazione causale al particolare andamento oscillatorio.

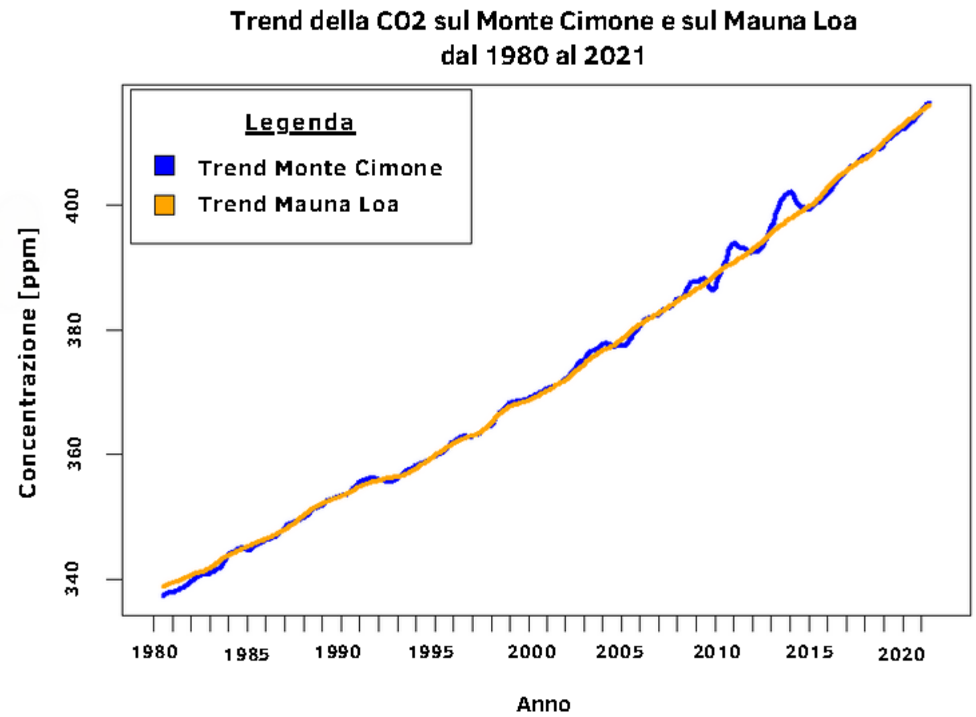


Figura 2: trend della concentrazione di CO2 in ppm (parti per milione) sul Monte Cimone e sul Mauna Loa dal 1980 al 2021

Dalla Figura 2, si può notare che i due diagrammi hanno un andamento crescente molto simile, ad eccezione del periodo 2011 - 2014 dove la curva blu, a differenza di quella arancione, descrive delle oscillazioni. Dalla similarità dei due diagrammi si deduce che il fenomeno del progressivo aumento delle emissioni di anidride carbonica non sia localizzato, ma, al contrario, presente su scala globale. Le due stazione di rilevamento sono infatti a collocata a un'ampia distanza e in condizioni climatiche diverse.

Figura 18. Gli studenti hanno scelto di confrontare i due trend, traendo dai dati un'interessante quanto sconfortante conclusione.

Affinché sia visibile l'**evoluzione del ghiacciaio** nel periodo di misurazione (dal 1967 al 2023) si è elaborato il grafico seguente, che contiene le cumulative, ovvero **la somma dei contributi netti relativi ad ogni anno**.

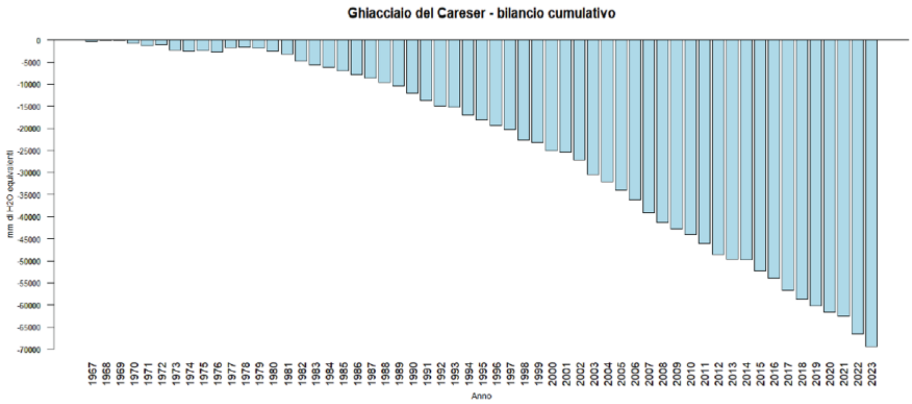


Figura 8 - Grafico a barre, bilancio cumulativo del ghiacciaio del Careser

Le ascisse corrispondono agli anni; le ordinate corrispondono invece ai valori del bilancio cumulativo del ghiaccio espressi in millimetri di acqua equivalenti.

Dal grafico si osserva come i ghiacci del ghiacciaio del Careser stiano diminuendo negli anni, con un'intensità di fusione progressivamente maggiore. Nell'anno 2023 infatti si riscontra una **perdita di 69.349,25 mm di H2O equivalenti di ghiaccio** rispetto all'anno 1967, ovvero circa 70 metri di ghiaccio fuso, pari alla **larghezza di un campo da calcio**.

Figura 19. Notare la presenza di tutti gli elementi indispensabili in un grafico (titolo, etichette degli assi, unità di misura, didascalia) opportunamente inserito all'interno del report. Il testo in sé non è sempre puntuale, ma senz'altro l'immagine scelta in conclusione è molto efficace.

3.3 Considerazioni conclusive: verso la riprogettazione

La sperimentazione ha pienamente assolto il suo scopo rispetto ai nostri obiettivi, ovvero fornirci indicazioni e spunti per orientare la riprogettazione. L'elemento che emerge con maggiore forza è la grandissima prevalenza della componente di programmazione e di produzione di grafici, a prescindere dal loro scopo e dal loro contesto, che passano quasi in secondo piano. Credo sia del tutto naturale che uno strumento così nuovo e interessante per gli allievi oscuri, ai loro occhi, tutto il resto; tra l'altro, strumento di cui è relativamente semplice padroneggiare le funzionalità di base e che mette rapidamente lo studente nella condizione di muoversi liberamente.

Nonostante le criticità messe in evidenza, credo che l'esperienza sia stata per gli studenti molto utile e arricchente, e credo abbia senso continuare a riproporla nelle ore di PCTO. D'altronde, quante attività del genere vengono svolte a scuola? In quante occasioni docenti di discipline diverse lavorano insieme con gli studenti e forniscono loro feedback e suggerimenti costanti, anche nell'ambito di un lavoro di gruppo? Certo, i tempi sono molto lunghi e le competenze richieste molteplici: di fatto come tutor abbiamo svolto, nei nostri limiti, il ruolo di docente di matematica, scienze e italiano;[33] a livello scolastico una simile attività richiederebbe il

[33] Un altro tema interessante: il docente tuttologo. In una didattica orientata alle competenze, è inevitabile che le discipline vedano i propri contorni sfumarsi, e il docente "intromettersi" nell'altrui terreno. Per quanto creda che un ampio bagaglio di cultura generale debba essere auspicabile per qualsiasi docente, non è possibile

coinvolgimento dei diversi insegnanti del consiglio di classe.

In un mondo così complesso, la competenza di lettura e interpretazione di dati, anche attraverso l'uso di grafici, non può non far parte del bagaglio culturale di uno studente in uscita dalla scuola secondaria, così come la capacità di costruire e articolare un proprio pensiero critico e argomentativo volto anche alla comunicazione. In questo senso, ci sembrava davvero che il progetto di revisione del laboratorio, spostando il focus dall'aspetto di programmazione a quello argomentativo e matematico, potesse avere un grande valore.

Al di là delle mie impressioni personali, qual è l'opinione dei ragazzi sul percorso? Da quanto riportato nei diari di bordo e nel questionario conclusivo si può concludere che la scuola estiva sia stata estremamente apprezzata: 21 studenti su 22 che hanno partecipato al sondaggio la consiglierebbero ai compagni, e 20 la sceglierebbero nuovamente se potessero tornare indietro; l'utilità percepita è molto alta, non ci sono lamentele serie, e anche chi ha segnalato difficoltà all'inizio dichiara poi di averle superate e di essersi trovato molto bene. Tra le parti preferite dagli studenti ci sono la creazione di grafici e del report, il lavoro di gruppo, e sorprendentemente anche l'incontro con la climatologa, per alcuni.[34] Per concludere, riporto ancora qualche pensiero significativo degli studenti.

Luca, III scientifico tradizionale
Oggi sono riuscito a fare molti grafici senza chiedere aiuto, quindi penso di essere migliorato, e ho scoperto che l'informatica mi piace.
Credo di aver imparato ad utilizzare discretamente i comandi che abbiamo visto assieme, considerando che non avevo mai sfiorato una tastiera prima.

Estratti dal questionario conclusivo
Sono sicuramente diventata un po' più paziente ed ho collaborato molto con il gruppo. Mi sono trovata in una condizione dove non mi vergognavo a chiedere aiuto ai professori e ammiro il loro lavoro.[35] *Non è stato difficile apprendere RStudio perché usa un linguaggio non particolarmente difficile, all'inizio mi aspettavo un approccio più matematico. Non è stato difficile apprendere il linguaggio R. Mi aspettavo più calcoli di matematica, ma sono contenta sia stato principalmente concentrato sul programma e sui grafici.*

pretendere che conosca tutte le discipline approfonditamente in prima persona: va concessa al docente, credo, la delega di uso di sapere di seconda mano, ovvero la possibilità di usare a fini didattici sapere che non necessariamente ha fatto proprio e su cui esercita completo controllo, ma che piuttosto ha reperito da fonti attendibili, con tutte le riserve del caso, e tanto basta. Non si tratta forse di una competenza che vorremo vedere gli studenti stessi sviluppare? Di fatto, questa è la scelta, non implicita, ma ragionata, che abbiamo fatto nel corso della riprogettazione dell'attività, nel corso della quale, come si vedrà, abbiamo fatto larghissimo uso di fonti esterne alla matematica e alla sua didattica.

[34] Una nota di colore: qualche studente afferma che si aspettava "più matematica", come se non avessimo fatto matematica per una settimana! Considerazioni di questo tipo ormai non mi sorprendono, è notissimo che purtroppo tra gli studenti prevale una visione della matematica legata quasi esclusivamente ai calcoli, visione d'altro canto ampiamente diffusa nella società in generale.

[35] Prendo spunto da questo meraviglioso commento per spostare l'attenzione sull'insegnante ancora una volta: credo che l'esperienza della scuola estiva sia stata una delle più soddisfacenti e rincuoranti dell'intero tirocinio. Lavorare con un gruppo di studenti fortemente motivati è a sua volta estremamente motivante e ricostituente per l'insegnante. Si tratta di una situazione eccezionale, probabilmente molto distante da quella di una classe media. Che bello sarebbe se l'insegnante riuscisse a costruire nelle proprie classi un ambiente di lavoro così sereno e produttivo: una vera e propria sfida.

4 Uno sguardo matematico sulla crisi climatica

In questo capitolo cercherò di raccontare la parte centrale dell'esperienza di tirocinio, ovvero la riprogettazione e la successiva sperimentazione del laboratorio *We live in a closed system. Data analysis useful for investigating environmental sustainability*, proposto nel corso della scuola estiva raccontata nella sezione precedente. Si è trattato di un lavoro immenso, corale, frutto di innumerevoli ore di progettazione in gruppo e di ricerca personale, di continui confronti, rielaborazioni, aggiustamenti, che si sono susseguiti incessantemente durante la stesura del percorso per proseguire poi anche nel corso della sperimentazione, aggiustando il tiro in corso d'opera per quanto possibile, e che continuano ancora oggi, per rendere l'attività sempre più interessante e valida per gli studenti.

Evidentemente, tenere traccia precisa di uno sviluppo così complesso e dinamico è pressoché impossibile, e di certo io non sono stato in grado di farlo. Quanto segue è dunque solo una sintesi dell'attività svolta dal nostro gruppo di lavoro, da giugno a ottobre 2024; sintesi comunque degna ed esaustiva, spero. Inizialmente cercherò di delineare i principi che hanno guidato la progettazione, per poi descrivere nel dettaglio il percorso didattico, perlomeno nelle parti che mi hanno visto coinvolto direttamente e su cui si basa anche il mio lavoro di tesi; cercherò di motivare le scelte fatte, ma non sempre sarò fedele rispetto all'ordine cronologico in cui sono state prese. Infatti, come accennavo, il percorso è stato più volte modificato e rielaborato, e alcuni elementi sono stati introdotti direttamente nel corso delle sperimentazioni; ai fini di un'esposizione più organica e chiara, il percorso verrà presentato nella sua versione più recente - perlomeno nel momento in cui scrivo - relegando alle note alcune precisazioni sulle modifiche apportate. Successivamente, racconterò brevemente l'esperienza del workshop estivo dei docenti, che è stata occasione di presentare il progetto ad altri insegnanti e ricevere dei feedback. Infine, riporterò sempre in forma di diario le due sperimentazioni cui ho partecipato in prima persona, con tutte le osservazioni del caso, da cui cercherò infine di trarre qualche considerazione complessiva.

Al progetto hanno lavorato la prof.ssa Elisabetta Ossanna, in qualità di coordinatrice; la già citata Angelica Piselli, assegnista di ricerca presso il Laboratorio DiCoMat, il prof. Luigi Amedeo Bianchi, docente universitario e ricercatore in probabilità e statistica; diverse insegnanti di matematica di alcune SSSG di Trento: Vittoria Martinelli, Letizia Corazzolla e Francesca Arrigoni; il sottoscritto, in qualità di tirocinante.

Tutto il materiale relativo al progetto è disponibile online sul sito dedicato,[36] che è stato pensato come supporto per l'insegnante che volesse proporre l'attività nelle proprie classi. Esso contiene sia i contenuti destinati agli studenti che gli approfondimenti riservati all'insegnante.

[36]https://sites.google.com/unitn.it/matematicaecrisiclimatica

4.1 La progettazione

Quando si lavora in gruppo per progettare un'attività didattica, credo sia importante avere degli obiettivi e dei valori condivisi che orientino tutti i contributi personali, e che costituiscano un riferimento al quale rapportare continuamente quanto prodotto. Inoltre, credo sia importante avere un'idea forte da cui iniziare, un punto di partenza, anche solo per avviare il processo creativo e stimolare la discussione, per poi eventualmente allontanarvisi.

Nel nostro caso non ci sono dubbi: tutto è partito dal seminario della climatologa Simona Bordoni, di cui ho accennato nella sezione 3.2.3, e di cui sono disponibili le slide accompagnate da una trascrizione completa dell'intervento sul sito del progetto. Il quadro della situazione da lei delineato è tutt'altro che felice; credo che un destinatario generico non possa che trarne, nel complesso, un senso di inquietudine e di impotenza, a maggior ragione perché consapevole del fatto che siamo di fronte a problemi che non abbiamo la volontà di risolvere, nonostante la scienza, e la matematica in particolare, ci permetta di comprenderli, di studiarli a fondo, e, entro certi limiti, anche di prevederli. Se c'è una cosa di cui sono convinto, però, è che l'insegnante è - o dovrebbe essere - un "osservatore" della realtà tutt'altro che generico: è portato, o forse tenuto, a mettere a fuoco gli stimoli che riceve anche attraverso le lenti della sua professionalità, trasformandoli, quando di sua competenza, in attività didattica finalizzata a mettere lo studente nelle condizioni di comprenderli a sua volta, dotandolo dei necessari strumenti disciplinari, aiutandolo così a sviluppare un proprio pensiero critico.

In quest'ottica, ecco alcune domande che ci siamo posti a seguito dell'intervento della climatologa: come possiamo portare in classe il tema della crisi climatica nelle ore di matematica? I nostri studenti sono consapevoli della situazione, e se sì, possiamo aiutarli a comprenderla meglio quantitativamente grazie alla matematica? Siamo in grado di trasmettere, come insegnanti, l'immagine di una matematica viva, concreta, che ci parla della realtà, che ha così tanto di significativo da dire sul mondo attuale da risultare indispensabile? Possiamo aiutare i nostri studenti a farsi un'idea più realistica delle applicazioni della matematica, anche in ottica di orientamento? Scendiamo di livello: la climatologa ha fatto uso di moltissimi grafici nella sua comunicazione; i nostri studenti sarebbero stati in grado di leggerli e di interpretarli? E cosa dire di tutta la terminologia tecnica impiegata, imprescindibile in un discorso scientifico? Saprebbero argomentare sul tema in maniera quantitativa, oltre che qualitativa, facendo un uso critico dei dati a disposizione? E nel momento in cui dovessero sentire al telegiornale notizie relative alla crisi climatica, o leggere un articolo su una testata giornalistica, magari non specialistica, andrebbero oltre una lettura acritica e superficiale? Questi sono gli obiettivi - e, nemmeno troppo implicitamente, i valori - del nostro progetto, espressi sperabilmente anche dal titolo *Uno sguardo matematico sulla crisi climatica*.

Gli incontri che hanno seguito la scuola estiva si sono dunque concentrati sulla trasposizione (e in parte sull'ingegneria) didattica del discorso della climatologa, inserita in un percorso strutturato con una forte componente di lettura di grafici e analisi dati, integrato con una versione completamente rivisitata degli argomenti già proposti nel corso della scuola estiva, sostituendo alla parte di programmazione in R l'interazione con degli applet *GeoGebra* e *R Shiny*[37] appositamente sviluppati. Il risultato è stato un percorso estremamente variegato

[37] *R Shiny* è un pacchetto di R che permette di programmare agevolmente degli applet interattivi grazie

costituito da cinque blocchi:

1) Introduzione - inquadramento teorico del tema della crisi climatica; differenza tra meteo e clima, i fattori che determinano il clima sulla Terra, l'effetto serra, il surriscaldamento globale.

2) Ghiacciai - un percorso pensato principalmente per gli studenti della SSPG incentrato sull'analisi di dati sulla fusione dei ghiacciai; tra le altre cose prevede un'attività laboratoriale di "simulazione" di un ghiacciaio, con travaso di volumi d'acqua per cogliere il significato dei dati sul bilancio invernale ed estivo e della loro unità di misura, i millimetri di acqua equivalenti.

3) Temperature - rivolto agli studenti della SSSG a partire dal II anno, si tratta di un percorso basato sulla lettura di grafici significativi sulle temperature medie globali, fino all'analisi guidata da applet di un dataset reale mediante il modello di decomposizione additiva.

4) Anidride carbonica - per studenti della SSSG a partire dal IV anno, il blocco prevede l'analisi e il confronto di dataset reali sulle concentrazioni di anidride carbonica in due luoghi molti distanti del pianeta, mediante il modello di decomposizione additiva.

5) Conclusione - riflessioni conclusive sulla crisi climatica; i cambiamenti climatici nel passato e i modelli matematici del clima nel presente.

La struttura a blocchi rende l'attività estremamente adattabile alle esigenze dell'insegnante, che può assemblare le varie componenti come ritiene più opportuno per la sua classe, agendo anche internamente ai blocchi stessi. Nel seguito descriverò nel dettaglio le attività contenute in tutti i blocchi, salvo quello sui ghiacciai, al quale non ho lavorato in prima persona nel corso del tirocinio perché non inerente al mio argomento di tesi.

4.1.1 Blocco introduttivo

Il blocco introduttivo è pensato per permettere agli studenti di inquadrare il problema della crisi climatica da un punto di vista fisico. L'insegnante può adattarne i contenuti e il livello di approfondimento in base al contesto scolastico e alla conoscenze pregresse della classe. Per preparare la lezione l'insegnante ha a disposizione la fonte principale, ovvero la trascrizione dell'intervento della climatologa Simona Bordoni; inoltre, sul sito sono pubblicate le slide corredate di un riassunto dei contenuti, che potrebbero essere usate nel corso della lezione oppure lasciate agli studenti come materiale.

Prima di addentrarsi nel tema della crisi climatica, è bene chiarire agli studenti ciò di cui si sta parlando, definendo cosa si intende per clima nel contesto scientifico. Infatti, esiste una differenza fondamentale tra tempo meteorologico e clima, molto ben illustrata in una breve animazione[38] di cui la figura 20 rappresenta un fotogramma commentato.

ai quali è possibile, in particolare, visualizzare e modificare dinamicamente grafici. Nel seguito non farò mai riferimento al codice, che verrà invece discusso nel mio lavoro di tesi.

[38]https://www.youtube.com/watch?v=e0vj-0imOLw

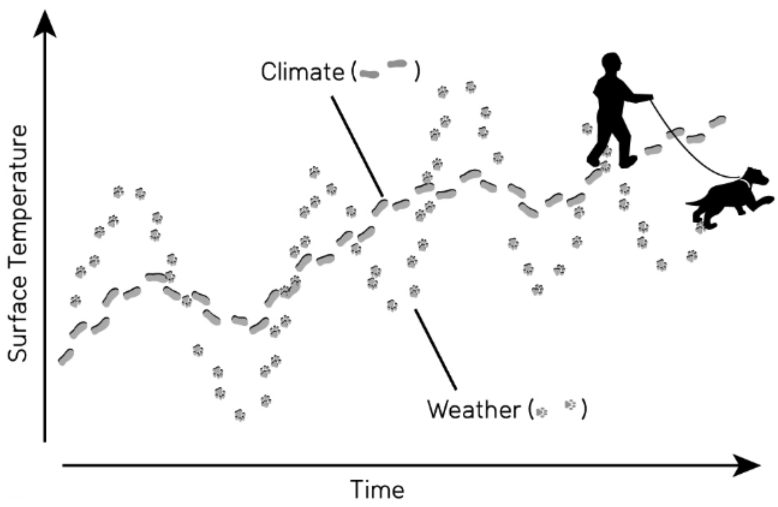


Figura 20

Il video mostra un cane condotto a passeggio dal proprio padrone; come si può vedere, il cane segue un percorso a zig-zag, muovendosi continuamente su e giù. Eppure, è possibile prevedere dove si troverà il cane dopo un certo tempo dalla partenza, perché è il padrone a determinarne la traiettoria: ci sono tante cose che non si sanno del padrone, il quale potrebbe anche decidere di cambiare direzione, ma, sulla base delle informazioni in nostro possesso, possiamo effettivamente fare una previsione. In questo caso, invece che guardare nel dettaglio i movimenti del cane, dobbiamo assumere una visione d'insieme, ovvero concentrarci sul padrone. Chiaramente il cane rappresenta il tempo meteorologico, fatto di fluttuazioni più rapide, mentre il padrone rappresenta il clima, ovvero una media sul percorso del cane. Infatti, quando si fa riferimento al meteo si parla di variabili legate al tempo e alle condizioni atmosferiche (temperatura, vento, umidità, precipitazioni) osservate in un dato momento, in un dato luogo; il clima rappresenta invece la media di tanti eventi meteorologici fatta su scale temporali più grandi, solitamente di circa 30 anni. Quindi, mentre il meteo si osserva giorno per giorno, il clima è ciò che ci si aspetta di osservare in un dato luogo e in un dato periodo, sulla base di statistiche accumulate su un periodo molto più lungo.

Che cosa, dunque, determina il clima sulla Terra? Prima di tutto l'energia ricevuta dal Sole, che è il motore del clima e della circolazione generale dell'atmosfera e degli oceani, ovvero dei venti e delle correnti oceaniche. Il clima, poi, è costituito da diverse componenti: la componente dell'atmosfera, dove le manifestazioni del tempo meteorologico sono le più ovvie (sistemi di nubi, precipitazioni); l'idrosfera, che è la componente che comprende tutte le acque allo stato liquido; la criosfera, che è l'insieme di tutte le superfici coperte di acqua allo stato solido, quindi ghiaccio e neve; la litosfera, ovvero le terre emerse; la biosfera, che include tutti gli organismi viventi (compreso l'essere umano) e la vegetazione.

Il clima è influenzato da fenomeni che avvengono in ciascuna di queste componenti (figura 21) e dalle loro interazioni reciproche, che talvolta non sono ancora state completamente comprese. Queste interazioni sono quelle che si cerca di rappresentare nei modelli numerici che vengono impiegati per fare previsioni, per capire come si evolverà il clima nei prossimi decenni.

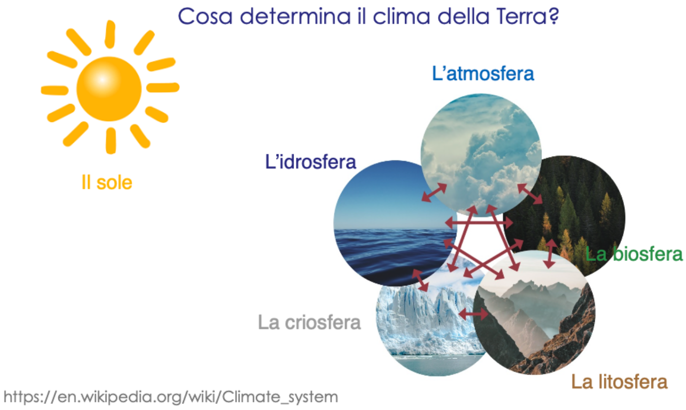


Figura 21

Il clima del nostro pianeta viene determinato dal bilancio energetico (figura 22): il Sole fornisce energia al sistema climatico sotto forma di radiazione che passa, per la maggior parte, attraverso la nostra atmosfera, dal momento che questa è trasparente alla radiazione solare. Nonostante ciò, per esempio, i raggi ultravioletti più dannosi per l'uomo e per tutte le specie viventi vengono assorbiti dall'ozono, motivo per cui la perdita di ozono nella stratosfera ha destato, negli anni, molta preoccupazione. Una parte della radiazione viene poi riflessa dalle superfici bianche (ghiaccio, neve, nuvole), mentre il resto viene assorbito dalla superficie terrestre che, di conseguenza, si riscalda. Se la superficie terrestre non avesse modo di riemettere energia verso l'esterno non si raggiungerebbe mai un equilibrio termico e il pianeta continuerebbe a scaldarsi! Per raggiungere l'equilibrio energetico, la superficie della Terra emette radiazione elettromagnetica verso lo spazio, ma l'atmosfera - ricordiamo, per lo più trasparente alla radiazione solare - è formata anche da gas che assorbono in modo molto efficace la radiazione emessa dalla superficie del nostro pianeta: i cosiddetti gas serra.

Figura 22

Come mai l'atmosfera si comporta in un modo con la radiazione solare e in un altro con quella terrestre? Sappiamo che la lunghezza d'onda della radiazione emessa da un corpo dipende dalla temperatura del corpo stesso. Il Sole ha una temperatura superficiale di circa 6000 °C, e quindi lo spettro solare (figura 23) è principalmente concentrato nell'ultravioletto e nella luce visibile (il massimo della radiazione emessa dal Sole si trova nelle lunghezze d'onda della luce verde, circa 0.5 μm).

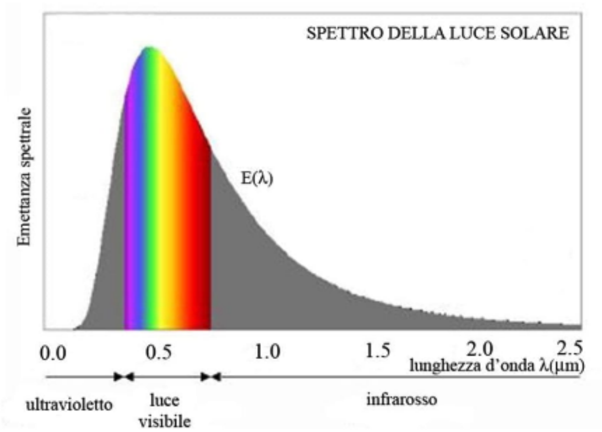


Figura 23

La temperatura media della superficie della Terra è invece molto più bassa (circa 15 °C), e questo significa che la radiazione emessa dalla Terra è caratterizzata da lunghezze d'onda molto più lunghe, nell'infrarosso (con picco a circa 11 μm): si parla di radiazione termica o radiazione nell'infrarosso, che il nostro occhio non riesce a vedere. Un aspetto importante è il fatto che la radiazione solare e quella emessa dalla Terra hanno pochissima sovrapposizione, sono sostanzialmente separate (figura 24). Ciò permette di sviluppare modelli semplificati per capire l'interazione della radiazione con il sistema clima, trattando in modo indipendente i contributi dei due tipi di radiazione, dato che l'interazione dell'atmosfera con questi due spettri è caratterizzata da lunghezze d'onda molto diverse.

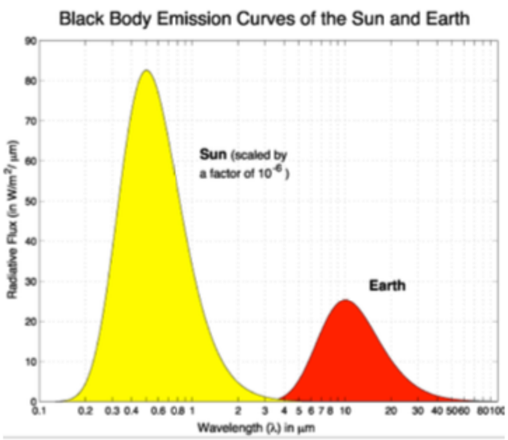


Figura 24

Come si accennava, esistono dei gas, chiamati gas serra, che assorbono in modo molto efficace la radiazione nello spettro dell'infrarosso, e quindi anche quella emessa dalla superficie della Terra. I gas serra sono contenuti in quantità molto piccole nell'atmosfera, che è costituita prevalentemente da azoto e ossigeno; i principali sono il vapore acqueo (H_2O), l'anidride carbonica (CO_2), il metano (CH_4), e l'ossido nitroso (N_2O). Dunque, solo una piccola parte della radiazione terrestre riesce a scappare direttamente verso lo spazio; il resto viene assorbito e poi riemesso in tutte le direzioni dai gas serra e dalle nubi. Quindi, questi gas agiscono come una coperta che innalza la temperatura del nostro pianeta e della sua atmosfera: in loro assenza il nostro clima sarebbe molto più freddo, con una temperatura media di circa $-18\,°C$; la Terra sarebbe un pianeta ghiacciato e non abitabile. L'effetto serra è quindi un fenomeno naturale, che ha permesso a forme di vita complesse di svilupparsi sulla Terra.

Come mai allora l'effetto serra desta tanta preoccupazione? La questione è che le attività umane stanno modificando la composizione chimica dell'atmosfera, principalmente attraverso la combustione dei cosiddetti combustibili fossili, alterando in modo molto rapido il bilancio energetico della Terra: immettendo maggiori quantità di gas serra nell'atmosfera, l'assorbimento e la riemissione della radiazione infrarossa aumentano, e ciò conduce a un innalzamento della temperatura del pianeta e dell'atmosfera sovrastante.

L'aumento di temperatura è dunque un fenomeno globale, e gran parte delle osservazioni vengono fatte utilizzando una media globale. Nonostante ciò, nessuno di noi vive nella media, ognuno vive in zone specifiche del pianeta. A tal proposito può essere mostrato un filmato che riporta, dal 1850 al 2022, l'evoluzione della manifestazione locale del riscaldamento globale.[39]

Il video mostra moltissime informazioni, che per il momento possono essere commentate senza approfondire, visto che saranno oggetto di studio specifico nel blocco dedicato alle temperature. Si può già cominciare a far notare che le temperature sono espresse come anomalie rispetto alla media di riferimento $1951 - 1980$. Il colore blu sulla mappa indica zone in cui le temperature erano inferiori alla media, i colori giallo e rosso superiori. Inizialmente in media emerge il blu, infatti l'anomalia rimane al di sotto dello zero (figura 25); inoltrandosi nel $1951 - 1980$ il record oscilla intorno allo zero, e compaiono zone sia blu che rosse; ai giorni nostri la temperatura media si sta innalzando, e regionalmente si ha un emergere di giallo e rosso (figura 26).

[39]https://www.youtube.com/watch?v=XdKQZnhwcTs

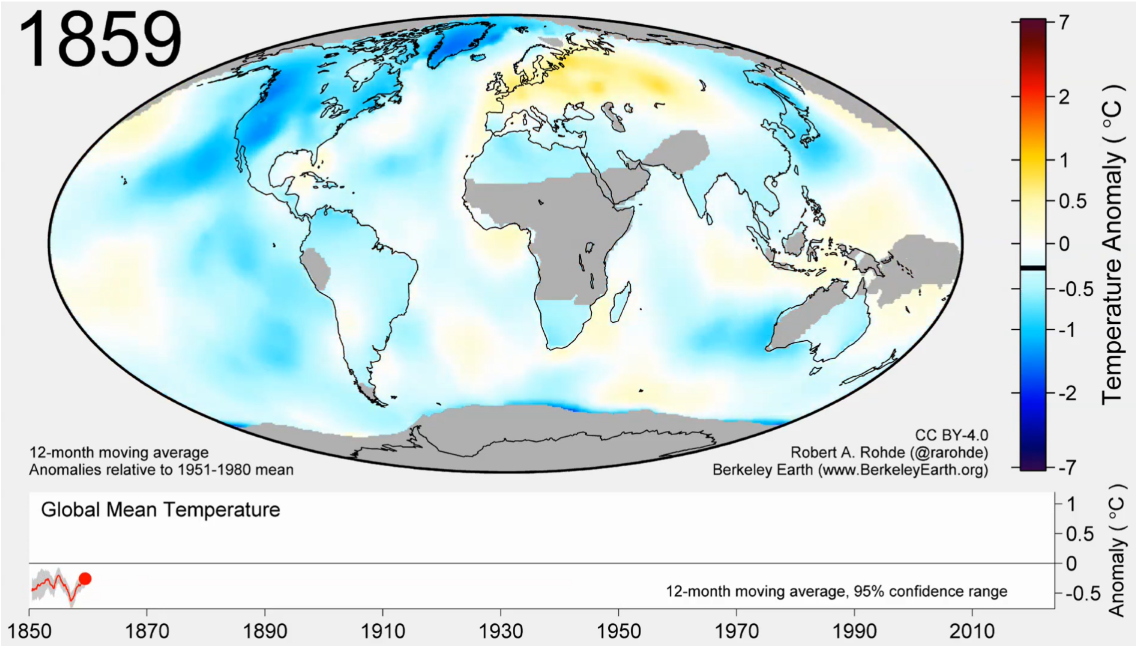


Figura 25

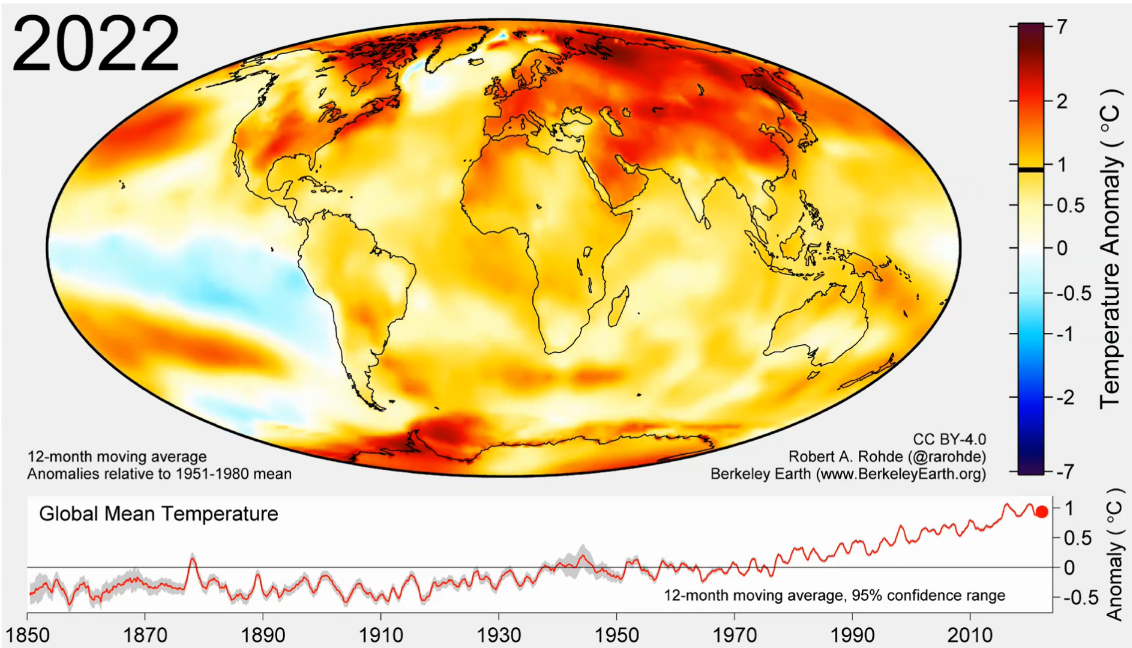


Figura 26

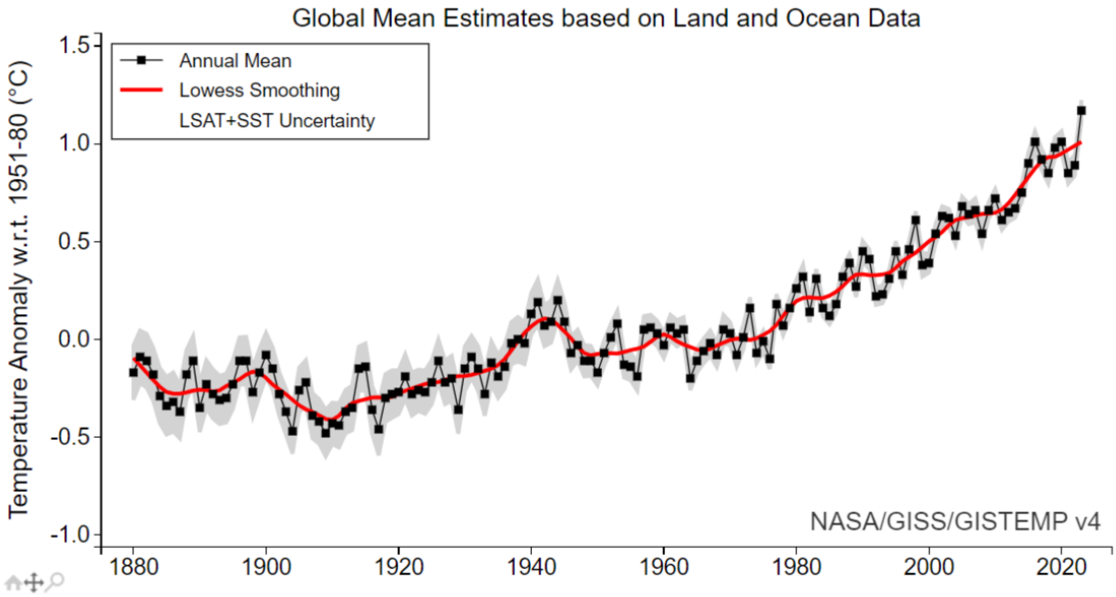
Questo tipo di rappresentazione dei dati è molto efficace, e aiuta a mettere in evidenza alcuni punti fondamentali. Infatti, si nota che il riscaldamento, pur avendo influenzato il 98% delle zone del nostro pianeta, non è omogeneo: esistono degli hot spot, le zone in cui prevale il rosso intenso, in cui il riscaldamento sta avvenendo molto più velocemente rispetto alla media globale. Queste zone includono la regione artica e il Mediterraneo; non solo nei dati osservati, ma anche nelle proiezioni dei modelli, il Mediterraneo spicca come zona in cui le temperature si stanno alzando, con una tendenza all'aridificazione, anche su tutte le montagne, incluse le Alpi. Quello che vediamo accadere sulle Alpi è in realtà un fenomeno globale che coinvolge tutte le montagne, che sono disseminate sui continenti, indipendentemente dalla latitudine o dalla longitudine (ci sono ghiacciai anche nei tropici). Tutte le catene montuose stanno vedendo un riscaldamento molto più rapido rispetto alla media, a causa dell'importanza giocata dalle superfici bianche: con l'aumento della temperatura diminuisce l'estensione dei ghiacciai e delle superfici coperte da neve, di conseguenza meno radiazione solare viene riflessa, e ciò provoca un ulteriore innalzamento della temperatura terrestre, in un circolo di feedback positivo.

4.1.2 Temperature

L'attività prende il via dall'analisi del grafico delle anomalie di temperatura media globale annua e vuole indagare uno dei fenomeni più allarmanti della crisi climatica: l'aumento della temperatura globale. Il percorso prevede l'analisi guidata di una serie storica di anomalie di temperatura globale mensili, partendo da dati creati ad hoc per costruire significati intorno ai concetti di anomalia, periodicità, stagionalità, media mobile, concludendo con la decomposizione additiva della serie storica. Si tratta di un percorso lungo e complesso, che l'insegnante può adattare in base alle proprie esigenze. La parte di analisi dei grafici è stata pensata per studenti a partire dalla II superiore, mentre la porzione conclusiva sulla decomposizione additiva è consigliata per studenti di IV o V superiore.

Il primo grafico preso in esame è il seguente (Grafico T1 - Figura 27), che mostra l'andamento dell'anomalia della temperatura media globale annua rispetto al periodo di riferimento $1951-1980$. Si tratta di un grafico di non semplice lettura, per il quale abbiamo preparato alcune domanda guida per orientare la discussione con gli studenti:

1) Che dato rappresentano i quadratini neri all'interno del grafico?
2) Qual è, secondo voi, la definizione di anomalia di temperatura?
3) Perché scegliere di rappresentare le anomalie e non direttamente le temperature?
4) Cosa rappresenta la linea rossa? Ripensate alla passeggiata cane-padrone.
5) Cosa possiamo dire dei primi 60 anni?
6) Cosa possiamo dire degli anni dal 1980 in poi?



Land-ocean temperature index, 1880 to present, with base period 1951-1980. The solid black line is the global annual mean and the solid red line is the five-year lowess smooth. The gray shading represents the total (LSAT and SST) annual uncertainty at a 95% confidence interval and is available for download. [More information on the updated uncertainty model can be found here: Lenssen et al. (2019).]

Fonte: https://data.giss.nasa.gov/gistemp/graphs_v4/

Figura 27

Vi sono diversi nodi di complessità, sia dal punto di vista del contenuto matematico e scientifico che didattico. Si potrebbe iniziare mettendo in evidenza la fonte di provenienza dei dati: si tratta di uno studio (*GISS Surface Temperature Analysis version 4*, abbreviato in *GISTEMP v4*) condotto dal *Goddard Institute for Space Studies (GISS)*, un laboratorio della NASA. Lo studio cerca di dare una stima dei cambiamenti nella temperatura globale della superficie terrestre combinando i dati misurati dalle stazioni meteorologiche. Tutti i dettagli e gli articoli scientifici legati allo studio sono disponibili (in inglese) sul sito del GISS, citato come fonte del grafico T1. Ovviamente gli aspetti tecnici sono inaccessibili per lo studente come per il docente di matematica non specializzato nel settore, ma può comunque essere interessante riflettere su quanta matematica debba essere coinvolta nel processo che trasforma un'enorme quantità di dati osservati localmente in un unico numero, ovvero la temperatura globale media rappresentata nel grafico.[40]

Le considerazioni sopraesposte portano inevitabilmente a riflettere su quale sia davvero il dato rappresentato dai quadratini neri: si tratta della differenza tra la temperatura media globale annuale e la media delle temperature globali tra il 1951 e il 1980, che è il periodo di riferimento (la media globale della temperatura dell'aria sulla superficie terrestre era all'epoca di circa 14 °C, con un'incertezza di alcuni decimi di grado[41]). Negli studi climatologici si è soliti riferirsi a queste differenze di temperatura rispetto a medie di riferimento con il termine

[40]In classe conviene visualizzare i grafici direttamente dal sito del GISS, perché è possibile interagirvi: passando con il cursore sopra un quadratino si visualizza il dato corrispondente. Inoltre, i grafici vengono aggiornati mensilmente con i nuovi dati.

[41]https://earthobservatory.nasa.gov/world-of-change/global-temperatures

anomalia.[42] Risulta evidente da queste poche righe come sia difficile attribuire un senso al dato rappresentato, che richiede solo per essere definito l'accostamento di moltissimi termini, alcuni con significato tecnico: un esempio lampante della complessità del linguaggio scientifico, indispensabile per garantire chiarezza e univocità interpretativa.

Per aiutare gli studenti a fare propria questa terminologia, che si ripresenterà più volte nel corso del blocco, abbiamo pensato a due tipi di attività. La prima ha come obiettivo la costruzione di significato del concetto di anomalia: partendo da alcuni dati di temperatura e dal loro grafico chiediamo agli studenti di costruire il grafico delle anomalie rispetto a una media di riferimento di 14 °C (figura 28); in tal modo vorremmo anche mostrare l'interpretazione geometrica dell'anomalia (traslazione del grafico delle temperature). Inoltre, la media di riferimento scelta è pari (circa) alla media dei dati rappresentanti: ciò offre all'insegnante l'occasione di lavorare sul significato di media attraverso una potente visualizzazione (la somma delle distanze dei dati dalla media deve essere pari a zero).

Hai a disposizione una serie di dodici dati: le temperature medie mensili dell'anno 2020, in gradi centigradi, rilevate a Trento, zona Laste (Cognola), a cura di Meteotrentino.

Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
4,3	7,3	8,7	14,9	18	20,6	23,5	23,4	19,6	12,3	8,5	2,9

Rappresentiamole in un piano cartesiano e consideriamo una media di riferimento di 14°C.

Ora prova tu a rappresentare qui sotto le anomalie di temperatura rispetto alla media di riferimento indicata, nella maniera che ritieni più opportuna.

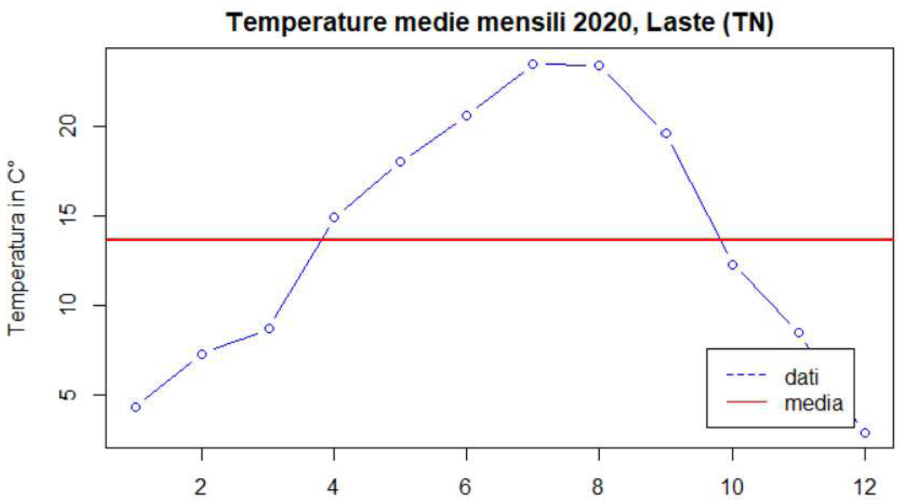


Figura 28

La seconda attività si focalizza invece su tutti i termini necessari per descrivere in maniera chiara e completa il dato rappresentato nel grafico T1, scegliendo e collocando nell'ordine

[42] L'uso delle anomalie a discapito delle temperature assolute è dovuto principalmente alla centralità delle variazioni di temperatura rispetto a un certo valore di riferimento, che può anche variare da studio a studio. Vi sono anche motivi tecnici legati alla comparabilità dei risultati forniti da modelli diversi, come si vedrà nella sezione 4.1.4.

corretto alcuni cartellini appositamente predisposti, soffermandosi sul significato di ciascuna parola (figura 29).[43] I cartellini sono stati pensati per poter essere utilizzati più volte in diverse combinazioni, per descrivere i dati rappresentati nei vari grafici che gli studenti incontreranno durante il percorso.

Figura 29

Tornando al grafico T1, un altro elemento da mettere in evidenza è il ruolo giocato dai segmenti neri che collegano i quadratini: essi non contengono alcuna informazione, sono un mero espediente per permettere una visualizzazione più chiara dall'andamento dei dati.[44] Per quanto riguarda invece la curva rossa, essa rappresenta una sorta di media delle anomalie, che permette di coglierne meglio l'andamento complessivo al di là delle fluttuazioni, un po' come succedeva nel filmato della passeggiata del cane: rispetto all'andamento sul lungo periodo (in crescita), i dati oscillano più rapidamente. Infatti, come visto nel blocco introduttivo, il clima del nostro pianeta è legato a interazioni tra tante componenti diverse, tra cui l'oceano (con un'elevata capacità termica), che con le sue dinamiche interne porta ad anni più caldi e più freddi; si tratta quindi di oscillazioni dovute a effetti naturali.

Può anche essere interessante soffermarsi sull'alone grigio che circonda i dati: si tratta dell'errore legato alla temperatura dell'aria sulla superficie terrestre (LSAT, Land Surface Air Temperature) e sulle acque (SST, See Surface Temperature). Le incertezze sono dovute a diversi fattori: errori di misura, variazione nel tempo delle zone coperte dalle stazioni di rlevamento, errori sistematici dovuti all'evoluzione delle tecnologie di misura. Infatti, si può notare che le incertezze (in un intervallo di confidenza del 95%) sono vicine agli 0.05 °C negli ultimi cinquant'anni, ma aumentano andando indietro nel tempo, fino a raggiungere gli 0.15 °C nel 1880.

Al netto delle osservazioni fatte, possiamo concludere che dal 1880 la temperatura globale media è progressivamente aumentata, e in particolare negli ultimi decenni in modo più rapido. Complessivamente, l'aumento rispetto al 1880 è stato di oltre un grado centigrado.

[43] Questo espediente è stato introdotto molto tardi, durante le sperimentazioni, nelle quali si è reso necessario visto lo smarrimento degli studenti di fronte alla complessità del linguaggio. Si veda la sezione 4.3.2.

[44] Questa può sembrare una considerazione del tutto ovvia, su cui non vale la pena soffermarsi con gli studenti. Le sperimentazioni hanno chiaramente dimostrato che non è così.

A questo punto, è possibile riprendere il filmato visto nella parte introduttiva (figura 26) e indagarlo più approfonditamente, mettendo in evidenza le differenze con il grafico T1, lavorando eventualmente ancora con i cartellini. Infatti, ora il dato rappresentato non è più globale, ma locale; si tratta sempre di anomalie, calcolate rispetto alla media del periodo di riferimento $1951 - 1980$. La media di riferimento sarà stata considerata globalmente o localmente? Questa informazione non è scritta esplicitamente, ma si può dedurre dalla rappresentazione: la media non può essere globale, altrimenti non si spiegherebbero, ad esempio, i colori rosso intenso delle zone fredde del pianeta nei pressi del Polo Nord; quindi l'anomalia è locale, calcolata rispetto alla media di riferimento locale.

Proseguendo, si sottopone all'attenzione degli studenti un nuovo grafico (Grafico T2 - Figura 30), anch'esso non di semplice lettura, ma dalla forma e dai colori molto suggestivi. Anche in questo caso abbiamo preparato delle domande guida:

1) Cosa viene rappresentato in questo grafico?

2) Che informazioni ci dà il fatto che si formi un arcobaleno e che le curve non siano tutte sovrapposte?

3) Perché ha questo andamento a onda?

4) Perché la linea riferita all'anno 2024 è formata da pallini e segmenti?

5) Le altre linee, che sono continue senza pallini, sono così perché contengono più informazioni o per una questione grafica?

6) Cosa succederebbe al grafico se al posto delle anomalie rispetto alla media del periodo di riferimento $(1980 - 2015)$ fossero rappresentate direttamente le temperature?

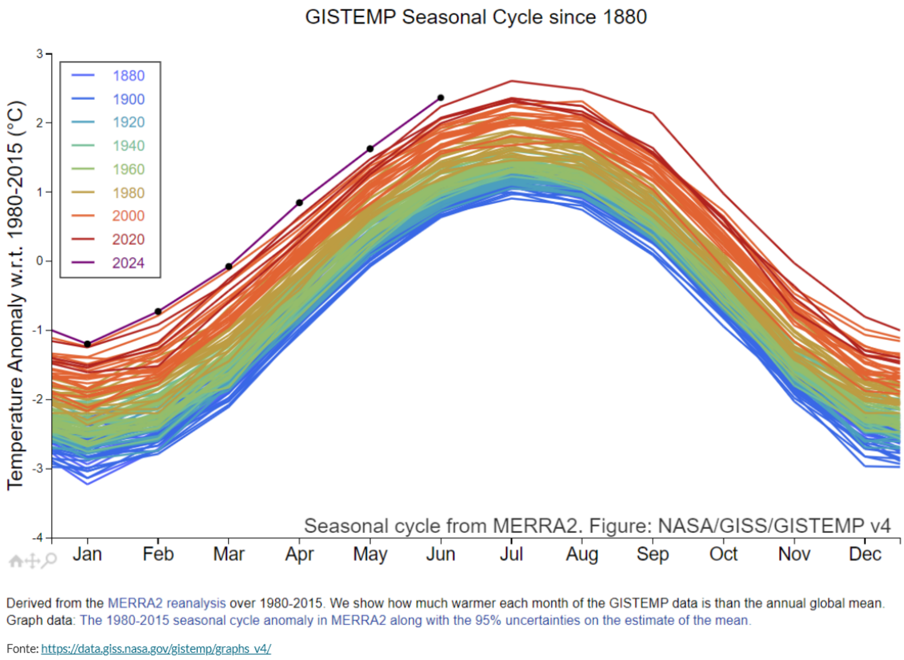


Figura 30

Per il grafico T1, la discussione ha necessitato di spiegazioni e chiarimenti da parte del docente, essendo il primo approccio a rappresentazioni così complesse. Stavolta, invece, vorremmo far lavorare gli studenti, proponendo loro un'attività guidata che li aiuti a interpretare il grafico T2, attività che riteniamo propedeutica alla discussione delle domande elencate. L'idea di fondo è di provare a costruire una serie storica di temperature mensili fittizie, e di produrne delle rappresentazioni grafiche significative, che si avvicinino gradualmente al grafico T2: saranno quindi gli studenti stessi a manipolare dei dati da loro creati, facilitando così, sperabilmente, la comprensione della loro rappresentazioni e di tutte le informazioni che essa può fornire.

A ciascuno studente (o a piccoli gruppi) viene fornita una cartella di lavoro su *Fogli Google*, che contiene cinque fogli, pensati per guidare lo studente nella produzione di grafici della serie storica di temperature e delle relative anomalie, in particolare:

1) costruzione della serie storica di temperature mensili fittizie e sua rappresentazione mediante grafico a dispersione;

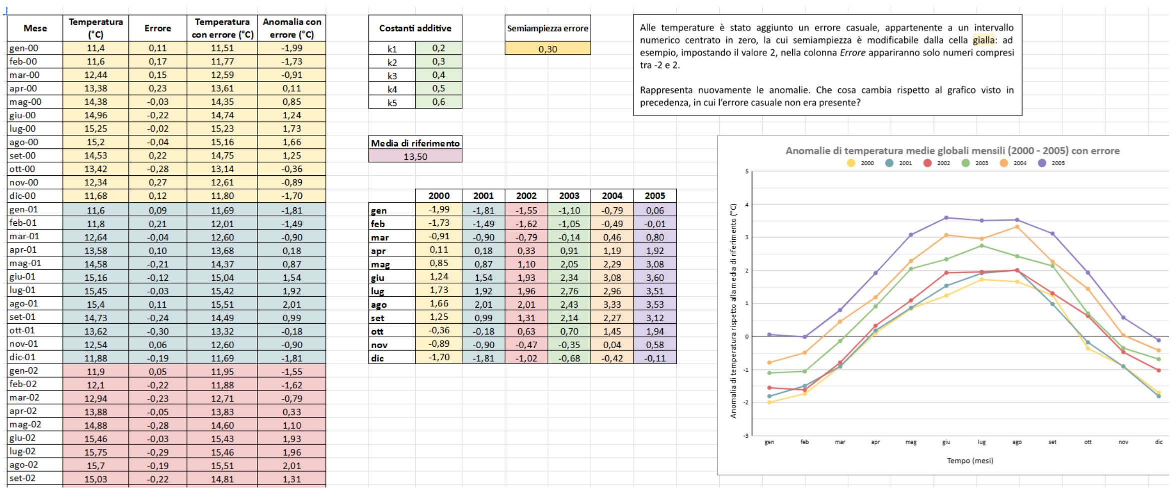
2) rappresentazione delle temperature anno per anno in uno stesso grafico con i dodici mesi sull'asse delle ascisse;

3) costruzione della serie storica delle anomalie di temperatura e sua rappresentazione mediante grafico a dispersione;

4) rappresentazione delle anomalie di temperatura anno per anno in uno stesso grafico con i dodici mesi sull'asse delle ascisse;

5) costruzione della serie storica delle anomalie di temperatura con aggiunta di un errore casuale e sua rappresentazione.

Per brevità descrivo nei dettagli solamente l'ultimo foglio (figura 31 - versione già compilata, per il docente), che prevede una rappresentazione molto simile al grafico T2 (gli altri fogli sono strutturati in maniera analoga).



Mese	Temperatura (°C)	Errore	Temperatura con errore (°C)	Anomalia con errore (°C)
gen-00	11,4	0,11	11,51	-1,99
feb-00	11,6	0,17	11,77	-1,73
mar-00	12,44	0,15	12,59	-0,91
apr-00	13,38	0,23	13,61	0,11
mag-00	14,38	-0,03	14,35	0,85
giu-00	14,96	-0,22	14,74	1,24
lug-00	15,25	-0,02	15,23	1,73
ago-00	15,2	-0,04	15,16	1,66
set-00	14,53	0,22	14,75	1,25
ott-00	13,42	-0,28	13,14	-0,36
nov-00	12,34	0,27	12,61	-0,89
dic-00	11,68	0,12	11,80	-1,70
gen-01	11,6	0,09	11,69	-1,81
feb-01	11,8	0,21	12,01	-1,49
mar-01	12,64	-0,04	12,60	-0,90
apr-01	13,58	0,10	13,68	0,18
mag-01	14,58	-0,21	14,37	0,87
giu-01	15,16	-0,12	15,04	1,54
lug-01	15,45	-0,03	15,42	1,92
ago-01	15,4	0,11	15,51	2,01
set-01	14,73	-0,24	14,49	0,99
ott-01	13,62	-0,30	13,32	-0,18
nov-01	12,54	0,06	12,60	-0,90
dic-01	11,88	-0,19	11,69	-1,81
gen-02	11,9	0,05	11,95	-1,55
feb-02	12,1	-0,22	11,88	-1,62
mar-02	12,94	-0,23	12,71	-0,79
apr-02	13,88	-0,05	13,83	0,33
mag-02	14,88	-0,28	14,60	1,10
giu-02	15,46	-0,03	15,43	1,93
lug-02	15,75	-0,29	15,46	1,96
ago-02	15,7	-0,19	15,51	2,01
set-02	15,03	-0,22	14,81	1,31

Costanti additive	
k1	0,2
k2	0,3
k3	0,4
k4	0,5
k5	0,6

Semiampiezza errore
0,30

Media di riferimento
13,50

	2000	2001	2002	2003	2004	2005
gen	-1,99	-1,81	-1,55	-1,10	-0,79	0,06
feb	-1,73	-1,49	-1,62	-1,05	-0,49	-0,01
mar	-0,91	-0,90	-0,79	-0,14	0,46	0,80
apr	0,11	0,18	0,33	0,91	1,19	1,92
mag	0,85	0,87	1,10	2,05	2,29	3,08
giu	1,24	1,54	1,93	2,34	3,08	3,60
lug	1,73	1,92	1,96	2,76	2,96	3,51
ago	1,66	2,01	2,01	2,43	3,33	3,53
set	1,25	0,99	1,31	2,14	2,27	3,12
ott	-0,36	-0,18	0,63	0,70	1,45	1,94
nov	-0,89	-0,90	-0,47	-0,35	0,04	0,58
dic	-1,70	-1,81	-1,02	-0,68	-0,42	-0,11

Alle temperature è stato aggiunto un errore casuale, appartenente a un intervallo numerico centrato in zero, la cui semiampiezza è modificabile dalla cella gialla: ad esempio, impostando il valore 2, nella colonna *Errore* appariranno solo numeri compresi tra -2 e 2.

Rappresenta nuovamente le anomalie. Che cosa cambia rispetto al grafico visto in precedenza, in cui l'errore casuale non era presente?

Figura 31

La serie storica fittizia contiene le temperature medie mensili da gennaio 2000 a dicembre 2005; i dati dell'anno 2000 sono forniti nelle prime celle della colonna "Temperatura (°C)", mentre quelli degli anni successivi sono costruiti dallo studente impostando i valori dei parametri k_i: i dati dell'anno 200i (con i cifra delle unità) si ottengono aggiungendo k_i ai dati dell'anno precedente (ovvero l'anno $i-1$). Le formule che calcolano i valori sono già scritte anche nella versione per gli studenti, che quindi si limitano ad agire sul valore dei parametri; ciò non toglie che, magari con la collaborazione del docente di informatica, l'attività potrebbe essere ripensata per lasciare che siano gli studenti a programmare il foglio, fornendo loro una versione priva delle formule.

Nella colonna "Errore" vengono generati numeri casuali in un intervallo centrato in zero di semiampiezza indicata nell'apposita cella. Nella colonna immediatamente a destra, tale errore viene sommato alle temperature per ottenere una serie storica più realistica, che in qualche modo tenga conto delle naturali fluttuazioni della temperatura. Infine, nella colonna più a destra, viene calcolata l'anomalia rispetto alla media di riferimento impostata nella cella dedicata. Agli studenti è richiesto di rappresentare i grafici, distinti per colore, delle anomalie di un anno dal 2000 al 2005, in una stessa figura. Ciò può essere fatto con lo strumento di creazione di grafici di *Fogli Google*, che richiede però di fornire i dati in una forma tabellare opportuna, con una colonna per ciascun anno. Anche le formule che compilano questa seconda tabella sono già scritte, visto che lo scopo dell'attività non è tanto l'uso del foglio di calcolo, quanto la produzione di un grafico completo (titolo, legenda, assi quotati, etichette e unità di misura) e la sua interpretazione. A tal proposito, diversi sono gli aspetti che si possono discutere con gli studenti:

- con una serie di temperature come quella nell'esempio della figura 31, il grafico mette chiaramente in evidenza un andamento crescente perché di anno in anno le curve si spostano verso l'alto;

- inoltre, le temperature stanno aumentando sempre più velocemente, dato che la distanza tra le curve di anni successivi aumenta di anno in anno;

- è evidente la presenza di un andamento stagionale che si ripete di anno in anno, dato che le curve hanno una forma simile, al di là delle fluttuazioni (nei fogli 2 e 4, non essendovi l'errore casuale, le curve sono proprio uguali, nel senso di sovrapponibili, per costruzione);

- le curve possono presentare delle intersezioni a causa delle fluttuazioni casuali, ovvero, nonostante un andamento nel complesso crescente, può capitare che l'anomalia di un certo mese di un certo anno sia inferiore all'anomalia dello stesso mese dell'anno precedente (nell'esempio, il dato di settembre 2001 è minore di quello di settembre 2000);

- nonostante l'uso del termine curva, in questo caso forse improprio, si tratta sempre di dati discreti, rappresentati dai pallini sul grafico; i segmenti che li collegano non contengono alcun tipo di informazione.

L'attività con il foglio di calcolo appena descritta può essere strutturata in vari modi: ad esempio, nel corso delle sperimentazioni da noi condotte, abbiamo chiesto agli studenti di redigere una sorta di report facendo uso dei grafici prodotti, descrivendo il processo con cui i dati sono stati costruiti e che cosa le rappresentazioni permettono di mettere in evidenza a proposito dei dati stessi. Un'alternativa, se si vuole lavorare sulla comunicazione orale, potrebbe essere quella di chiedere a piccoli gruppi di studenti di preparare dei brevi momenti di presentazione della loro particolare serie storica, e le considerazioni che si possono fare sui relativi grafici. A questo scopo si potrebbe usare, al posto del foglio di calcolo, l'applet *R Shiny* mostrata in figura 32, che permette di visualizzare i grafici dinamicamente agendo sui vari slider.

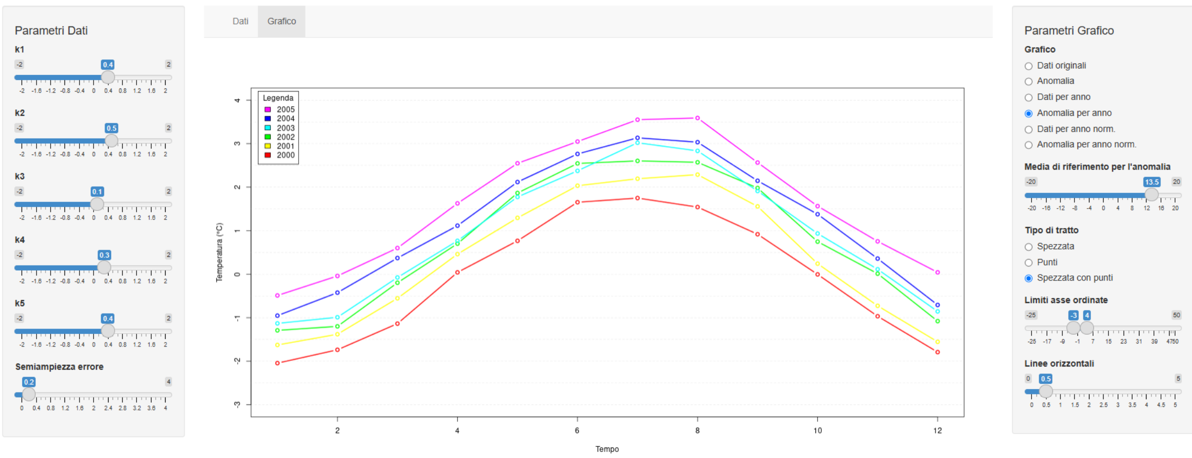


Figura 32

Al termine dell'attività, gli studenti dovrebbero essere in grado di leggere il grafico T2 (figura 30) e di rispondere alle relative domande. Il grafico rappresenta i dati, anno per anno dal 1880 a giugno 2024, relativi alla differenza della temperatura media globale mensile dalla media delle temperature globali tra il 1980 e il 2015: si tratta dunque ancora una volta di un'anomalia.[45] Sostanzialmente, è lo stesso grafico prodotto nel quinto foglio dell'attività, ma con una serie storica molto più lunga, e soprattutto costituita da dati reali!

Si può notare un chiaro andamento crescente osservando la scala di colori: ad esempio, si può affermare che dal 2000 la temperatura media globale mensile (spezzate arancioni, rosse, e viola) è aumentata rispetto alle medie globali mensili dei primi 20 anni (spezzate blu) poiché le curve arancioni, rosse, e viola non intersecano mai quelle blu, che si trovano a una quota inferiore. Inoltre, le curve che descrivono le anomalie degli ultimi anni hanno una visibile distanza l'una dalla precedente, mentre quelle dei primi anni sono molto fitte, indicando come la temperatura stia aumentando sempre più velocemente.

Infine si nota, rispetto all'andamento crescente sul lungo periodo, una certa stagionalità, in quanto le curve hanno tutte forma molto simile tra loro: i dati mensili di ogni anno crescono per poi decrescere, con un picco in corrispondenza del mese di luglio (estate per l'emisfero settentrionale), nonostante i dati siano relativi alla temperatura media globale (terrestre e oceanica). Ciò è dovuto al fatto che nell'emisfero nord vi sono più terre emerse che nell'emisfero sud. Infatti, i continenti hanno una capacità termica più bassa degli oceani, e sono quindi soggetti a variazioni di temperatura più significative, risentendo maggiormente della radiazione solare e rispondendo dunque più velocemente ai cambiamenti. Di conseguenza, le variazioni

[45] Ancora una volta possono tornare utili i cartellini della figura 29 per focalizzare meglio il dato rappresentato.

di temperatura sono molto più grandi nell'emisfero nord rispetto a quello sud, e per questo i valori globali rispecchiano di fatto l'andamento stagionale caratteristico dell'emisfero boreale.

Per concludere questa sezione dedicata alla lettura dei grafici, è possibile analizzare con gli studenti un breve articolo in inglese, estratto dal sito di *Copernicus*[46] (figura 33). Si noti come l'articolo possa costituire un buon esempio di brevissimo report: è presente un grafico (T3) molto chiaro e completo, con titolo, didascalia, etichette degli assi, unità di misura e origine dei dati, corredato di qualche paragrafo di commento a illustrarne la rilevanza.

GLOBAL CLIMATE HIGHLIGHTS 2023

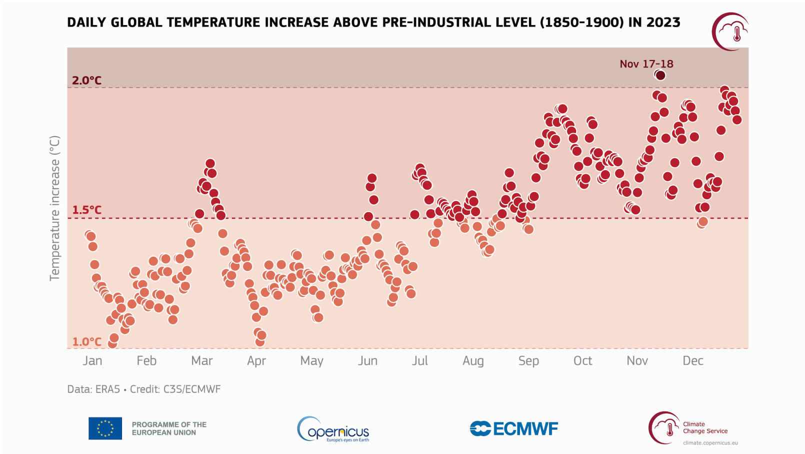
Copernicus: 2023 is the hottest year on record, with global temperatures close to the 1.5°C limit

[...]

Surface air temperatures broke several records globally in 2023

The earliest signs of how unusual 2023 was to become began to emerge in early June, when temperature anomalies relative to 1850-1900 pre-industrial level reached 1.5°C for several days in a row. Although this was not the first time daily anomalies had reached this level, this had never previously happened at this time of the year. For the rest of 2023, global daily temperature anomalies above 1.5°C became a regular occurrence, to the point where close to 50% of days in 2023 were in excess of 1.5°C above the 1850-1900 level.

This does not mean that we have surpassed the limits set by the Paris Agreement (as they refer to periods of at least 20 years where this average temperature anomaly is exceeded) but sets a dire precedent.



Daily global surface air temperature increase relative to the average for 1850–1900, the designated pre-industrial reference period, for 2023. The plot highlights temperature increases within three ranges: 1–1.5°C (orange), 1.5–2°C (red), and above 2°C (crimson). Source: ERA5. Credit: C3S/ECMWF

ACCESS TO DATA | DOWNLOAD THE ORIGINAL IMAGE

Figura 33

[46] *Copernicus* è un organismo dell'ESA, l'agenzia spaziale europea, che si occupa dell'osservazione della Terra. L'articolo si trova al link https://climate.copernicus.eu/copernicus-2023-hottest-year-record

L'obiettivo è nuovamente capire qual è il dato rappresentato: stavolta interessa mettere in evidenza la differenza delle temperature giornaliere del 2023 rispetto a quelle del periodo preindustriale ($1850 - 1900$). Per ottenere i dati rappresentanti nel grafico, bisogna prima calcolare le temperature medie giornaliere nel periodo preindustriale (ad esempio, si ottiene il valore del primo di gennaio dalla media di tutti i giorni 1 gennaio dal 1850 al 1900, e così via), e poi sottrarre questi valori alle temperature dei giorni corrispondenti del 2023. Ciò non è per nulla ovvio, e va dedotto dalla rappresentazione: non è presente un andamento "a onda" come quello del grafico T2, dunque il riferimento non può essere la media globale sui cinquant'anni del periodo preindustriale. L'articolo fornisce inoltre moltissimi spunti di approfondimento, in particolare sull'accordo di Parigi e sulle motivazioni che portano gli autori a dichiarare che il limite di 1.5 °C in esso stabilito non è ancora stato superato.[47]

La prima parte del blocco sulle temperature, dedicata alla lettura dei grafici, è terminata. Il percorso prosegue approfondendo uno degli aspetti emersi: i dati delle temperature sembrano presentare una certa regolarità, un andamento che segue il ciclo stagionale. Ci si chiede dunque se sia possibile in qualche modo isolare questa componente che si ripete, in maniera tale da distinguere la parte di dato determinata da comportamenti periodici da eventuali altri contributi: nello specifico, sembra ragionevole aspettarsi che ad esempio le temperature medie globali mensili presentino una componente periodica e una componente crescente che dia ragione dell'aumento osservato nei vari grafici. Agli studenti può essere comunicato in un secondo momento, ma questo è proprio lo scopo del modello statistico di decomposizione additiva, cui è dedicata questa seconda parte del blocco delle temperature.

Per prima cosa ci si chiede, di fronte a una lunga serie di dati, come sia possibile individuare un andamento periodico e determinarne il periodo. Il concetto può essere chiarito interagendo con un applet *GeoGebra* (figura 34), che permette agli studenti di scoprire in autonomia il periodo di una serie storica fittizia. I dati sono stati ottenuti "campionando" una funzione sinusoidale sommata a una quadratica; il primo slider permette di spostare il centro dell'intervallo individuato dalla fascia azzurra, la cui ampiezza è regolabile mediante il secondo slider. L'applet è impostata per permettere alla fascia esclusivamente "salti" di lunghezza pari all'ampiezza: ciò significa, ad esempio, che impostando un'ampiezza pari a quattro, sarà possibile evidenziare solo i primi quattro dati, quelli dal quinto all'ottavo, poi dal nono al dodicesimo, e così via. Infatti lo scopo è di verificare se in queste "inquadrature" i dati presentano un andamento ricorrente al colpo d'occhio; ci si accorge presto che ciò si verifica solo con un'ampiezza pari a dodici, che è il periodo della serie storica rappresentata.

[47] L'articolo è del 9 gennaio 2024. L'insegnante che volesse proseguire l'attività di lettura di grafici, anche nell'ottica di una valutazione, potrà facilmente trovare in rete e in particolare sul sito di *Copernicus* grafici sempre aggiornati di tutti i tipi: purtroppo, difficilmente questo tipo di attività smetterà di essere attuale nel prossimo futuro. Si veda ad esempio il seguente articolo del 7 novembre 2024, che ancora una volta supporta la propria preoccupante tesi mediante l'uso di grafici che ora gli studenti dovrebbero essere in grado di interpretare in autonomia (https://climate.copernicus.eu/copernicus-2024-virtually-certain-be-warmest-year-and-first-year-above-15degc).

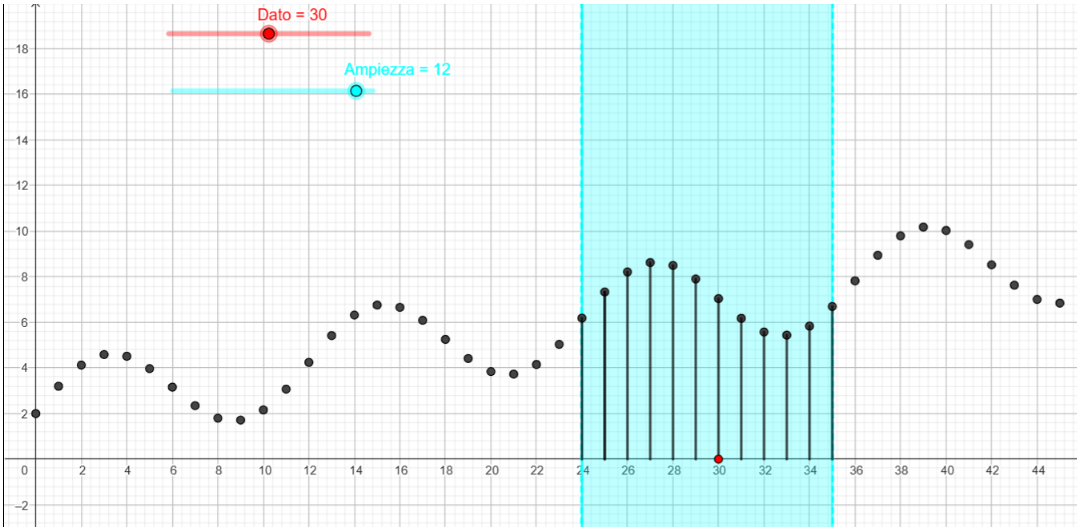


Figura 34

Si considerano ora i dati del grafico T2 (figura 30), che sono liberamente scaricabili dal già citato sito del GISS. In questo caso, avendoli visti rappresentati suddivisi per anno, già abbiamo ipotizzato una periodicità annuale, ovvero un periodo di dodici mesi (e quindi di dodici dati). A conferma dell'ipotesi, è possibile comunque sperimentare con un'apposita applet *R Shiny* che permette di suddividere i dati in intervalli di ampiezza variabile (muovendo lo slider). Come è lecito aspettarsi, suddividendo i dati ogni dodici si ottiene una rappresentazione simile a quella del grafico T2 (sulla sinistra della figura 35). Il grafico sulla destra rappresenta invece i dati normalizzati, ovvero quelli che si ottengono se a ciascun dato viene sottratta la media dell'intervallo di appartenenza: nel caso della figura 35 gli intervalli sono proprio gli anni, e quindi a ciascun dato viene sottratta la media dell'anno di appartenenza. In questo modo l'andamento crescente sul lungo periodo viene eliminato, e le curve tendono a sovrapporsi: un buon segnale che ci conferma che il periodo è corretto, e che i dati potrebbero presentare una componente stagionale significativa.[48]

[48] Potrebbe essere interessante chiedere agli studenti, prima di vedere il grafico, cosa prevedono che accada alla rappresentazione sottraendo a ciascun dato la media del proprio anno; una domanda molto difficile, che richiede di saper visualizzare la media graficamente. Ad esempio nel grafico T2, se si disegnasse una linea orizzontale in corrispondenza della media dei dati di ciascun anno, si otterrebbero tante linee che si spostano vero l'alto man mano che ci si muove verso il presente. Per aiutare gli studenti a capire meglio è stato anche preparato un foglio di calcolo molto simile a quello già visto in precedenza, con l'aggiunta di una nuova sezione che permette di normalizzare i dati e di rappresentarli. Non mi soffermo oltre per brevità, e anche perché il grafico dei dati normalizzati non è stato usato durante le sperimentazioni: il tempo che avevamo a disposizione era limitato, e in un percorso così ricco di contenuti è stato necessario tagliare qualche parte.

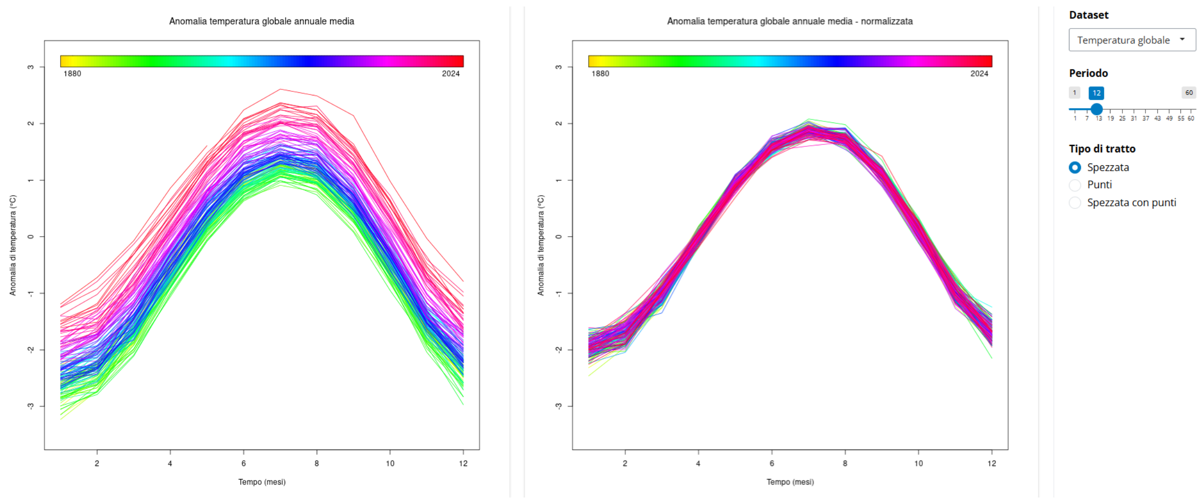


Figura 35

Potrebbe essere interessante indagare con gli studenti cosa succede impostando periodi diversi da quello ipotizzato. Scegliendo dei multipli di dodici semplicemente si vedono più onde; con i sottomultipli invece compaiono più "fasci" di curve, esattamente $12/T$, se T è il periodo scelto: un caso semplice su cui riflettere è quello per $T = 6$, mostrato nella figura 36.

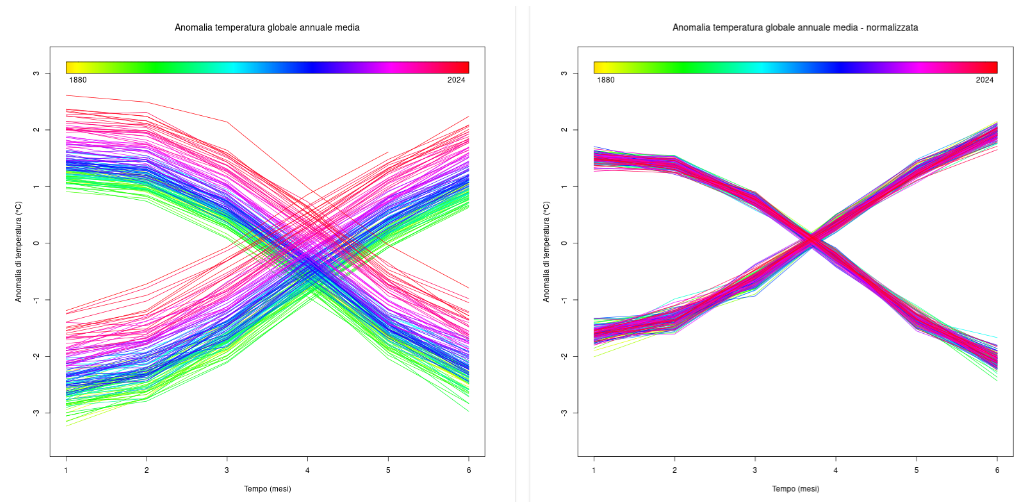


Figura 36

Ci si aspetterebbe che incollando tra di loro due copie del grafico esse combacino perfettamente riproducendo la figura a onda, ma ciò non avviene: manca il segmento di raccordo tra i dati "ai bordi" del grafico, ovvero quelli di giugno e luglio (figura 37).[49]

[49] Ciò non avviene invece per il grafico delle temperature normalizzate perché le medie da sottrarre sono calcolate periodo per periodo, e quindi nella rappresentazione i primi sei dati vengono traslati di un valore diverso rispetto a quelli dal settimo al dodicesimo, e così via.

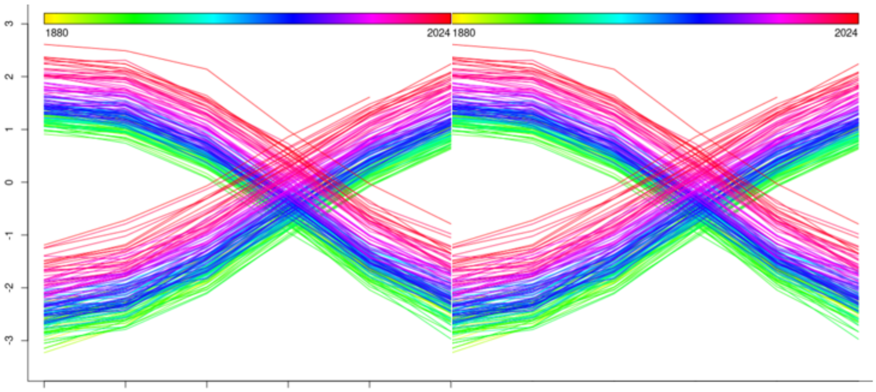


Figura 37

Inoltre, la scala sull'asse delle ascisse è diversa, ed è quindi necessario applicare una dilatazione di fattore due (nella figura 38 è stato fatto in modo approssimativo "stirando" una copia dell'immagine del grafico con $T = 12$).

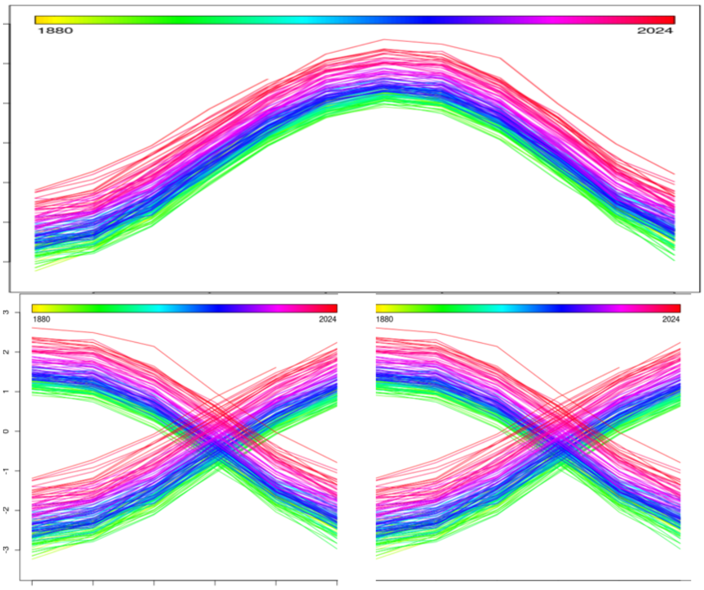


Figura 38

In generale, impostando valori diversi di T si ottengono grafici formati da intrecci di curve, di un certo fascino estetico, come quello in copertina di questa relazione, che è stato ottenuto per $T = 19$ (è il grafico delle temperature normalizzate). La cosa non è di utilità alcuna, ma per il puro gusto del perché si potrebbe chiedere agli studenti come mai si formano questi disegni, di prevedere quanti sono i fasci di curve per alcuni valori del periodo, e di trovare una formula generale.[50]

[50] Sono esattamente $mcm(T, 12)/T$, quindi tutti i grafici per cui T è primo con dodici avranno dodici fasci, compreso quello in copertina.

Una volta determinato il periodo, l'attività può proseguire: si vorrebbe in qualche modo costruire una nuova serie storica, partendo da quella originale, che renda conto del comportamento dei dati al di là delle oscillazioni legate alla stagionalità, ovvero si vorrebbero eliminare, o perlomeno ridurre, le oscillazioni dovute alla presenza di una certa componente stagionale all'interno della serie storica ottenendo così una curva che descriva l'andamento medio della serie, permettendo di cogliere più chiaramente eventuali aumenti o diminuzioni nei dati sul lungo periodo.

Una possibile modalità per raggiungere lo scopo potrebbe essere quella di calcolare, per ciascun anno, la media delle anomalie di temperatura, e ottenere così una nuova serie storica (non più mensile, ma annuale) contenente le medie di tutti gli anni. Un'efficace rappresentazione si può ottenere attraverso un altro applet *GeoGebra* (figura 39).

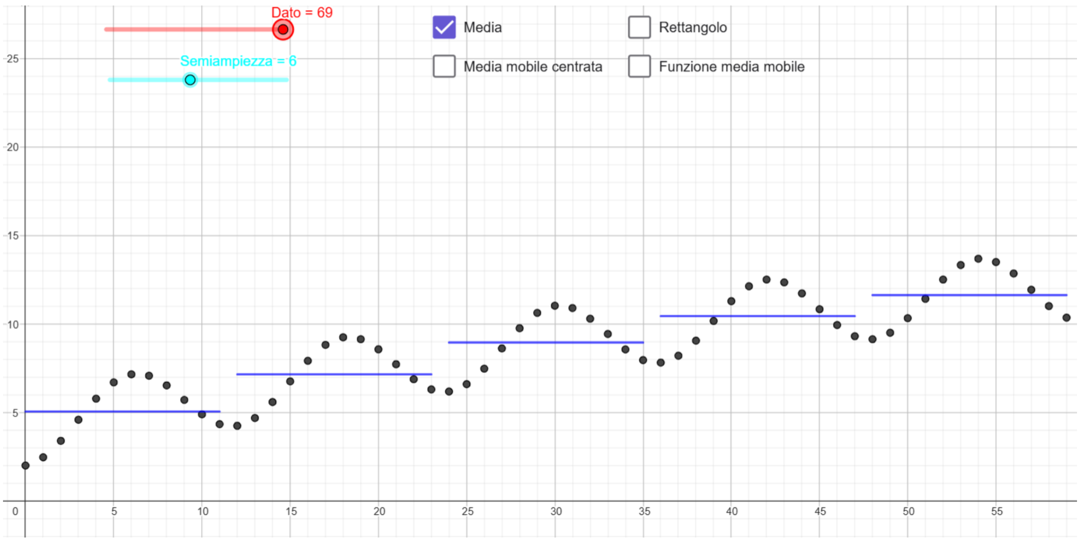


Figura 39

Purtroppo, la semplicità di tale tecnica si paga con una notevole perdita di informazione: il numero di dati contenuti nella serie viene diviso per dodici. Nel caso delle temperature, si passa da un dataset con 1733 dati (le anomalie da gennaio 1880 a maggio 2024) a uno con soli 145. Inoltre, il dato del 2024 sarà poco significativo, se non fuorviante, perché nel dataset sono presenti le anomalie dei soli primi cinque mesi del 2024. In ogni caso, nella figura 40 viene mostrato il grafico che si ottiene rappresentando le medie con segmenti paralleli all'asse delle ascisse, posizionati in corrispondenza del relativo intervallo di dati, esattamente come accadeva nella figura 39.

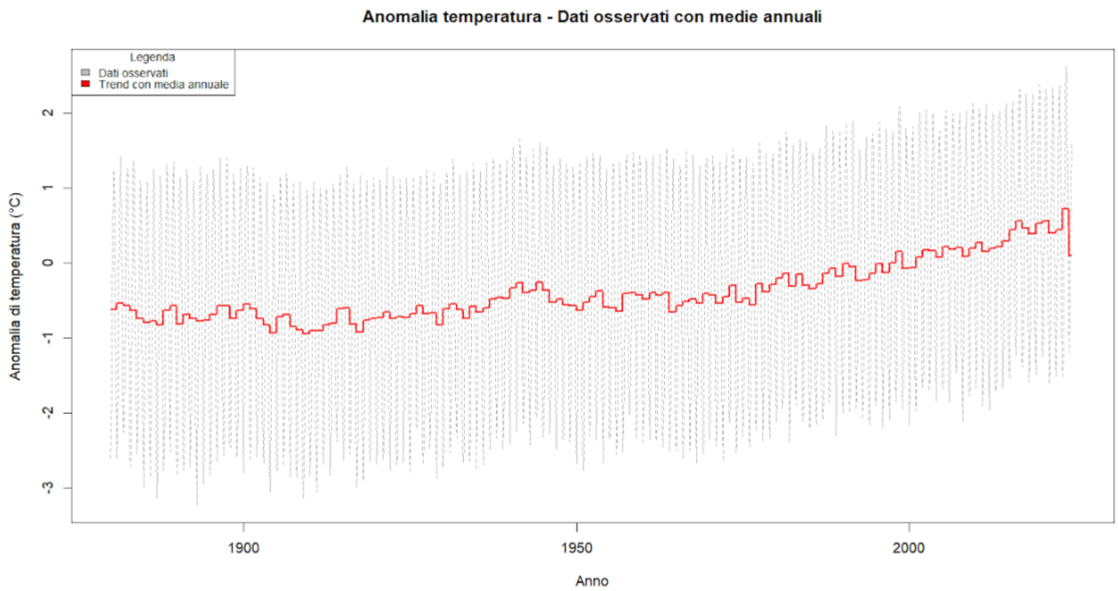


Figura 40

Ci si chiede dunque se sia possibile, sempre calcolando delle medie, evitare questa perdita di informazione. La risposta è affermativa: si utilizza la media mobile centrata, ovvero la nuova serie viene costruita sostituendo a ciascun dato dell'originale la media dei dati "vicini", tanti quanti ce ne stanno in un intervallo centrato nel dato in questione e di ampiezza pari al periodo. Siccome nel caso delle temperature il periodo è dodici, che è un numero pari, non esiste un dato "centrale"; per ovviare al problema si considera un intervallo di tredici dati, attribuendo peso 1/2 al primo e all'ultimo dato. In altre parole, si usa una media mobile di semiampiezza sei, centrata nel dato di riferimento, sostituendo ciascuna anomalia con la media pesata di tredici anomalie: quelle dei sei mesi precedenti, dei sei successivi, e, ovviamente, l'anomalia stessa, centro dell'intervallo.

Si può fare un esempio per capire meglio: per calcolare la media mobile a luglio del 2005, si dovrebbe calcolare la media di tredici valori, le anomalie da gennaio 2005 a gennaio 2006; in tal modo, l'intervallo risulterebbe centrato proprio a luglio 2005, con sei valori precedenti e sei successivi. Si presenterebbe però un inconveniente: il mese di gennaio verrebbe conteggiato due volte, e quindi la componente stagionale di gennaio andrebbe a influenzare maggiormente la media rispetto a quella degli altri mesi. Il problema può essere risolto calcolando una media pesata con tutti i coefficienti unitari, a eccezione del primo e dell'ultimo, presi uguali a 1/2, equiparando così il contributo di gennaio a quello degli altri mesi.

Adottando questa tecnica, la perdita di dati è molto contenuta. Infatti, a ogni dato della serie di partenza viene associata la sua media mobile, eccezion fatta per i primi e gli ultimi sei: non è possibile calcolare la media mobile nei primi e ultimi sei mesi del dataset, in quanto mancano i valori necessari per riempire l'intervallo corrispondente.

Il concetto di media mobile potrebbe non essere semplice da affrontare con gli studenti, e si propone quindi ancora una volta un ausilio grafico tramite applet *GeoGebra* (figura 41).

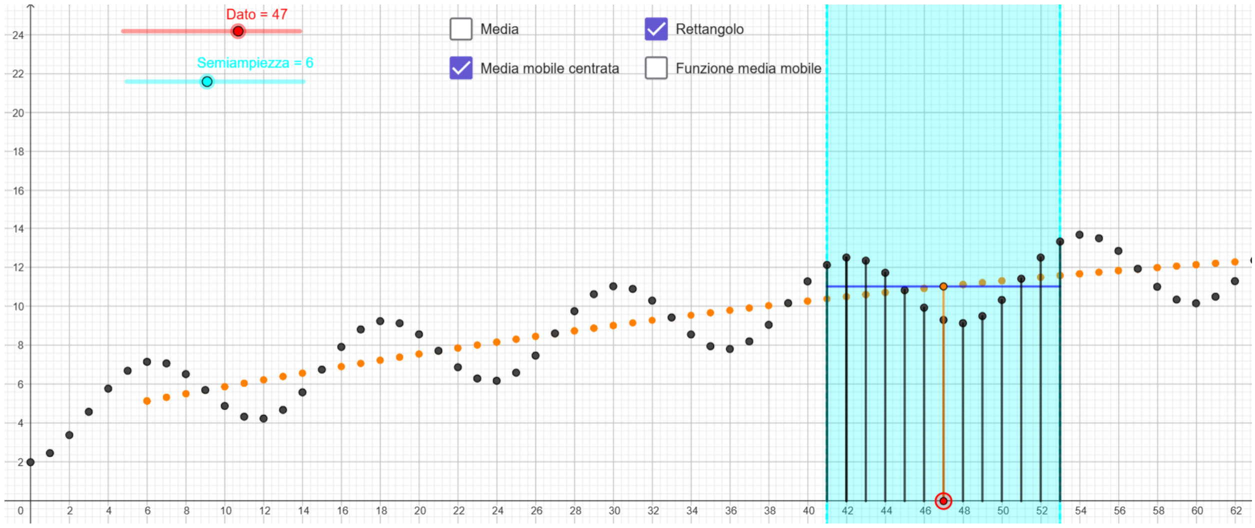


Figura 41

La fascia azzurra evidenzia un intervallo di tredici dati, con il pallino arancione e il segmento blu a rappresentare la media mobile centrata. Attivando la traccia del pallino arancione e spostando la fascia è possibile visualizzare la serie storica delle medie mobili, che mette perfettamente in evidenza un andamento crescente smussando le oscillazioni stagionali. Tramite l'applet è anche possibile dare agli studenti un'idea del perché questo avvenga: spostando la fascia di un solo dato (ad esempio da luglio 2005 ad agosto 2005) si perde il dato iniziale (il segmento verticale più a sinistra della fascia, ovvero gennaio 2005) e se ne guadagna uno nuovo (il segmento verticale più a destra dopo aver spostato la fascia, ovvero febbraio 2006), mentre tutti gli altri dati rimangono all'interno della fascia. Ciò significa che il valore della media mobile è influenzato, passando da un dato al successivo, solamente dalla differenza tra il dato guadagnato e quello perso (nell'esempio la differenza tra febbraio 2006 e gennaio 2005).[51] I segmenti permettono di vedere chiaramente che in questo caso la differenza è sempre positiva perché il segmento acquisito è sempre più lungo di quello perso, ovvero il dato nuovo è sempre maggiore di quello che si perde. Di conseguenza, la media mobile non potrà che aumentare; si noti inoltre come il fatto che i dati centrali rimangano invariati permetta di eliminare l'influenza delle oscillazioni periodiche: interessante notare come ciò non avvenga selezionando il periodo sbagliato (figura 42).

[51] In realtà, ciò è vero solo se la media non è pesata; l'introduzione dei pesi complica leggermente la questione, ma non approfondisco riservandomi di farlo eventualmente nel lavoro di tesi.

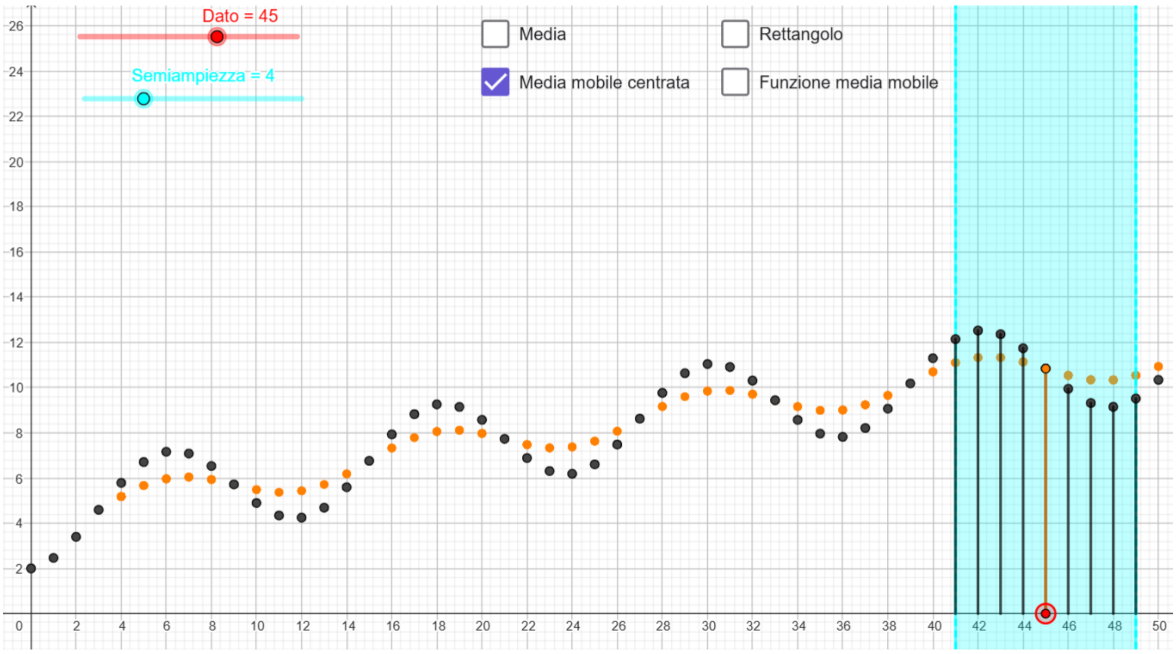


Figura 42

La nuova serie storica così costruita è detta trend; si può quindi parlare di trend di temperatura, o meglio, di trend delle anomalie di temperatura media mensile globale. Tramite un nuovo applet *R Shiny* è possibile applicare la media mobile al dataset delle temperature e visualizzare il trend (figura 43).

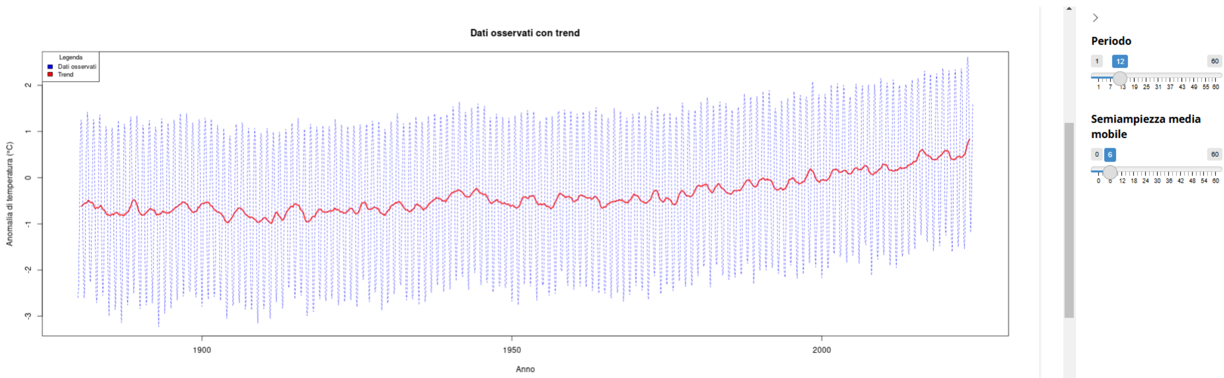


Figura 43

Può essere interessante discutere con gli studenti dell'andamento poco regolare della curva ottenuta, dalla quale sembra difficile cogliere un andamento complessivamente crescente. Sicuramente la scala del grafico non aiuta, ma il motivo principale è da ricercarsi nella variabilità delle temperature medie di anno in anno, che è influenzata da più fattori, anche con periodicità non annuali, che danno origine ad anni più freddi e più caldi. Come eliminare queste influenze dal trend? Ad esempio, aumentando l'ampiezza dell'intervallo di dati usati per calcolare la media mobile, agendo sull'apposito slider: in figura 44 si può vedere il trend calcolato con una media mobile su sei anni, che da luogo a una curva più regolare. Infine, si può notare che selezionando intervalli di ampiezza non multipla del periodo, il trend presenta visibili oscillazioni periodiche, perdendo di significato.

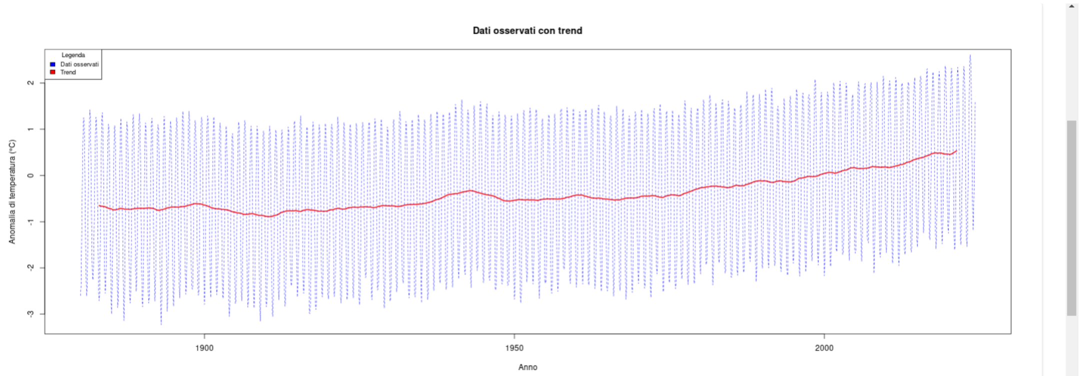


Figura 44

Una volta ricavato il trend, rimane da determinare la componente stagionale della serie storica. Per fare ciò, è necessario sottrarre il trend ai dati originali, ottenendo una serie detrendizzata, ovvero che presenta un andamento medio costante (oscillante intorno allo zero), come si può osservare dall'applet *GeoGebra* della figura 45. I dati rappresentati sono gli stessi degli applet precedenti, a cui però è stato aggiunto un errore casuale per aumentare la somiglianza con un dataset reale.

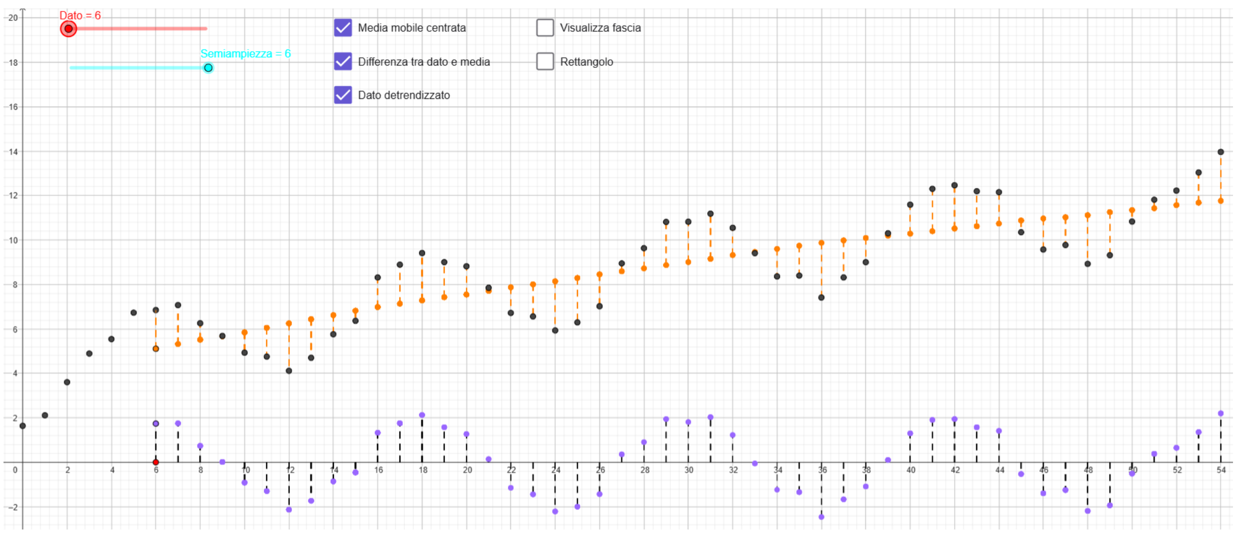


Figura 45

La lunghezza dei segmenti arancioni rappresenta la distanza del dato dalla media mobile, e la serie detrendizzata si ottiene graficamente riportando i segmenti sull'asse delle ascisse, in violetto. Nella figura 46 si può osservare la serie delle anomalie di temperatura detrendizzata: l'andamento crescente non è più presente.

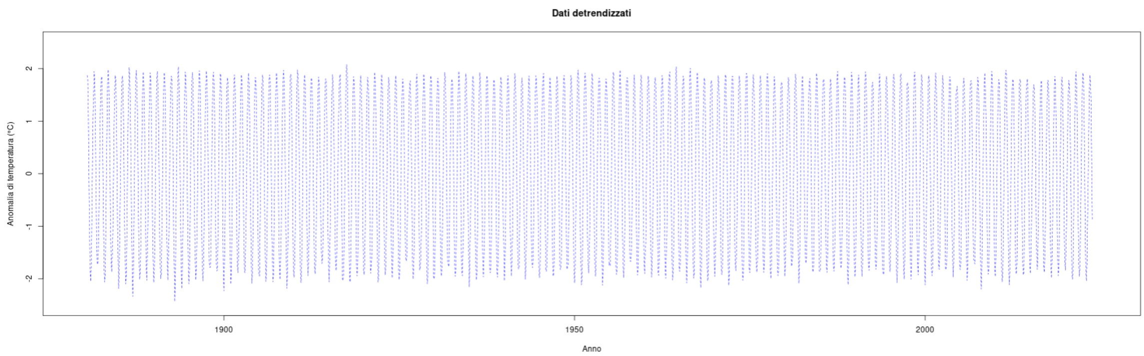


Figura 46

Dalla serie detrendizzata è possibile ricavare la componente stagionale: dodici dati, uno per ciascun mese dell'anno, che si calcolano facendo la media mese per mese. Ad esempio, il valore della componente stagionale nel mese di gennaio si ottiene dalla media dei dati di tutti i mesi di gennaio presenti nella serie detrendizzata, e così via. Anche in questo caso ci si può aiutare con un'opportuna visualizzazione (figura 47), nella quale la componente stagionale è stata rappresentata in verde: per costruzione, si tratta di una vera e propria funzione (discreta) periodica, di periodo dodici.

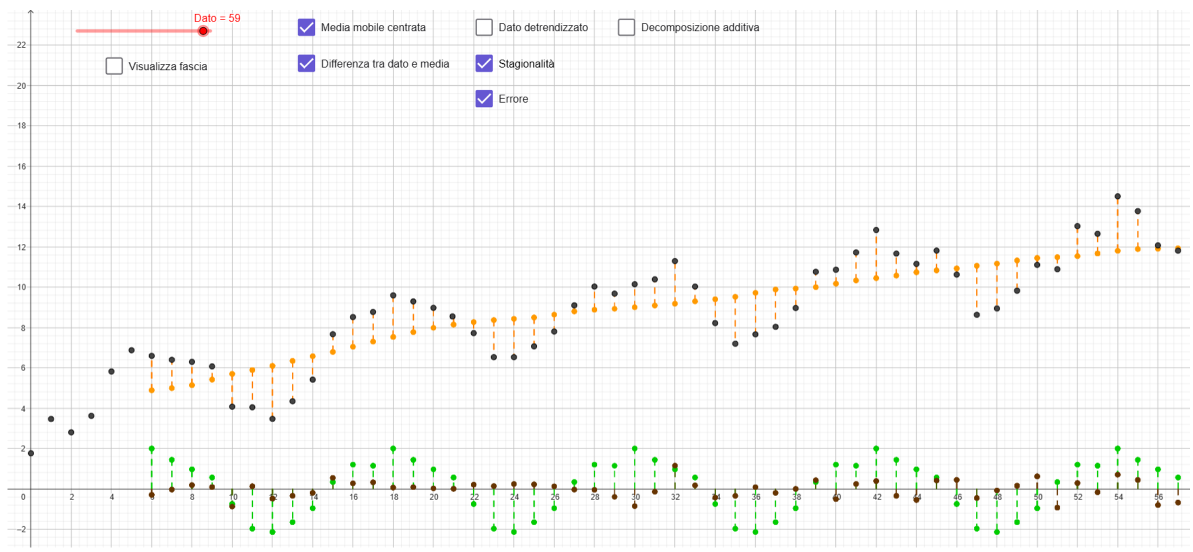


Figura 47

La figura 48 mostra invece un solo periodo della componente stagionale della serie storica delle anomalie, calcolato in automatico dall'applet *R Shiny*. Impostando un periodo diverso da dodici, si osserva chiaramente dalla forma del grafico e dalla scala sull'asse delle ordinate che la componente stagionale ottenuta non può essere significativa.

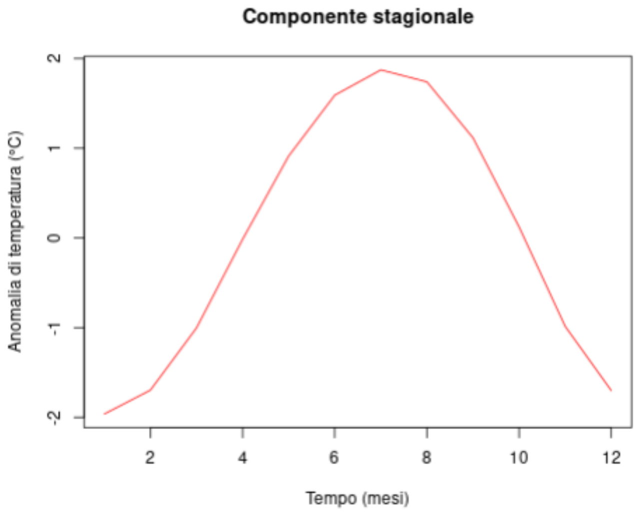


Figura 48

Infine, sottraendo dalla serie detrendizzata anche la componente stagionale appena calcolata, rimane l'errore, ovvero quella parte di dato che non viene rappresentata né dal trend né dalla componente stagionale (nella figura 47 sono i puntini marroni). Si può dimostrare che l'errore così costruito ha sempre media nulla.[52] Nel caso di un dataset con una componente stagionale "perfetta", ovvero in cui i dati normalizzati di ciascun anno coincidono (come capitava nell'attività con il foglio di calcolo), l'errore sarebbe identicamente uguale a zero. Nel nostro caso invece ci si aspetta un errore contenuto e senza una particolare struttura, nel senso che non presenta oscillazioni o picchi periodici, ma ha un andamento casuale, normalmente distribuito. L'applet *R Shiny* permette di visualizzare accostate le tre componenti della decomposizione additiva (figura 49): il trend, la stagionalità e l'errore.

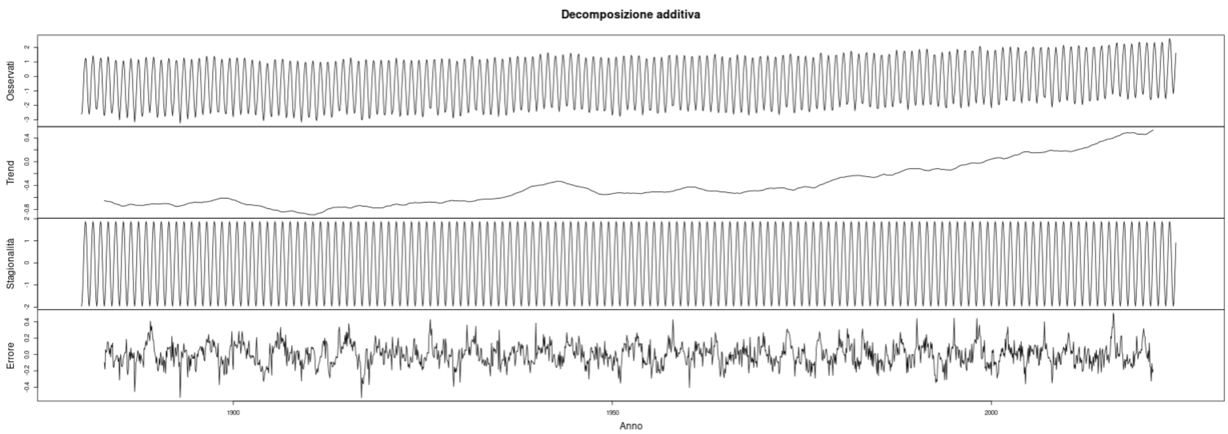


Figura 49

[52]La dimostrazione verrà inclusa nel lavoro di tesi.

Sommando le tre componenti si ottiene la serie storica originale, come messo in evidenza dalla figura 50.

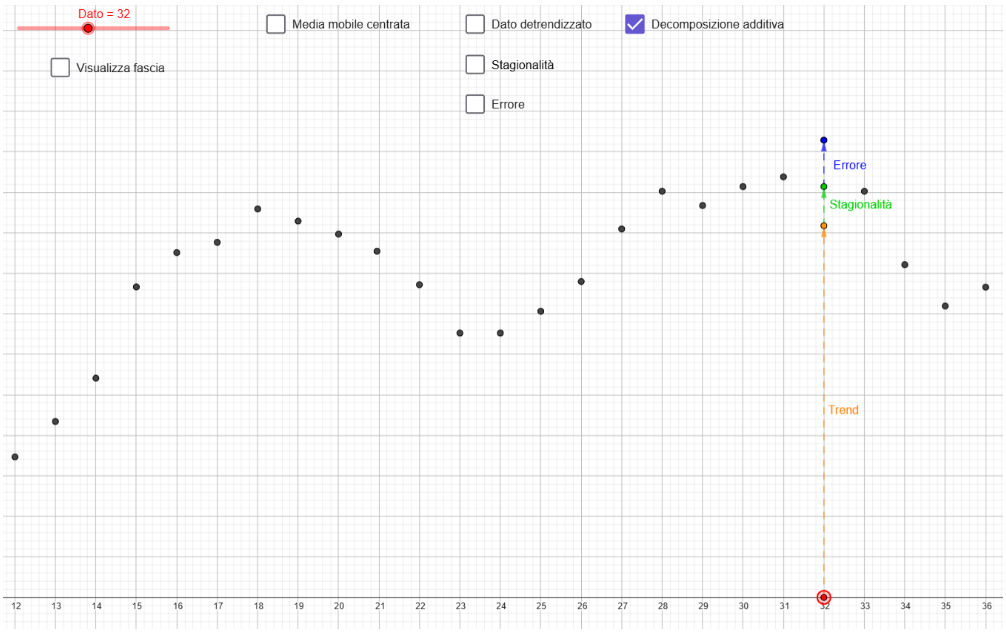


Figura 50

Lo statistico sarà in grado di valutare la bontà del modello di decomposizione additiva - ovvero di capire se esso è in grado di scomporre efficacemente i dati nelle loro componenti - studiando in particolare modo l'errore, che, come si accennava, dovrà avere un andamento "sufficientemente casuale". Senza scendere nei dettagli con gli studenti, si può mostrare cosa avviene per esempio selezionando il periodo sbagliato, ad esempio $T = 11$ (figura 51): l'errore presenta un'evidente struttura periodica, che dovrebbe invece essere catturata dalla componente stagionale.

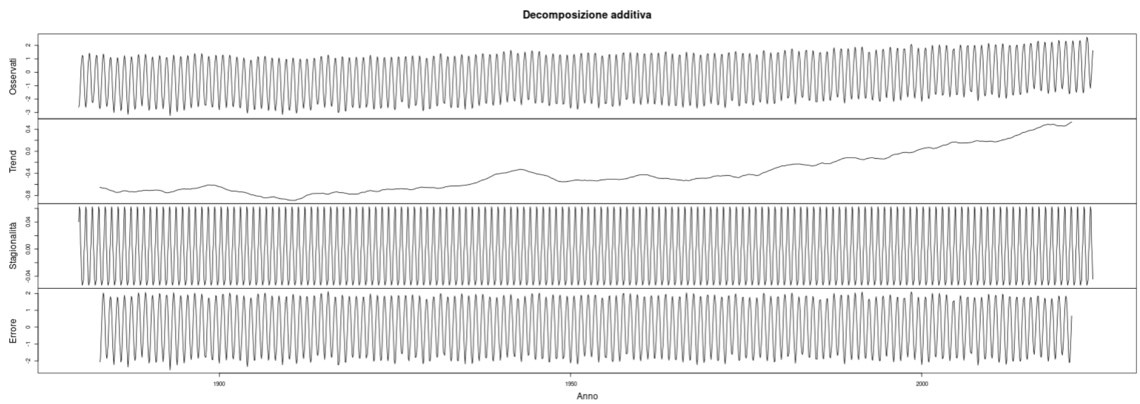


Figura 51

Il lungo percorso sulle temperature può dunque considerarsi concluso.

4.1.3 Anidride carbonica

Il blocco sull'anidride carbonica è una rielaborazione del percorso già presentato nel laboratorio *We live in a closed system. Data analysis useful for investigating environmental sustainability*, svolto nel corso della scuola estiva e brevemente accennato nella sezione 3.2.4. Il contenuto è lo stesso, ovvero l'analisi di due dataset sulle concertazioni di CO_2 in due luoghi molto distanti del pianeta Terra: il vulcano Mauna Loa alle Hawaii e il Monte Cimone in Emilia-Romagna. I dati vengono trattati con il modello di decomposizione additiva facendo ricorso a un apposito applet *R Shiny*. Il blocco è pensato per essere svolto di seguito o parallelamente a quello sulle temperature, ma può anche essere proposto autonomamente a patto di integrarvi la presentazione del modello di decomposizione additiva (si tratterebbe quindi di premettere, con adattamenti minimi, la seconda parte del blocco sulle temperature nella quale il modello è stato introdotto). Il blocco è consigliato per studenti di IV o V superiore.

I due dataset contengono dati mensili di concentrazione di CO_2 misurata in parti per milione; per il Monte Cimone, il record va dal 1980 al 2021, mentre per il Mauna Loa dal 1958 al 2021. Come accadeva per le anomalie di temperatura, i dataset presentano una componente stagionale annuale, che gli studenti possono scoprire esplorando i dati attraverso l'applet (figura 52 e 53). La motivazione è da ricercarsi nella variazione dell'assorbimento di CO_2 dalla vegetazione terrestre, che si trova per la maggior nell'emisfero settentrionale, la cui influenza è quindi prevalente; la concentrazione diminuisce durante la primavera e l'estate durante le quali le piante che crescono assorbono CO_2 attraverso la fotosintesi, e risale in autunno e in inverno quando le foglie muoiono e si decompongono, rilasciando anidride carbonica nell'atmosfera.

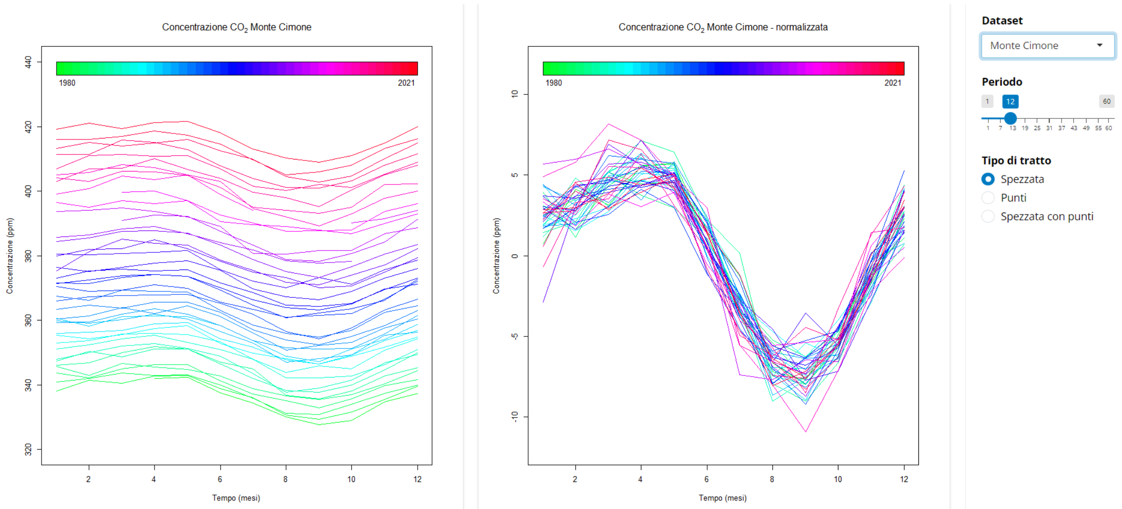


Figura 52

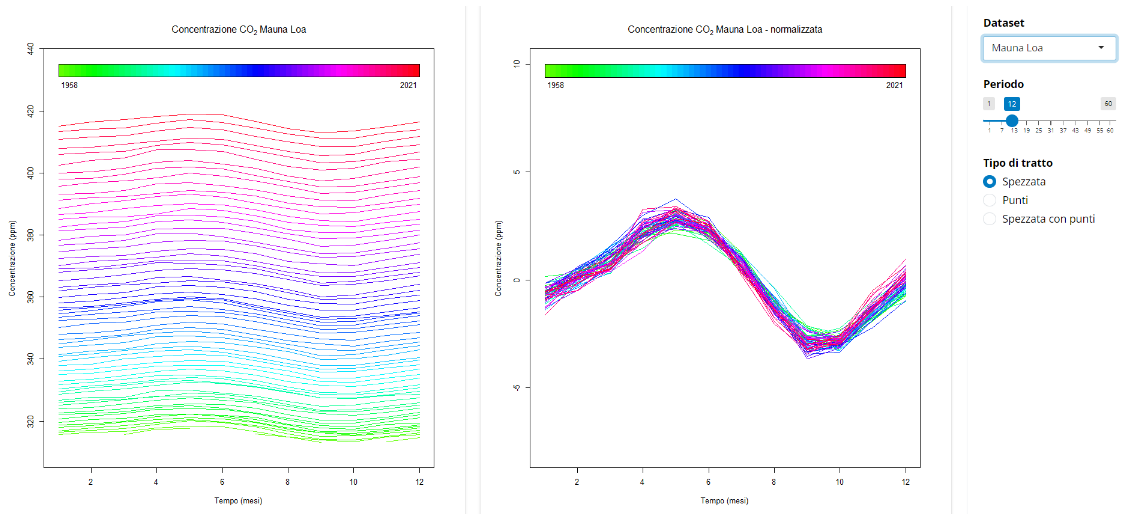


Figura 53

Dai grafici risulta chiarissimo l'andamento crescente, confermato dal calcolo del trend.

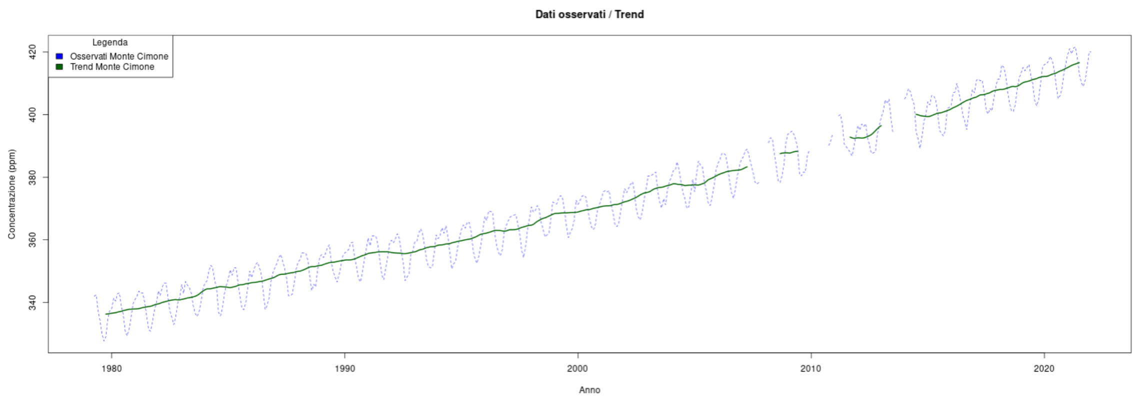


Figura 54

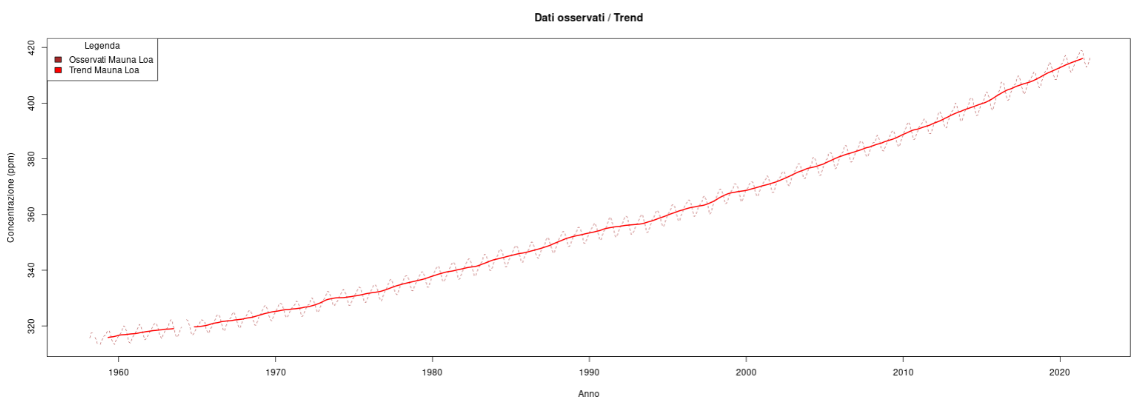


Figura 55

Si può notare come i trend presentino alcune interruzioni dovute a dati mancanti all'interno dei dataset. Di conseguenza, per effettuare la decomposizione additiva è necessario considerare un sottoinsieme della serie storica senza interruzioni.

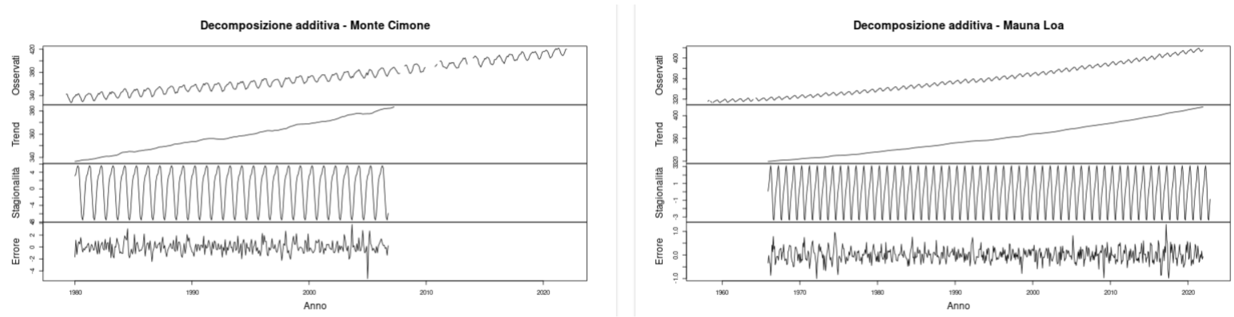


Figura 56

Il modello di decomposizione permette di descrivere efficacemente i dati, visto che l'errore ottenuto non ha particolare struttura. Ha quindi senso confrontare i due trend, che come si vede nella figura 57, sono quasi perfettamente sovrapponibili.

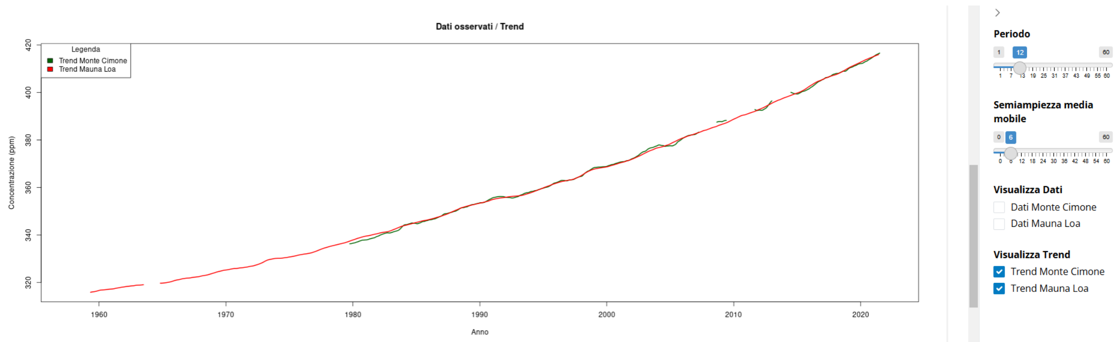


Figura 57

Si può quindi concludere che l'aumento della concentrazione di CO_2 è un fenomeno globale, che non riguarda solo le aree più antropizzate. Questo perché la molecola di CO_2 ha un tempo di vita molto lungo nell'atmosfera, di circa 100 anni; di conseguenza, i fenomeni atmosferici - come i venti - hanno tutto il tempo per ridistribuirla uniformemente sul pianeta. Infatti essa non viene coinvolta nelle reazioni chimiche in atmosfera, ma può essere assorbita dall'oceano, acidificandone le acque, oltre a essere utilizzata dalle piante per la fotosintesi. L'argomento può essere oggetto di approfondimento e di produzione di un report, come abbiamo scelto di fare nel corso della sperimentazione.

4.1.4 Blocco conclusivo

Il blocco conclusivo riprende le fila di quanto detto durante l'introduzione e chiude il percorso con uno sguardo al clima nel passato, nel presente e nel futuro. Esattamente come per l'introduzione, la fonte è la trascrizione dell'intervento della climatologa Simona Bordoni.

Una domanda che è lecito porsi è la seguente: come si collocano le attuali variazioni climatiche in rapporto alla storia climatica della Terra? D'altronde il record strumentale - ovvero i dati ottenuti da misure dirette - delle temperature sulla Terra parte dal 1850 Cosa si può dire dunque del clima nel passato? Fortunatamente esistono diversi metodi per ricostruire le condizioni climatiche in maniera indiretta, grazie alla scienza delle ricostruzioni paleoclimatiche, che è in continua evoluzione. Ad esempio, la concentrazione degli isotopi dell'ossigeno all'interno delle carote di ghiaccio marino, nei fossili e nelle conchiglie di mare è una funzione della temperatura, mentre le bolle d'aria catturate all'interno delle carote di ghiaccio possono fornire informazioni sulla concentrazione di anidride carbonica nell'atmosfera.

Il grafico della figura 58 rappresenta le anomalie di temperatura rispetto alla media di riferimento del periodo $1961 - 1990$ fino a oltre 400 mila anni fa. Come ormai dovrebbe essere chiaro, l'anomalia è positiva se la temperatura stimata è maggiore della media di riferimento, mentre è negativa se minore; si può quindi notare come nel passato la Terra abbia visto un alternarsi di brevi periodi caldi e lunghi periodi più freddi, le ere glaciali. Negli ultimi 400 mila anni ci sono state quattro glaciazioni con una frequenza più o meno regolare; il picco dell'ultima glaciazione (LGM - Last Glacial Minimum) è stato circa 20 mila anni fa.[53] Tra una glaciazione e l'altra trovano posto i cosiddetti periodi interglaciali, come l'Olocene in cui viviamo, cominciato più o meno 12 mila anni fa.

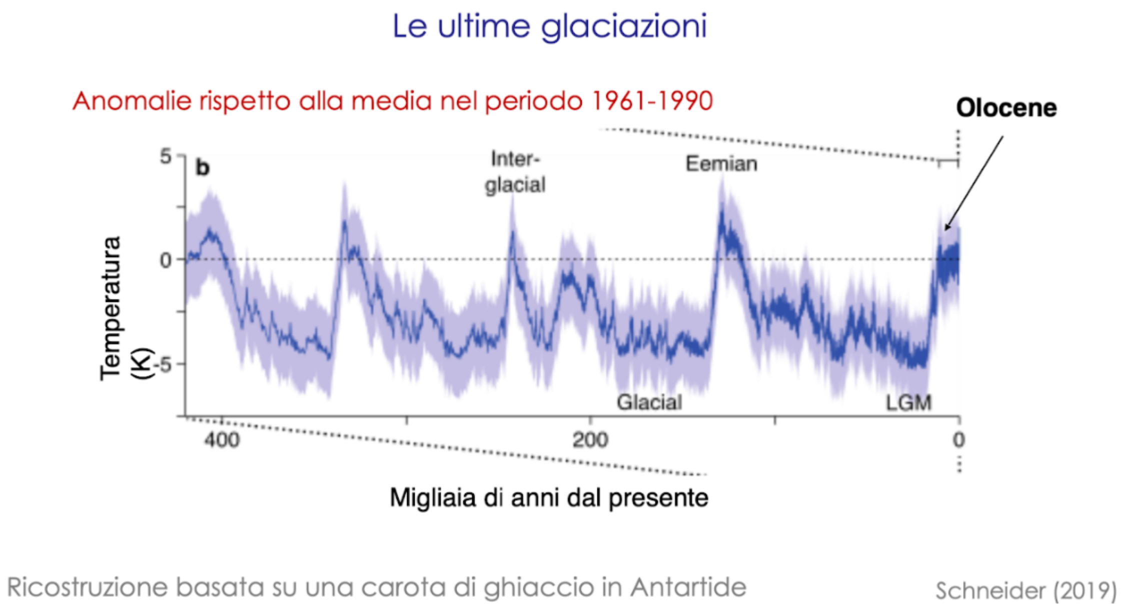


Figura 58

Il confronto tra i cambiamenti attuali, quelli avvenuti nel passato, e quelli che avverrebbero in assenza dell'attività antropica è una questione su cui molto si ragiona. In fondo il clima della Terra è sempre cambiato: perché allora gli scienziati sono così preoccupati per i cambiamenti indotti dall'uomo? Dalla ricostruzione delle anomalie di temperatura nel periodo dell'Olocene (figura 59) si nota che, mentre il nostro pianeta stava emergendo dall'ultima era glaciale, sono stati necessari migliaia di anni per ottenere un aumento della temperatura di mezzo grado. A

[53]In questo periodo sono ambientati i famosi film della serie *L'era glaciale* prodotti dalla *Disney*.

seguito di questo innalzamento, a partire da 10 mila fino a 5 mila anni fa, il pianeta ha goduto di temperature molto stabili: il massimo termico nel periodo Olocene, in cui la temperatura era più o meno di un quarto di grado sopra la media di riferimento. A partire da 5 mila anni fa la temperatura è scesa, anche se non sempre in modo monotono, fino a raggiungere il minimo di temperatura nella piccola glaciazione che risale al $1500-1700$. Da quel momento le temperature si innalzano, come si può vedere dalla curva arancione, che non è basata su ricostruzioni ma sul record strumentale. La differenza sostanziale è quindi che i cambiamenti a cui ora stiamo assistendo sono molto rapidi e repentini, stanno avvenendo nel giro di decine di anni, mentre normalmente le scale temporali di riscaldamento del nostro pianeta sono dell'ordine delle migliaia di anni. Inoltre, al raggiungimento del precedente massimo termico, si è pervenuti a una situazione di stabilità, un plateau termico; attualmente non c'è nessuna evidenza che porti a pensare che il clima stia andando verso un nuovo plateau, e che quindi la temperatura smetterà di aumentare. Il fatto che l'Olocene sia stato un periodo climatico così stabile è ciò che ha portato allo sviluppo della civiltà, perché l'allevamento, l'agricoltura e le attività economiche stanziali necessitano di un clima regolare, con stagioni che si ripetono consistentemente, senza grandi variabilità. In conclusione, quando si analizzano i cambiamenti avvenuti nell'ultimo periodo e li si pongono nell'ottica di variazioni climatiche su una scala ben più lunga, quello che si vede è che la temperatura attuale è più alta di quella raggiunta durante il massimo dell'Olocene, e non c'è nessuna evidenza che il riscaldamento stia rallentando.

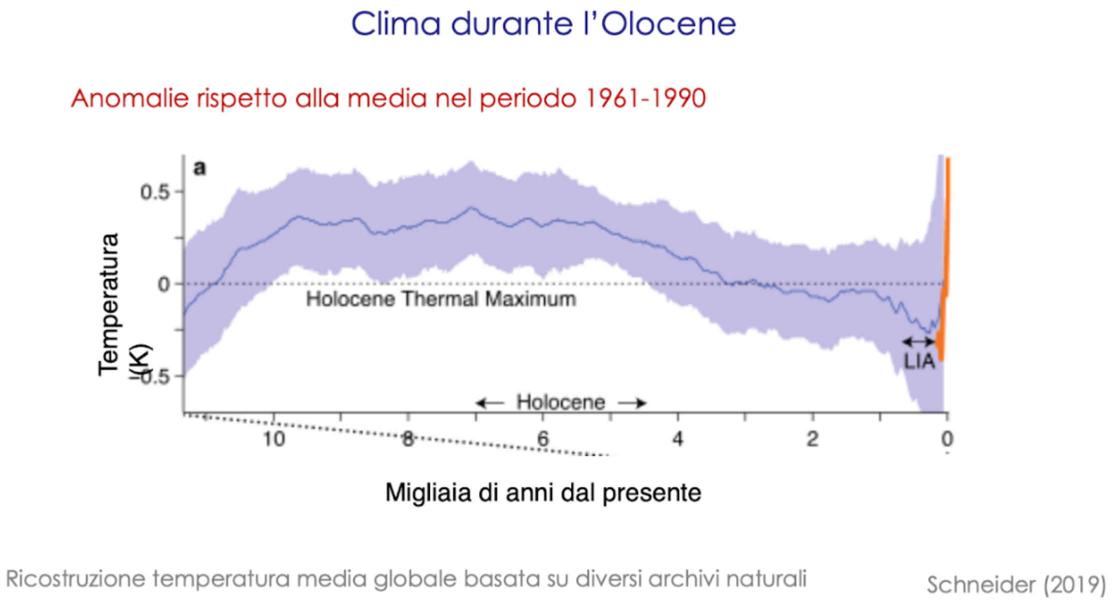
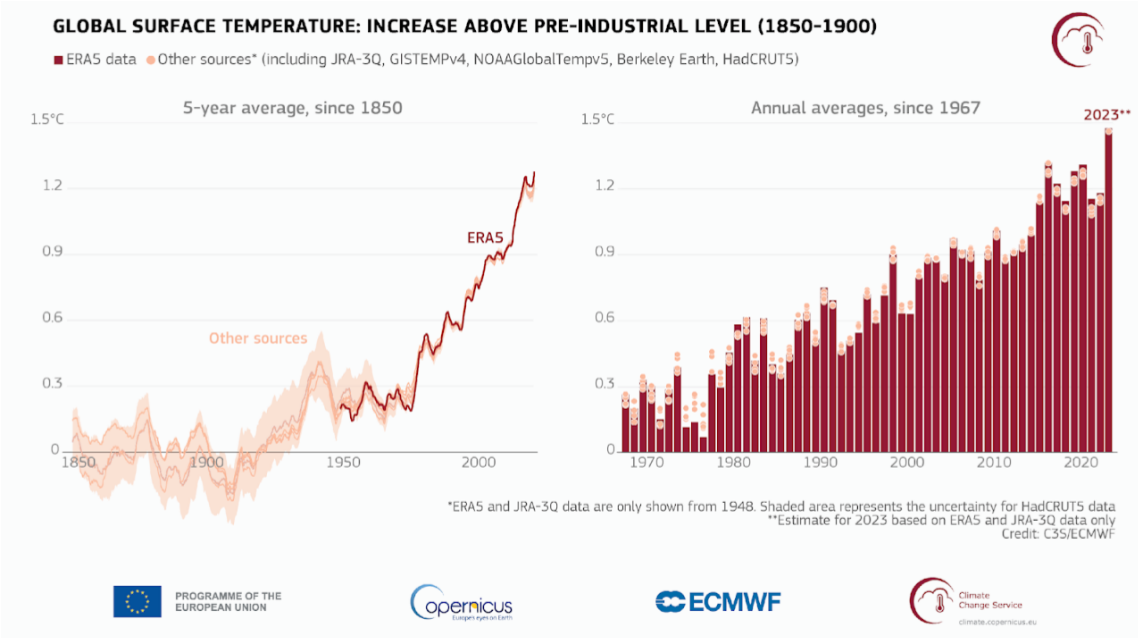


Figura 59

Nel grafico sulla sinistra della figura 60 si può vedere, con una scala differente, il record strumentale dell'anomalia di temperatura rispetto alla media $1850-1900$, ovvero il cosiddetto periodo preindustriale. La rappresentazione permette di notare maggiormente l'innalzamento finale di quasi 1.5 °C e le fluttuazioni che nel grafico precedente scomparivano a causa della scala utilizzata. Come già emerso durante le attività del blocco sulle temperature, il limite stabilito dall'accordo di Parigi per l'aumento della temperatura globale di 1.5 °C fa proprio riferimento al livello preindustriale. Dal grafico sulla destra si può invece notare che il 2023 è stato l'anno più caldo nel record strumentale, e che tutti i dieci anni più caldi si trovano a partire dal 2014.



Aumento della temperatura superficiale globale dell'aria (1) rispetto alla media del periodo compreso tra il 1850 e il 1900, periodo di riferimento preindustriale designato, sulla base di diversi dataset di temperature globali mostrati come medie quinquennali dal 1850 (a sinistra) e come medie annuali dal 1967 (a destra).
Credit: C3S/ECMWF.

Figura 60

Cosa si può dire, infine, del clima futuro? Dall'esperienza personale tutti sanno che non è possibile prevedere il meteo a più di qualche giorno di distanza. Nonostante ciò, la comunità scientifica ci dice che siamo prossimi al superamento della già citata soglia di 1.5 °C. Come è possibile? Agli studenti possono essere mostrati i grafici delle previsioni di temperatura nella propria città emessi dall'ECMWF (*European Centre for Medium-Range Weather Forecasts*).[54] Si nota che l'incertezza delle previsioni è molto alta tanto da non poter dire con nessun grado di confidenza quale sarà il tempo tra due settimane. Invece, è possibile prevedere che la temperatura in una certa città sarà più bassa o più alta basandosi sul ciclo stagionale e sulle statistiche associate. Vi sono quindi diversi elementi di predicibilità: il ciclo diurno, poiché in generale fa più caldo di giorno di quanto faccia di notte; il ciclo stagionale che introduce elementi di predicibilità su scale temporali di circa un mese; il fenomeno El Niño, legato all'Oceano Pacifico, che è una fluttuazione con scale temporali di circa tre o quattro anni; infine, i cambiamenti climatici di decenni e secoli. Si tratta di un esempio banale, ma che vorrebbe mostrare come su scale temporali anche più lunghe come quelle climatiche esistano degli elementi di predicibilità che permettono di prevedere l'evoluzione del sistema.

Grazie ai modelli climatici è dunque possibile fare delle previsioni. Nella figura 61 è mostrato un grafico molto complesso, con due linee nere, una continua e una tratteggiata: queste rappresentano due diversi (di poco) record strumentali, ovvero dati osservati che esprimono l'anomalia di temperatura media rispetto alla media di riferimento $1961 - 1990$. Ognuna delle curve colorate

[54] https://www.ecmwf.int/en/forecasts/charts

rappresenta una simulazione di un modello climatico, mentre la curva rossa rappresenta la media di tutte queste simulazioni. I modelli tendono a riprodurre la pendenza media dell'anomalia di temperatura osservata, e si può notare come, in media, i modelli riproducano il riscaldamento che sta avvenendo a partire dagli anni sessanta. Se poi si osservano i modelli singolarmente, le previsioni sono anche molto diverse: questi modelli non vengono usati necessariamente per fare previsioni di anno in anno, ma piuttosto per prevedere l'evoluzione della temperatura media globale, mediata per di più su scale temporali più grandi, in risposta a determinate variazioni della forzante energetica, ovvero di tutti quegli elementi che concorrono a modificare l'equilibrio radiativo dell'atmosfera. Dal grafico emerge anche l'importanza dell'uso delle anomalie al posto delle temperature assolute: i modelli possono anche predire temperature diverse, ma rapportandoli ciascuno alla propria media 1961 – 1990 (i segmenti colorati sulla sinistra del grafico) essi risultano confrontabili.

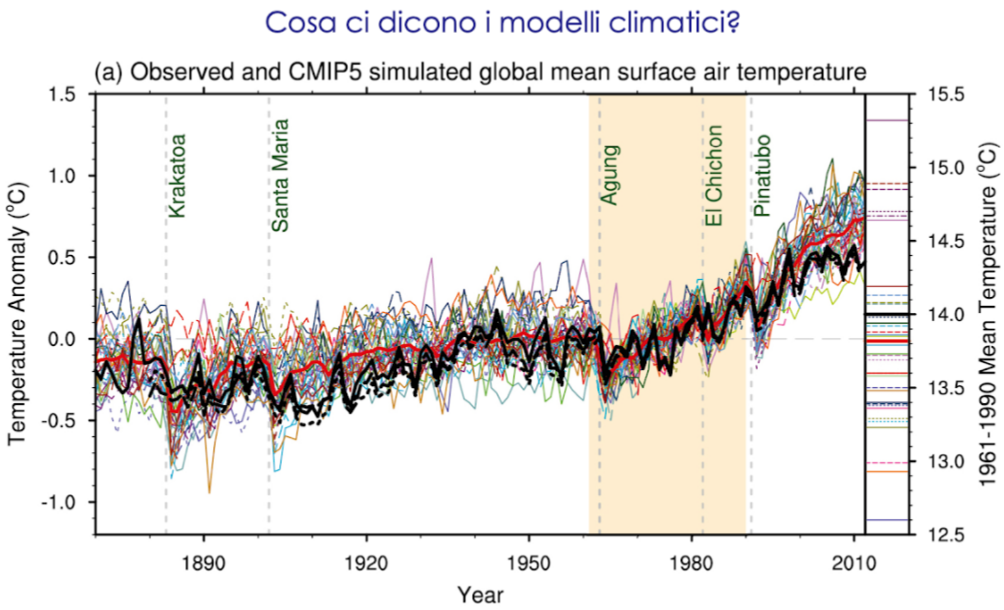


Figura 61

Un altro aspetto importante è che i modelli hanno la fisica giusta. Per esempio, nel grafico sono indicate le eruzioni vulcaniche più violente avvenute nel periodo considerato. A seguito delle eruzioni vulcaniche, i dati osservati e tutti i modelli dicono la stessa cosa, ovvero che vi è un raffreddamento che dura per circa uno o due anni. Infatti, una delle conseguenze delle eruzioni vulcaniche è l'emissione nell'atmosfera di particelle di solfati che riflettono la radiazione solare. Poiché la stratosfera è una zona dell'atmosfera molto stabile, una volta che queste particelle sono in grado di raggiungerla tendono a rimanere lì in media uno o due anni prima di essere rimosse.

Tutte le perturbazioni dell'equilibrio energetico dell'atmosfera dovute all'attività umana vanno sotto il nome di forzante antropica: nel grafico della figura 62 si può osservare come, se non si inserisce la forzante antropica all'interno dei modelli (quindi le emissioni di gas serra, la deforestazione, etc.), essi non sono in grado di riprodurre l'innalzamento della temperatura che si sta attualmente verificando.

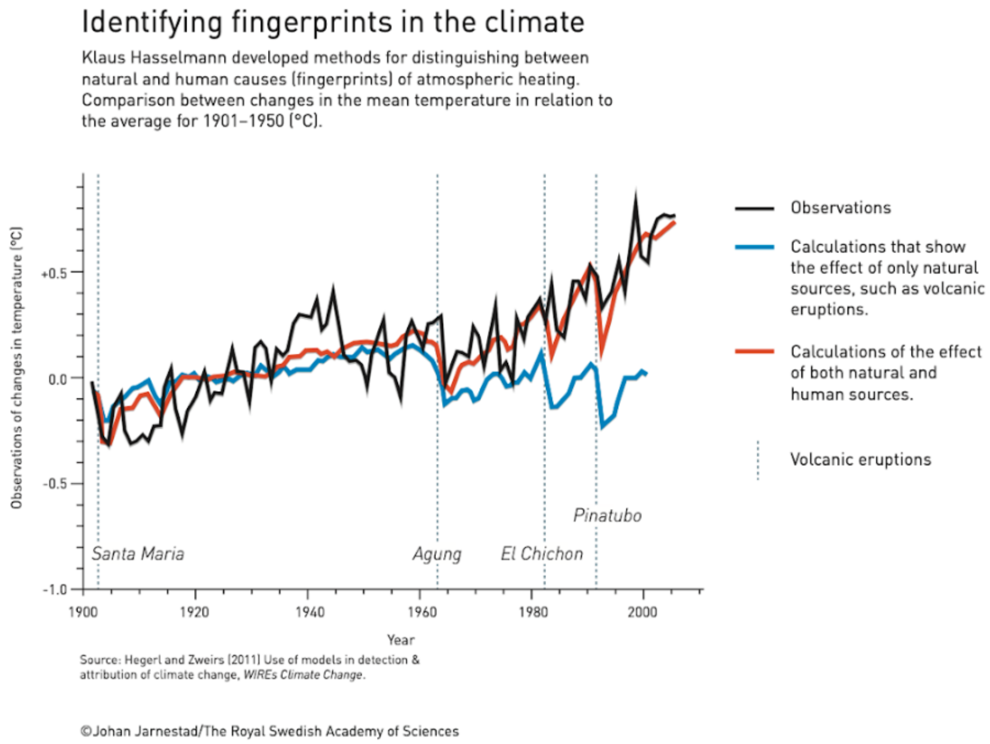


Figura 62

Per concludere, si può riassumere quanto visto durante il percorso citando alcune delle dichiarazioni principali fornite dall'IPCC (*Intergovernmental Panel on Climate Change*) all'interno del sesto rapporto di sintesi pubblicato nel marzo 2023:

- riscaldamento osservato e sue cause: le attività umane, principalmente attraverso le emissioni di gas serra, hanno inequivocabilmente causato il riscaldamento globale, con una temperatura superficiale globale che ha raggiunto il valore di $1.1\,°C$ al di sopra del livello del periodo $1850-1900$ nell'intervallo $2011-2020$;

- cambiamenti e impatti osservati: si sono verificati rapidi ed estesi cambiamenti nell'atmosfera, nell'oceano, nella criosfera e nella biosfera. I cambiamenti climatici causati dall'uomo stanno già influenzando molti eventi meteorologici e climatici estremi in tutte le regioni del mondo;

- cambiamenti climatici futuri: le continue emissioni di gas serra porteranno ad un aumento del riscaldamento globale, con la migliore stima di raggiungere gli $1.5\,°C$ nel breve termine negli scenari considerati e nei percorsi simulati. Ogni incremento del riscaldamento globale intensificherà rischi multipli e concomitanti;

- verosimiglianza e rischi di cambiamenti inevitabili, irreversibili o improvvisi: alcuni cambiamenti futuri sono inevitabili e/o irreversibili, ma possono essere limitati da una profonda, rapida e sostenuta riduzione delle emissioni di gas serra a livello globale. La possibilità di cambiamenti improvvisi e/o irreversibili aumenta con livelli di riscaldamento globale più elevati.

4.2 Il workshop estivo dei docenti di matematica

Durante l'estate il Laboratorio DiCoMat ha organizzato due workshop di didattica della matematica, ovvero delle tre giorni dedicate agli insegnanti della Scuola Secondaria di Primo e Secondo Grado per condividere esperienze e ricerche sull'insegnamento-apprendimento della matematica, con un'alternanza di approfondimenti, condivisione di esperienze e progettazione. Le edizioni si sono tenute l'una dal 29 al 31 luglio e l'altra dal 26 al 28 agosto 2024 presso l'Università di Trento, e hanno visto la partecipazione di una trentina di insegnanti complessivamente.

Inserisco questa breve parentesi nella sezione dedicata al percorso *Uno sguardo matematico sulla crisi climatica* perché gli incontri hanno costituito occasione di condividere con gli insegnanti il nostro progetto, e di ricevere moltissimi feedback e graditi apprezzamenti. Eravamo perfettamente consapevoli del fatto che il percorso fosse molto impegnativo, e non semplice da portare in classe, e il parere è stato unanime anche tra i docenti. Fortunatamente dal condiviso entusiasmo sono nate anche delle occasioni per effettuare le prime sperimentazioni. Il nostro augurio è che gli insegnanti possano mettersi in gioco in prima persona portando il progetto nelle loro classi autonomamente, senza il bisogno della figura dell'esperto esterno: un passo molto lungo, ma indispensabile, che speriamo di facilitare col tempo raffinando sempre di più il laboratorio e fornendo materiale sempre più utile al docente. D'altronde la progettazione ha richiesto mesi di lavoro e il profuso impegno del nostro gruppo di lavoro, ricerche e approfondimenti personali: questo sforzo è stato fatto apposta da noi per risparmiarlo all'insegnante, e limitare al massimo la preparazione che gli è richiesta per portare l'attività in classe.

In ogni caso, non è questo il vero motivo per cui volevo soffermarmi sul workshop. Piuttosto, ho apprezzato moltissimo l'occasione perché mi ha dato modo di incontrare moltissimi docenti incredibilmente entusiasti, appassionati e sempre pronti al dialogo e al confronto, dal più giovane fino ai più attempati veterani, tutti con tantissima voglia di condividere le proprie esperienze in classe, a volte anche troppa! Come accennavo nell'introduzione, ho già lavorato a scuola per un anno, collaborando con altri insegnanti: un tempo sicuramente troppo breve per trarre conclusione alcuna, ma di certo mai ho trovato un clima così positivo come quello del workshop estivo. Credo che momenti come questo siano molto motivanti per l'insegnante, quasi ricostituenti, che lo aiutino a tornare a riflettere sui perché delle proprie scelte, e a riscoprire la propria passione per la disciplina che a volte rischia di passare in seconda piano nella routine scolastica; in particolare credo che tutti abbiano apprezzato il ritorno allo stato di studente che si verifica spontaneamente quando ci si ritrova a provare in prima persona alcune proposte laboratoriali destinate, appunto, agli studenti.

Potrei dilungarmi ancora molto, ma mi limiterò a elencare alcuni dei momenti più interessanti:

- un seminario sul tema dell'affettività e sul suo ruolo nell'apprendimento della matematica, con uno spazio dedicato alla compilazione di un questionario con cui i docenti partecipanti hanno condiviso le proprie convinzioni ed emozioni associate alla disciplina;

- un seminario dedicato al feedback per migliorare l'apprendimento degli studenti anche tramite l'uso di rubriche di valutazione autogestite e sperimentazione di un'attività in cui il feedback può giocare un ruolo importante;

- la presentazione di un progetto di ricerca sulla produzione di discorso matematico in ambienti digitali;
- la presentazione di un lavoro di ricerca sulla valutazione formativa e sullo scambio di feedback in particolare nel periodo della didattica a distanza.

Ho molto apprezzato gli interventi di alcuni ricercatori in didattica della matematica. In generale, credo che per l'insegnante sia importante rimanere a contatto con il mondo della ricerca; e a livello personale è stato utile per capire meglio di cosa si occupa la ricerca attuale in didattica, un mondo che mi interessa molto ma che per il momento escludo dalle possibili prospettive di carriera lavorativa.

4.3 La sperimentazione al Liceo Galilei di Trento - Diario di bordo

La prima sperimentazione del percorso è stata fatta in una classe di terza liceo scientifico opzione scienze applicate del Liceo G. Galilei di Trento, in collaborazione con l'insegnante di matematica, la prof.ssa Letizia Corazzolla. Si tratta della stessa classe, all'epoca una seconda, in cui abbiamo svolto il laboratorio sulle funzioni, descritto nella sezione 2: un elemento di vantaggio che ci ha permesso di calibrare al meglio l'attività. Essa si è svolta dal 7 al 15 ottobre 2024, per un totale di 7 ore curricolari di matematica.[55] Con questo monte orario a disposizione, e visto il livello della classe, abbiamo deciso di assemblare il percorso in questo modo: inizialmente si presenta il blocco introduttivo per poi dedicare la maggior parte del tempo all'analisi dei grafici nel blocco delle temperature, arrivando fino al trend della serie storica, per chiudere infine con una versione riassunta del blocco conclusivo. Come si vedrà, il percorso ipotizzato subirà ben presto delle modifiche a seguito del riscontro ricevuto nel corso delle prime lezioni.

4.3.1 I incontro - 1 ora - Lunedì 7 ottobre

Il primo incontro è dedicato interamente al blocco introduttivo in forma di lezione dialogata che muove dalle conoscenze pregresse degli studenti sulla differenza tra meteo e clima e sull'effetto serra. Come compito si lasciano agli studenti le domande sul grafico T1 (quello in figura 27), e una domanda sull'effetto serra.

La classe è nel complesso attenta e partecipe, e l'introduzione occupa tutta l'ora, costringendoci a rimandare la discussione sul grafico T1. A posteriori, mi sembra che effettivamente possa valere la pena dedicare un'ora intera all'introduzione, in particolare all'effetto serra. Infatti, durante la discussione i tentativi degli studenti di spiegare l'effetto serra palesano tutte le classiche misconcezioni, dalle radiazioni che si comportano come raggi che restano intrappolati tra la Terra e l'atmosfera come se subissero riflessioni multiple fino alla credenza che si tratti di un effetto dovuto esclusivamente all'azione dell'uomo. Alcuni studenti sembrano essere più preparati, e fanno osservare ai compagni che la temperatura media globale sarebbe molto più bassa senza l'effetto serra. In ogni caso è evidente che si tratti di un argomento di cui hanno

[55] Ancora una volta, per "ore" si intende "ore scolastiche", della durata di 50 min in questo istituto.

già sentito parlare in passato, elemento di cui l'insegnante non può non tenere conto. Queste preconoscenze sembrano essere molto vaghe in generale: i fenomeni di assorbimento e di emissione e il relativo equilibrio radiativo sembrano essere sconosciuti. Stando così le cose, se fra gli obiettivi dell'insegnante vi è anche lo studio dell'effetto serra, allora sarebbe più opportuno dedicarci un'apposita lezione. Altrimenti meglio non approfondire troppo, perché discorsi legati a onde elettromagnetiche e spettri di emissione rischiano di cadere nel vuoto, soprattutto con gli studenti più piccoli. Infatti, le risposte degli alunni nel compito sono spesso ancora errate o poco chiare. Molto efficace invece il video della passeggiata del cane, anche se una studentessa ha subito detto correttamente la differenza tra meteo e clima. Ho anche cercato di sottolineare la parte più orientativa spendendo due parole sul mestiere del climatologo e sui modelli matematici per il clima.

4.3.2 II incontro - 2 ore - Martedì 8 ottobre

Il secondo incontro prende il via dalle risposte degli studenti alle domande lasciate per compito relative al grafico T1. Non avendo dedicato tempo all'analisi del grafico nell'incontro precedente, salvo una rapidissima introduzione, le risposte sono per la maggior parte errate o imprecise, come ci saremmo dovuti aspettare. In particolare, gli studenti interpretano spontaneamente il termine anomalia di temperatura come "temperatura anomala", nel senso di diversa da un'ipotetica temperatura "normale". Si apre una discussione sul significato del grafico T1, accompagnata dall'attività sulle temperature mensili a Trento (figura 28), per poi passare direttamente al grafico T2. La seconda ora di lezione è dedicata all'attività con il foglio di calcolo: gli studenti hanno a disposizione dei computer portatili e lavorano a coppie. Il compito assegnato è la stesura di un breve report che descriva come sono stati costruiti i dati e i vari grafici, e qual è il loro significato.

Si tratta di un incontro molto faticoso, in cui la discussione collettiva si rivela una metodologia non efficace in una classe poco partecipativa e disposta al dialogo, e in cui gli studenti hanno in generale grandi difficoltà nell'esprimere efficacemente le proprie idee. Un esempio di un dialogo che mette in evidenza i problemi legati alla comunicazione può essere quello avvenuto quando si cercava di motivare l'uso delle anomalie di temperatura, in riferimento al grafico T1: uno studente sostiene che non sia possibile usare le temperature assolute, perché altrimenti i dati verrebbero "schiacciati" risultando illeggibili. Non è assolutamente chiaro cosa intenda dire, e ne nasce una confusa discussione con i compagni. L'insegnante intuisce, con un enorme sforzo interpretativo, l'idea che lo studente non riesce in nessun modo a comunicare: intende dire che, nel poco spazio a disposizione (la lavagna, su cui è proiettato il grafico T1), l'unico modo di rappresentare le temperature assolute sarebbe quello di ridurre la scala dell'asse delle ordinate (che lo studente ritiene debba partire necessariamente da zero); in tal modo, dato che le anomalie si muovono in un intervallo di nemmeno due gradi, il grafico delle rispettive temperature assolute risulterebbe "schiacciato". Al di là della fallacia del ragionamento dovuta alla misconcezione sull'origine del piano cartesiano, lo studente sta facendo riferimento alla rappresentazione, mentre la domanda era riferita ai dati: la sua risposta è quindi evidentemente erronea perché parte da premesse sbagliate, ma è comunque coerente con queste premesse; nonostante ciò, lo studente non è grado di esplicitare il proprio pensiero, e l'interpretazione fornita viene confermata dallo studente solamente nel momento in cui è l'insegnante a farsi carico dello sforzo comunicativo con il classico "Intendevi dire che...".

Anche la domanda relativa all'informazione contenuta nei segmenti neri che collegano i dati rivela difficoltà del tutto inaspettate: sono diversi gli studenti che ritengono che il segmento rappresenti l'evoluzione della anomalie tra un anno e il seguente. Fortunatamente ci sono anche riscontri positivi: uno studente spiega come produrre il grafico delle anomalie mensili a Trento in due modi diversi, partendo dal grafico delle temperature: il primo metodo consiste nello spostare l'asse delle ascisse sul valore della media di riferimento e riquotare opportunamente l'asse delle ordinate, mentre il secondo prevede la traslazione del grafico. La comunicazione è in questo caso efficace,[56] necessitando comunque di qualche intervento da parte di Elisabetta.

Visto quanto emerso nell'incontro, decidiamo di apportare alcune modiche al percorso:[57]

- l'attività si affida troppo alla discussione in classe, che può risultare dispersiva; è necessario strutturarla maggiormente, fornendo schede di lavoro con attività e domande, anche da fare in gruppo, in modo che gli studenti siano costretti a riflettere sul materiale fornito per poi raccontare ciò che hanno fatto, anche molto brevemente, permettendo poi all'insegnante di tirare le fila; il ritmo della lezione risulta così più sostenuto e incalzante, e palesa il contenuto, che la discussione di classe può invece nascondere a studenti abituati unicamente alla lezione frontale;

- è necessario lavorare di più sull'aspetto comunicativo, facendo particolare attenzione alla terminologia usata. Elisabetta propone di preparare dei cartellini con le singole parole (temperatura, anomalia, annuale, mensile, media, etc.) da attaccare alla lavagna nell'ordine corretto per ogni grafico analizzato, costruendo il significato gradualmente, pretendendo poi che nella comunicazione si usino i termini correttamente;

- il grafico T1 è troppo complesso per essere interpretato autonomamente dagli studenti; è meglio prima capire il significato di anomalia lavorando sul grafico delle temperature a Trento. In una prima fase gli studenti potrebbero porre all'insegnante tutte le domande che vengono loro in mente in riferimento al grafico T1, aprendo una discussione che possa poi sfociare in un momento di istituzionalizzazione in cui l'insegnante riassume, anche per punti, gli aspetti principali.

Decidiamo quindi di ridefinire completamente le attività degli incontri successivi, che originariamente prevedevano la parte sulla periodicità e sul trend della serie storica delle anomalie di temperatura.

[56] Purtroppo si tratta di uno dei pochi esempi incontrati nel corso di questa sperimentazione. Come ho già avuto modo di dire, le difficoltà nel comunicare la matematica sono state al centro delle attività del tirocinio: ho avuto modo di constatarle in moltissime occasioni, cercando anche di modificare il mio approccio, per passare da un riflesso interpretativo quasi automatico, che non aiuta per nulla lo studente, a una richiesta di chiarimento che nasconde (o a volte esplicita) un invito a una riformulazione più chiara, mettendo lo studente nelle condizioni di capire davvero cosa vuol dire comunicare matematica efficacemente. Strano a dirsi, ma a volte l'insegnante farebbe meglio a fare il finto tonto.

[57] Si intende modifiche rispetto al progetto originale, come concepito prima delle sperimentazioni. Tali modifiche sono già presenti nel percorso presentato nella sezione 4.1.2.

4.3.3 III incontro - 1 ora - Giovedì 10 ottobre

Cominciamo l'incontro ricordando l'obiettivo: capire cosa rappresenta il grafico T2 e cosa ci può dire sull'andamento della temperatura globale. Proiettiamo quindi alla lavagna uno dei report realizzati dagli studenti e rivediamo brevemente i grafici prodotti nel corso dell'attività con il foglio di calcolo. Segue un'attività a coppie che prevede la compilazione di un questionario realizzato con *Desmos*, contenente diverse domande relative al grafico delle anomalie di temperatura realizzato con il foglio di calcolo, per verificare se gli studenti ne hanno ben compreso il significato:

1) Supponi che tutte le costanti additive, da k_1 a k_5, abbiano valore 1. Collegando con segmenti i pallini che rappresentano i dati dello stesso anno, possono verificarsi delle intersezioni tra segmenti? Perché?

2) Supponi ora $k_5 = 0$, e le altre costanti uguali a 1. Cosa cambierà nella rappresentazione grafica?

3) Cosa accadrebbe se tutte le costanti fossero poste uguali a -1?

4) Cosa accadrebbe se tutte le costanti fossero nulle?

5) Come si presenterebbe il grafico se le costanti k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 avessero valori positivi crescenti? Come si presenterebbe il grafico se le costanti k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 avessero valori positivi decrescenti?

6) Supponi ora $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = -2.5, k_4 = 3, k_5 = 1$. Come si presenterà il grafico?

Agli studenti è richiesto di prevedere come si presenterà il grafico, per poi controllare le risposte usando il foglio di calcolo (nel nostro caso il controllo è stato fatto "alla lavagna", tutti insieme). Infine, qualche minuto è dedicato all'introduzione dell'errore casuale (lavorando sul quinto foglio della cartella, che non era stato assegnato nello scorso incontro).

Ora che gli studenti dispongono di tutte le conoscenze necessarie all'interpretazione del grafico T2, lo discutiamo brevemente insieme per poi lasciare alcune domande di compito:

1) Che informazioni ci dà il fatto che si formi un arcobaleno e che le curve non siano tutte sovrapposte?

2) Perché la linea riferita all'anno 2024 è formata da pallini e segmenti?

3) Le altre linee, che sono continue senza pallini, sono così perché contengono più informazioni o per una questione grafica?

4.3.4 IV incontro - 1 ora - Lunedì 14 ottobre

La lezione comincia riprendendo e commentando le domande di compito, cui i ragazzi hanno risposto in modo soddisfacente. Ne approfittiamo anche per spiegare la forma a onda del grafico T2. Successivamente, riprendiamo il filmato sulle anomalie di temperatura locali, già visto nel blocco introduttivo nel corso del primo incontro, soffermandoci sull'uso della terminologia, sfruttando i cartellini che abbiamo appositamente preparato (figura 29).

Infine, forniamo agli studenti l'articolo sulle anomalie giornaliere (grafico T3), lasciando per compito due semplici domande:

- Perché sono presenti delle strisce colorate?
- Che informazione contiene un pallino del grafico, ovvero, che dato rappresenta?

Nel corso di questo e dello scorso incontro si nota un miglioramento nella partecipazione, gli studenti sono più coinvolti e intervengono opportunamente. Ad esempio, una studentessa è in grado spiegare chiaramente alla classe perché l'anomalia rappresentata nel video non può essere riferita a una media globale. Inoltre nel complesso gli studenti sembrano in grado di leggere, anche se magari ancora in modo superficiale, il grafico delle anomalie giornaliere: il ragazzo chiamato alla lavagna per provare a spiegarlo ai propri compagni fa uso dei cartellini individuando i termini corretti.

4.3.5 V incontro - 2 ore - Martedì 15 ottobre

L'ultimo incontro si apre riprendendo l'articolo, evidenziando in particolare la presenza di tutti gli elementi costitutivi di un buon grafico, invitando a usarlo come riferimento per migliorare i report realizzati per compito. Infatti, la lezione è interamente dedicata al lavoro a coppie sui report, eccezion fatta per i venti minuti finali, nei quali riassumiamo i punti salienti del blocco conclusivo per chiudere coerentemente il percorso. Il lavoro degli studenti nel corso della lezione consiste quindi nel rileggere i report, scrivere una scaletta dei miglioramenti da apportare, in base a quanto visto nel corso dell'attività, per poi apportare i miglioramenti e consegnare una nuova versione.

Fornire dei feedback e un modello di esempio per i report si rivela una strategia vincente: gli studenti lavorano attivamente a coppie, in maniera propositiva, cercando di migliorare quanto prodotto per compito. Infatti alcuni dei report consegnati inizialmente erano inadeguati, ma ora gli studenti sono in grado di riconoscere l'insufficienza dei loro titoli, grafici e didascalie, e accettano di apportare delle modifiche in modo consapevole: un traguardo per nulla banale.

In generale siamo molto soddisfatti della prima sperimentazione, che non era partita dalle premesse migliori: l'ambiente classe non era dei più semplici, e sono stati fatti molti tagli e cambiamenti in corso d'opera, a volte anche al ribasso rispetto alle aspettative iniziali. Nonostante ciò, abbiamo ottenuto dei buoni risultati, e l'attività è riuscita a interessare anche questi studenti così passivi. Abbiamo quindi ottenuto una conferma del valore del progetto, in cui d'altronde abbiamo sempre creduto, ma anche della sua difficoltà, e della necessità di ridiscuterlo in alcune parti.

Infine, per quanto riguarda gli elaborati degli studenti, abbiamo riscontrato una certa disomogeneità: alcuni, principalmente quelli consegnati dagli studenti meno attenti e partecipi durante l'attività, sono di basso livello; altri sono mediocri, in particolare nel testo che correda i grafici; infine alcuni sono ben fatti e dimostrano un grande impegno, ma presentano comunque errori e imprecisioni. Le difficoltà principali sono l'uso del linguaggio specifico e la scrittura di un testo chiaro ed efficace, che a volte non centra il punto e si focalizza su aspetti non rilevanti.

Sembra evidente che nel contesto di questa classe, l'attività svolta si situa all'inizio di un ideale percorso di lavoro, condiviso tra gli insegnanti, incentrato sulla comunicazione, nel corso del quale i report dovrebbero essere oggetto di continui feedback e revisioni per permettere agli studenti di migliorare ancora. Bisogna infatti considerare che nella storia di classe è probabilmente la prima volta che viene chiesto agli studenti di produrre un report, e che in generale manca l'abitudine alla comunicazione in un contento matematico e scientifico, come già più volte evidenziato.

4.4 La sperimentazione al Liceo Russell di Cles - Diario di bordo

La seconda sperimentazione è stata fatta in una classe di quarta liceo scientifico opzione scienze applicate del Liceo B. Russell di Cles, in collaborazione con l'insegnante di matematica, la prof.ssa Claretta Carrara. Si tratta di una classe di un buon livello composta da soli tredici studenti, dunque l'ambiente perfetto per mettere alla prova la parte più impegnativa del percorso e i tanti applet progettati. Il laboratorio si è svolto dal 22 al 25 ottobre 2024, per un totale di 12 ore curricolari, alcune di matematica e altre prese in prestito da diverse discipline in modo da avere tre ore al giorno attaccate per quattro giorni di fila.[58] Abbiamo quindi deciso di portare in classe il percorso completo: introduzione, temperature, anidride carbonica e conclusione, con l'idea di introdurre la decomposizione additiva nel blocco delle temperature per poi permettere agli studenti di analizzare autonomamente i dataset sulla CO_2.

4.4.1 I giornata - Martedì 22 ottobre

Il primo incontro prevede il blocco introduttivo e una prima parte di quello sulle temperature, proposta come esposta nella sezione 4.1.2 fino all'attività con il foglio di calcolo. Non ci sono particolari osservazioni da fare: gli alunni sono partecipi e non ci sono intoppi, per quanto si riscontrino sempre delle difficoltà nella comunicazione, che ci portano a insistere molto sulla precisione del linguaggio usato e sulla chiarezza. Come compito chiediamo agli studenti di scrivere un brevissimo report incentrato su quanto rappresentato nel grafico delle anomalie di temperatura prodotto con il foglio di calcolo.

4.4.2 II e III giornata - Mercoledì 23 e giovedì 24 ottobre

Concludiamo il blocco sulle temperature, presentando la decomposizione additiva mediante gli applet *GeoGebra* per poi analizzare il dataset sulle temperature. Per compito si chiede di rivedere i report migliorandoli seguendo i suggerimenti dati durante la giornata, oltre che di rielaborare i propri appunti sui vari passaggi della decomposizione additiva.

Nel corso della lezione gli studenti riescono a stare al passo, che è comunque relativamente lento: ci rendiamo conto che nel percorso prevale una componente di ragionamento su aspetti teorici più che un approccio pratico, che invece sembra interessare di più agli studenti di un indirizzo scienze applicate. Ad esempio, è stata molto apprezzato il lavoro con il foglio di calcolo (alcuni ritengono di essere in grado di programmarlo in autonomia), ma meno lo studio del metodo

[58] Per "ore" si intende "ore scolastiche", della durata di 50 min anche in questo istituto.

di decomposizione additiva lavorando su dati fittizi con gli applet *GeoGebra*, che in ogni caso assolvono il loro compito, aiutando gli studenti a comprende il concetto di stagionalità e di media mobile. D'altronde, è evidente che in questo contesto è la parte concettuale a essere davvero rilevante, e non quella tecnico-pratica.

Ci accorgiamo inoltre che il percorso presenta l'occasione di lavorare sul concetto di media, che gli studenti non sembrano essere in grado di visualizzare sul grafico. Sembra mancare una vera e propria padronanza dell'aspetto concettuale, in favore di una identificazione con la regola di calcolo, limitandosi quindi all'uso del registro semiotico algebrico.

4.4.3 IV giornata - Venerdì 25 ottobre

L'ultimo incontro è dedicato all'analisi in autonomia dei dataset sulla CO_2 e alla stesura di report. Dividiamo la classe in gruppi di tre o quattro studenti e assegniamo a ciascuno una di queste consegne:

- stendere il testo di un intervento rivolto alla comunità scientifica con l'obiettivo di spiegare, scendendo nei dettagli tecnici, l'analisi effettuata sui dati, ad esempio immaginando di dovere tenere un seminario con la possibilità di proiettare delle diapositive;

- stendere un report divulgativo rivolto ai cittadini volto a sostenere la tesi che l'aumento della concentrazione di CO_2 è un fenomeno globale.

Gli obiettivi di questo lavoro sono di verificare se gli studenti hanno davvero compreso il modello di decomposizione additiva e se lo sanno applicare al fine di trarre delle informazioni dai dati, sfruttando al meglio i grafici prodotti per mezzo degli applet nello strutturare la propria argomentazione. Inoltre, si vuole insistere sull'efficacia della comunicazione e sull'uso di un corretto linguaggio scientifico. Gli studenti cominciano a lavorare in classe, e avranno una settimana di tempo per consegnare la versione definitiva.[59] L'attività termina con un breve riassunto dei punti salienti del blocco conclusivo.

L'applet *R Shiny* dedicata all'esplorazione del dataset si rivela efficace nel guidare gli studenti; osserviamo che sarebbe utile se l'applet mettesse maggiormente in evidenza i passaggi concettuali che stanno dietro al modello di decomposizione additiva, consentendo allo studente di scegliere le operazioni da effettuare, mentre al momento si limita a presentare tutti i grafici utili in un'unica schermata; necessiterebbe forse di una ristrutturazione che la renda più sequenziale, sicuramente un aspetto su cui lavorare in futuro. Una nota di colore, letteralmente: uno studente si accorge di un errore all'interno dell'applet,[60] per cui la scala di colori assegnata ai dati all'interno di un grafico non è coerente con l'andamento dei dati stessi, dimostrando di padroneggiare il senso della rappresentazione, e di essere in grado di coordinare le informazioni contenute in diversi grafici degli stessi dati!

[59] Idealmente sarebbe stato interessante prevedere la possibilità di consegnare versioni intermedie per permettere all'insegnante di fornire un feedback e agli studenti di apportare le conseguenti migliorie, ma ciò non è stato possibile a causa dei tempi stretti della sperimentazione. Ci siamo quindi limitati a fornire dei feedback a lavoro concluso.

[60] Dovuto a una mia imperdonabile distrazione in fase di programmazione, che però non è venuta per nuocere, alla fine.

Un altro aspetto che è emerso da quest'ultimo incontro è la poca abitudine al lavoro di gruppo, di cui già ho detto in precedenza: gli studenti lasciati a se stessi non sono in grado di organizzare il lavoro efficacemente, ed è necessario il nostro intervento per "costringerli" a scrivere una scaletta e a suddividersi i compiti. Fortunatamente, dopo una prima fase poco produttiva, i gruppi ingranano la marcia e i singoli si attivano in prima persona, mostrando atteggiamenti molto propositivi. Inoltre, in futuro sarà necessario distinguere più chiaramente, nel momento in cui si chiede agli studenti di stendere dei report, l'aspetto prettamente didattico (costruzione dei dati fittizi, riepilogo di quanto fatto in classe, senso interno dell'attività) da quello scientifico di contenuto (analisi di dati e conclusioni che se ne possono trarre, indipendentemente dal fatto che siano reali o fittizi). In questo modo ci si augura di evitare la consegna di alcuni elaborati, soprattutto in fase iniziale, alquanto confusi.

In generale questa seconda sperimentazione è stata impegnativa, ma ci ha aiuto a definire meglio il percorso, indicandoci quali parti tagliare e quali approfondire, e offrendoci molti spunti di miglioramento. Il ritmo tenuto è stato poco sostenuto a causa dei molti momenti di riflessione e di confronto collettivi, in cui è importante assicurarsi che tutti stiano al passo, ed è stato anche spezzato di frequente dalle nostre insistenze sulla comunicazione: non ci siamo accontentati di risposte lasciate all'interpretazione dell'insegnante.

Non mi soffermo in questa sede sull'analisi dei report scritti dagli studenti, per lasciare invece spazio a un rapidissimo accenno al questionario di feedback del percorso che abbiamo lasciato agli studenti. Questo è stato compilato da undici studenti, che hanno lasciato riscontri variegati ma nel complesso molto positivi: tanti hanno reputato l'attività interessante e utile all'orientamento, e quasi tutti la proporrebbero ad altri studenti. C'è anche qualcuno che l'ha trovata a tratti noiosa, come ci aspettavamo; c'è anche chi non ha apprezzato l'insistenza sulla comunicazione, mentre altri invece l'hanno ritenuta molto utile.[61]

4.5 Considerazioni conclusive

Indubbiamente *Uno sguardo matematico sulla crisi climatica* è un progetto complesso sotto molti punti di vista, nei contenuti stessi quanto negli aspetti didattici, come le sperimentazioni hanno ampiamente mostrato, anche ben al di là di quanto da me riportato sicuramente in maniera non ottimale e incompleta. *Uno sguardo matematico sulla crisi climatica* è un progetto complesso perché si pone, anche solo idealmente, obiettivi complessi, ma che credo essere imprescindibili per gli studenti di oggi: leggere e interpretare la realtà attraverso la lente della matematica, ovvero della razionalità, per sviluppare un pensiero critico che si dipana anche mettendo in gioco la propria competenza matematica. Un obiettivo alto, ambizioso, che credo debba essere quantomai fatto proprio dalla scuola del 2024.

[61] Prima di salutare gli studenti abbiamo chiesto un feedback informale a caldo, ottenendo fin da subito un riscontro positivo. Uno studente di ha detto espressamente che ha ritenuto estremamente utile il lavoro svolto sul linguaggio scientifico e sulla comunicazione perché gli servirà per l'esame di maturità! Io mi auguro che attività di questo tipo possano invece contribuire a far smettere gli studenti di impegnarsi solo per raggiungere obiettivi interni al sistema scolastico e di assoluta irrilevanza, portandoli invece a riflettere sul senso del proprio percorso formativo a lungo (ma anche a breve) termine il cui obiettivo (tra gli altri) è acquisire competenze che per definizione vanno al di là della scuola stessa!

Più umilmente e concretamente, il nostro piccolo contribuito è consistito nel tentativo di provare a mettere al centro del discorso didattico un problema di attualità, la crisi climatica, approfondendo con gli studenti alcuni strumenti matematici di base per comprenderla meglio. Di riflesso, si mette in luce anche il fatto che la matematica stessa è al centro della questione, che serve anche a questo, che, come già detto, quando l'insegnante parla di matematica in classe, parla della realtà, e di quella di oggi. In questo senso forse il nostro progetto, pur presentando anche contenuti estranei alla prassi del programma scolastico, non vuole tanto costruire nuove conoscenze, quanto lavorare sullo sviluppo di abilità già presenti, contribuendo a mettere in rete i concetti lavorando dunque sull'aspetto relazionale.

In conclusione credo che il progetto, pur necessitando di inevitabili aggiustamenti e revisioni, offra allo stato attuale un'occasione preziosa sia al consiglio di classe tutto - proporre in prima persona ai propri studenti un percorso multidisciplinare di grande valore - sia al singolo docente di matematica, che avendo accesso a tutto il materiale da noi predisposto, potrà portare il percorso in classe autonomamente, senza la necessità di conoscere in alcun modo il linguaggio di programmazione R.

Conclusione

Rileggendo quanto ho scritto fin qui, temo di aver fatto un pessimo lavoro in relazione all'obiettivo che mi ero prefissato nell'introduzione, ovvero cristallizzare l'esperienza di tirocinio nel suo svolgersi mantenendo la fabula non solo degli avvenimenti, ma anche delle considerazioni e delle riflessioni che hanno generato. Invece il risultato è un confuso intreccio, un po' come quello formato dai fili usati nel laboratorio sulle funzioni. Purtroppo, in questo caso l'intreccio non si può sbrogliare passando dalla rappresentazione in parallelo a quella cartesiana. Il motivo di tale groviglio è presto detto: l'anonimo manoscritto del caso non è né anonimo né manoscritto, sarebbe a dire che i miei appunti, fortunatamente digitali, sono incontrovertibilmente segnati dall'incostanza dell'autore, che, rileggendoli, vi ha del tutto inaspettatamente trovato delle ellissi, ossia le uniche coniche che non dovrebbero mai trovare posto in appunti che si rispettino, a meno che siano quelli di una lezione di geometria analitica. Nel tentativo di giustificarmi, potrei dire che il tirocinio è stato in alcuni momenti impegnativo quanto entusiasmante, e che quindi ci sono stati giorni in cui una volta rientrato - dopo una giornata passata per metà a scuola a sperimentare e per metà in università a progettare - la priorità non era certo mettersi a scrivere.

In ogni caso, il fatto è che ho dovuto integrare e riscrivere in maniera presentabile molte delle mie note a tirocinio concluso, introducendo così elementi anacronistici; perlomeno mantenendo una perfetta sincronia con il mondo della scuola attuale. Al di là di facili ironie, l'avvertimento di Martha Isabel Fandiño Pinilla in apertura al testo era chiarissimo: le mie convinzioni di oggi sono per certi versi anche molto distanti da quelle di ieri. Nel mio racconto credo di essermi già soffermato abbastanza, a volte implicitamente, a volte in maniera esplicita, sulle esperienze che nel corso del tirocinio hanno contribuito alla mia crescita personale e professionale. Vorrei quindi chiudere con qualche riflessione su quanto fatto contestualmente al tirocinio al di fuori delle 344 ore ufficialmente dedicate (a fronte delle 300 minime richieste: vanto, onta o follia a scelta del lettore).

Principalmente, spinto dal bisogno di saperne di più, e in parte dall'inguaribile illusione di trovare le risposte già scritte da qualche parte da qualcun altro, ho approfondito alcuni temi di didattica della matematica - disciplina per me tutta nuova - a prescindere dal fatto che si fossero presentati nel corso del tirocinio. Il risultato è stato una sorta di effetto valanga, da cui la bibliografia in calce alla relazione, che elenca una parte dei libri e degli articoli travolti: beninteso, solo quelli che ho ritenuto più interessanti e che consiglierei, non so bene a che titolo, a tutti gli insegnanti di matematica, in formazione e in servizio. Puntando il dito a caso nelle pagine della bibliografia, c'è un'ottima probabilità di scegliere un testo in cui si esplicitano i requisiti di formazione di un buon insegnante di matematica:[62] oltre alla preparazione strettamente disciplinare è necessario conoscere la storia, l'epistemologia e la

[62] Tanto per citarne uno, [FANDIÑO PINILLA - D'AMORE, 2023b], pagg. 67 - 76.

didattica della matematica. Ammetto che inizialmente la lettura può risultare straniante, ma vista l'insistenza che viene posta su certi temi, dopo un po' il senso di inadeguatezza lascia spazio all'ironia, che a volte ho l'impressione sia voluta dagli autori stessi. Sta di fatto che in questa nuova prospettiva ho ritrovato la mia passione per la matematica (molto scemata nel corso degli studi universitari), e ho ripreso a leggere nel tentativo di avvicinarmi al limite - al momento ancora lontano - dell'insegnante preparato.

Nel complesso le tante esperienze, riflessioni e letture che hanno accompagnato il percorso di tirocinio hanno portato a uno stravolgimento delle mie convinzioni non solo sulla matematica e sul suo insegnamento-apprendimento, ma anche sul mondo della scuola in generale, passando per una reinterpretazione della mia esperienza personale di studente. Spero di aver dato nel resoconto anche solo una minima idea dell'entità di tale cambiamento e della sua sostanza, ma, nel caso non ci fossi riuscito, direi che potrebbe essere sintetizzata in queste poche parole: l'insegnante è un professionista nel proprio mestiere solo dal momento in cui si pone continuamente domande di senso sulla propria azione didattica, e a queste cerca di rispondere muovendosi nell'ambito scientifico della didattica della matematica. In altre parole, è necessario acquisire consapevolezza del proprio operato e assumersi la responsabilità delle proprie azioni, smettendo di fare continuamente riferimento in maniera acritica alla prassi. Altrimenti, la scuola entra nella dimensione paradossale di un'assurda messa in scena istituzionale, in cui tutti, dagli insegnanti agli studenti, fingono di fare il proprio mestiere: un *totalizzante laboratorio di far finta*.[63]

In conclusione, alla fine di questa esperienza, posso dire di essere diventato un insegnante migliore? Chi può dirlo, non c'è nessuna garanzia: quello dell'insegnante è un mestiere complesso e faticoso, che si sceglie di fare tutti i giorni con un'espressione continua di volontà, evitando di ricadere in facili e sicure posizioni di comodo, da cui sempre l'insegnante è tentato, e a cui occasionalmente cederà smettendo di mettersi in gioco in prima persona, essendo anche lui, innanzitutto, umano. Dunque, una visione realistica del (mio) futuro prevede certamente ancora moltissimi fallimenti, e il rischio di diventare comunque un pessimo insegnante c'è, e ci sarà sempre. Qual è allora il senso della formazione? Alla fine di questo percorso, la risposta che mi sono dato è la seguente: un insegnante formato potrà anche essere un pessimo insegnante, ma ne sarà necessariamente consapevole; perché gli sono stati forniti tutti gli strumenti per rendersene conto, strumenti che non potrà fare a meno di adoperare per interpretare i segnali che in continuazione gli arrivano; di nuovo, Martha Isabel Fandiño Pinilla era stata chiara! Ora l'insegnante non può più ignorarli, ora l'insegnante non può più far finta, a meno di mentire a se stesso: chissà che ciò non richieda uno sforzo maggiore di quello necessario per darsi da fare e provare a migliorare. D'altronde, come dice Rosetta Zan,[64] *il lavoro di insegnante offre un'opportunità ben più importante: la possibilità di cambiare.*

[63]Vorrei poter dire di essere pervenuto da solo a questa conclusione, ma ho invece fatto mia la riflessione proposta da Pietro di Martino nel corso di un suo seminario disponibile al link riportato in calce (nei dieci minuti finali). Egli a sua volta cita quanto scritto da Paolo Guidoni nel 1995 nel libro "Il senso di fare scienze. Un esempio di mediazione tra cultura e scuola". Il testo non si trova in bibliografia perché ancora non ho avuto modo di leggerlo (https://www.youtube.com/watch?v=DxVX6pZtigw).

[64]Nel bellissimo articolo [ZAN, 2001].

Bibliografia

[ARRIGO et al.] Arrigo, G., D'Amore, B., Sbaragli, S. (2023). *L'infinito matematico. Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Bonomo.

[BROUSSEAU] Brousseau, Guy (2023). *Ingegneria didattica ed Epistemologia della Matematica. Scritti scelti a cura di Bruno D'Amore*. Bologna: Bonomo.

[BROUSSEAU - D'AMORE] Brousseau, G., D'Amore, B. (2008). *I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico* in D'Amore B., Sbaragli F. (eds.) (2008).*Didattica della matematica e azioni d'aula. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008.* Bologna: Pitagora. 3-14. ISBN: 88-371-1746-9.

[CASTELNUOVO] Castelnuovo, Emma (2017). *Didattica della matematica.* A cura di Arzarello, F., Bartolini Bussi, M.G. UTET Università.

[COURANT - ROBBINS] Courant, Richard, Robbins, Herbert (2000). *Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi.* Torino: Bollati Boringhieri, seconda edizione riveduta da Ian Stewart, ristampa ottobre 2021.

[D'AMORE, 1999] D'Amore, Bruno (1999). *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica* in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276.

[D'AMORE, 2001] D'Amore, Bruno (2001). *Il processo di "scolarizzazione del sapere" e la rinuncia all'implicazione come ostacoli insormontabili nella costruzione del sapere matematico* in *Le difficoltà in Matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti. Atti del Convegno Nazionale "Matematica e difficoltà, n. 10", 23-24 febbraio 2001, Castel S. Pietro Terme* a cura di Livorni, E.V., Meloni, G., Pesci, A.. Bologna: Pitagora.

[D'AMORE, 2006] D'Amore, Bruno (2006). *Didattica della matematica "C"* in Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006.* Bologna: Pitagora. 93-96.

[D'AMORE, 2023a] D'Amore, Bruno (2023). *Elementi di Didattica della Matematica.* Prefazioni di Guy Brousseau e Colette Laborde. Bologna: Bonomo.

[D'AMORE, 2023b] D'Amore, Bruno (2023). *La matematica come strumento critico. Riflessioni su didattica, storia, letteratura, arte, magia e religioni.* Bologna: Bonomo.

[D'AMORE, 2023c] D'Amore, Bruno (2023). *Cenni di storia della Didattica della Matematica come disciplina scientifica.* Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Bonomo.

[D'AMORE - FANDIÑO PINILLA] D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I. (2020). *Sugli scivo-*

lamenti metadidattici. Alcuni esempi. in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 43A(2), 108-136.

[D'AMORE et al., 2003] D'Amore, B., Godino, J.D., Arrigo, G, Fandiño Pinilla, M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

[D'AMORE et al., 2023a] D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I., Sarrazy, B. (2023). *Gli effetti del contratto didattico in aula. Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Bonomo.

[D'AMORE et al., 2023b] D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M. (2023). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Bonomo.

[D'AMORE et al., 2023c] D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M.I., Iori, M., Nicosia, G. G., Santi, G. (2023). *I numeri. Matematica, storia, giochi e curiosità, per una didattica corretta ed efficace*. Bologna: Bonomo.

[D'AMORE et al., 2023d] D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzini, I., Sbaragli, S. (2023). *Le difficoltà di apprendimento in matematica. Il punto di vista della didattica*. Prefazioni di Andrea Canevaro e George Santi. Bologna: Bonomo.

[FANDIÑO PINILLA, 2023a] Fandiño Pinilla, Martha Isabel (2023). *Curricolo, competenze e valutazione in matematica*. Bologna: Bonomo.

[FANDIÑO PINILLA, 2023b] Fandiño Pinilla, Martha Isabel (2023). *Diversi aspetti che definiscono l'apprendimento e la valutazione in matematica*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Bonomo.

[FANDIÑO PINILLA, 2023c] Fandiño Pinilla, Martha Isabel (2023). *Le Frazioni. Matematica, storia e didattica*. Prefazioni di Athanasios Gagatsis, Carlos E. Vasco Uribe e Bruno D'Amore. Bologna: Bonomo.

[FANDIÑO PINILLA - D'AMORE, 2023a] Fandiño Pinilla, M. I., D'Amore, B. (2023). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni. Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Bonomo.

[FANDIÑO PINILLA - D'AMORE, 2023b] Fandiño Pinilla, M. I., D'Amore, B. (2023). *La matematica e la sua didattica: miti, illusioni, sogni, realtà*. Bologna: Bonomo.

[FERRARI] Ferrari, Pier Luigi (2020). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università.

[GIUSTI] Giusti, Enrico (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri, ristampa luglio 2022.

[MARIOTTI] Mariotti, Maria Alessandra (2022). *Argomentare e dimostrare come problema didattico*. UTET Università.

[RADFORD - DEMERS] Radford, L., Demers, S. (2023). *Comunicazione e apprendimento. Riferimenti concettuali e pratici per le ore di matematica*. Prefazione di Bruno D'Amore. Bologna: Bonomo.

[SBARAGLI - DEMARTINI] Sbaragli, Silvia, Demartini, Silvia (2021). *Italmatica. Lingua e strutture dei testi scolastici di matematica*. Bari: Dedalo.

[SKEMP] Skemp, Richard R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. Prima pubblicazione in *Mathematics Teaching*, 77, 20 - 26, (1976).

[UMI] AA. VV. (2003). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario*. A cura dell'UMI (Unione Matematica Italiana).

[VILLANI] Villani, Vinicio (2023). *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*. Bologna: Bonomo.

[VILLANI, BERNI] Villani, Vinicio, Berni, Maurizio (2023). *Cominciamo da Zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Aritmetica e Algebra)*. Bologna: Bonomo.

[VILLANI et al.] Villani, Vinicio, Bernardi, Claudio, Zoccante, Sergio, Porcaro, Roberto (2012). *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica*. Milano: Springer.

[ZAN, 2001] Zan, Rosetta (2001). *I danni del "bravo insegnante"* in *Le difficoltà in Matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti. Atti del Convegno Nazionale "Matematica e difficoltà, n. 10", 23-24 febbraio 2001, Castel S. Pietro Terme* a cura di Livorni, E.V., Meloni, G., Pesci, A.. Bologna: Pitagora.

[ZAN, 2007] Zan, Rosetta (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

[ZAN, 2016] Zan, Rosetta (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci editore, Tascabili Faber, ristampa marzo 2023.