Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

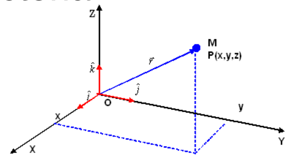
Capítulo I.1.1 Cinemática da particula

Aula 1

Maria Rute André

Posição e Trajectória

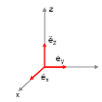
Ex. 3D



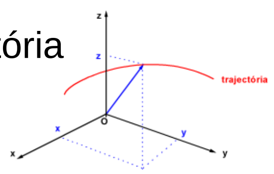
- **Sistema de coordenadas cartesianas: posição da massa pontual M relativamente à origem**
- **Posição**

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}\,(t) &= x\,(t)\,\hat{\imath} + y\,(t)\,\hat{\jmath} + z\,(t)\,\hat{k} \\ r = |\vec{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}}$$

- **Versores unitários** $\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}$

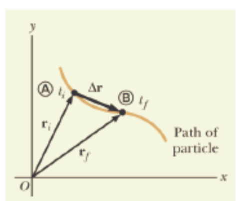


Posição e Trajectória

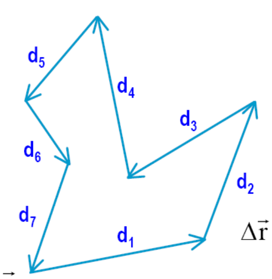


- **Trajectória – lugar geométrico dos pontos ocupados por um ponto material P ao longo do tempo (Ex. 2D)**
- **Deslocamento – grandeza vectorial, variação na posição,**

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i}$$



Deslocamento e distância



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i$$

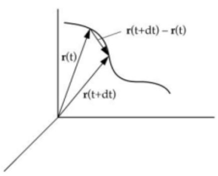
$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7$$

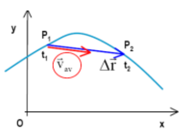
Velocidade

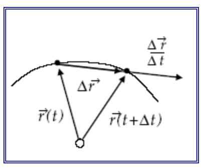
- **Velocidade média**

  [L]/[T] m/s

$$\boxed{\vec{v}_{méd} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}}$$

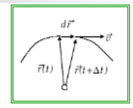






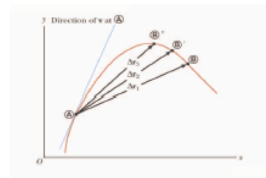
5

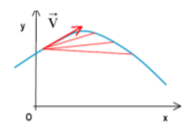
Velocidade



- **Velocidade instantânea**

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \\ &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ &v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\end{aligned}}$$





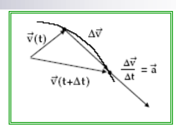
Posição obtida pelo cálculo integral

- **Dado que** $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$
- **Então**

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t}\vec{v}'(t')\,dt' + \vec{r}(t_0) \\ &\vec{r}(t) = \left[\int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' + x(t_0)\right]\hat{i} + \left[\int_{t_0}^{t} v_y(t')\,dt' + y(t_0)\right]\hat{j} + \left[\int_{t_0}^{t} v_z(t')\,dt' + z(t_0)\right]\hat{k} \\ &\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t}\vec{v}'(t')\,dt'\end{aligned}}$$

7

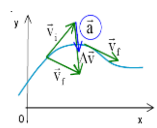
Aceleração

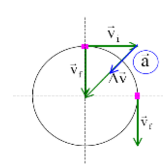


- **Aceleração média**

  $[L]/[T]^2$ m/s^2

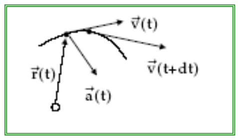
$$\boxed{\vec{a}_{méd} = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}}$$





8

Aceleração



- **Aceleração instantânea**

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} =$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}\right)$$
$$= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}}$$

Velocidade obtida pelo cálculo integral

- **Dado que** $\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$
- **Então**

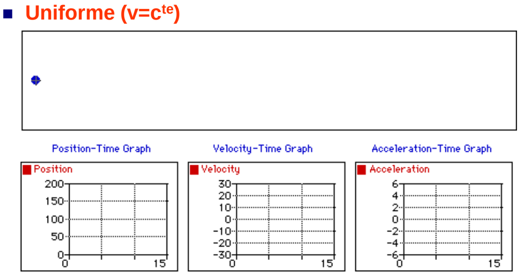
$$\vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}'(t')\,dt' + \vec{v}(t_0)$$
$$\vec{v}(t) = \left[\int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt' + v_x(t_0)\right]\hat{i} + \left[\int_{t_0}^{t} a_y(t')\,dt' + v_y(t_0)\right]\hat{j} + \left[\int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt' + v_z(t_0)\right]\hat{k}$$
$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}'(t')\,dt'$$

Velocidade e Aceleração

- **Ex. 1D**
- **MRU**
- **MRUA**
- **MRUR**

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

- **Uniforme (v=c^{te})**



http://www.PhysicsClassroom.com

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

$Ex.: \quad \vec{v}(t) = v(t)\hat{i}$

1) **Uniforme (v=c^{te})**

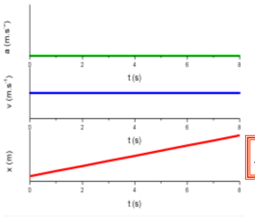
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$



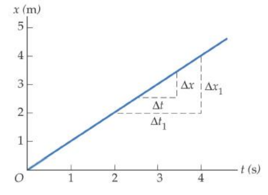
$$a = 0$$

$$v = c^{te}$$

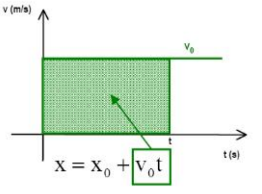
$$x = x_0 + v(t - t_o)$$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

- **Uniforme (v=c^{te})**



Cálculo de v



Cálculo de x-x_0

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

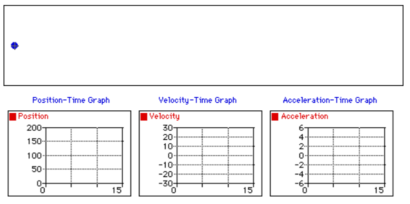
$$a = c^{te}$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- **Uniformemente variado (a = c^{te}): acelerado (retardado)**



Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

$Ex.: \quad \vec{a}(t) = a(t)\hat{i}$

2) **Uniformemente variado (a = c^{te}): acelerado ou retardado**

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

$$v(t) = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt'$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t' - t_0)]dt'$$

$$x(t) - x(t_0) = v_0\int_{t_0}^{t} dt' + a\int_{t_0}^{t} (t' - t_0)dt'$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

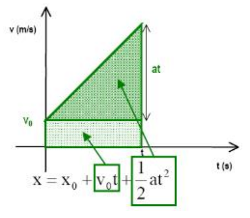
- **Uniformemente variado (a = c[te]): acelerado ou retardado**

Eliminando *t*:

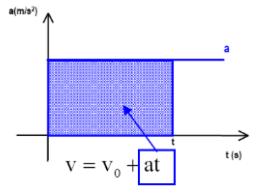
$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)}$$

Casos particulares de movimento a 1D (rectilíneo)

- **Uniformemente variado (a = c[te]): acelerado**



Cálculo de $x-x_0$



Cálculo de $v-v_0$

Cinemática 3D

Equações cinemáticas

Genericamente

$$\boxed{\vec{r}(t)} \Downarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \Downarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'} \Uparrow \quad \boxed{\vec{v}(t)} \Downarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt'} \Uparrow \quad \boxed{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt'} \Uparrow \quad \boxed{\vec{a}(t)}$$

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

  x(t) = 2t³+5t²+5 (m)

- Determine:

a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;
b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;
c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

  x(t) = $2t^3+5t^2+5$ (m)

- Determine:
  a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;
  b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;
  c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Solução
a)

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2t^3+5t^2+5\right)=6t^2+10t \quad m.s^{-1}$$

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(6t^2+10t\right)=12t+10 \quad m.s^{-2}$$

21

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

  x(t) = $2t^3+5t^2+5$ (m)

- Determine:
  a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;
  b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;
  c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Solução
b)

$t=2s$

$x=41\,m \quad v=44\,m.s^{-1} \quad a=34\,m.s^{-2}$

$t=3s$

$x=104\,m \quad v=84\,m.s^{-1} \quad a=46\,m.s^{-2}$

22

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

  x(t) = $2t^3+5t^2+5$ (m)

- Determine:
  a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t;
  b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s;
  c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

Solução
c)

$$v_{med}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{63}{1}=63\,m.s^{-1}$$

$$a_{med}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{40}{1}=40\,m.s^{-2}$$

23

Exemplo 1-1

- **Movimento rectilíneo variado.** Um corpo move-se ao longo do eixo dos xx de acordo com

  x(t) = $2t^3+5t^2+5$ (m)

- Determine: a) a velocidade e aceleração em qualquer instante t; b) a posição, velocidade e aceleração para t=2s e t=3s; c) a velocidade e aceleração média entre t=2s e t=3s.

- **Solução**

a)

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2t^3+5t^2+5\right)=6t^2+10t \quad m.s^{-1}$$

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(6t^2+10t\right)=12t+10 \quad m.s^{-2}$$

b)

$t=2s$

$x=41\,m \quad v=44\,m.s^{-1} \quad a=34\,m.s^{-2}$

$t=3s$

$x=104\,m \quad v=84\,m.s^{-1} \quad a=46\,m.s^{-2}$

$c)$

$$v_{med}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{63}{1}=63\,m.s^{-1}$$

$$a_{med}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{40}{1}=40\,m.s^{-2}$$

24

Exemplo 1-2

- **Movimento rectilíneo variado.** Uma partícula move-se ao longo do eixo dos xx com uma velocidade descrita por

  v(t) = 40-5t² (m.s⁻¹)

- Sabendo que no instante t=1s a partícula se encontra em x(t=1s)= 10 m determine: a) aceleração da partícula em qualquer instante t; b) a posição da partícula em qualquer instante;
  c) Represente graficamente x=f(t), v=f(t) e a=f(t)

Exemplo 1-2

- **Movimento rectilíneo variado.** Uma partícula move-se ao longo do eixo dos xx com uma velocidade descrita por

  v(t) = 40-5t² (m.s⁻¹)

- Sabendo que no instante t=1s a partícula se encontra em x(t=1s)= 10 m determine: a) aceleração da partícula em qualquer instante t; b) a posição da partícula em qualquer instante;
  c) Represente graficamente x=f(t), v=f(t) e a=f(t)

- **Solução**

a)

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-5t^2+40\right)=-10t \quad m.s^{-2}$$

b) *Usando conceito de integral indefinido*

$$x(t)=\int v(t)dt+C$$

$$x(t)=\int\left[40-5t^2\right]dt+C$$

$$x(t)=40t-\frac{5}{3}t^3+C$$

<u>*Cálculo de C*</u>:

$$x(t=1s)=10$$

$$x(t=1s)=40(1)-\frac{5}{3}(1)^3+C$$

$$10=40-\frac{5}{3}+C$$

$$C=-\frac{85}{3}$$

Exemplo 1-2

Portanto

$$\boxed{x(t)=40t-\frac{5}{3}t^3-\frac{85}{3}\,(m)}$$

Verifique v(t) derivando

$$\boxed{v(t)=40-5t^2\left(m.s^{-1}\right)}$$

Usando conceito de integral definido

$$x(t)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t}v(t')dt'$$

$$x(t)-x(1)=\int_{1}^{t}\left(40-5t^2\right)dt'$$

$$x(t)-x(1)=40\,t\Big|_1^t-\frac{5}{3}t^3\Big|_1^t$$

$$x(t)-x(1)=40(t-1)-\frac{5}{3}\left(t^3-1\right)$$

$$x(t)-10=40t-\frac{5}{3}t^3-40-\frac{5}{3}$$

Exemplo 1-2

$$\boxed{x(t)=40t-\frac{5}{3}t^3-\frac{85}{3}\,(m)}$$

$$\boxed{v(t)=40-5t^2\left(m.s^{-1}\right)}$$

$$\boxed{a(t)=-10t\left(m.s^{-2}\right)}$$