Parte I:Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.2 Dinâmica da Partícula

universidade de aveiro

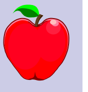
Newtonia

Isaac Newton 1642-1727

Dinâmica: Relação entre o estado de movimento de um corpo e as causas deste.

Galileu (1564-1642) inferiu que, se fosse possível remover todas as interacções entre um corpo e o exterior, então a velocidade deste não mais sofreria qualquer alteração - a propriedade de Inércia

1ª lei Newton: Uma partícula livre move-se com velocidade constante ou está em repouso



Referencial Inercial ou Galileano

- A **1ª lei de Newton** define um conjunto especial de sistemas referenciais: os **referenciais inerciais**.
- Um **referencial de inércia** é aquele onde é válida a **1ª Lei de Newton** e como melhor aproximação é entendido como um:
  - referencial que não é acelerado em relação às "estrelas fixas";
  - move-se pois com velocidade de translação constante em relação a estas;
  - um referencial inercial não roda relativamente às mesmas (caso contrário teria aceleração).

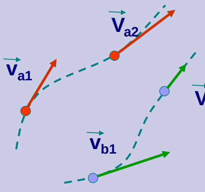
Será a Terra um Referencial de Inércia?

A aceleração devida ao movimento de rotação da Terra é 0.3% da aceleração devida à gravidade. **OK!!!**

As leis de Newton valem num sistema inercial que leve em consideração somente a aceleração da Terra em torno do seu eixo e na orbita em torno do Sol

Consequências da 1ª Lei: Principio da conservação do momento linear

Sistema: partícula a + partícula b



$\vec{P}_{sistema} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$

Instante t_1 $\vec{P}^1_{sistema} = \vec{p}_{a1} + \vec{p}_{b1}$

Instante t_2 $\vec{P}^2_{sistema} = \vec{p}_{a2} + \vec{p}_{b2}$

O MOMENTO LINEAR TOTAL DE UM SISTEMA COMPOSTO POR DUAS PARTÍCULAS SUJEITAS APENAS ÀS SUAS INTERACÇÕES MÚTUAS PERMANECE CONSTANTE

$\vec{P}^1_{SISTEMA} = \vec{P}^2_{SISTEMA}$

2ª e 3 ª Leis de Newton

$\vec{P}^1_{SISTEMA} = \vec{P}^2_{SISTEMA}$

$\overrightarrow{\Delta p_a} = -\overrightarrow{\Delta p_b}$

2ª Lei $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$\dfrac{\Delta\vec{p}_a}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta\vec{p}_b}{\Delta t}$

calculando no limite em que $\Delta t \to 0$

$\dfrac{d\vec{p}_a}{dt} = -\dfrac{d\vec{p}_b}{dt}$

$m_a \dfrac{d\vec{v}_a}{dt} = -m_b \dfrac{d\vec{v}_b}{dt}$

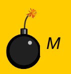
A força exercida no corpo *a* pelo corpo *b* é simétrica da força exercida no corpo *b* pelo corpo *a*

$\vec{F}_{a,b} = -\vec{F}_{b,a}$ 3ª Lei

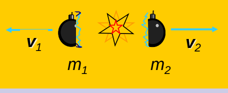
Par acção-reacção

Aplicações da conservação da quantidade de movimento: **Explosão a 1D**

- $\boldsymbol{P}$ é conservado (forças externas são nulas).
- Antes da explosão: $\boldsymbol{P} = 0$
- Após a explosão: $\boldsymbol{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0$



$m_1\mathbf{v}_1 = - m_2\mathbf{v}_2$



2ª Lei de Newton: Movimento rectilíneo

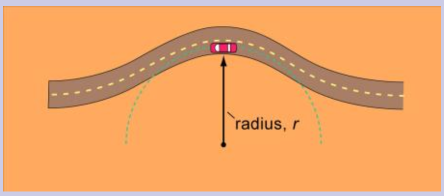
- Se encostarmos m_1 and m_2 e aplicarmos a mesma força *F*, qual será a aceleração do conjunto ?

$a = 2/3\ a_1$

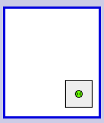
- Qual a força *que* m_1 exerce em m_2 ?

$F_2 = 1/3\ F$

2ª Lei de Newton: Movimento circular uniforme



A resultante das forças que actuam no carro comportar-se-à como uma força centrípeta permitindo-lhe efectuar acurva

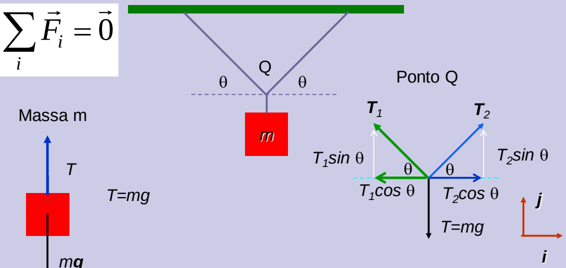


$$\vec{F}_{centrípeta} = m\frac{\mathbf{v}^2}{R}\hat{u}_n$$

Equilíbrio

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

Massa m em equilíbrio



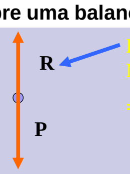
$F_{x,Res.} = -T_1 cos\ \theta + T_2 cos\ \theta = 0$

$F_{y,Res.} = T_1 sin\ \theta + T_2 sin\ \theta - mg = 0$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2\sin\theta}$$

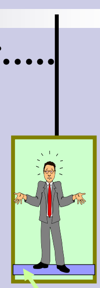
No elevador…..

Um homem de pé sobre uma balança:



R é força de Reação Normal

= leitura na balança



Balança dinamômetro

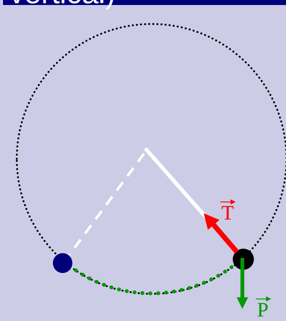
Se a = 0==> $\|\vec{R}\| = \|\vec{P}\|$ 'peso' =normal

Na subida ==> $\|\vec{R}\| = \|\vec{P}\| + m\|\vec{a}\|$ 'peso' maior

Na descida ==> $\|\vec{R}\| = \|\vec{P}\| - m\|\vec{a}\|$ 'peso' menor

---

Pêndulo simples (movimento no plano vertical)



Trajectória circular

Forças: $\vec{P}$ $\vec{T}$

Em qualquer posição:

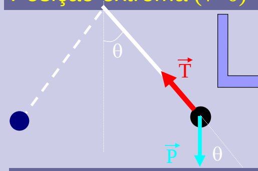
$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Posição extrema (v=0)

$$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$$

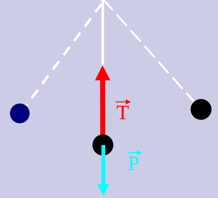


$$\begin{cases}\|\vec{T}\|-\|\vec{P}\|\cos\theta=m\|\vec{a}_n\|\\ \|\vec{P}\|\sin\theta=m\|\vec{a}_t\|\end{cases}$$

$$\|\vec{T}\|-\|\vec{P}\|\cos\theta=m\frac{\mathbf{v}^2}{L}=0$$

$$\|\vec{P}\|sen\,\theta=m\|\vec{a}_t\|$$

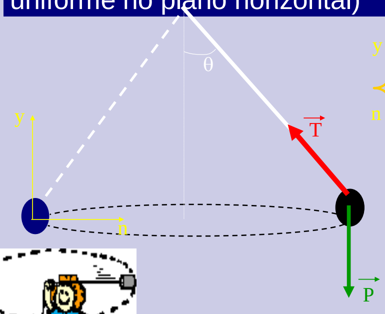
Posição de equilíbrio (θ=0)



$$\begin{cases}\|\vec{T}\|-\|\vec{P}\|=m\frac{\mathbf{v}^2}{L}\\ \|\vec{a}_t\|=0\end{cases}$$

Máxima tensão!

Pêndulo cónico (movimento circular e uniforme no plano horizontal)



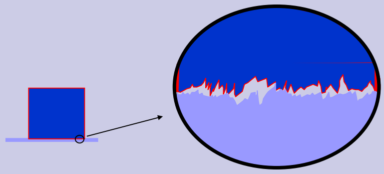
$$\begin{cases}\|\vec{T}\|\cos\theta=\|\vec{P}\| & y\\ \|\vec{T}\|\sin\theta=m\|\vec{a}_n\| & n\end{cases}$$

Quanto vale a aceleração tangencial?

Força de atrito (em sólidos)

Superfícies de dois materiais em contacto

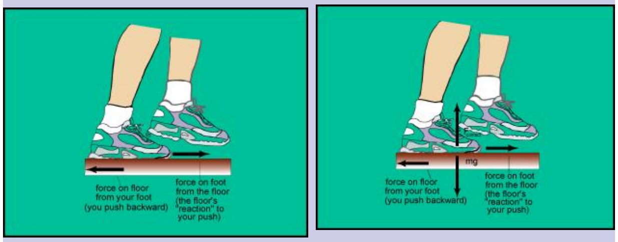
A força de atrito tende a impedir o movimento relativo das superfícies



Microscopicamente a força tem origem eléctrica

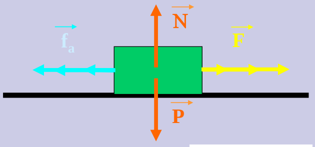
Lubrificação separa as superfícies

O atrito permite-nos andar!



Força de atrito (estático)

Consideremos um corpo sobre uma superfície plana, horizontal, com atrito e ao qual se aplica uma força *F* , horizontal, para o tentar pôr em movimento, sem sucesso



O corpo não se move e assim $\quad \vec{f}_a = -\vec{F}$

À medida que F aumenta a força de atrito também aumenta, até uma situação limite, em que o corpo inicia o movimento.

Força de atrito (estático)

Na situação limite, em que a força de atrito estático atinge o valor máximo, verifica-se que:

A força de atrito estático máxima é proporcional à normal exercida entre as superfícies

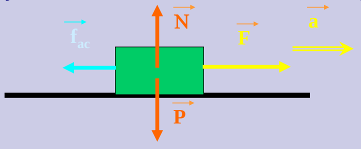
$$f_{a.e.max} = \mu_E N$$

μ_E é o coeficiente de atrito estático, para as duas superfícies

Em geral, temos: $\quad f_{a.e.} \leq \mu_E N$

Força de atrito (cinético)

Quando o corpo entra em movimento, temos uma situação com atrito cinético e verifica-se que:

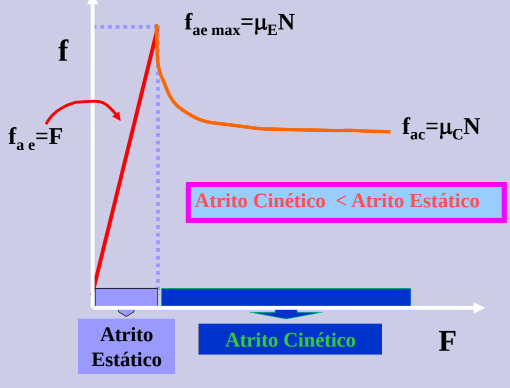


a força de atrito cinético é proporcional à normal exercida entre as superfícies $\quad f_{a.c.} = \mu_C N$

μ_C é o coeficiente de atrito cinético, para as duas superfícies

Geralmente, a força de atrito não depende da área de contacto

Como varia a força de atrito com F

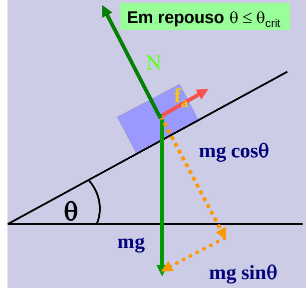


Alguns valores de coeficientes de atrito

	μ_E	μ_C
Aço sobre aço	0,74	0,57
Cobre sobre aço	0,53	0,36
Borracha sobre cimento	1,0	0,8
Madeira sobre madeira	0,25-0,5	0,2
Gelo sobre aço	0,1	0,03
Teflon sobre teflon	0,04	0,04

Como medir μ?

Um corpo é colocado num plano inclinado, ficando em repouso. A inclinação θ é aumentada até um valor máximo (crítico) θ_{crit} que se relaciona com μ_E.



$$\left.\begin{array}{l} mg\sin\theta - f_{ae} = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{array}\right\} \quad f_{ae} = N\,tg\theta$$

No limite, quando a força de atrito é máxima $\theta = \theta_{crit}$

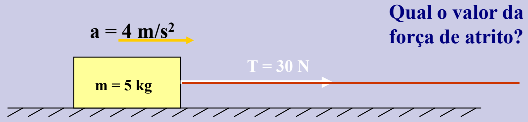
$$f_{ae\,max} = \mu_E N = N\,tg\theta_{crit}$$

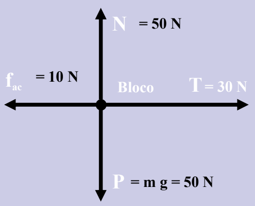
$$\mu_E = tg\theta_{crit}$$

$$\mu_E = 0{,}36 \Rightarrow \theta_{crit} = 20^o$$

corpo puxado por uma corda

Qual o valor da força de atrito?





a = 4 m/s²

Na direcção de movimento

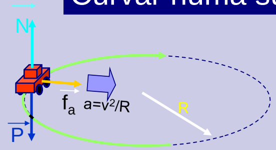
$$F_{res} = m\,a$$

$$\underbrace{T - f_a}_{} = m\,a$$

$$f_a = T - m\,a = 30 - 5\times 4$$

$f_a = 10$ N $\mu_C = 0{,}2$

Curvar numa superfície plana



$$F_n = \frac{mv^2}{R}$$

O atrito actua como F_n

Se não houver derrapagem **o atrito é estático**

$$F_n = f_{ae} \le \mu_E N$$

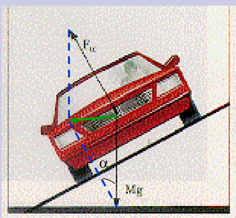
$$\frac{mv^2}{R} \le \mu_E N \qquad \frac{mv^2}{R} \le \mu_E mg$$

$$v_{max}^2 = \mu_E gR$$

A velocidade máxima não depende de m!

A inclinação da curva permite ao carro curvar sem necessidade de recorrer às forças de laterais de atrito

$$v_{max}^{2} = \mu_E g R$$

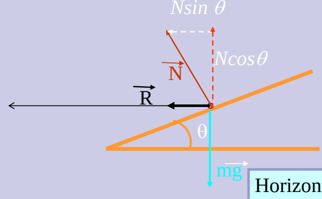


Para um dado μ_E (que traduz a qualidade do pneu) e **R,** há uma velocidade máxima de segurança.

Esta margem de segurança é muito sensível a ***v*** pois a expressão depende de ***v***^{2}

Exemplo: μ_E =0,8 e R=20m
v_{max}=38 km/h

Curva inclinada sem atrito



Vertical

$\Sigma F_y = ma_y = 0$

$N\cos\theta = mg$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Horizontal

$$N\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

Para um dado θ há uma velocidade de segurança **v.**

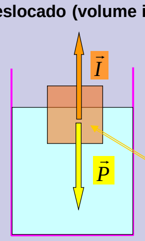
lembrar tgθ = μ_E!!

$$mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = m\frac{v^2}{R}$$

$$tg\,\theta = \frac{v^2}{gR}$$

Forças em fluidos: Impulsão

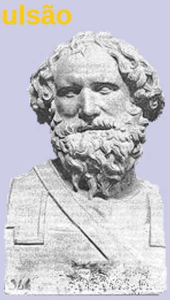
Em repouso, um corpo que está mergulhado num fluido está sujeito, além do seu peso, à força de impulsão, descoberta por Arquimedes, e que é dirigida para cima e cuja intensidade é igual ao peso do volume de fluido deslocado (volume imerso)



Impulsão

$$\left\|\vec{I}\right\| = \rho_{fl.} V_i g$$

volume imerso



ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Forças em fluidos: Impulsão

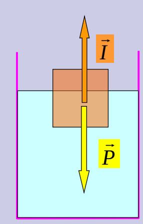
Quando um corpo flutua, está em equilíbrio e então:

$$\vec{I} + \vec{P} = \vec{0} \implies \left\|\vec{I}\right\| = \left\|\vec{P}\right\|$$

O volume imerso pode ser calculado por:

$$\rho_{fluido} V_{imerso} g = \rho_{corpo} V_{total}\, g$$

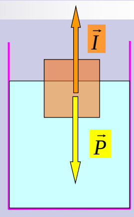
$$\frac{V_{imerso}}{V_{total}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}}$$



Impulsão

$$\left\|\vec{I}\right\| = \rho_{fl.} V_i g$$

Forças em fluidos: Impulsão



A massa volúmica do gelo é 0,917 g/cm³

A massa volúmica da água do mar é 1,02 g/cm³

Qual a percentagem de volume imerso de um iceberg?

$$\frac{V_{imerso}}{V_{total}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fluido}} = \frac{0{,}917}{1{,}02} = 0{,}90$$

Força de atrito em fluidos: viscosidade

Quando um corpo se *desloca* no interior dum fluido (líquido ou gás) fica sujeito a uma força adicional, que se opõe ao movimento e que aumenta com a velocidade com que o corpo se desloca.

Essa força é devida à **viscosidade do fluido** e, para velocidades não muito elevadas, é **proporcional à velocidade**.

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

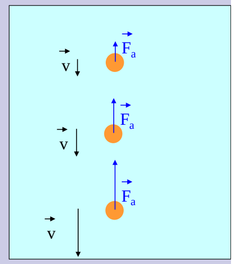
Para o caso duma esfera, de raio R

$$b = 6\pi\eta R$$

(lei de Stokes)

Coeficiente de viscosidade do fluido.

Unidades fundamental SI: Pa.s (Pascal.segundo)



Movimento de uma esfera num fluido

Uma esfera cai no interior dum fluido:

Quais as forças a que está sujeita?

Peso, impulsão e força de atrito viscoso

$$\|\vec{P}\| = \rho_{esf}.V_{esf}.g \qquad V_{esf.} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

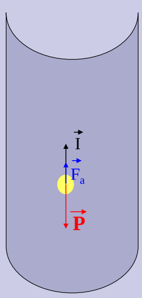
$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$
$$b = 6\pi\eta R$$

Lei de Stokes

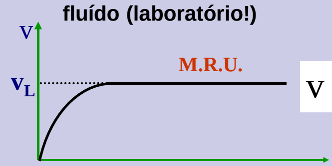
$$\|\vec{F}_{impulsão}\| = \rho_{fl}.V_{esf}.g$$

Impulsão

$$\vec{F}_{impulsão} + \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{a}$$



Determinação do coeficiente de viscosidade de um fluído (laboratório!)



$$v = v_L$$

$$\vec{F}_{impulsão} + \vec{P} + \vec{F}_a = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{P}\| = \|\vec{F}_{impulsão}\| + \|\vec{F}_a\|$$

$$\Leftrightarrow \rho_{esf.}\frac{4\pi R^3}{3}.g = \rho_{fl.}\frac{4\pi R^3}{3}.g + 6\pi\eta R v_L$$

$$\Leftrightarrow \eta = \frac{2R^2 g}{9 v_L}(\rho_{esf.} - \rho_{fl.})$$

Exercício

Prove que a dependência temporal da velocidade de uma partícula esférica de raio R que se move através de um fluido viscoso, é dada por

$$\mathbf{v} = \frac{mg}{6\pi R\eta} + \left(\mathbf{v_0} - \frac{mg}{6\pi R\eta}\right)e^{-(6\pi R\eta / m)t}$$

quando o valor da impulsão é desprezável comparada com o valor do peso da partícula.

Resolução

$$\sum_i^3 \vec{F}_i = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}_a + \vec{F}_{impulsão} + \vec{P} = m\vec{a} \cdots como \left\|\vec{F}_{impulsão}\right\| << \left\|\vec{P}\right\|$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_a + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow -b\vec{v} + \vec{P} = m\vec{a} \Leftrightarrow -b\vec{v} + m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{m}\vec{v} + \vec{g} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow -\frac{b}{m}\left[\vec{v} - \frac{m\vec{g}}{b}\right] = \frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow d\vec{v} = -\frac{b}{m}\left[\vec{v} - \frac{m\vec{g}}{b}\right]dt$$

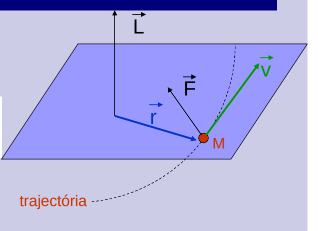
$$\Leftrightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} \frac{d\vec{v}}{\left[\vec{v} - \frac{m\vec{g}}{b}\right]} = \int_0^t -\frac{b}{m}\,dt \Leftrightarrow ln\left[\vec{v} - \frac{m\vec{g}}{b}\right]_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} = -\frac{b}{m}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{m\vec{g}}{b} + \left[\vec{v}_0 - \frac{m\vec{g}}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \left\{\frac{mg}{b} + \left[v_0 - \frac{mg}{b}\right]e^{-\frac{b}{m}t}\right\}\hat{j}$$

Momento angular ou momento orbital $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = M\left(\vec{r} \times \vec{\mathbf{v}}\right)$$

O que acontece ao corpo de massa M quando o momento angular varia ao longo do tempo?



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}$$

= 0, porque temos o produto externo entre dois vectores paralelos

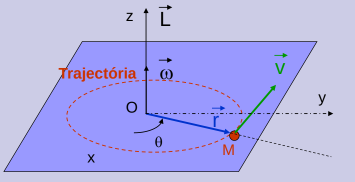
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Vector momento (*torque*) da força F

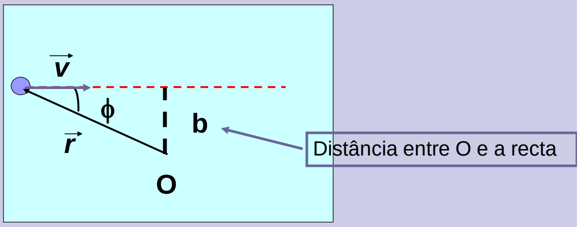
Movimento Circular: Momento angular ou momento orbital $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = M\left(\vec{r} \times \vec{\mathbf{v}}\right)$$



$$\vec{L} = M\left(r\ \mathbf{v}\right)\hat{k}, \textbf{como no m.c } \mathbf{v} = \omega r$$
$$\vec{L} = M\left(r^2\omega\right)\hat{k}$$
$$\vec{L} = Mr^2\vec{\omega}$$

Movimento rectilíneo :Também tem momento angular!



$$\left\| \vec{L} \right\| = m\,\mathbf{v}\,r\,sen\phi = m\mathbf{v}b$$