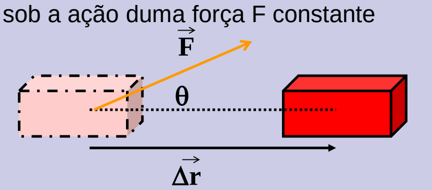
Parte I: Fundamentos de Mecânica Clássica

Capítulo I.2 Trabalho e Energia

Trabalho de uma força constante

- Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a ação duma força F constante



O trabalho W realizado pela força F durante o deslocamento Δr é dado pelo produto

$$W = \|\vec{F}\|\|\Delta\vec{r}\| \cos\theta$$

Ou com o produto interno (escalar)

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$$

Trabalho de uma força constante

Em geral, para uma força constante com componentes cartesianas

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

E um deslocamento:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

O trabalho de F durante o deslocamento é

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

Trabalho de forças constantes

Uma força realiza trabalho nulo se:

W= 0J
- O deslocamento é nulo
- A força é perpendicular ao deslocamento

No S. I. a unidade fundamental de trabalho é o Joule (J)

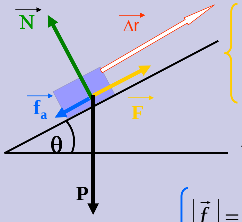
Se houver várias forças aplicadas a um corpo, podemos calcular o trabalho total (da resultante) usando a propriedade distributiva:

$$W(\vec{F}_{res}) = \left(\sum_{todas} \vec{F}_i \right) \bullet \Delta\vec{r} = \sum_{todas} \left(\vec{F}_i \bullet \Delta\vec{r} \right) = \sum_{todas} W\left(\vec{F}_i\right)$$

O trabalho da resultante é igual à soma dos trabalhos de todas as forças

Exercício #4

Um corpo (m=1 kg) sobe um plano inclinado (θ=30º) , com atrito (μ=0,2) , deslocando-se Δr = 1m, sob a ação duma força F=10N paralela ao plano



$$W(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = 10 \times 1 \times \cos 0 = 10J$$

$$W(\vec{N}) = \vec{N} \bullet \Delta\vec{r} = |\vec{N}| \times 1 \times \cos 90 = 0$$

$$pois\ \vec{N} \perp \Delta\vec{r}$$

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \bullet \Delta\vec{r} = |\vec{P}| \times |\Delta\vec{r}| \times \cos 120$$

$$W(\vec{P}) = 9{,}8 \times 1 \times (-\cos 30) = -4{,}9J$$

$$|\vec{f}_a| = \mu|\vec{N}| = \mu mg\cos 30 = 1{,}7N$$

$$W(\vec{f}_a) = \vec{f}_a \bullet \Delta\vec{r} = 1{,}7 \times 1 \times \cos 180 = -1{,}7J$$

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força F depende da posição?

Considere-se um deslocamento segundo x e F= $F_x(x)$ é a componente x da força

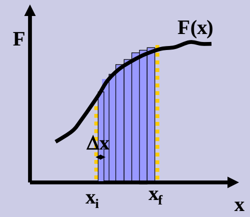
Para deslocamento *infinitesimal* Δx

$\Delta w = F_x(x)\hat{\imath} \bullet \Delta x\,\hat{\imath}$

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x)\hat{\imath} \bullet \Delta x\,\hat{\imath}$$

No limite Δx ==> 0

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



Trabalho de forças variáveis: Generalização

Deslocamento não retilíneo

Contribuirão as componentes da força segundo x,y e z, cada uma delas dependendo dos pontos x,y,z da trajectória.

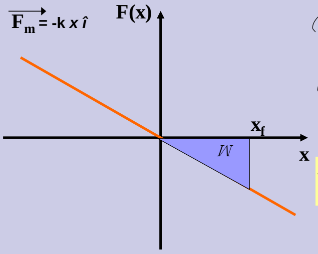
$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz$$

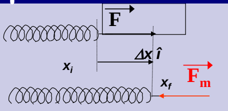
$$W = \int_{r_i}^{r_f} F_x(x,y,z)dx + \int_{r_i}^{r_f} F_y(x,y,z)dy + \int_{r_i}^{r_f} F_z(x,y,z)dz$$

Integral de caminho (linha)

O trabalho será dado pela soma de três integrais, um para cada componente. Em cada um, <u>as coordenadas têm de ser reescritas à custa de (cada) variável de integração, usando a equação que descreve a trajetória.</u>

Trabalho realizado por uma mola





Trabalho realizado PELA mola

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx$$

$$w = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

$$x_i = 0 \Rightarrow W = -\frac{1}{2}kx_f^2$$

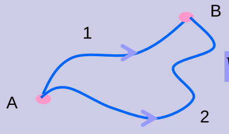
Trabalho realizado PELA mola

Forças Conservativas

Uma força é **CONSERVATIVA** **se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for** **INDEPENDENTE** **do caminho seguido entre esses pontos**

Nestas condições, **o trabalho** **é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento**

F conservativa



$$W_{AB}(caminho\,1) = W_{AB}(caminho 2)$$

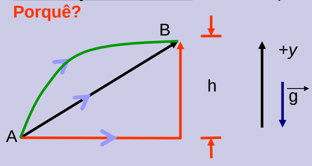
Ainda, o trabalho realizado ao longo dum percurso **FECHADO** **é** **NULO**

Forças Conservativas

- *Gravítica*
- *Eletrostática*
- *Elástica duma mola*

No caso da **força gravítica** (junto à superfície da Terra) em que é constante g, <u>o trabalho só depende da diferença de alturas</u> entre os pontos final e inicial.

Porquê?



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B F_y\,dy = \int_A^B -mg\,dy = -mg(y_B - y_A)$$

Para qualquer trajecto de A→B $W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$

Trabalho e Energia

Como descrever o movimento de um corpo relacionado diretamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo?

Suponhamos que uma partícula está sujeita a um conjunto de forças, de resultante F. Para um deslocamento segundo *xx*

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} madx$$

Usando a 2ª Lei de Newton pois F é resultante

$$a = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dx}\right)\times\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dx}\right)\times\mathbf{v}$$

Eliminámos t e explicitamos a velocidade

Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} m\mathbf{v}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dx}\right)dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)dx$$

Lembrando que:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$W_{RES} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_i^2$$

$$W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c$$

TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA

Este resultado é válido em geral, para uma trajectória arbitrária

Definição de Potência

Potência é a taxa temporal com que é realizado trabalho

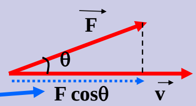
Realizando um trabalho W num intervalo de tempo Δt

$$P_{media} = \frac{W}{\Delta t}$$

$$dP = \underset{\Delta t \to 0}{\text{limite}} \frac{W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow P = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

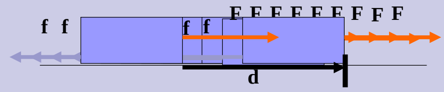
$$P = \|\vec{F}\| \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\theta$$



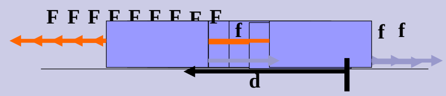
Forças não - conservativas: atrito

No caso de forças não-conservativas, o trabalho realizado num trajeto fechado não é nulo, como podemos ver com a força de atrito cinético

Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito f



Trabalho da força de atrito A→B $W_{AB} = -fd$



Trabalho da força de atrito B→A $W_{BA} = -fd$

$$W_{AA}(\text{ida e volta}) = -2\,fd \neq 0$$

Energia Mecânica: Generalização

Em geral, a uma partícula estarão aplicadas forças conservativas e não conservativas. Podemos escrever, para a resultante das forças:

$$\vec{F}_R = \sum \left(\vec{F}_{Cons} + \vec{F}_{NCons}\right)$$

Num deslocamento de *A* para *B*

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_R\right) = \Delta E_C$$

Por outro lado

$$W_{A\to B}\left(\sum \vec{F}_{cons}\right) = -\sum_i \Delta E_{P_i}$$

$$W_{A\to B}\left(\sum \vec{F}_{NCons}\right) = W_{A\to B}\left(\vec{F}_R\right) - W_{A\to B}\left(\sum \vec{F}_{Cons}\right) =$$

$$W_{A\to B}\left(\sum \vec{F}_{NCons}\right) = \Delta E_C - \left(-\sum_i \Delta E_{P_i}\right) = \Delta E_C + \sum_i \Delta E_{P_i}$$

$$W_{A\to B}\left(\sum \vec{F}_{NCons}\right) = \Delta E_M$$

Conservação de Energia

Quando temos forças não-conservativas a realizar trabalho, a energia inicial vai surgir noutras formas não mecânicas, por exemplo, energia térmica devido ao atrito. Genericamente, designamos por energia interna U.

$$\Delta E_c + \Delta E_P + \Delta U = 0$$

Energia convertida noutras formas

A energia total dum sistema isolado é constante.

Há apenas transformações em diversas formas de energia

Forças Conservativas e Energia Potencial

- **Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto ou de posição) ENERGIA POTENCIAL satisfazendo:**

$$W_{Fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$E_{potencial}$ no ponto inicial

$E_{potencial}$ no ponto final

O trabalho realizado por uma força conservativa duma posição inicial para uma final é o *simétrico* da variação da ENERGIA POTENCIAL nesse trajecto:

Energia potencial e forças conservativas

A variação de energia potencial num deslocamento é dada a partir do integral de caminho da força (conservativa)

$$W\left(\vec{F}_{Cons}\right) = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\Delta E_P = E_A - E_B$$

Se soubermos a energia potencial em cada ponto, poderemos saber a força correspondente?

$$W\left(\vec{F}_{Cons}\right) = \int_A^B F_{Cons} dr \cos\theta = -\int_A^B dE_p$$

então $F_{Cons} \cos\theta \, dr = -dE_p$

É a componente da força na direcção do deslocamento

$$F_{Cons} \cos\theta = \frac{-dE_p}{dr}$$

Derivada direccional de E_P

Energia potencial e forças conservativas

No caso geral em que a $E_p(x,y,z)$, as componentes cartesianas da força são calculadas através de :

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} E(x,y,z)\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} E(x,y,z)\hat{\jmath} \frac{\partial}{\partial z} E(x,y,z)\hat{k}$$

Como $E_p(x,y,z)$ é uma grandeza escalar então F é dado pelo produto do vetor *nabla* $\vec{\nabla}$ *com* E_P

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Diz-se então que $\vec{F}$ = *- grad* E_p ,

A Força é o simétrico do gradiente da E_p

Energia Potencial Gravítica

Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

$$W_{peso} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{P} \bullet d\vec{r} = mgy_i - mgy_f$$

Energia potencial gravítica (junto à superfície da Terra)

$$E_{Pg} = mgy$$

A menos de uma constante, que define a origem, o zero da E_{Pg}

$\Delta E_{Pg} > 0$

$W < 0$

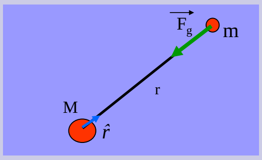
$\Delta E_{Pg} < 0$

$W > 0$

Energia potencial gravítica (2 massas)

A expressão para a energia potencial gravítica $E_{pg}=mgy$ só é válida na vizinhança da superfície da Terra, pois só aí podemos considerar constante a força gravítica $F_g = P = mg$.

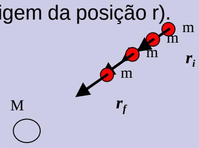
Quando se pretende descrever situações genéricas, em que durante o deslocamento a variação da força gravítica é significativa, temos que usar a expressão geral da lei de Gravitação Universal



$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

Energia potencial gravítica (2 massas)

Consideremos um deslocamento da massa m ao longo dum raio desde $r=r_i$ até $r=r_f$, na presença duma massa M (origem da posição r).



$$W_{i\to f} = \int_{r=r_i}^{r=r_f} \vec{F}\bullet d\vec{r} = \int_{r=r_i}^{r=r_f} -G\frac{Mm}{r^2}dr =$$

$$-GMm\int_{r=r_i}^{r=r_f}\frac{1}{r^2}dr = -GMm\left(-\frac{1}{r_f}+\frac{1}{r_i}\right)$$

$$W_{i\to f} = \underbrace{\left(-G\frac{Mm}{r_i}\right)}_{E_{Pgi}} - \underbrace{\left(-G\frac{Mm}{r_f}\right)}_{E_{Pgf}} \Rightarrow E_{Pg} = -G\frac{Mm}{r}$$

A menos de uma constante aditiva

Energia potencial gravítica do par de massas m e M

Energia potencial gravítica (2 massas)

Como a força gravítica é conservativa, o resultado é independente da trajetória.

Assume-se que a energia potencial é zero quando as duas massas estão infinitamente afastadas.

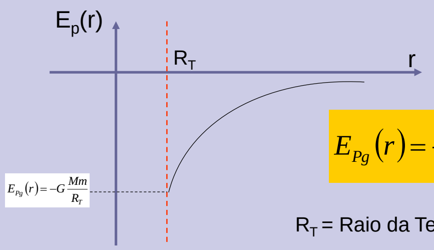
$$E_{Pg}(r=\infty)=0$$

$$E_{Pg}(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Energia potencial gravítica das duas massas pontuais à distância r

Esta expressão inclui, como caso particular, a expressão anterior, $E_p=mgy$, válida junto à superfície da Terra (redefinindo o zero da energia potencial)

Energia potencial gravítica (2 massas)



$$E_{Pg}(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

R_T = Raio da Terra

Energia Potencial Elástica

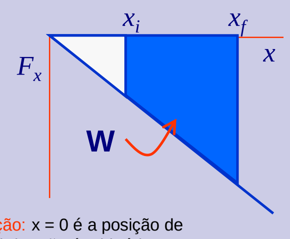
Para a mola elástica, em que **$\vec{F} = -kx\,\hat{i}$**

O trabalho de x_i até x_f é:

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Define-se a energia potencial elástica duma mola como

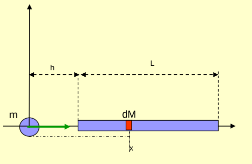
$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$



Atenção: x = 0 é a posição de equilíbrio, não é arbitrária.

Exercício #5: Força gravitacional entre um corpo extenso e uma massa pontual

Determine a força gravitacional exercida por uma barra homogénea de massa M e comprimento L exercida sobre uma massa pontual m colocada a uma distância h da extremidade da barra.



$$\vec{F} = Gm\int \frac{dM}{x^2}\hat{i}$$

Solução

$$\left\|\vec{F}\right\| = Gm\int \frac{dm}{x^2},$$

como a barra é homgénea, então tem uma distribuição uniforme de massa m/x = M/L = μ é constante

$$\mu = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \Leftrightarrow dm = \frac{M}{L}dx, \text{substutuíndo tem-se}$$

$$\left\|\vec{F}\right\| = Gm\int_h^{h+L} \frac{M}{L}\frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \left\|\vec{F}\right\| = Gm\frac{M}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_h^{h+L}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\vec{F}\right\| = Gm\frac{M}{L}\left[\frac{1}{h(h+L)}\right]$$

$$\vec{F} = Gm\frac{M}{L}\left[\frac{1}{h(h+L)}\right]\hat{i}$$