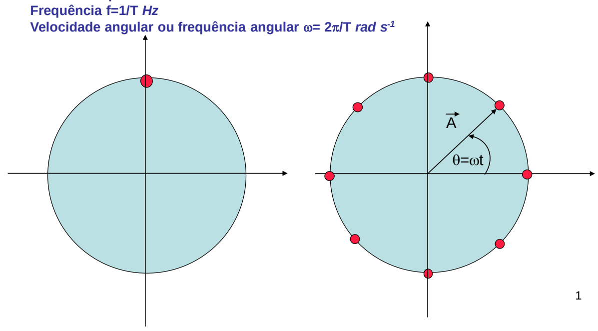
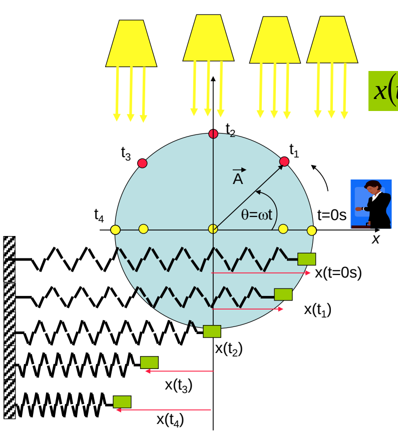
Sumário

- Movimento harmónico Simples
  - Energia cinética e potencial
- Oscilações dependentes da amplitude de oscilação: Anarmonicidade
- Oscilações amortecidas
  - Regime de amortecimento
  - Energia dissipada e factor de qualidade Q
- Oscilações Forçadas
  - Discussão do termo transiente e estacionário
  - Ressonância
  - Oscilações Forçadas
- Oscilações acoplados
  - Figuras de Lissajous
  - Batimentos
  - Modos normais de vibração

Movimento oscilatório: Relação entre o circular e uniforme e o Movimento oscilatório harmónico simples

Período angular de 2π *rad*
Período temporal - T *s*
Frequência f=1/T *Hz*
Velocidade angular ou frequência angular $\omega = 2\pi/T$ *rad* s^{-1}





$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

M.H.S. – Energia no M.H.S

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-\omega A sen(\omega t + \phi))^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

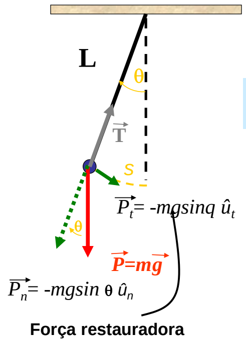
Utilizando a identidade trigonométrica

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

Obtém-se:

$$\Leftrightarrow E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[1 - \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

Exemplo : **Pêndulo simples**



$$P_t = -mgsen\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$s = L\theta \qquad sen\theta \approx \theta$$

→ Válido para θ pequenos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\theta$$

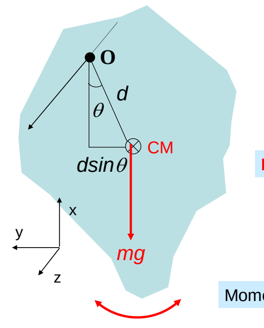
ω^2

Semelhante a: $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\omega^2\vec{x}$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Exemplo - O Pêndulo físico (ou composto) (corpo rígido que oscila livremente)



- **Afasta-se o corpo da posição de equilíbrio.**
- **O Peso causa rotação: momento ($\vec{\tau}$) do Peso em relação a O:**

$$\vec{\tau} = -mgd\sin\theta\,\hat{k}$$

Equação do movimento de rotação

$sen\theta \approx \theta$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Leftrightarrow -mgd\theta \approx I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Momento de inércia

Aceleração angular

M.H.S. - Pêndulo físico

$$\tau = I_z\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -mgd\theta \approx I_z\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I_z}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Equação diferencial cuja solução é:

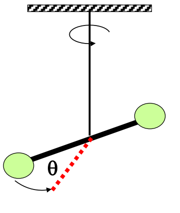
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

M.H.S. - Pêndulo de torção

Corpo suspenso por um fio metálico ou de fibra

$\vec{\tau} = -K\theta\hat{\mathbf{k}}$ **onde K é o coeficiente de torção do fio**



Equação do movimento de rotação

$$\tau = -K\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\alpha = -\frac{K}{I}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

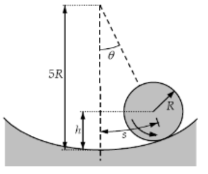
Os sistemas mecânicos têm uma **frequência natural** de oscilação que depende de:

$$\sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$	$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$	$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$
mola	**Pêndulo simples**	**Pêndulo físico**	**Pêndulo de torção**

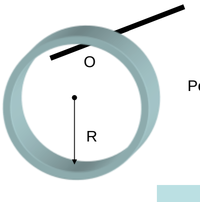
Exemplo P5 (Cap II.1)

Uma esfera de raio R rola sem escorregar numa superfície cilíndrica côncava de raio 5R. Determine o período de oscilação para pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio.



Exemplo

Uma anel de 0.10 m de raio está suspenso como se ilustra na figura. Determine o período de oscilação.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{MgR}}$$

Pelo teorema de Steiner

$$I_0 = I_{CM} + MR^2$$
$$\text{como} \quad I_{CM} = MR^2$$
$$I_0 = 2MR^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

Oscilador Anarmónico: Oscilações de amplitude Elevada

Recordemos a equação geral do movimento do pêndulo simples

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 sen\theta = 0$$

Com $\omega_o^2 = \frac{g}{l}$

Vejamos como demonstrar a dependência do T com a amplitude de oscilação!!!

Multiplicando por $2\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$

$$2\times\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\times\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\omega_o^2 sen\theta = 0$$

Integrando em ordem a *t*

$$\int 2\times\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} + \int 2\times\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\omega_o^2 sen\theta = 0$$

Oscilador Anarmónico: Oscilações de amplitude Elevada

$$\int 2\times\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\int 2\times\omega_0^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)sen\theta=0$$

Nota:
$\theta=f(t)$
$g(t,\theta)=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$
$\frac{dg}{dt}=2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2\omega_0^2\cos\theta+C$$

Nota:
$\theta=f(t)$
$y(t,\theta)=\cos\theta$
$\frac{dy}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}sen\theta$

Determinemos C: $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=0 \text{ quando } \theta=\theta_0 \Rightarrow C=-2\omega_0^2\cos\theta_0$

Oscilador Anarmónico: Oscilações de amplitude Elevada

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2\omega_0^2\cos\theta-2\omega_0^2\cos\theta_0 \Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\omega_0\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}=\int\omega_0 dt \Leftrightarrow \omega_0 t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}, como\ T_0=\frac{2\pi}{\omega_0},$$

$$se\ em\ t=0\ s\ \theta=0 \Rightarrow t=\frac{T}{4},\quad \theta=\theta_0$$

$$\frac{2\pi}{T_0}\frac{T}{4}=\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}} \Leftrightarrow \boxed{T=\frac{4T_0}{2\pi}\left[\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\right]}$$

Depois de resolver o integral, temos:

$$\boxed{T=T_0\left[1+\frac{1}{4}sen^2\frac{\theta}{2}+\frac{9}{64}sen^4\frac{\theta}{2}+....\right]}$$

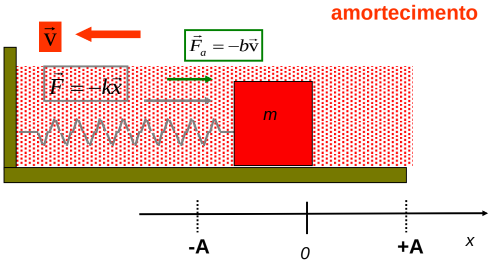
Oscilações Amortecidas

Exemplo de força dissipadora: Força devida à viscosidade de um fluido $\vec{F}_a$ **(ver Cap. 2)**

$$\vec{F}_a=-b\vec{v}$$

Coeficiente de amortecimento

A mola oscila dentro de um fluído:



Movimento Harmónico Amortecido

http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/damped/d.htm

http://www.walter-fendt.de/ph14e/osccirc.htm

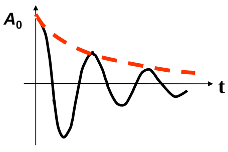
Oscilações Amortecidas

Aplicando 2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -kx - bv = ma_x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$ **equação (1)**

Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico (b_c) esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo



Oscilações Amortecidas

A solução é da equação (1) :

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

Verifique!!

E a frequência de oscilação é $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

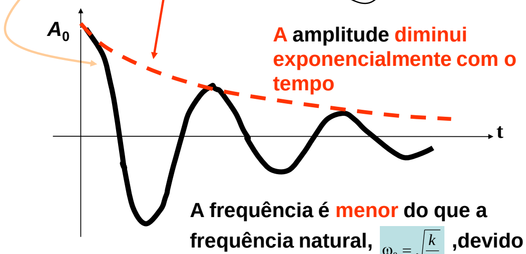
Esta solução só é válida se: $\frac{b}{2m} < \omega_o$ $\qquad$ $b < 2m\omega_0$

$b_c = 2m\omega_0$

Frequência natural $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Coeficiente de amortecimento crítico (b_c)

$$x = \boxed{A_o e^{-\frac{b}{2m}t}}\cos(\omega t + \phi)$$ =0, neste caso



A amplitude diminui exponencialmente com o tempo

A frequência é menor do que a frequência natural, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **,devido ao amortecimento**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

A energia nas Oscilações Amortecidas

Calcule-se a taxa de dissipação de energia num oscilador amortecido quando $\frac{b}{2m} < \omega_o$ e $\omega \cong \omega_o$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left[x_0e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi)\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left[-\gamma\, x_0e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi) - x_0\omega_0e^{-\gamma t}sen(\omega_0 t + \phi)\right]^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\left[\gamma^2\, x_0^2e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \phi) + x_0^2\omega^2e^{-2\gamma t}sen^2(\omega_0 t + \phi)\right.$$
$$\left. - 2\gamma\, x_0e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi)\times x_0\omega_0e^{-\gamma t}sen(\omega_0 t + \phi)\right]$$

Calculando a média temporal ao fim de um ciclo, temos:

$$\langle E_c\rangle = \frac{1}{2}m\left[\left\langle\gamma^2\, x_0^2e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t + \phi)\right\rangle + \left\langle x_0^2\omega^2e^{-2\gamma t}sen^2(\omega_0 t + \phi)\right\rangle\right.$$
$$\left. - \left\langle 2\gamma\, x_0e^{-2\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi)\times x_0\omega_0e^{-2\gamma t}sen(\omega_0 t + \phi)\right\rangle\right]$$

A energia nas Oscilações Amortecidas

Nota: $\langle f(t)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt, \Rightarrow \langle sen^2\theta\rangle = \langle cos^2\theta\rangle = \frac{1}{2};\ \langle sen\theta\cos\theta\rangle = 0$

Energia Cinética média $\langle E_c\rangle \cong \frac{1}{4}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\gamma t}$

Energia Potencial média $\langle E_p\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_0 t+\phi)\right\rangle \cong \frac{1}{4}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\gamma t}$

Potência média dissipada

$$\langle P_{dissipada}\rangle = -\frac{d}{dt}\langle E\rangle = -\frac{d}{dt}\langle E_c + E_p\rangle$$

$$\langle P_{dissipada}\rangle \cong 2\gamma\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-2\gamma t}$$

Factor de qualidade

$$Q = 2\pi\frac{\text{energia armazenada}}{\langle\text{energia dissipada por período}\rangle}$$

$$Q = \frac{2\pi E}{\langle P_{dissipada}\rangle T} = \frac{E}{\langle P_{dissipada}\rangle}\omega$$

Movimento Harmónico Forçado

http://www.walter-fendt.de/ph14e/resonance.htm

Oscilações Forçadas

Considere força harmónica:

$$F_{ext} = F_0 sen(\omega_f t)$$

A intensidade da força varia harmonicamente com *t* entre

$-F_0$ e $+F_0$, com uma frequência angular ω_f

2ª Lei de Newton: $\sum\vec{F} = m\vec{a} = -k\vec{x} - b\vec{v} + \vec{F}_0 sen(\omega_f t)$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + b\frac{d\vec{x}}{dt} + k\vec{x} = \vec{F}_0 sen(\omega_f t)$$

Equação (2)

Oscilações Forçadas

- **Se se pretende manter um sistema a oscilar, na presença de forças dissipadoras, tem de se lhe fornecer energia, aplicando uma nova força externa.**
- **Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa aplicada.**
- **Isto fará com que ao fim de algum tempo a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, e assim a amplitude mantém-se constante, e o seu valor dependerá da frequência externa.**

Este movimento designa-se

oscilação forçada

Oscilações Forçadas

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0 sen(\omega_f t)$$

A solução completa:

$$x(t)=Ce^{-\frac{b}{2m}t}sen(\omega_a t+\phi_a)+Asen(\omega_f t+\varphi)$$

Termo transiente
que decai com o tempo

Termo estacionário
Que descreve o oscilador após o termo transiente deixar de influenciar

Oscilações Forçadas: discussão do termo estacionário

Equação diferencial , cuja solução é:

$$x=Asen(\omega_f t+\varphi)$$

Verifique que é solução !!

Onde:

$$A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f{}^2-\omega_0{}^2)^2+\left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

Sendo ω_o frequência do sistema quando sujeito apenas a uma força restauradora

O desfasamento φ entre a posição e a força é:

$$tan\,\varphi=\frac{b\omega_f}{m(\omega_f{}^2-\omega_0{}^2)}$$

ATENÇÃO: φ não é fase inicial!!!

Oscilações Forçadas: discussão do termo estacionário

$$F_{ext}=F_0 sen(\omega_f t)$$

$$x=A\,sen(\omega_f t+\varphi)$$
$$\mathbf{v}=\omega_f A\cos(\omega_f t+\varphi)$$

Conclusões:

- A velocidade está 90º mais avançada do que x(t)
- Quando φ=-90º , v(t) e F(t) estão em fase
- A diferença de fase entre x(t) e F(t) é igual a φ = 90º estando x(t) com atraso em relação a F(t)

Oscilações Forçadas

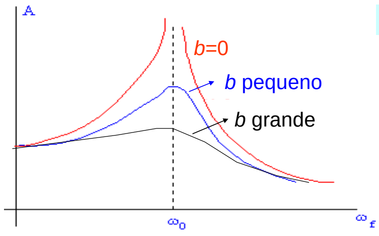
$$A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f{}^2-\omega_0{}^2)^2+\left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

Sistema oscila com $\omega=\omega_f$

A* é constante em *t

***A* é máximo quando $\omega_f \cong \omega_o$**

ressonância



Na ausência de amortecimento

$A \longrightarrow \infty$

quando $\omega_f \longrightarrow \omega_o$

Ressonância

Quando $\omega_f \rightarrow \omega_0$, *A* aumenta

A energia é transferida para o sistema em condições mais favoráveis.

Relembrar:

$$\mathbf{v} = \omega_f A\cos(\omega_f t + \varphi)$$

$$P = \vec{F} \bullet \vec{\mathbf{v}}$$

Potência = energia transferida por unidade de tempo

Na ressonância, *v* está em fase com F_{ext} (φ = -90º) e o trabalho por unidade de tempo (Potência) realizado por F_{ext} é máximo.

Ressonância

Na ausência de amortecimento (*b*= 0), quando $\omega_f \rightarrow \omega_0$, é transferida energia para o sistema.

Como não há dissipação de energia, *A* $\rightarrow \infty$

$$A = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}} = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\underbrace{\left(\omega_0{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{0.\omega_0}{m}\right)^2}_{=0}}} \rightarrow \infty$$

***A* aumenta até um limite determinado pelas propriedades físicas do sistema**

http://www.youtube.com/watch?v=yVkdfJ9PkRQ&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=kODOL-QBzSM&NR=1
http://www.youtube.com/watch?v=Qf0t4qIVWF4&feature=related

Sobreposição de dois MHS

- Mesma direcção e sentido e mesma frequência

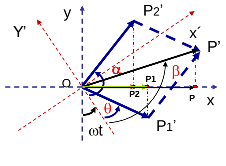
$$x_1 = \vec{OP}_1 = A_1 sen(\omega t + \theta) \qquad x_2 = \vec{OP}_2 = A_2 sen(\omega t + \alpha)$$

Qual o deslocamento total ?

$$X = x_1 + x_2 = \vec{OP} = A_1 sen(\omega t + \theta) + A_2 sen(\omega t + \alpha)$$

$$x = \vec{OP} = A sen(\omega t + \beta)$$

P2' e P1' são vectores girantes



Determinação da amplitude e fase inicial

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$$

$$tg\beta = \frac{A_1 sen\theta + A_2 sen\alpha}{A_1\cos\theta + A_2\cos\alpha}$$

Sobreposição de dois MHS

Casos particulares:

i) $\alpha = \theta \Rightarrow \delta = 0$

Interferência construtiva

$$\Rightarrow \quad A = A_1 + A_2 \;\text{ e }\; \beta = \theta$$

Vectores girantes paralelos

ii) $\alpha = \theta + \pi \Rightarrow \delta = \pi$

Interferência destrutiva

$$\Rightarrow \quad A = A_1 - A_2 \;\text{ e }\; \beta = \theta$$

Vectores girantes antiparalelos

iii) $\alpha = \theta + \pi/2 \Rightarrow \delta = \pi/2$

MHS estão em quadratura

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \;\text{ e }\; \beta = \theta + artg\frac{A_2}{A_1}$$

Vectores girantes perpendiculares

Sobreposição de dois MHS: Batimentos

- Mesma direcção e sentido e frequências diferentes

Seja θ=α=0 $x_1 = \vec{OP_1} = A_1 sen(\omega_1 t)$ $x_2 = \vec{OP_2} = A_2 sen(\omega_2 t)$

P2' e P1' são vectores girantes com velocidades angulares diferentes

$$x = \vec{OP} = A_1 sen(\omega_1 t) + A_2 sen(\omega_2 t)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[(\omega_1 - \omega_2)t]}$$

Implicações:
O vector girante $\vec{OP'}$ não tem amplitude constante e não gira com velocidade angular constante
A amplitude varia no tempo entre o
$A=A_1+A_2$ quando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$
$A=A_1-A_2$ quando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$

Amplitude modulada

$$f_b = \frac{|\omega_1 - \omega_1|}{2\pi} = |f_1 - f_2|$$

Sobreposição de dois MHS

- Caso particular: Mesma direcção, igual amplitude e frequências diferentes

$$x = A_1 sen(\omega_1 t) + A_1 sen(\omega_2 t)$$

$$x = 2A_1 \cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t \ sen\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t$$

Amplitude modulada

Velocidade angular do Mov. Oscilatório Resultante

Figuras de Lissajous

Caso Geral:

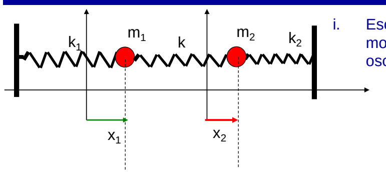
$$x = A sen(\omega_1 t)$$
$$y = B sen(\omega_2 t + \delta)$$

A trajectória resultante depende da razão:

ω_2/ω_1 e da diferença de fase δ

http://www.angelfire.com/falcon/geodoubek/port.htm

Exemplo: Oscilações acopladas



i. Escrever a equação do movimento para cada oscilador.

Analisar a dinâmica de cada uma das massas supondo a outra fixa na posição de equilíbrio

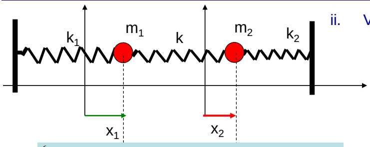
$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{k_1 + k}{m_1}x_1 = \dfrac{k}{m_1}x_2 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \dfrac{k_2 + k}{m_2}x_2 = \dfrac{k}{m_2}x_1 \end{cases}$$

Termos de acoplamento

http://www.lon-capa.org/~mmp/applist/coupled/osc2.htm

Exemplo: Oscilações acopladas



ii. Vejamos a soluções seguintes:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega t) \\ x_2 = B\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 A\cos(\omega t) + \dfrac{k_1+k}{m_1}A\cos(\omega t) = \dfrac{k}{m_1}B\cos(\omega t) \\ -\omega^2 B\cos(\omega t) + \dfrac{k_2+k}{m_2}B\cos(\omega t) = \dfrac{k}{m_2}A\cos(\omega t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right)A - \dfrac{k}{m_1}B = 0 \\ -\dfrac{k}{m_2}A - \left(\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right)B = 0 \end{cases}$$

Recordar a utilização de Matrizes na resolução de sistemas

Determinação das frequências normais de vibração pelo método Matricial

Recordar a utilização de Matrizes na resolução de sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right)A - \dfrac{k}{m_1}B = 0 \\ -\dfrac{k}{m_1}A + \left(-\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right)B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right) & -\dfrac{k}{m_1} \\ -\dfrac{k}{m_2} & \left(-\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

As soluções não triviais são aquelas em que o determinante da matriz dos coeficientes $A=[(a_{ij})]$ é nulo.

$$\begin{vmatrix} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right) & -\dfrac{k}{m_1} \\ -\dfrac{k}{m_2} & \left(-\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1+k}{m_1}\right)\times\left(-\omega^2 + \dfrac{k_2+k}{m_2}\right) - \left(-\dfrac{k}{m_1}\times\left(-\dfrac{k}{m_2}\right)\right) = 0$$

Determinação das frequências normais de vibração pelo método Matricial

No caso em que $m_1 = m_2$ e $k_1 = k = k_2$ a expressão anterior simplifica-se:

$$\left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\times\left(-\omega^2 + \frac{2k}{m}\right) - \left(\frac{k^2}{m^2}\right) = 0$$

$$\omega^4 - 4\omega^2\frac{k}{m} + 3\frac{k^2}{m^2} = 0$$

como $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2(4 \pm 2)}{2}$$

O sistema tem duas frequências próprias de vibração

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \omega_1^{\,2} = \omega_0^2 \\ \text{ii)} \quad \omega_1^{\,2} = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

Qual a relação entre B e A em cada situação?

i) A =B as massas oscilam em fase
ii) A =-B as massas oscilam em oposição de fase

http://www.walter-fendt.de/ph14br/cpendula_br.htm

http://www.myphysicslab.com/dbl_pendulum.html

Coordenadas normais; Graus de liberdade e modos normais de vibração

- As coordenadas normais conduzem a equações do movimento que tomam a forma de um conjunto de equações diferenciais com coeficientes constantes em que cada equação tem apenas uma variável dependente.
- Uma vibração que envolve apenas uma variável dependente X ou Y é designada de modo normal de vibração e tem a sua frequência própria de vibração. Em cada modo normal de vibração cada componente oscila com a mesma frequência.
- A importância do modo normal de vibração é que cada um é inteiramente independente do outro. A energia de um modo normal nunca é transferida para o outro modo norma de vibração.
- Cada processo independente pelo qual o sistema adquire energia é designado de grau de liberdade . O número destes processos define o nº de graus de liberdade e o nº de coordenadas normais de vibração.
  - Cada oscilador harmónico tem dois processos independentes de adquirir energia por energia potencial (coordenada X); por energia cinética (derivada da coordenada X)

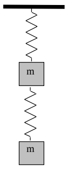
PROBLEMAS – Movimentos oscilatórios

20 – Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: Despreze o efeito da acção da gravidade.



PROBLEMAS – Movimentos oscilatórios

21– Considere o circuito da figura. Determine os modos normais de oscilação do circuito sabendo que as coordenadas normais são (I_a+I_b) e (I_a-I_b)

Nota:

- $V_1-V_2=L\ dI_a/dt$ e $V_2-V_3=L\ dI_b/dt$
- $dQ_1/dt=-I_a$, $dQ_2/dt=I_a-I_b$ e $dQ_3/dt=Ib$

http://www.walter-fendt.de/ph14br/osccirc_br.htm

Problema IV (Exame Final 2009-10)

Considere um sistema de três osciladores acoplados, onde $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ representam a posição de cada oscilador em função do tempo. Suponha a situação de movimento do sistema em que

$$x_1 = 5sen(3.2t) - 4sen(3{,}8t) + sen(5{,}4t)\,cm$$

As amplitudes relativas dos osciladores nos modos normais, por ordem crescente das respectivas frequências, são:

A1:A2:A3=1:1:1; A1:A2:A3=2:(-1):2 e A1:A2:A3=1:2:2

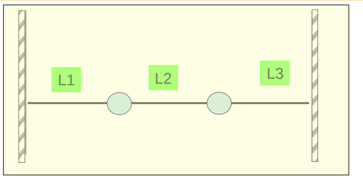
a) Quais as frequências normais de vibração do sistema? Justifique.

b) Diga, justificando, se o sistema está a oscilar num modo normal.

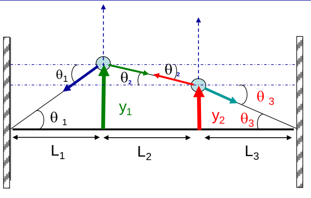
c) Indique a posição, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ para os restantes osciladores.

PROBLEMAS – Movimentos oscilatórios

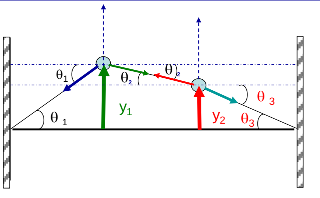
- Determine as frequências normais de vibração do sistema indicado na figura. Considere $m_1=m_2$ e $L_1=L_2=L_3$ e que é constante a tensão ao longo da corda.



PROBLEMAS – Movimentos oscilatórios



PROBLEMAS – Movimentos oscilatórios



$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + T \sin\theta_1 + T \sin\theta_2 = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + T \sin\theta_3 - T \sin\theta_2 = 0$$