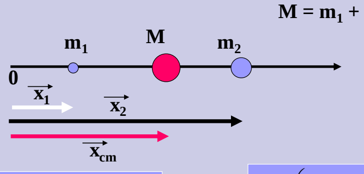
Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.3 Dinâmica de um sistema de partículas

Centro de massa a 1D

$M = m_1 + m_2$



$M\vec{x}_{cm} = (m_1 x_1 + m_2 x_2)\hat{i}$

$\vec{x}_{cm} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}\right)\hat{i}$

$$\boxed{\vec{x}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{x}_i}$$

Para N partículas

Centro de massa a 3 D

Posição do centro de massa para um **sistema de partículas**

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

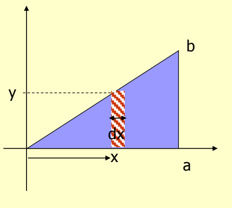
$$com \quad \vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k} \;\; e \;\; M = \sum m_i$$

Posição do centro de massa para uma **distribuição contínua de massa**

$$\vec{r}_{c.m.} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Exercício: Centro de massa de um corpo extenso

Determine as coordenadas do centro de massa de um objecto homogéneo de massa M com a forma de um triângulo rectângulo.



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm; \quad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm;$$

Solução (continuação)

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a x\,dm$$

distribuição homgénea de massa pela área

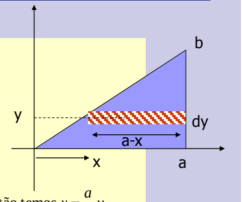
$$\frac{M}{A_{\text{triângulo}}} = \sigma = \frac{2M}{ab} = \frac{dm}{y \times dx} \Leftrightarrow dm = y\frac{2M}{ab}dx$$

$$\Leftrightarrow dm = y\sigma dx; \text{substituíndo no integral temos:}$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a x\;\; y\frac{2M}{ab}dx; \text{verificamos que y/x = b/a então temos } y = \frac{b}{a}x$$

$$\Leftrightarrow x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a x^2\,\frac{b}{a}\frac{2M}{ab}dx \Leftrightarrow x_{cm} = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \Leftrightarrow x_{cm} = \frac{2}{3}a$$

Solução (continuação)



$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^a y\,dm$$

distribuição homgénea de massa pela área

$$\frac{M}{A_{\text{triângulo}}} = \sigma = \frac{2M}{ab} = \frac{dm}{(a-x)dy} \Leftrightarrow dm = \frac{2M}{ab}(a-x)dy$$

substituíndo no integral temos:

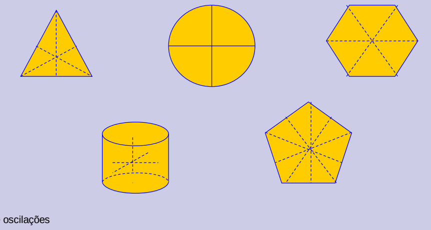
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^b y\;\frac{2M}{ab}(a-x)dy; \text{verificamos que y/x = b/a então temos } x = \frac{a}{b}y$$

$$\Leftrightarrow y_{cm} = \frac{2}{ab}\int_0^b y\left(a - \frac{a}{b}y\right)dy \Leftrightarrow y_{cm} = \frac{2}{ab}\left[a\frac{y^2}{2} - \frac{a}{b}\frac{y3}{3}\right]_0^b \Leftrightarrow y_{cm} = \frac{2}{b}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{1}{b}\frac{b^3}{3}\right]$$

$$y_{cm} = \left[b - \frac{2b}{3}\right] \Leftrightarrow y_{cm} = \frac{1}{3}b$$

Centro de massa a 3D

No caso de objectos simétricos com densidade uniforme o centro geométrico do corpo coincide com o centro de massa do mesmo.



Movimento do centro de massa um sistema de partículas

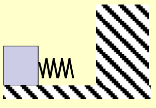
$$\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i\vec{\mathbf{v}}_i}{M}$$

$$\boxed{M\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \sum m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}}$$

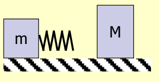
O momento linear total de um sistema de várias partículas é igual ao de uma partícula de massa M deslocando-se com velocidade $\vec{\mathbf{v}}_{cm}$

Exercício

a) **Um bloco de massa m desliza em direcção a uma parede fixa com velocidade v, de acordo com a figura. Determine compressão máxima da mola.**



b) **Determine a compressão máxima da mola na situação em que a parede é trocada por um corpo de massa M.**



Solução

a)

Compressão máxima significa que toda a energia cinética do corpo de massa m se converte em energia potencial elástica. Isto significa que a velocidade final do corpo de massa m, $v_f=0$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} K_{mola} x^2$$

$$\frac{1}{2} m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{1}{2} k_{mola} x^2$$

$$x = v_i \sqrt{\frac{k_{mola}}{m}}$$

b)

Consideremos o sistema total constituído por pelas duas massas. Como o sistema está sujeito apenas às suas interacções mútuas, verifica-se a conservação do momento linear e a conservação da energia mecânica pois não existem forças de atrito.

Solução b) continuação

como $P^i_{sistema} = P^f_{sistema}$

$$\begin{cases} m v^i_m = m v^f_m + M v^f_M \\ (m+M) v^i_{CM} = m v^i_m \\ (m+M) v^f_{CM} = (m+M) v^i_{CM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ v^i_{CM} = \dfrac{m}{m+M} v^i_m \\ - \end{cases}$$

Conservação da Energia Mecânica $E^i_{mec} = E^f_{mec}$

$$\begin{cases} E^i_{mec} = \frac{1}{2}(m+M)\left(v^i_{CM}\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(v^i_m\right)^2 \\ E^f_{mec} = \frac{1}{2}(m+M)\left(v^f_{CM}\right)^2 + \frac{1}{2} K_{mola} x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} m\left(v^i_m\right)^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(v^f_{CM}\right)^2 + \frac{1}{2} K_{mola} x^2 \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\left(v^i_m\right)^2 = (m+M)\left(\dfrac{m}{(m+M)} v^i_m\right)^2 + K_{mola} x^2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\left(v^i_m\right)^2 = \dfrac{m^2}{(m+M)}\left(v^i_m\right)^2 + K_{mola} x^2 \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(v^i_m\right)^2 = \dfrac{m}{(m+M)}\left(v^i_m\right)^2 + \dfrac{K_{mola}}{m} x^2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(v^i_m\right)^2 - \dfrac{m}{(m+M)}\left(v^i_m\right)^2 = \dfrac{K_{mola}}{m} x^2 \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{K_{mola}}\left(v^i_m\right)^2\left[1 - \dfrac{m}{(m+M)}\right] = x^2 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v^i_m \sqrt{\dfrac{mM}{(m+M)K_{mola}}} \\ - \end{cases}$$

Movimento do centro de massa um sistema de partículas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

$\vec{F}_i$ são as forças exteriores aplicadas sobre cada uma das partículas componentes do sistema.

Note que as forças internas (entre os componentes) não contribuem para a variação da quantidade do movimento do sistema.

Movimento do centro de massa um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

- Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero: $a_{cm} = 0 \Rightarrow$ o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{c.m.} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = M\vec{\mathbf{v}}_{cm} = const.$$

- O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema sujeito à acção de uma força externa aplicada ao sistema

Sistemas de massa variável

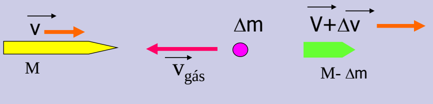
Porque se movimenta um foguete? Porque um balão de borracha cheio de ar se escapa?

No espaço livre, o movimento de um foguete pode ser compreendido pela conservação do momento linear do sistema (foguete + gases) pois é um sistema isolado.

O efeito da gravidade para um foguete **em movimento vertical**, perto da Terra p. ex., pode ser acrescentado, à parte, na força resultante sobre o foguete.

Sistemas de massa variável
Movimento de um foguete

Consideremos o movimento horizontal de um foguete e analisemos a variação do momento linear do sistema (foguete + gases).



Num certo instante t o sistema de massa M (foguete mais combustível) desloca-se à velocidade v.

Num instante posterior, o foguete liberta uma quantidade de combustível Δm que se escapa à velocidade $v_{gás}$.

O sistema (foguete mais combustível que ainda resta) de massa M-ΔM adquire uma velocidade v+ Δv.

Sistemas de massa variável
Movimento de um foguete

No instante t: $M\vec{\mathbf{v}}$

No instante posterior t+ Δt : $(M - \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta\vec{\mathbf{v}}) + \Delta M\vec{\mathbf{v}}_{gás}$

$$\vec{F}_{ext} \cong \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ext} \cong \frac{\vec{P}_f - \vec{P}_i}{\Delta t} = \frac{(M - \Delta M)(\vec{\mathbf{v}} + \Delta\vec{\mathbf{v}}) + \Delta M\vec{\mathbf{v}}_{gás} - M\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ext} \cong M\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} + \underbrace{\left(\vec{\mathbf{v}}_{gás} - (\vec{\mathbf{v}} + \Delta\vec{\mathbf{v}})\right)}_{\vec{\mathbf{v}}_e}\frac{\Delta M}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_e$$

Se passarmos ao limite
$\Delta t \to 0$: $\Delta v \to dv$ e $\Delta M / \Delta t \to -dM/dt$

Onde $\vec{v}_e$ é a velocidade da massa de gás expelida, medida em relação ao foguete

Sistemas de massa variável: Força de Reacção

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_e$$

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_e$$

A massa expelida pelo foguete na unidade de tempo deve ser a maior possível, e a velocidade desta relativamente ao foguete deve ser a maior possível

Força de reacção: força que os gases expelidos exercem sobre o foguete

$$\vec{F}_{reacção} = \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_e$$

Se $\vec{F}_{ext}$ for nula então

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_e$$

Podemos determinar a velocidade do foguete integrando a equação, considerando M_i e M_f a massa inicial e final do foguete mais combustível:

$$\int_{v_i}^{v_f} d\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{M}dM$$

$$\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_e \ln\frac{M_f}{M_i}$$

A velocidade final não depende da taxa (dM/dt) com que os gases são expelidos (consumo de combustível). Só depende de v_e e das massas inicial e final.

Atenção, M_f não deverá ser zero! Deve sobrar sempre o foguete, quando acaba o combustível...

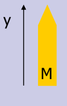
Sistemas de massa variável
Movimento de um foguete

a) Qual a aceleração inicial de um foguete cuja massa inicial é de $3x10^6$ kg e a massa final é 10% da inicial, após ter expelido gases de combustão à taxa de $1,5x10^4$kg/s à velocidade de 2600m/s.

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \frac{dM}{dt}\vec{\mathbf{v}}_e$$

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_{reacção}$$

$$\vec{a} = \left(-g + \frac{F_{reacção}}{M}\right)\hat{j}$$



$$F_{Reacção} = \mathbf{v}_e\frac{dM}{dt} = 2600 \times 1{,}5 \times 10^4 = 3{,}9 \times 10^7\ N$$

$$\vec{a}_i = \left(-g + \frac{F_{reacção}}{M}\right)\hat{j} = (-9.8 + 13)\hat{j}$$

$$\vec{a}_i = 3.2\hat{j} \quad (ms^2)$$

Sistemas de massa variável
Exemplo : Movimento de um foguete

b) Desprezando o efeito da gravidade, determine a velocidade do foguete após expulsão dos gases?

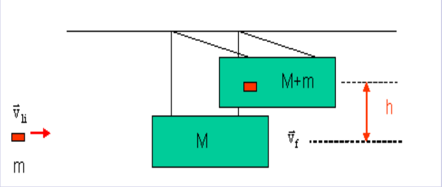
$$\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_e \ln\frac{M_f}{M_i} \quad como \quad \vec{\mathbf{v}}_e = -\mathbf{v}_e\hat{j}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (2600 \times \ln 10)\hat{j} = 5990\,\hat{j}\ \mathbf{(m/s)}$$

$$\mathbf{v}_f = 5990 m/s$$

Pêndulo balístico
“usado para determinar velocidades de balas”

O projéctil de massa m é disparado contra o bloco suspenso de massa M. A bala aloja-se no bloco e, após a colisão, o sistema M+m movimenta-se com v_f, oscilando em torno da posição de equilíbrio. Na posição correspondente à altura máxima, h, a velocidade do sistema é nula. A determinação da velocidade da bala pode ser efectuada considerando uma análise em dois passos:



Como o tempo de colisão é muito menor do que o período de oscilação, as cordas ficam na vertical durante a colisão, os seja não há forças externas horizontais durante a colisão, há conservação da componente horizontal do momento

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = c\vec{t}e$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$m\,\vec{\mathbf{v}}_{1i} = (m+M)\,\vec{\mathbf{v}}_f \qquad (1D)$$

$$m\,\mathbf{v}_{1i} = (m+M)\,\mathbf{v}_f$$

$$\mathbf{v}_f = \frac{m}{m+M}\mathbf{v}_i$$

Dinâmica do Corpo Rígido

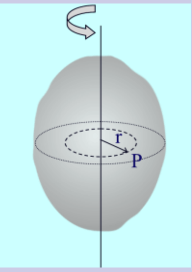
Um corpo rígido é um sistema de partículas cujas distâncias relativas, ao longo do tempo, permanecem constantes, mantendo a forma. O movimento de um corpo rígido pode ser descrito, em geral, como a combinação de um movimento de Translação (normalmente analisado em termos do Centro de Massa) e um movimento de Rotação.

Corpo Rígido: Rotação

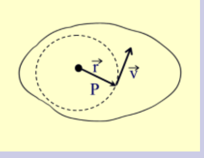
Vejamos a situação mais simples, em que o movimento é apenas de rotação, em torno de um eixo.

A trajectória de cada partícula vai ser circular.

A trajectória de P é uma circunferência de raio r, a distância de P ao EIXO de ROTAÇÃO



Cinemática de rotação



Vendo de topo, ao longo do eixo de rotação, temos, no plano perpendicular ao eixo e que contém o ponto P

Relação entre as grandezas lineares e circulares:

Distância e ângulo descrito $s = r\theta$

Velocidade linear e Velocidade angular $v = r\omega$

Aceleração centrípeta e velocidade angular $a_c = r\omega^2$

Aceleração tangencial e aceleração angular $a_t = r\alpha$

Energia Cinética de Rotação

Num corpo rígido em rotação, a velocidade de cada ponto é tanto maior quanto mais afastado estiver do eixo.

Para calcular a energia cinética de rotação do corpo teremos que somar a energia cinética de cada partícula

$$E_c = \sum_i E_c(i) = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Como a velocidade angular é a mesma para todas as partículas,

À grandeza entre parêntesis chamamos MOMENTO DE INÉRCIA DO SÓLIDO

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad \left(kgm^2\right)$$

Energia Cinética de Rotação

$$E_c = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

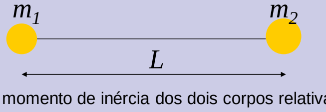
A Energia cinética total é dada por uma expressão análoga à de uma partícula com movimento de translação

$$\frac{1}{2} mv^2 \leftrightarrow \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

No caso de um corpo rígido extenso com uma distribuição contínua de massa temos que calcular um integral:

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int_{\substack{Todo\ o \\ volume}} r^2 dm$$

Momento de inércia



Calcular o momento de inércia dos dois corpos relativamente a um eixo vertical, que passa pelo centro**:**

$$I = \sum m_i r_i^2 = m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)L^2$$

Que se escreve em função da massa total do sistema:

$$I = \tfrac{1}{4} ML^2$$

Cálculo de momentos de inércia

No caso de corpos extensos:

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

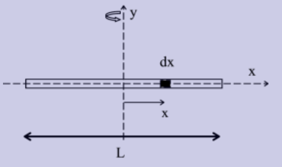
Para calcular concretamente os momentos de inércia temos que relacionar a variável massa com as coordenadas espaciais (a 3D o volume e a massa volúmica)

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\, dV$$

$$I = \int \rho\, r^2 dV$$

Exemplos de Cálculo: Barra homogénea

Momento de Inércia relativamente ao eixo perpendicular que passa pelo centro CM



A distância ao eixo é a coordenada x

$$-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total
Comprimento

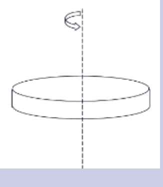
$$I_C = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I_c = \frac{ML^2}{12}$$

Teorema dos eixos paralelos

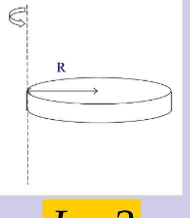
Vamos relacionar o momento de inércia I de um corpo em relação a um dado eixo com o momento de inércia I_{CM} relativamente a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa.

Ex: num disco (ou cilindro maciço).



Momento de Inércia em relação ao C.M.

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = ?$$

Teorema dos eixos paralelos ou de Steiner

$$I = I_{CM} + Md^2$$

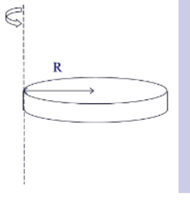
Momento de Inércia em relação ao eixo

Momento de Inércia em relação ao eixo paralelo que passa pelo C. M.

d: é a distância do C.M. ao eixo

M: Massa do corpo

(C.M. como partícula)

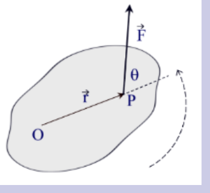


$$I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

Rotação e Momento de uma força

O momento τ de uma força F aplicada num ponto P relativamente a um ponto O é:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



O momento da força é um vector perpendicular a F e a r.

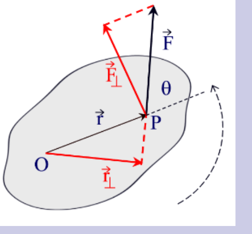
$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\|.sin(\theta)$$

$$\vec{r} = P - O$$

θ é o ângulo entre F e r.

O momento τ de uma força F aplicada num ponto P relativamente a um ponto O é:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



O momento da força pode ser calculado usando as componentes de r (ou F) perpendiculares a F (ou r).

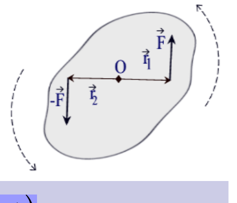
$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\|.sin(\theta) = \|\vec{r}_\perp\|\|\vec{F}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}_\perp\|$$

Binário de Forças

Se aplicarmos duas forças simétricas a um corpo (portanto com resultante nula), vamos ter como efeito a rotação em torno do ponto médio dos pontos de aplicação.

A este par de forças chamamos binário.

O Momento do BINÁRIO é



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}\right)$$

$$\vec{\tau} = 2\vec{r}_1 \times \vec{F} = \vec{b} \times \vec{F}$$

b é chamado braço do binário. O seu módulo é a distância entre os pontos de aplicação

Rotação e Momento de uma força

Num um sólido constituído por muitas partículas, rodando em torno dum eixo Z.

Para cada partícula de massa m_i temos

$$\vec{F}_{ti} = m_i \vec{a}_{ti}$$

O momento (componente Z) aplicado a cada uma é

$$\vec{\tau}_{zi} = m_i r_i^2 \vec{\alpha}$$

Somando sobre todas as partículas, e como todas têm a mesma aceleração e velocidade angulares

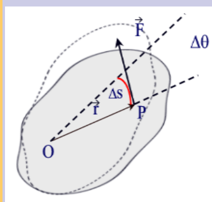
$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_{zi} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Trabalho das forças resultantes com a variação da energia cinética de rotação dum corpo rígido.

Suponhamos que um corpo rígido roda em torno dum eixo, sob a acção duma força resultante F, aplicada num ponto P.

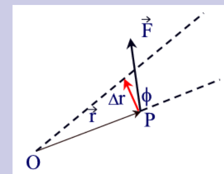
Num intervalo de tempo Δt, o corpo roda um ângulo $\Delta\theta$ e o ponto de aplicação de F desloca-se:

$\Delta s = r\,\Delta\theta$, o comprimento de arco.



Trabalho das forças resultantes com a variação da energia cinética de rotação dum corpo rígido.

$$dW = \vec{F}\bullet d\vec{r} = F\Delta r\cos(90-\phi) = F ds\, sen\phi = \underbrace{F sen\phi\, r}_{\text{Momento de F em relação ao eixo ☺}}\, d\theta$$



$$dW = \tau\, d\theta$$

A potência desenvolvida por F na rotação será

$$P = \frac{dW}{dt} \rightarrow P = \tau\omega$$

Teorema do Trabalho e Energia para Rotações

A Potência é a taxa temporal de realização de trabalho, portanto podemos integrar P entre dois instantes para ter

$$W = \int_{t_i}^{t_f} P\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \tau\omega\,dt$$

Como se tem

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt}$$

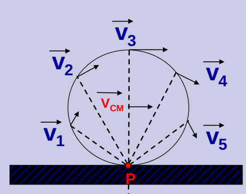
Fica

$$W = \int_{t_i}^{t_f} I\frac{d\omega}{dt}\,\omega dt = I\int_{t_i}^{t_f} \omega\,\frac{d\omega}{dt}dt = I\int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega\,d\omega$$

$$W = I\left(\frac{1}{2}\omega_f^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2\right) = E_{cf}^{rot} - E_{ci}^{rot} = \Delta E_c^{rot}$$

Movimento combinado de rotação e translação

Corpo é homogéneo e com simetria de rotação em torno dum eixo (anel, cilindro, esfera) que contém o Centro de Massa. Ex. Um cilindro que rola sobre uma superfície horizontal.



- **O cilindro não escorrega: em qualquer instante o ponto de contacto (P) está em repouso**
- **Num dado instante t, a velocidade de cada partícula do cilindro é perpendicular à linha que une a partícula ao ponto P**
- **Num dado t, o cilindro roda com ω, em torno de um eixo que passa por P e é // ao eixo que passa pelo CM**

Movimento combinado de rotação e translação

Num dado instante o movimento do corpo é equivalente a uma rotação pura em torno de P. E energia cinética de rotação total é:

$$\boxed{E^{total}_{cinética} = E_{c,rot(P)} = \frac{1}{2} I_P \omega^2}$$

Pelo teorema de eixos paralelos: $I_P = I_{cm} + MR^2$

$$E^{total}_{cinética} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{(R\omega)^2}$$

V_{CM}=Rω em relação a P

energia cinética de rotação em torno de um eixo que passa pelo CM,

$$E^{total}_{cinética} = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

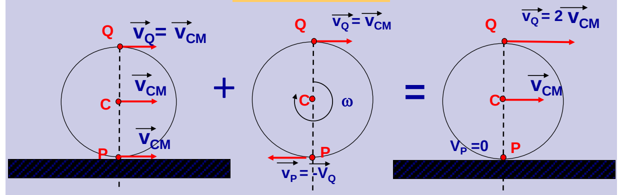
a energia cinética de translação do cilindro

Movimento combinado de rotação e translação: sem escorregamento

Translação em que todos os pontos do cilindro tem V_{CM}= ωR

Rotação pura em torno do CM: todos os pontos do cilindro tem ω

Translação +Rotação ☺

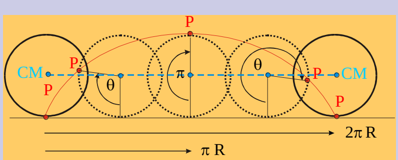


Rotação sem escorregamento

Na rotação sem escorregamento, o ponto P da periferia roda em torno do centro, descrevendo um arco Rθ, enquanto o centro avança exactamente a MESMA distância S=Rθ

A rotação sem escorregamento existe devido ao atrito (estático)!

Mas o trabalho do atrito é nulo, nesse caso!

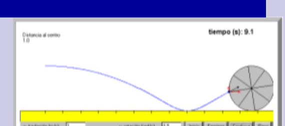


$$s_{CM} = R\theta$$
$$v_{CM} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$
$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\alpha$$

Movimento combinado de rotação e translação

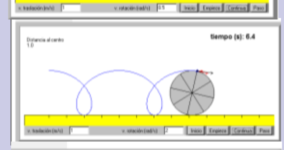
Translação predomina

$V_{CM} > \omega R$



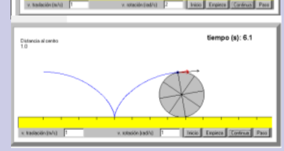
Rotação predomina

$V_{CM} < \omega R$

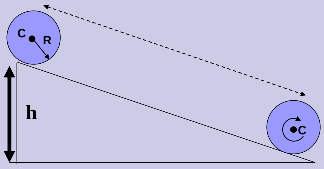


Rola sem escorregar

$V_{CM} = \omega R$



Rotação sem escorregamento: Dinâmica



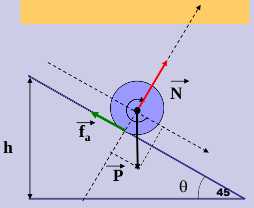
Um corpo de raio R desce um plano inclinado, rolando sem escorregar.

- **Qual a velocidade do CM quando desce uma altura h?**
- **Qual a aceleração do corpo?**

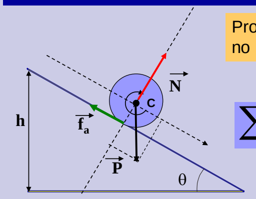
Quais as forças aplicadas ao corpo?

Peso
Normal
Atrito

Destas, apenas o peso realiza trabalho



Dinâmica da Rotação sem escorregamento Determinação da a_{CM}



Processo 1: Eixo instantâneo de rotação no ponto de contacto

Equação da dinâmica da rotação

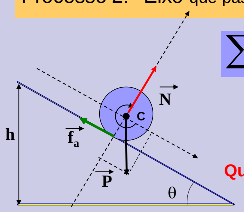
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{fa} = I\vec{\alpha}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_P = I_p \vec{\alpha} \quad 1$$

Usando a Eq. 1 vem, rapidamente

$$RMg\ sen\theta = I_p \alpha = I_p \frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow a_{CM} = \frac{MR^2}{I_p} g\ sen\theta$$

Processo 2: Eixo que passa pelo CM



$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{fa} = I\vec{\alpha}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{fa} = I_{CM}\vec{\alpha} \quad 2$$

Qual a resultante das Forças segundo *xx*?

$$\sum F_x = Mgsen\theta - f_a = Ma_{CM} \quad 3$$

Usando a eq 2 e 3 vem, eliminando fa

$$R(Mg\ sen\theta - Ma_{CM}) = I_{CM}\alpha \qquad R(Mg\ sen\theta) = (I_{CM} + MR^2)\alpha$$

Mas ☺ $I_p = I_{CM} + MR^2$

E obtemos a mesma equação que usando o outro eixo

$$a_{CM} = \frac{MR^2}{I_{CM} + MR^2} g\ sen\theta$$

Dinâmica da Rotação sem escorregamento:

$$a_{CM} = \frac{MR^2}{I_{CM} + MR^2} g\ sen\theta$$

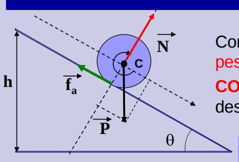
$$Esfera : I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2 \Rightarrow a_{CM} = \frac{5}{7} gsen\theta$$

$$Cilindro : I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \Rightarrow a_{CM} = \frac{2}{3} gsen\theta$$

$$Anel : I_{CM} = MR^2 \Rightarrow a_{CM} = \frac{1}{2} gsen\theta$$

A aceleração é sempre menor do que no caso da massa pontual (I_{cm}=0)

Dinâmica da Rotação sem escorregamento
Determinação da V_{CM}



Como a única força que realiza trabalho é o peso, há **CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA** desde a posição inicial (y=h) até à final (y=0)

$$E_{Mec} = E_c(rotação) + E_c(doCM) + E_{pg}$$

$$E_{Mec}(i) = Mgh$$

$$E_{Mec}(f) = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} MV_{cm}^2$$

Rola sem escorregar $V_{cm} = \omega R$

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{cm}\left(\frac{V_{cm}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} MV_{cm}^2$$

Dinâmica da Rotação sem escorregamento
Determinação da V_{CM}

$$V_{cm}^2 = \frac{2gh}{I_{cm}/MR^2 + 1}$$

$Esfera : I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$ ➡ $V_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$

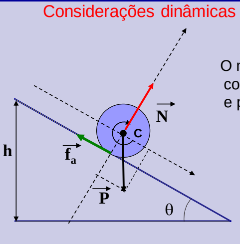
$Cilindro : I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$ ➡ $V_{cm} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$

$Anel : I_{CM} = MR^2$ ➡ $V_{cm} = \sqrt{gh}$

A velocidade é menor do que no caso da massa pontual (I_{cm}=0) que deslizasse sem atrito

Dinâmica da Rotação sem escorregamento
Resumo

Considerações dinâmicas ou de energia são equivalentes ☺!!!



O movimento do CM é uniformemente variado, com aceleração constante. Partindo do repouso e percorrendo uma distância *s*:

$$V_{cm}^2 = 2a_{CM}\, s$$

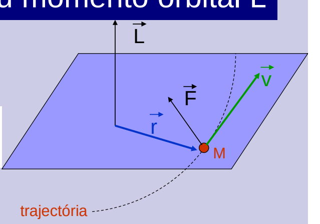
***s* é medido ao longo do plano**

$$s\, sen\theta = h$$

$$V_{cm}^2 = \frac{2gh}{I_{cm}/MR^2 + 1} \Leftrightarrow a_{CM} = \frac{MR^2}{I_{CM} + MR^2} g\, sen\theta$$

Momento angular ou momento orbital $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = M(\vec{r} \times \vec{v})$$



O que acontece ao corpo de massa M quando o momento angular varia ao longo do tempo?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

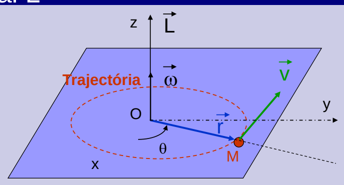
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

= 0, porque temos o produto externo entre dois vectores paralelos

Vector momento (*torque*) da força F

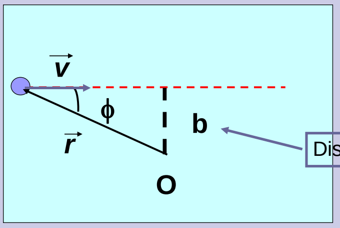
Movimento Circular: Momento angular ou momento orbital $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = M(\vec{r} \times \vec{\mathbf{v}})$$



$$\vec{L} = M(r\ \mathbf{v})\hat{k}, \textbf{como no m.c v} = \omega r$$
$$\vec{L} = M(r^2\omega)\hat{k}$$
$$\vec{L} = Mr^2\vec{\omega}$$

Movimento rectilíneo :Também tem momento angular!



Distância entre O e a recta

$$\|\vec{L}\| = m\,\mathbf{v}\,r\,sen\phi = m\mathbf{v}b$$

Momento Angular: sistema de partículas

Se tivermos um sistema de partículas, o resultado é generalizado.

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{iext} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

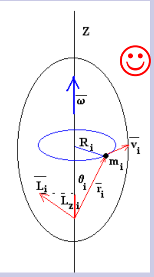
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

O momento angular é CONSTANTE (conserva-se) se:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

Momento Angular: corpo rígido

Em relação ao eixo de rotação, $\vec{L}_{total} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}$

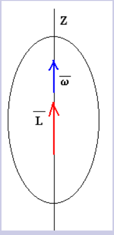


Se Z for um eixo que passe pelo CM (eixo de simetria), a soma sobre todas as partículas só terá componente segundo o eixo de rotação (Z)

o movimento de cada partícula é circular, portanto

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i (m_i R_i^2)\omega = I\omega_z$$

$$L_z = I\omega_z$$



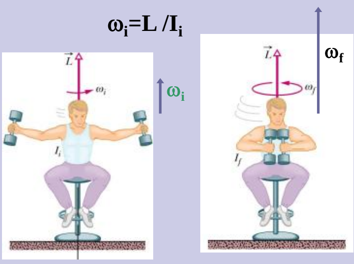
Numa situação geral, o L não é paralelo ao eixo de rotação

Conservação do momento angular

Momento Angular (L) constante, pois o momento das $F_{ext}=0$

$L=I\omega \implies \omega=L/I$

$\omega_i=L/I_i$ **$\omega_f=L/I_f$**



$I_f < I_i$
então
$\omega_f > \omega_i$

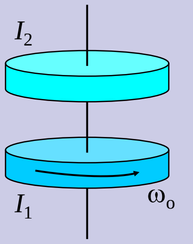
Conservação do momento angular

Deixar cair um disco parado sobre outro que roda. Ficam ambos a rodar em conjunto (atrito)

$$L_i = I_1\omega_0$$

$$L_f = (I_1 + I_2)\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_1}{(I_1 + I_2)}\omega_0$$



A força de atrito realiza trabalho até que as velocidades sejam iguais

Conservação do momento angular

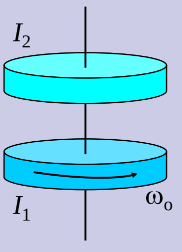
Qual a diminuição de energia cinética?

$$E_{cinética}^{inicial} = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2$$

$$E_{cinética}^{final} = \frac{1}{2}(I_2 + I_1)\omega_f^2$$

$$E_{cinética}^{final} = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2\frac{I_1}{I_2 + I_1}$$

$$\frac{E_{cinética}^{finaL}}{E_{cinética}^{inicial}} = \frac{I_1}{I_2 + I_1}$$

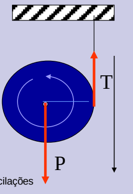


Colisão perfeitamente inelástica ☺

TP #17: Caso em que o eixo de rotação não tem um ponto fixo num Ref. de inércia

Calcule a aceleração angular de um iô-iô, sabendo que o disco possui um raio de 0,5m e uma massa de 20kg. Determine também a aceleração do seu CM.

$$\frac{dL_{CM}}{dt} = \tau_{CM}$$



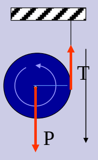
$R = 0{,}5m$

$M = 20kg$

$I = \frac{1}{2}MR^2$

$$\boxed{\begin{cases}\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \\ \sum \vec{F} = m\vec{a}\end{cases}}$$

TP #17: Caso em que o eixo de rotação não tem um ponto fixo num Ref. de inércia



$$\begin{cases}\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \\ \vec{F} = m\vec{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \\ P - T = Ma_{CM}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \\ -T = Ma_{CM} - Mg\end{cases}$$

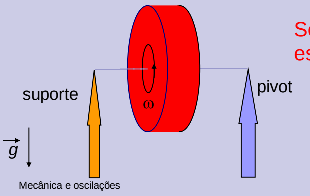
$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2}MR\alpha \\ T = M(g - \alpha R)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}R\alpha = g - \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R} = 13{,}1 rad.s^{-2}$$

$$a_{CM} = \alpha R = 6{,}5 m.s^{-2}$$

Movimento giroscópico:

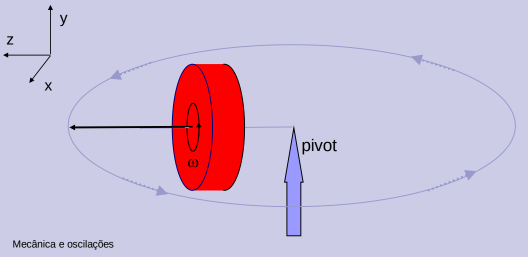
- O que acontece se aplicarmos uma força a um corpo em rotação?
- Como alterar a rotação dum objecto?
- O que são efeitos giroscópicos?



Se retirarmos o suporte da esquerda, o que acontece?

Movimento giroscópico:

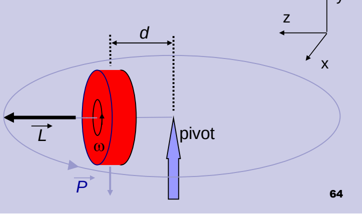
- ... Vai *precessar* em torno do apoio!
- Este fenómeno pode ser compreendido com a variação do momento angular.



Movimento giroscópico:

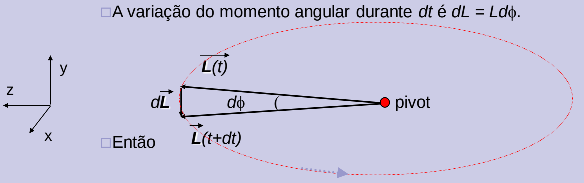
- O momento do peso em relação ao apoio é $\tau = mgd$.
- A sua direcção no instante mostrado é para "fora" da figura (regra da mão direita).
  - Então a variação de momento angular também deve ter o mesmo sentido

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Movimento giroscópico:

- Imaginemos que estamos a observar de topo o giroscópio
  - A variação do momento angular durante dt é $dL = Ld\phi$.



  - Então

$$\frac{dL}{dt} = L\frac{d\phi}{dt} \equiv L\Omega$$

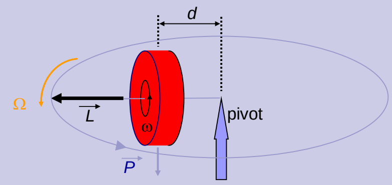
onde Ω é a frequência de precessão (em torno do eixo vertical)

Movimento giroscópico:

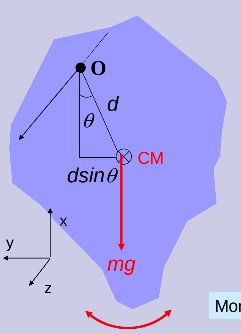
$$\tau = \frac{dL}{dt} = L\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{\tau}{L} \Rightarrow \Omega = \frac{mg\ d\ sen90^o}{I\ \omega}$$

Como:

$$\tau = P\ d\ \sin\theta$$
$$L = I\omega$$



M.H.S. - O Pêndulo físico (ou composto) (corpo rígido que oscila livremente)



- Afasta-se o corpo da posição de equilíbrio.
- O Peso causa rotação: momento (τ) do Peso em relação a O:

$$\vec{\tau} = -mgd\sin\theta\,\hat{k}$$

Equação do movimento de rotação

$sen\,\theta \approx \theta$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Leftrightarrow -mgd\theta \approx I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Momento de inércia

Aceleração angular

M.H.S. - Pêndulo físico

$$\tau = I_z\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -mgd\theta \approx I_z\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I_z}\theta \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Equação diferencial cuja solução é:

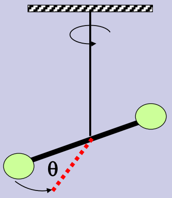
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

M.H.S. - Pêndulo de torção

Corpo suspenso por um fio metálico ou de fibra

$\vec{\tau} = -K\theta\,\hat{\mathbf{k}}$ **onde K é o coeficiente de torção do fio**



Equação do movimento de rotação

$$\tau = -K\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\alpha = -\frac{K}{I}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Os sistemas mecânicos têm uma **frequência natural** de oscilação que depende de:

$$\sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}$$

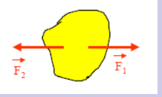
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$	$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$	$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$
mola	**Pêndulo simples**	**Pêndulo físico**	**Pêndulo de torção**

Condições de Equilíbrio

1. Equilíbrio de translação: A resultante das forças externas que actua sobre um objecto é nula

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$F_{res,x} = \sum_i F_{ix} = 0$$
$$F_{res,y} = \sum_i F_{iy} = 0$$
$$F_{res,z} = \sum_i F_{iz} = 0$$



O corpo está em equilíbrio

2. Equilíbrio de rotação: O momento externo resultante sobre um objecto em torno de qualquer eixo é nulo

$$\sum \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

Condições de Equilíbrio em resumo

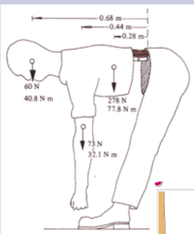
Objectos em *equilíbrio estático* não se movem nem rodam ($v_{CM}=0$; $\omega=0$)

Iremos restringir a análise a forças no plano xy

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \qquad \sum \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0$$

Equilíbrio estático



Os princípios da estática são também aplicados ao corpo humano: os músculos estão normalmente ligados (via tendão) a dois ossos que se ligam entre si por articulações flexíveis

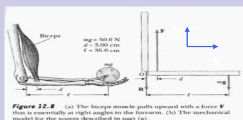
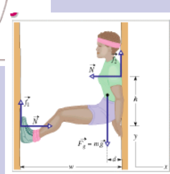


Figure 12.8 (a) The biceps muscle pulls upward with a force F that is essentially at right angles to the forearm. (b) The mechanical model for the system described in part (a).



Equilíbrio estático

Qual a força exercida pelo bíceps ao suportar a bola?

Forças intervenientes (só segundo yy'):

P: peso do corpo
F: força exercida pelo músculo
R: reacção no cotovelo

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0}}$$

$$\boxed{\sum F_y = F - R - P = 0}$$

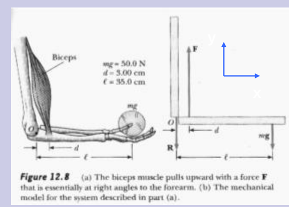


Figure 12.8 (a) The biceps muscle pulls upward with a force F that is essentially at right angles to the forearm. (b) The mechanical model for the system described in part (a).

Equilíbrio estático: Exemplo

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_i = \vec{0}}$$

Em relação a qualquer ponto

Escolhemos o cotovelo como origem, assim uma das forças desconhecidas não aparece na equação dos momentos

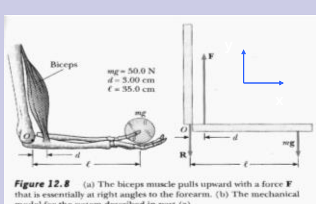
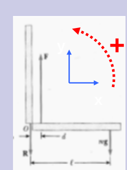


Figure 12.8 (a) The biceps muscle pulls upward with a force F that is essentially at right angles to the forearm. (b) The mechanical model for the system described in part (a).

Equilíbrio estático: Exemplo

Como as forças e os vectores de posição estão no plano XY, os momentos só vão ter componente Z

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_i = \vec{0}}$$



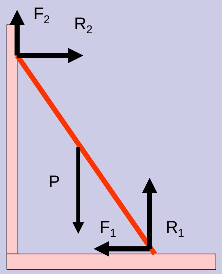
Então é fácil ver o sentido de rotação que corresponde à componente positiva segundo Z (para cima, no desenho)

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum \tau_z = \tau_z(F) + \tau_z(R) + \tau_z(P) = \\ dF + 0 - \ell P = 0\end{array}}$$

Resolvendo o sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} F - R - P = 0 \\ dF + 0 - \ell P = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{F = \frac{\ell}{d} mg} \\ \boxed{R = F - P = \left(\frac{\ell}{d} - 1\right) mg} \end{array}\right.$$

Equilíbrio estático: Problema 21

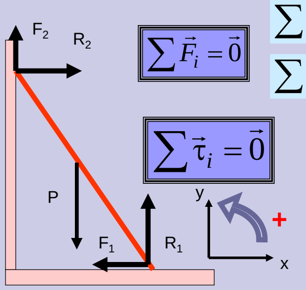


Consideremos uma escada homogénea de massa 40 kg, encostada a uma parede, fazendo um ângulo 60º com o chão. Em cada extremidade existe atrito. Na extremidade superior, a força de atrito vale 30% da reacção normal.

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0}}$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_i = \vec{0}}$$

Equilíbrio estático, exs.
Ver TP's #: 20, 21 e 22



$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \vec{0}}$$

$$\sum F_y = F_2 - P + R_1 = 0$$

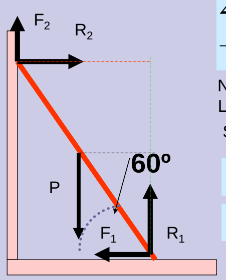
$$\sum F_x = R_2 - F_1 = 0$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_i = \vec{0}}$$

Escolhemos o ponto de contacto no chão como origem, assim F_1 e R_1 não aparecem na equação dos momentos

De novo, os momentos só vão ter componente Z (positiva para cima)

Equilíbrio estático, exs.
Ver TP's #: 20, 21 e 22



$$\sum \tau_z = \tau_z(F_2) + \tau_z(R_2) + \tau_z(P) =$$

$$-F_2 L sen30^o - R_2 L sen60^o + P\frac{L}{2} sen30^o = 0$$

Não sabemos o comprimento da escada L, mas não interessa:

Sabendo que $F_2 = 0{,}3R_2$

$$R_2 - F_1 = 0$$

$$F_2 - P + R_1 = 0$$

Temos 4 equações para 4 incógnitas.

Equilíbrio estático, exs.
Ver TP's #: 20, 21 e 22

$$\left.\begin{array}{l} -F_2\frac{1}{2} - R_2\frac{\sqrt{3}}{2} + P\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0 \\ F_2 = 0{,}3R_2 \\ R_2 - F_1 = 0 \\ F_2 - P + R_1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$R_2 = \frac{P/2}{0.3+\sqrt{3}} \approx 96N$$

$$F_2 = 29N$$

$$F_1 = 96N$$

$$R_1 = 36N$$