Mecânica e oscilações
ano letivo 2014-2015

Aula 3

Maria Rute André

universidade de aveiro

Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1
Cinemática da partícula

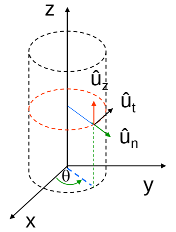
universidade de aveiro

Representação não cartesiana de vetores

Nas coordenadas curvilíneas os vetores unitários são, em cada ponto, tangentes às linhas coordenadas que passam por esse ponto e têm o sentido em que a coordenada aumenta

Sistemas de Coordenadas curvilíneas

- coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)

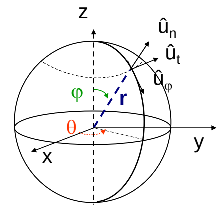


- **Relação com as coordenadas cartesianas**

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \, sen\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z = z$$
$$\theta = arctg \frac{y}{x}$$

Sistemas de Coordenadas curvilíneas

- coordenadas esféricas (r, θ, φ)

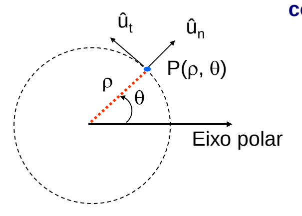


- **Relação com as coordenadas cartesianas**

$$x = r\, sen\varphi \cos\theta$$
$$y = r\, sen\varphi\, sen\theta$$
$$z = r \cos\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = arctg\,\frac{y}{x}$$
$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Sistemas de Coordenadas curvilíneas

- coordenadas polares (ρ, θ)

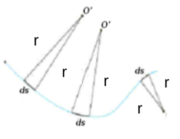


- **Relação com as coordenadas cartesianas**

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho\, sen\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = arctg\,\frac{y}{x}$$

Movimento curvilíneo geral
Componentes tangencial e normal

- O centro de curvatura O' localiza-se sempre do lado côncavo da trajetória; o raio de curvatura ρ é definido como a distância, medida na perpendicular, da curva ao centro de curvatura num dado ponto.
- A posição da partícula, em qualquer instante, pode ser descrita por uma só coordenada medida sobre a curva a partir de uma origem fixa, igual ao comprimento do arco, **s(t).**

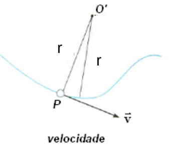


Versores unitários $\hat{\mathbf{u}}_t, \hat{\mathbf{u}}_n$

Movimento curvilíneo geral
Componentes tangencial e normal

- A velocidade da partícula tangente à trajetória em qualquer instante será:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\hat{u}_t = v\,\hat{u}_t}$$



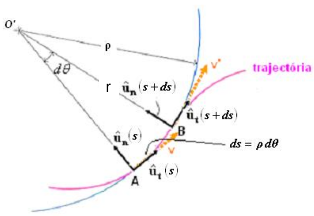
Movimento curvilíneo geral
Componentes tangencial e normal

- Num dado intervalo de tempo ***dt*** a partícula movimenta-se de **A** para **B**
- O incremento da variável da **trajetórias** corresponde a

$$ds = r\,d\theta$$

- O valor da velocidade é então

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}}$$



- O ***vetor velocidade*** é tangente à trajetória em qualquer instante

$$\boxed{\vec{v} = v\,\hat{u}_t}$$

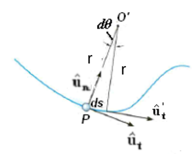
Movimento curvilíneo geral
Componentes tangencial e normal

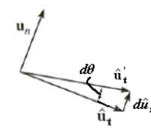
$$\boxed{d\hat{u}_t = d\theta\,\hat{u}_n}$$

- Para determinar o vetor aceleração temos que diferenciar o vetor velocidade.
- O vetor aceleração reflete a alteração no ***valor, direção e sentido da velocidade***

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[v\,\hat{u}_t\right] = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u}_n$$





Movimento curvilíneo geral
Componentes tangencial e normal

- Assim, e como $v = r\dfrac{d\theta}{dt}$ então

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + v\frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{r}\hat{u}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = a_t\hat{u}_t + a_n\hat{u}_n$$

com

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

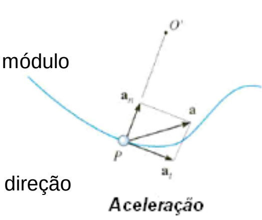
Componentes tangencial e normal do vetor aceleração

a_t

- Traduz a variação no módulo do vetor velocidade

a_N

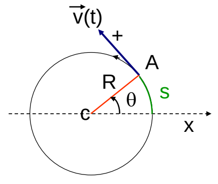
- Traduz a variação na direção do vetor velocidade

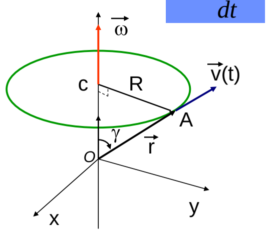


Movimento circular

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$$

Velocidade angular





$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\|\vec{\omega}\| = \frac{d\theta}{dt}$$

Se $\vec{\mathbf{r}}$ e γ constantes

$$\mathbf{v} = \omega\, r\, sen\gamma$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

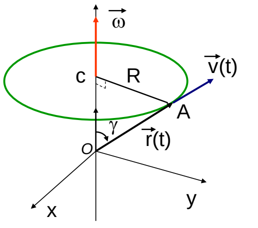
Movimento circular: aceleração angular $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

aceleração angular

Como no Movimento circular, a velocidade angular não varia em direção

$$\|\vec{\alpha}\| = \frac{d\|\vec{\omega}\|}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



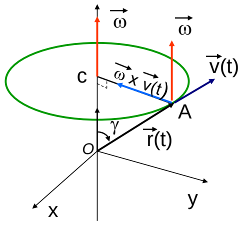
$$a_T = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_N = \frac{\mathbf{v}^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Movimento circular e uniforme aceleração angular $\vec{\alpha} = 0$

$$a_T = 0$$

$$a_N = \frac{\mathbf{v}^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt}, como\ \vec{\omega} = const$$

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}$$

Exercício #1: Determinação do vetor velocidade e aceleração no plano (2D)

- Um carro telecomandado percorre uma trajetória no plano, cuja variação da posição, em relação ao posto de controlo, ao longo do tempo é dado por:

$$\vec{r}(t) = \left(2.0 - 0.25t^2\right)\hat{\imath} + \left(1.0t - 0.025t^3\right)m$$

Com *t* está em segundos

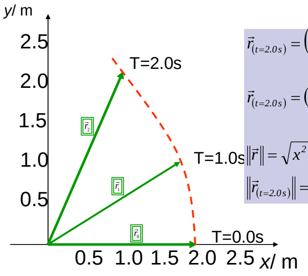
Parte I

- a) Determine a distância a que o carro está ao fim de 2s
- b) Determine os vetores deslocamento, velocidade média no intervalo de tempo [0.0s, 2.0s].

Resolução Parte I

a) Determinação da distância em t=2s

$$\boxed{Distância = \left\| \vec{r}_{(t=2.0s)} \right\|}$$



$$\vec{r}_{(t=2.0s)} = \left(2.0 - 0.25\times(2.0)^2\right)\hat{i} + \left(1.0\times 2 - 0.025\times(2.0)^3\right)\hat{j}$$

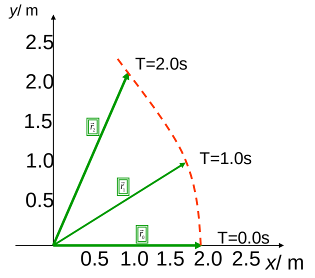
$$\vec{r}_{(t=2.0s)} = (1.0)\hat{i} + (1.8)\hat{j} \quad \text{m}$$

$$\left\|\vec{r}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left\|\vec{r}_{(t=2.0s)}\right\| = \sqrt{1.0^2 + 1.8^2} = 2.1\,\text{m}$$

Resolução Parte I (cont.)

- vetor deslocamento [0.0s, 2.0s]



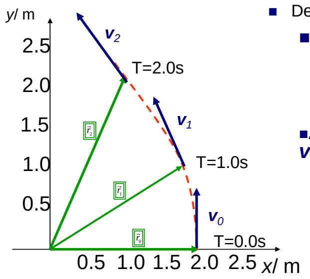
$$\Delta\vec{r}_{(t=2.0s)} = \vec{r}_{(t=2.0s)} - \vec{r}_{(t=0.0s)}$$

como

$$\vec{r}_{(t=0.0s)} = (2.0)\hat{i} \quad \text{m}$$

$$\vec{r}_{(t=2.0s)} = (1.0)\hat{i} + (1.8)\hat{j} \quad \text{m}$$

$$\Delta\vec{r}_{(t=2.0s)} = (1.0 - 2.0)\hat{i} + (1.8)\hat{j} \quad \text{m}$$



- Determinar
  - A intensidade do vetor $\boldsymbol{v}_2$
  - A direção do vetor velocidade $\boldsymbol{v}_2$

Resolução Parte I (cont.)

- vetor velocidade média [0.0s, 2.0s]

$$\Delta\vec{r}_{(t=2.0s)} = \vec{r}_{(t=2.0s)} - \vec{r}_{(t=0.0s)}$$

como

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(-1.0)\hat{i} + (1.8)\hat{j}}{(2.0 - 0.0)} \quad \text{m/s}$$

$$\vec{v}_m = \frac{(-1.0)\hat{i} + (1.8)\hat{j}}{2}$$

$$\vec{v}_m = -0.5\hat{i} + 0.9\hat{j} \quad \text{m/s}$$

- vetor velocidade instantânea

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(2.0 - 0.25t^2\right)\hat{i} + \left(1.0t - 0.025t^3\right)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = (-0.5t)\hat{i} + \left(1.0 - 0.075t^2\right)\hat{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{(t=2.0s)} = (-1.0)\hat{i} + (0.7)\hat{j} \text{ m/s}$$

- Intensidade do vetor $\boldsymbol{v}_2$

$$\boxed{\left\|\vec{v}_{t=2s}\right\| = \sqrt{1^2 + 0.7^2} = \mathbf{1.2} \quad \textbf{m/s}}$$

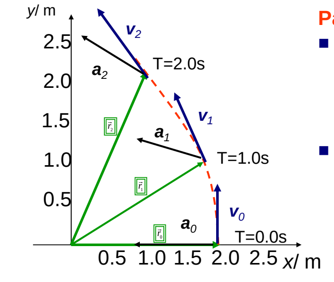
- Direção do vetor velocidade com o eixo positivo dos xx

$$tg\,\alpha = \frac{0.7}{-1};$$

$$\alpha = tg^{-1}\frac{0.7}{-1} + 180$$

$$\alpha = -35^o + 180 = 145^o$$

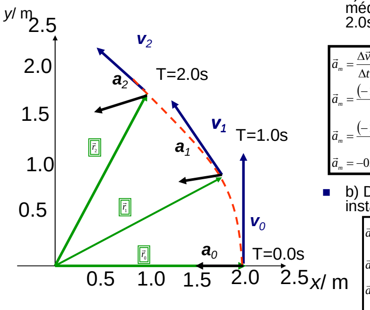
Resolução **Parte II**



Parte I

- a) Determine o vetor aceleração média no intervalo de tempo [0.0s, 2.0s].
- b) Determine a aceleração instantânea em t=2.0s

Resolução **Parte II**

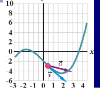


- a) Determine o vetor aceleração média no intervalo de tempo [0.0s, 2.0s].

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{(t=2.0s)} - \vec{v}_{(t=2.0s)}}{2.0-0.0}$$
$$\vec{a}_m = \frac{(-1.0)\hat{i} + (0.7)\hat{j} - (0.0)\hat{i} + (1.0)\hat{j}}{(2.0-0.0)} \quad \mathrm{m/s^2}$$
$$\vec{a}_m = \frac{(-1.0)\hat{i} - (0.3)\hat{j}}{2}$$
$$\vec{a}_m = -0.5\hat{i} - 0.15\hat{j} \quad \mathrm{m/s^2}$$

- b) Determine a aceleração instantânea em t=2.0s

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(-0.5t)\hat{i} + (1.0 - 0.075t^2)\hat{j}$$
$$\vec{a}(t) = (-0.5)\hat{i} - (0.15t)\hat{j} \ \mathrm{m/s^2}$$
$$\vec{a}_{(t=2.0s)} = (-0.5)\hat{i} - (0.3)\hat{j} \ \mathrm{m/s^2}$$



Exercício #2

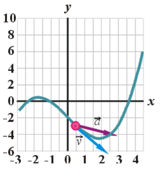
- Uma partícula movimenta-se ao longo de uma curva descrita por

$$\boxed{y = 0.2x^3 - 2x - 2}$$

onde x e y estão medidos em metro. Sabendo que v_y= -2 m.s^{-1} e a_y= - 1 m.s^{-2} no ponto (x,y) = (0.514,-3), determine nesse ponto

- a) A velocidade da partícula;
- b) A aceleração da partícula;
- c) A intensidade da aceleração normal e tangencial;
- d) O raio de curvatura.

Resolução

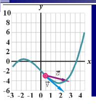


$$\begin{cases} v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = 0.6x^2\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(0.6x^2\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dx}{dt}\right) = 1.2x\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 0.6x^2\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = 0.6(0.514)^2\dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dx}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{dx}{dt} = v_x = 1.086\,m.s^{-1} \\ -1 = 1.2(0.514)(1.086)^2 + 0.6(0.514)^2\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x = 0.938\,m.s^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \left[1.086\hat{i} - 2\hat{j}\right] m.s^{-1} \\ \vec{a} = \left[0.938\hat{i} - 1\hat{j}\right] m.s^{-2} \end{cases}$$



Resolução

■c) A intensidade da aceleração normal e tangencial

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = |\vec{v}||\vec{a}|\cos\beta$$
$$3.019 = (2.276)(1.371)\cos\beta$$
$$\beta = 14{,}67^0$$

$$a_n = 1.37 sen 14.67^0 = 0.347\, m.s^{-2}$$
$$a_t = 1.37\cos 14.67^0 = 1.326\, m.s^{-2}$$

■d) O raio de curvatura

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho = \frac{2.276^2}{0.346} = 14.9\, m$$