

Aula 9

- Representação de números inteiros com sinal (revisão)
 - Sinal e módulo
 - Complemento para um
 - Complemento para dois
- Exemplos de operações aritméticas
- *Overflow* e mecanismos para a sua deteção
- Construção de uma ALU de 32 bits

José Luís Azevedo, Bernardo Cunha, Arnaldo Oliveira, Pedro Lavrador

Era uma vez...

- Era uma vez, num país bué, bué longe, um conselho de ministros...
- O Sr. Primeiro Ministro dirigiu-se aos Srs. Ministros, questionando-os sobre o valor do aumento a atribuir aos funcionários públicos em 2020, para equilibrar ☺☺☺ as perdas dos mesmos nos últimos 11 anos.

Dizei-me senhores ministros

No vosso saber dotado

Qual deve ser o aumento

Pr'ós funcionários do estado

Era uma vez...

- Fácil, disse o Ministro da Cultura: eu acho que devia ser **00000101** €
- Não, retorquiu o Ministro dos Negócios Estrangeiros, para mim devia ser **01000011 01001001 01001110 01000011 01001111** €
- Não concordo, contestou o Ministro do Trabalho, eu cá acho que devia ser **01010110** €
- Nada disso, insurgiu-se o Ministro da Economia. Para sermos justos é necessário um aumento de **01000000101000000000000000000000** €
- Por todos os deuses – levantou-se o Ministro das Finanças irritado – só um cego não vê que o orçamento só suporta um aumento de **10000100** €

Era uma vez...

- O Primeiro Ministro desse país longínquo, conhecido como um hábil negociador, nada sabia de códigos de representação e ficou bastante irritado com as respostas dos seus ministros
- No entanto, não havia razão para tal, uma vez que houve unanimidade nas respostas. A resposta dada por cada ministro foi, na realidade, a mesma; apenas usaram uma linguagem (código) diferente
- A extração da informação requer, assim, o conhecimento do código usado, sob pena de as mensagens não passarem de coleções de bits sem sentido

Era uma vez...

O Ministro da Cultura codificou a sua resposta em **binário**:

$$00000101_2 = 5_{10} \text{ €}$$

O Ministro dos Negócios Estrangeiros usou **ASCII**:

$$01000011 \ 01001001 \ 01001110 \ 01000011 \ 01001111 = \text{"CINCO"} \text{ €}$$

O Ministro do Trabalho usou **ASCII** mas para representar numeração romana:

$$01010110 = \text{"V"} = 5 \text{ €}$$

O Ministro da Economia usou representação em **vírgula flutuante**:

$$01000000101000000000000000000000 = 1.01_2 \times 2^2 = 5 \text{ €}$$

O Ministro das Finanças usou **excesso de $2^{n-1}-1$** (com $n=8$, excesso de 127):

$$10000100_2 = 5_{10} \text{ €}$$

Representação de inteiros

- No sistema árabe, cada algarismo que compõe um dado número tem um peso que é função quer da sua posição no número quer do número de símbolos do alfabeto usado.

- Um número com n dígitos $d_{n-1} d_{n-2} \dots d_1 d_0$ representado neste sistema, pode ser decomposto num polinómio da forma

$$d_{n-1} \cdot b^{n-1} + d_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0$$

em que b é a base de representação e corresponde à dimensão do alfabeto

- Exemplos:

$$1230_{10} = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 0$$

$$110101_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1 = 53_{10}$$

$$721_8 = 7 \times 8^2 + 2 \times 8 + 1 = 465_{10}$$

$$5A8_{16} = 5 \times 16^2 + A \times 16 + 8 = 1448_{10}$$

Representação de inteiros

- Sendo um computador um sistema digital binário, a representação de inteiros faz-se sempre em base 2 (símbolos 0 e 1).
- Por outro lado, como o espaço de armazenamento de informação (numérica ou não) é limitado, a representação de inteiros é também necessariamente limitada.
- **Tipicamente, um inteiro pode ocupar um número de bits igual à dimensão de um registo interno do CPU.**
- A gama de valores inteiros representáveis é, assim, finita, e corresponde ao número máximo de combinações que é possível obter com o número de bits de um registo interno.
- No MIPS, um inteiro ocupa 32 bits, pelo que o número de inteiros representável é:

$$N_{\text{inteiros}} = 2^{32} = 4.294.967.296_{10} = [0 .. 4.294.967.295_{10}]$$

Representação de inteiros

- Os circuitos que realizam operações aritméticas estão igualmente limitados a um número finito de dígitos (bits), geralmente igual à dimensão dos registos internos do CPU.
- Os circuitos aritméticos operam assim em aritmética modular, ou seja em $\text{mod}(2^n)$ em que 'n' é o número de bits de representação. *representacao circular, exemplo, arrays circulares.*
- O maior valor que um resultado aritmético pode tomar será portanto $2^n - 1$, sendo o valor inteiro imediatamente a seguir o valor zero (representação circular).

Representação de inteiros

- Num CPU com registos de 8 bits, por exemplo, o resultado da soma dos números 11001011 e 00110111 seria:

sem o
carry
pode
mos
verific
ar
sem
overfl
ow se
o
result
ado
for
menor
que
um
dos
opera
ndos.

$$11001011 + 00110111 = 1\boxed{00000010}$$

carry

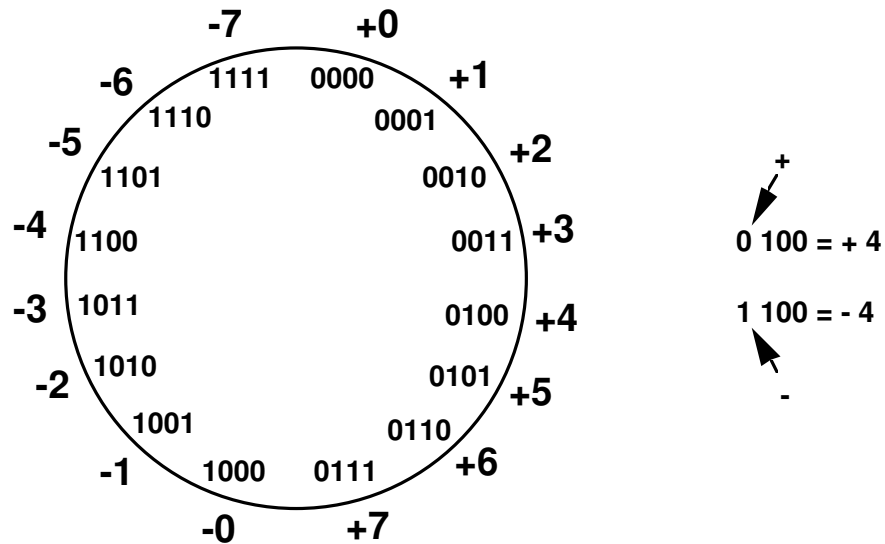
resultado com 8 bits

- No caso em que os operandos são do tipo **unsigned**, o bit **carry** sinaliza que o resultado não cabe num registo de 8 bits, ou seja sinaliza a ocorrência de **overflow**
- No caso em que os operandos são do tipo **signed** (codificados em complemento para 2) o bit de **carry** não tem qualquer significado e é ignorado.

Representação de inteiros negativos

- A representação de números positivos é a mesma na maioria dos sistemas numéricos
- Os maiores problemas colocam-se quando se procura uma forma de representar quantidades negativas
- Os três esquemas mais usados são:
 - sinal e módulo
 - complemento para um
 - complemento para dois
- Por uma questão de simplicidade vamos admitir, na discussão subsequente, que a dimensão do registo interno do CPU é de 4 bits

Representação em sinal e módulo



- O bit mais significativo é usado para representar o sinal:
 - 0 = positivo (ou zero), 1 = negativo
- A magnitude é representada pelos 3 LSBs: 0 (000) a 7 (111)
- Gama de representação para n bits = $\pm 2^{n-1} - 1$
- 2 representações para 0

Representação em sinal e módulo

- Este método de representação de inteiros apresenta os seguintes problemas do ponto de vista da implementação numa ALU:
 - Existem duas representações distintas para um mesmo valor (zero)
 - É necessário comparar as magnitudes dos operandos para determinar o sinal do resultado
 - É necessário implementar um somador e um subtrator distintos
 - O bit de sinal tem de ser tratado independentemente dos restantes
 - 1 olhar para os sinais, se forem iguais faço a soma
 - 2 se os sinais forem diferentes, faco $\text{mod}(\text{maior}) - \text{mod}(\text{menor})$ mais o sinal do maior.

Representação em complemento para um

- **Definição:** Se N é um número positivo, então \bar{N} é negativo e o seu complemento para 1 (complemento falso) é dado por:

$$\bar{N} = (2^n - 1) - N$$

em que n é o número de bits da representação

- **Exemplo:** determinar o complemento para 1 de 5 (com 4 bits)

$$N = 5_{10} = \mathbf{0101}_2$$

$$2^n = 2^4 = 10000$$

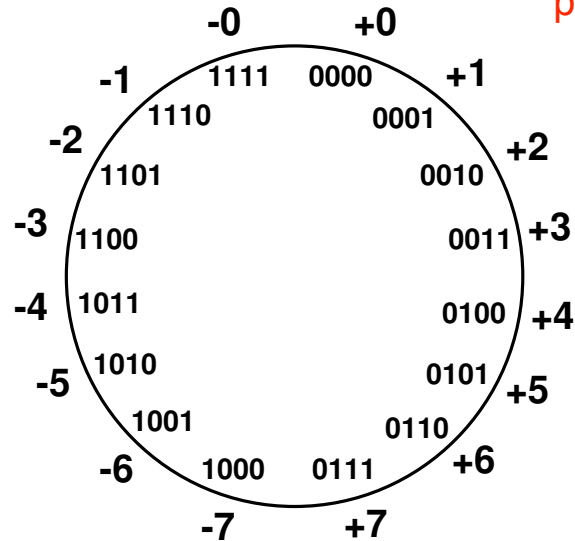
$$(2^n - 1) = 10000 - 1 = 1111$$

$$(2^n - 1) - N = 1111 - 0101 = \mathbf{1010}$$

- **Método prático:** inverter todos os bits do valor original

Representação em complemento para um

por exemplo: $-2+5 = +3$, passamos pelos dois zeros para ir para o $+3$, e acabamos em $+2$, precisamos de somar $+1$.



os dois zeros criam um problem arithemetix.

$\begin{array}{c} + \\ \swarrow \\ 0\ 100 = +4 \\ \searrow \\ 1\ 011 = -4 \\ - \end{array}$

- O bit mais significativo também pode ser interpretado como sinal: 0 = valor positivo, 1 = valor negativo
- A subtração faz-se adicionando o complemento para 1
- Há 2 representações para 0 (tem implicações no modo como as operações são realizadas)

Representação em complemento para dois

- **Definição:** Se N é um número positivo, então N^* é o seu complemento para 2 (complemento verdadeiro) e é dado por:

$$N^* = 2^n - N$$

em que “ n ” é o número de bits da representação

- **Exemplo:** determinar o complemento para 2 de 5 (com 4 bits)

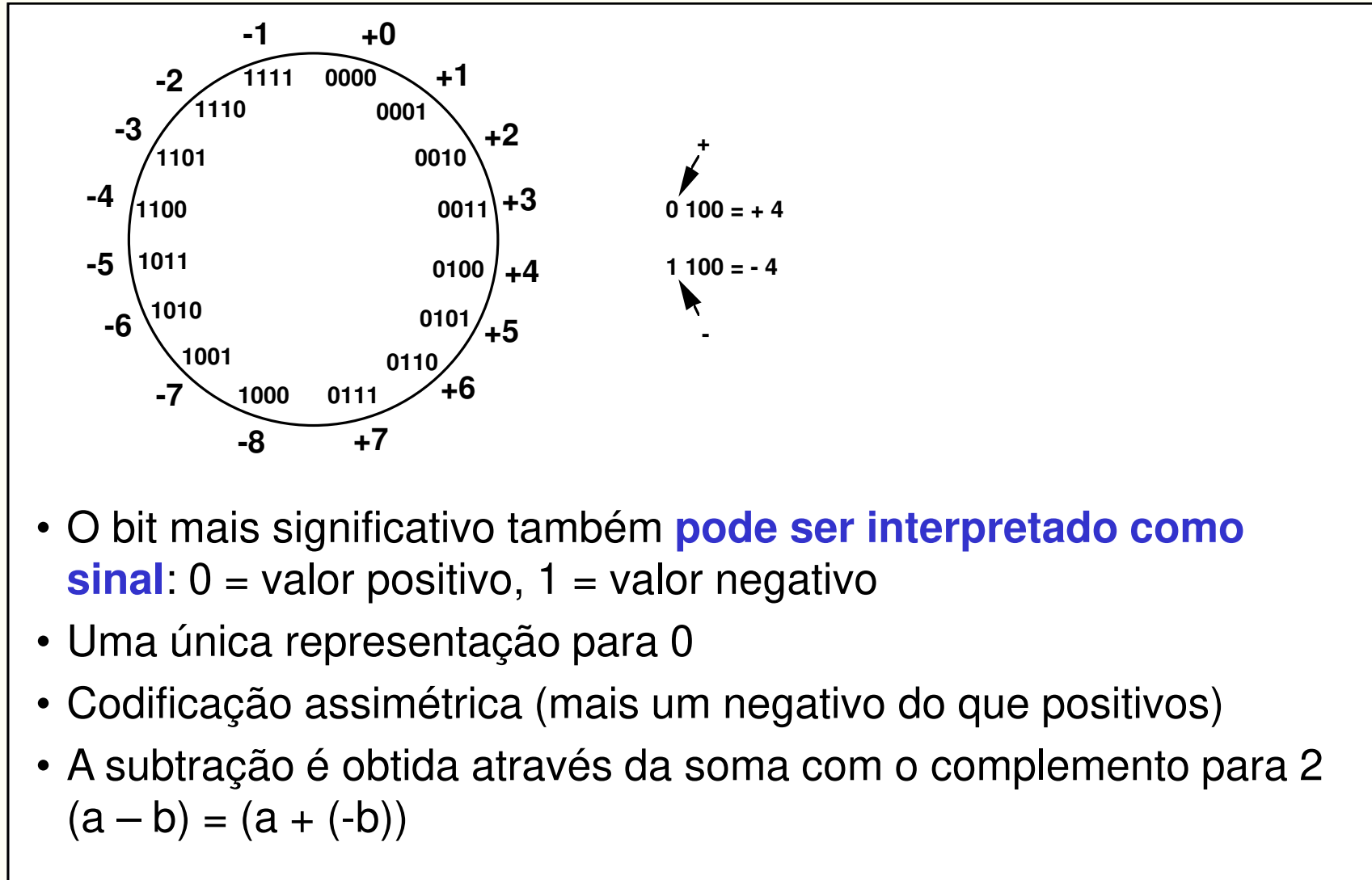
$$N = 5_{10} = 0101_2$$

$$2^n = 2^4 = 10000$$

$$2^n - N = 10000 - 0101 = 1011 = N^*$$

- **Método prático:** inverter todos os bits do valor original e somar 1

Representação em complemento para dois



Representação em complemento para dois

- Uma quantidade de 32 bits codificada em complemento para 2 pode ser representada pelo seguinte polinómio:

$$-(a_{31} \cdot 2^{31}) + (a_{30} \cdot 2^{30}) + \dots + (a_1 \cdot 2^1) + (a_0 \cdot 2^0)$$

Onde o bit de sinal (a_{31}) é multiplicado por -2^{31} e os restantes pela versão positiva do respetivo peso

- **Exemplo:** Qual o valor representado pela quantidade 10100101_2 , supondo uma representação com 8 bits e uma codificação em complemento para 2?
 - R1: $10100101_2 = -(1 \times 2^7) + (1 \times 2^5) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^0)$
 $= -128 + 32 + 4 + 1 = -91_{10}$
 - R2: Complemento para 2 de $10100101 = 01011010 + 1$
 $= 01011011_2 = 5B_{16} = 91_{10}$. Ou seja, o valor representado em sinal e módulo, base 10, é -91_{10}

Representação em complemento para dois

- Exemplos de operações

$$\begin{array}{r} 4 \quad 0100 \\ + 3 \quad 0011 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \quad 0111 \end{array}$$

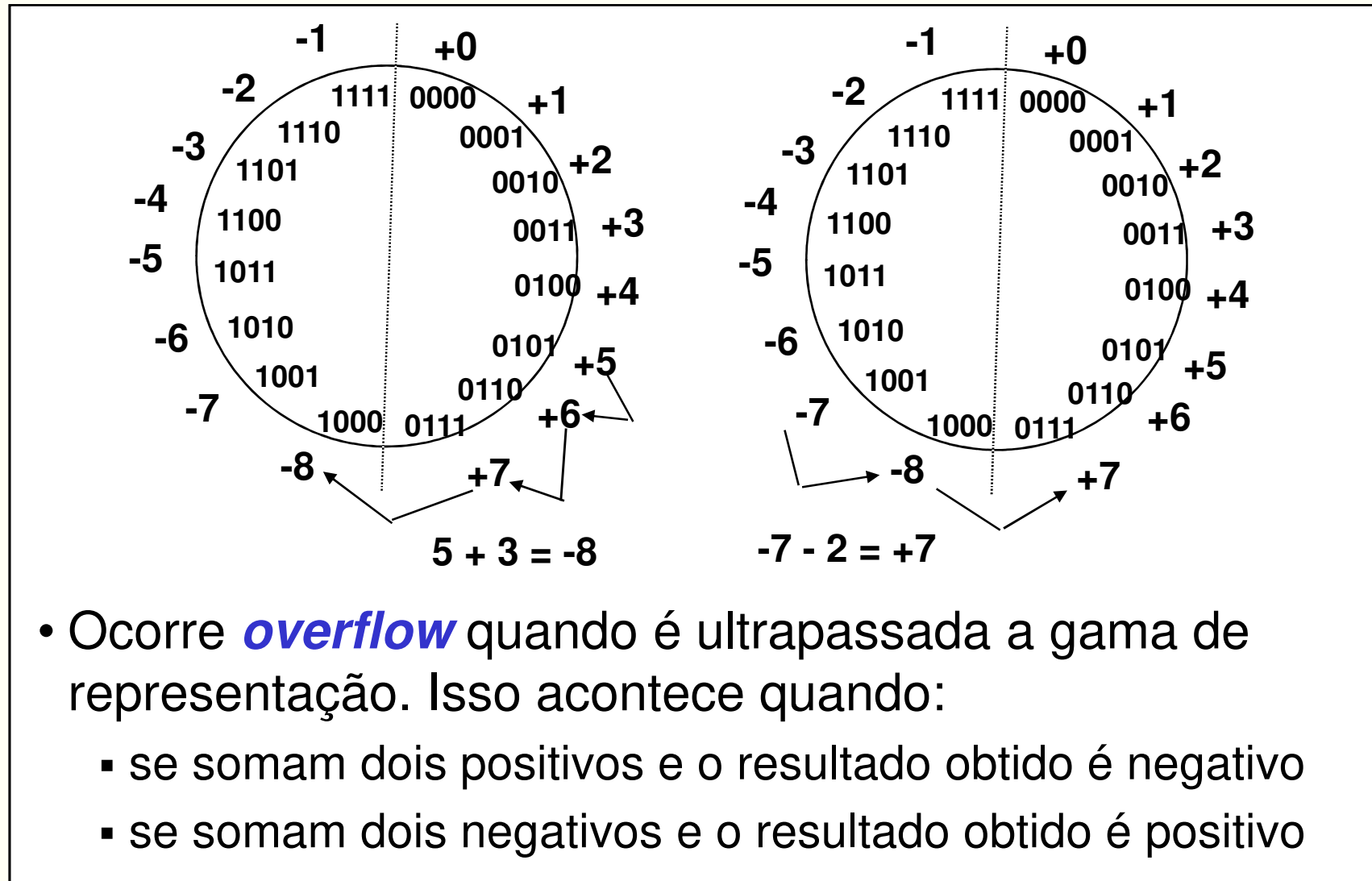
$$\begin{array}{r} 4 \quad 0100 \\ - 3 \quad 1101 \\ \hline 1 \quad 10001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 1100 \\ + (-3) \quad 1101 \\ \hline -7 \quad 11001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4 \quad 1100 \\ + 3 \quad 0011 \\ \hline -1 \quad 1111 \end{array}$$

- Este esquema simples de adição com sinal torna o complemento para 2 o preferido para representação de inteiros em arquitetura de computadores

Overflow em complemento para 2



- Ocorre **overflow** quando é ultrapassada a gama de representação. Isso acontece quando:
 - se somam dois positivos e o resultado obtido é negativo
 - se somam dois negativos e o resultado obtido é positivo

Overflow em complemento para 2

<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;"> $0000 \leftarrow \text{carry}$ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: right;"> 5 $\underline{2}$ 7 </div> <div style="text-align: left;"> 0101 $\underline{0010}$ 0111 </div> </div> <p style="text-align: center;">Sem overflow</p>	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;"> 1111 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: right;"> -3 $\underline{-5}$ -8 </div> <div style="text-align: left;"> 1101 $\underline{1011}$ 1000 </div> </div> <p style="text-align: center;">Sem overflow</p>
<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;"> 0111 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: right;"> 5 $\underline{3}$ -8 </div> <div style="text-align: left;"> 0101 $\underline{0011}$ 01000 </div> </div> <p style="text-align: center;">Overflow</p>	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;"> 1000 </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: right;"> -7 $\underline{-2}$ 7 </div> <div style="text-align: left;"> 1001 $\underline{1110}$ 0111 </div> </div> <p style="text-align: center;">Overflow</p>

A situação de **overflow ocorre** quando o *carry-in* do bit de sinal não é igual ao *carry-out*, ou seja, quando:

$$C_{n-1} \oplus C_n = 1$$

Overflow em operações aritméticas

- **Em operações sem sinal:**

- Quando $A+B > 2^n-1$ ou $A-B$ c/ $B > A$
- O bit de *carry* $C_n = 1$ sinaliza a ocorrência de *overflow*

- **Em operações com sinal:**

- Quando $A + B > 2^{n-1}-1$ ou $A + B < -2^{n-1}$
 - $OVF = (C_{n-1} \cdot \overline{C_n}) + (\overline{C_{n-1}} \cdot C_n) = C_{n-1} \oplus C_n$
- Alternativamente, não tendo acesso aos bits intermédios de carry, ($R = A + B$):
 - $OVF = R_{n-1} \cdot \overline{A_{n-1}} \cdot \overline{B_{n-1}} + \overline{R_{n-1}} \cdot A_{n-1} \cdot B_{n-1}$

- Como fazer a deteção de *overflow* em operações com e sem sinal no MIPS?

Construção de uma ALU de 32 bits

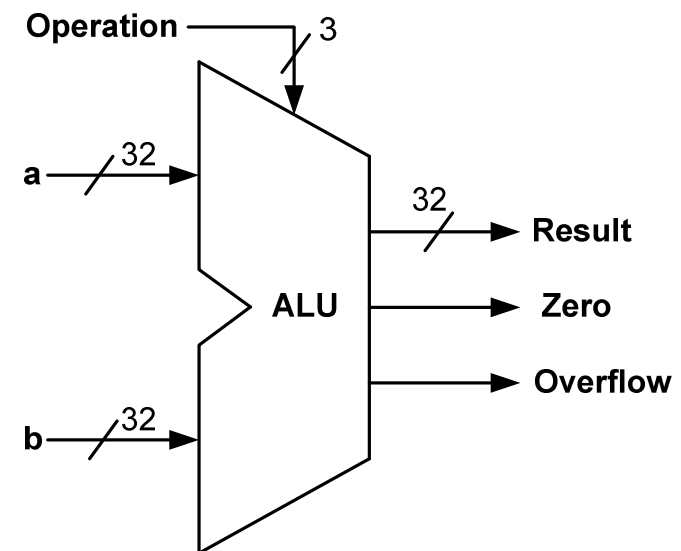
- A ALU deverá implementar as operações:

- AND, OR
- ADD, SUB
- SLT (set if less than)

- Deverá ainda:

- Detetar e sinalizar *overflow*
- Sinalizar resultado igual a zero

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than



Bloco funcional
correspondente a uma
ALU de 32 bits

Construção de uma ALU de 32 bits – VHDL

```
entity alu32 is
  port ( a      : in  std_logic_vector(31 downto 0);
        b      : in  std_logic_vector(31 downto 0);
        oper    : in  std_logic_vector(2  downto 0);
        res     : out std_logic_vector(31 downto 0);
        zero    : out std_logic;
        ovf     : out std_logic);
end alu32;
```

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than

```
architecture Behavioral of alu32 is
  signal s_res : std_logic_vector(31 downto 0);
  signal s_b   : unsigned(31 downto 0);
begin
  s_b  <= not(unsigned(b)) + 1 when oper = "110" else
         unsigned(b); -- complemento para 2 (se subtração)
  res  <= s_res;
  zero <= '1' when s_res = X"00000000" else '0';
  ovf  <= (not a(31) and not s_b(31) and s_res(31)) or
         (a(31) and s_b(31) and not s_res(31));
  -- (continua)
```

Construção de uma ALU de 32 bits (continuação)

```
process(oper, a, b, s_b)
begin
  case oper is
    when "000" =>    -- AND
      s_res <= a and b;
    when "001" =>    -- OR
      s_res <= a or b;
    when "010" =>    -- ADD
      s_res <= std_logic_vector(unsigned(a) + s_b);
    when "110" =>    -- SUB
      s_res <= std_logic_vector(unsigned(a) + s_b);
    when "111" =>    -- SLT
      if(signed(a) < signed(b)) then
        s_res <= X"00000001";
      else
        s_res <= (others => '0');
      end if;
    when others =>
      s_res <= (others => '-');
  end case;
end process;
end Behavioral;
```

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than

ALU – resultado da simulação

