Parte I: Fundamentos de mecânica Clássica

Capítulo I.1.1 Cinemática da partícula

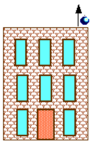
Aula 3

Maria Rute André

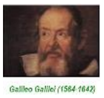
Queda livre

Galileo Galilei (1564-1642)

- Corpos em queda livre movimentam-se com aceleração constante.
- Objectos com diferentes massas caem com a mesma aceleração constante desde que a resistência do ar seja suficientemente pequena, de tal modo que possa ser desprezada.
- Nesta aproximação, desprezam-se ainda os efeitos da:
  - rotação da Terra;
  - variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude de um lugar.



Queda livre

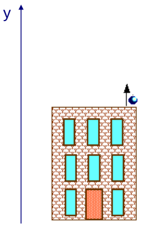


Galileo Galilei (1564-1642)

$$\vec{g} = -9.8\,\hat{j}$$
$$v = v_0 - g\,(t - t_0)$$
$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

- **Aceleração da gravidade, $\vec{g}$ na Terra**

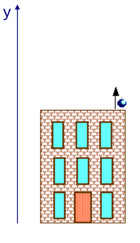
$\boxed{g\text{~}9.8\ m/s^2}$



Exemplo 1-5

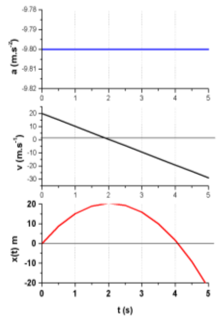
- **Lançamento de projéctil na vertical**
- Uma bola é lançada verticalmente para cima, do alto de um edifício, com uma velocidade inicial de 20m.s^{-1}

$$y = 20t - 4.9t^2\ (m)$$
$$v = 20 - 9.8t\ \left(m.s^{-1}\right)$$
$$a = -9.8\left(m.s^{-2}\right)$$



Exemplo 1-5

- **Lançamento de projéctil na vertical**
- De t=0s até t=2.04 s a bola sobe
- (v diminui até que se anula no ponto de altura máxima) – Movimento é uniformemente retardado.
- Para t> 2.04s a bola desce (a velocidade aumenta linearmente com t) – Movimento é uniformemente acelerado.

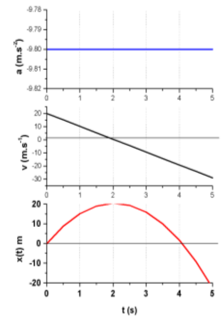


- Tempo de subida

$$v = v_o - gt$$
$$0 = 20 - 9{,}8t \Rightarrow t = 2{,}04\ s$$

Exemplo 1-5

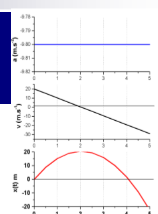
- **Lançamento de projéctil na vertical**
- O ponto mais alto da trajectória ocorre quando **dy/dt=0**, t=2.04s e corresponde ~20m
- O tempo de subida (2.04s) é igual ao tempo que demora a descer até à posição inicial (4.08s)



- Altura máxima

$$y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$y = 0 + 20(2{,}04) - \frac{1}{2} 9{,}8 (2{,}04)^2$$
$$y \approx 20\ m$$

Exemplo 1-5



A intensidade da velocidade com que o projéctil toca no solo (considere que o edifício tem uma altura de 25 m)

- Tempo de demora a tocar o solo

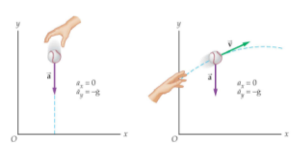
$$y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$-25 = 0 + 20\,t - \frac{1}{2} 9{,}8\,t^2$$
$$t = 5{,}08\ s$$

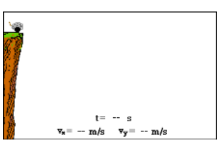
- Intensidade da velocidade quando o projéctil toca o solo

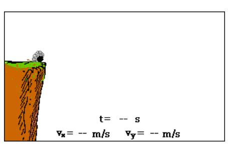
$$v = v_o - gt$$
$$v = 20 - 9{,}8(5{,}08)$$
$$v \approx -30\ m.s^{-1}$$
$$\vec{v} \approx -30\,\hat{j}\ (m.s^{-1})$$
$$|\vec{v}| \approx 30\ m.s^{-1}$$

Projéctil lançado obliquamente

caso particular de movimento curvilíneo no plano







movimento curvilíneo no plano (ex. xy) descrito em componentes rectangulares

- **Usando componentes rectangulares a posição velocidade e aceleração podem ser representadas na sua forma cartesiana como**

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\hat{i}+\frac{dy(t)}{dt}\hat{j}=v_x(t)\hat{i}+v_y(t)\hat{j}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{i}+\frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{j}=\frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i}+\frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j}=a_x(t)\hat{i}+a_y(t)\hat{j}$$

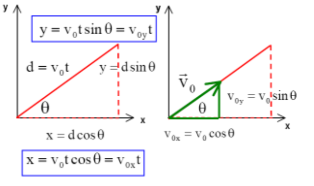
movimento curvilíneo no plano (ex. xy) descrito em componentes rectangulares

v=c^{te}

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t \end{cases}$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0=v_{0x}\,\hat{i}+v_{0y}\,\hat{j}=$$
$$=(v_0\cos\theta)\hat{i}+(v_0 sen\,\theta)\hat{j}$$



movimento curvilíneo no plano (ex. xy) descrito em componentes rectangulares

a=c^{te}

$$\vec{a}(t)=a_x\,\hat{i}+a_y\hat{j} \longrightarrow \begin{cases} a_x = c^{te} \\ a_y = c^{te} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t)=v_x\,\hat{i}+v_y\,\hat{j} \longrightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$

$$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j} \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y} + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

Exemplo 1-6

- O movimento de duas partículas no plano xy é descrito pelos seguintes vectores de posição:

$$\vec{r}_A = \left[3t\,\hat{i} + 9t\,(2-t)\,\hat{j}\right]m$$
$$\vec{r}_B = \left[3(t^2-2t+2)\hat{i} + 3(t-2)\,\hat{j}\right]m$$

- Determine o ponto no qual as partículas colidem e a velocidade das mesmas imediatamente antes da colisão

O ponto de colisão requer

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B$$

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 3(t^2-2t+2) \\ 9t\,(2-t) = 3(t-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t + 2 = 0 \\ 3t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \vee t = 1\,s \\ t = 2 \vee t = -\frac{1}{3}\,s \end{cases}$$

As partículas colidem em t=2s. Substituindo em

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B$$

$$\begin{cases} x_A = x_B = 6m \\ y_A = y_B = 0 \end{cases}$$

Exemplo 1-6

- O movimento de duas partículas no plano xy é descrito pelos seguintes vectores de posição:

$$\vec{r}_A = \left[3t\,\hat{i} + 9t\,(2-t)\,\hat{j}\right] m$$
$$\vec{r}_B = \left[3\left(t^2 - 2t + 2\right)\hat{i} + 3(t-2)\,\hat{j}\right] m$$

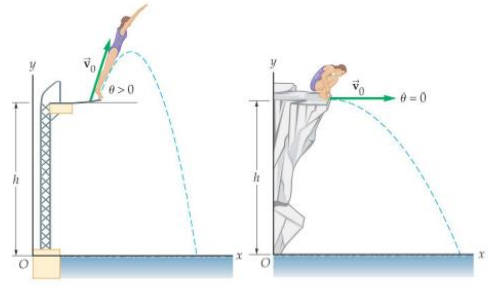
- Determine o ponto no qual as partículas colidem e a velocidade das mesmas imediatamente antes da colisão

Velocidade

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \left[3\hat{i} + (18-18t)\,\hat{j}\right] m.s^{-1}$$
$$\vec{v}_A(t=2s) = \left[3\hat{i} - 18\,\hat{j}\right] m.s^{-1}$$
$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \left[(6t-6)\,\hat{i} + 3\,\hat{j}\right] m.s^{-1}$$
$$\vec{v}_B(t=2s) = \left[6\,\hat{i} + 3\,\hat{j}\right] m.s^{-1}$$

Projéctil lançado obliquamente

caso particular de movimento curvilíneo no plano a=c^te

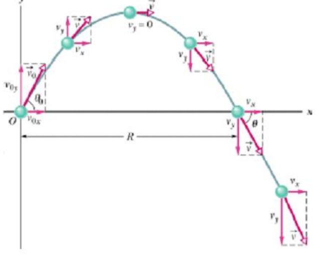


Projéctil lançado obliquamente

resistência do ar ignorada
aceleração gravítica c^te e dirigida para o centro da Terra
rotação da Terra ignorada

$$\vec{a} = \vec{g}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}\,(t - t_o)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t-t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t-t_o)^2$$

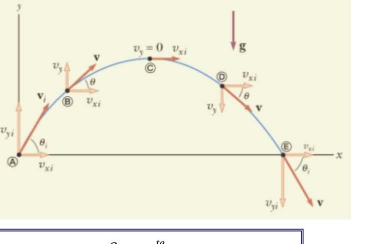
$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



Projéctil lançado obliquamente

$$\vec{a} = \vec{g}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}\,(t - t_o)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t-t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t-t_o)^2$$

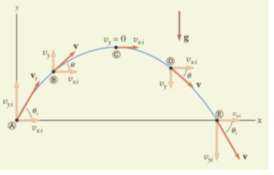
$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x = v_{x,0} = v_0 \cos\theta_i = c^{te} \\ v_y = v_{y,0} - g\,(t-t_0) = v_0 sen\theta_i - g\,(t-t_0) \end{cases}$$

Projéctil lançado obliquamente

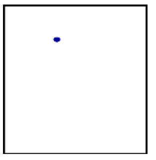
$$\vec{a}(t):\begin{cases}a_x = 0\\ a_y = -g\end{cases}$$

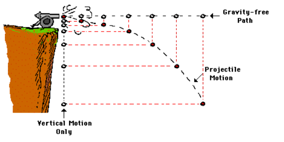


$$\vec{v}(t):\begin{cases}v_x = v_{x,0} = v_0\cos\theta_i = c^{te}\\ v_y = v_{y,0} - g(t-t_0) = v_0 sen\theta_i - g(t-t_0)\end{cases}$$

$$\vec{r}(t):\begin{cases}x = x_0 + v_{x,0}(t-t_0) = x_0 + (v_0\cos\theta_i)(t-t_0)\\ y = y_0 + v_{y,0}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 = y_0 + (v_0 sen\theta_i)(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2\end{cases}$$

Projéctil lançado obliquamente



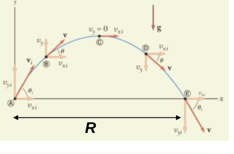


Movimento rectilíneo uniforme segundo xx'

Movimento rectilíneo uniformemente variado segundo yy'

Projéctil lançado obliquamente

Qual o alcance máximo, $x_{máx}$=R?



$$v_{x,0} = v_0\cos\theta;\quad v_{y,0} = v_0\sin\theta$$

$$R = 2v_{x,0}t;\quad 0 = v_{y,0} - gt;\quad t = v_{y,0}/g$$

$$R = 2v_{x,0}v_{y,0}/g = 2v_0^2\sin\theta\cos\theta/g$$

$$\boxed{R = (v_0^2/g)\sin 2\theta}$$

Projéctil lançado obliquamente

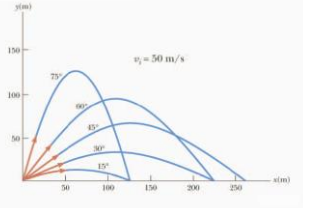
Qual o alcance máximo, $x_{máx}$=R?

$$\boxed{R = (v_0^2/g)\sin 2\theta}$$

$$\boxed{(x_0, y_0) = (0,0)}$$

Alcance máx θ_0 =45º

sen $(2\theta_0)$=1 ; $2\theta_0$ =90º



Projéctil lançado obliquamente

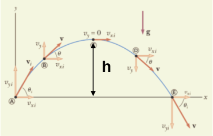
Qual a altura máxima, $y_{máx}$=h?

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta; \quad v_{y,0} = v_0 \sin\theta$$

$$t = v_{y,0} / g$$

$$h = h_0 + v_{y,0}\left(v_{y,0}/g\right) - \frac{1}{2}g\left(v_{y,0}/g\right)^2$$

$$h = h_0 + \frac{v_{y,0}^2}{2g} = h_0 + \boxed{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$



Projéctil lançado obliquamente

Equação da trajectória

$$(x_0 = 0;\ h_0 = 0)$$

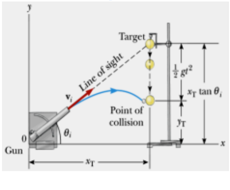
$$x = x_0 + v_{x,0}(t - t_0); \quad h = h_0 + v_{y,0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

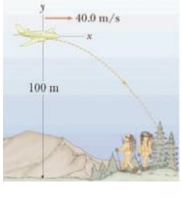
$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta_0; \quad v_{x,0} = v_0 \sin\theta_0$$

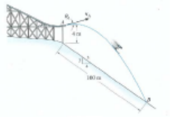
$$\boxed{h = x(\tan\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}}$$

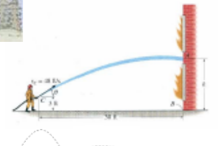
Projéctil lançado obliquamente

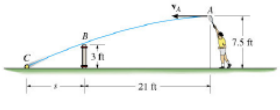
Exemplos

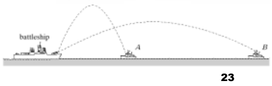












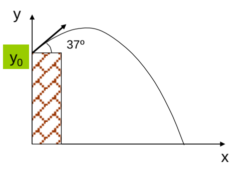
Exemplo 1-7

Um projéctil é lançado do topo de um edifício que tem uma altura de 125 m fazendo um ângulo de 37º com a horizontal. No instante inicial (t_0 = 0 s) a velocidade do projéctil é igual a 105 m/s.

a) Determine o vector velocidade do projéctil no instante inicial.

b) Determine o tempo de voo do projéctil até este embater no chão e o seu alcance.

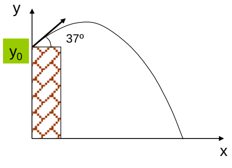
c) Determine a altura máxima que o projéctil atinge.



Exemplo 1-7

- **Solução**

$$\vec{g} = -9{,}8\hat{j} \quad (m.s^{-2})$$
$$\vec{y}_o = 125\hat{j} \quad (m)$$
$$|\vec{v}_o| = v_0 = 105 \quad (m.s^{-1})$$
$$\theta = 37^o$$



$$a)\ \vec{v}_0 = v_0 \cos 37^o\, \vec{i} + v_0 \sin 37^o\, \vec{j}$$
$$= 83.9\vec{i} + 63.2\vec{j}$$
$$b)\ y = 0$$
$$y = y_0 + v_{oy}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$0 = 125 + 63.2\, t - 4.9\, t^2$$
$$tvoo = 14.6\, s$$
$$x = v_{ox}\, t$$
$$= 1224 m$$
$$c)\ v_y = 0$$
$$v_y = v_{oy} - g\, t_{y\max}$$
$$t_{y\max} = v_{oy} / g = 6.4 s$$
$$y = y_o + v_{oy}\, t - 1/2 g t^2$$
$$y = 125 + 63.2\, t_{y\max} - 4.9\, t_{y\max}{}^2 = 328.8 m$$