Teoria Axiomática dos Conjuntos

Beatriz de Faria, 11201810015

Março, 2021

1 Exercício 3.3.

O conjunto $\bigcap A$ é definido por:

$$x \in \bigcap A \Leftrightarrow \forall a \in A(x \in a)$$

Queremos provar que:

(i) $\emptyset \in x$
De fato, como $a \in A \Rightarrow$ a é indutivo. Então, pela definição de conjunto indutivo, $\forall a \in A(\emptyset \in a)$,isto é, $\emptyset \in x$.

(ii) $z \in x \Rightarrow s(z) \in x$
Fixe um $z \in x$ qualquer, como $z \in x \Rightarrow \forall a \in A(z \in a)$. Só que, $a \in A \Rightarrow$ a é indutivo. Ou seja, $\forall a \in A(s(z) \in a)$. Portanto $s(z) \in x$.

q.e.d

2 Exercício 3.14.

Por definição:

$$m \leq n \Leftrightarrow (m \in n \vee m = n)$$

Disso, temos que:

$$m < n \Leftrightarrow (m \leq n \wedge m \neq n)$$

é equivalente a dizer:

$$m < n \Leftrightarrow ((m \in n \vee m = n) \wedge m \neq n)$$

Note que não pode ocorrer m = n. Portanto, $m \in n$

q.e.d

3 Exercício 3.17.

Fixe $n \in \omega$ qualquer

($\Rightarrow$)

Como ω é um conjunto indutivo, $\forall x \in \omega, s(x) \in \omega$. Suponha, por absurdo, que $\nexists k : s(k) = n$, além disso, $\forall a$ tal que a é um conjunto indutivo $\omega \subseteq a$. Seja a o conjunto construído da seguinte forma: $\forall y(y \in a \Leftrightarrow y = \emptyset \vee$ y é o sucessor de algum elemento de a). Note que existe um conjunto indutivo que satisfaz as hipóteses colocadas.

Como $\omega \subseteq a$, então $\forall y \in \omega(y \in a)$. Então, como n não pode ser o sucessor de um elemento k e $\forall y \in \omega(y = \emptyset \vee y = s(k))$ para algum k em ω. Disto temos que $n = \emptyset$ o que contradiz nossa hipótese.

($\Leftarrow$)

Essencialmente a mesma coisa feita anteriormente só que sem a parte do absurdo.

q.e.d

4 Exercício 3.18.

(a)

Fixe um $n \in \omega$ qualquer.

Como ω é indutivo, $s(n) \in \omega$. Pela nossa definição de sucessor:

$$s(n) = n \cup \{n\} = \{n, \{n\}\}$$

O axioma das partes nos dá que:

$$\therefore n \in s(n) \wedge s(n) \in \omega \Rightarrow n \subseteq \omega$$

q.e.d

(b)

Seja $n \in \omega : n \neq \emptyset$. Queremos provar que:

$$n = \{m \in \omega : m < n\} = \{m \in \omega : m \in n\}$$

Caso 1. $n = \emptyset$

$$\therefore \nexists m \in n$$

Nossa proposição é valida por vacuidade *(é? Não sei se provei ou não, mas acho que é isso)*

Caso 2. $n \neq \emptyset$

Pelo exercício 3.17 sabemos que:

$$\exists k \in \omega : n = s(k) = \{0, 1, 2, ..., k\}$$

Temos que mostrar que o conjunto $\{0, 1, 2, ..., k\} = \{m \in \omega : m \in n\}$. Para tanto, fixe um $x \in \{0, 1, 2, ..., k\}$ qualquer. Note que $x \in n$ pois $s(k) = n$, devemos mostrar, portanto, que $x \in \omega$. Como $x \in s(k) \wedge s(k) \in \omega$, então, pela transitividade de ω, $x \in \omega$

Fixe um $y \in \{m \in \omega : m \in n\}$ qualquer, $y \in \omega \wedge y \in n$ como $y \in n \Rightarrow y \in s(k) \because n = s(k)$

q.e.d

(c)

($\Rightarrow$)

Temos por hipótese que: $m \in s(n)$ (Lema 3.10). Portanto:

$$m \in n \cup \{n\}$$

Caso 1. $m \in \{n\}$

Neste caso, por definição, $m \subseteq n$

Caso 2. $m \in n$

Temos, então, pelo lema 3.12 que:

$$s(m) \leq n$$

Logo,

$$s(m) \in n \vee s(m) = n$$

Caso 2.1. $s(m) \in n$

$$m \in s(m) \wedge s(m) \in n$$

$$\therefore m \subseteq n$$

Caso 2.2. $s(m) = n$

$$n = m \cup \{m\}$$

$$m \in \{m\} \wedge \{m\} \in n$$

$$\therefore m \subseteq n$$

($\Leftarrow$)

Temos, por hipótese que $m \subseteq n$, queremos mostrar que $m \in n \vee m = n$. Suponha, por absurdo, que $m \notin n \wedge m \neq n$.

$$\exists x : m \in x \wedge x \subseteq m \tag{1}$$

Ou seja:

$$\forall y (y \subseteq a \Leftrightarrow \forall b \in y (b \in a))$$

Isso quer dizer que podemos reescrever (1) como:

$$m \in m$$

Mas isto é um absurdo, pois $m \in \omega$ e omega é um ordinal.

Não sei se posso usar essa informação aqui D: (em teoria no 3.18 a gente ainda não viu ordinais), mas não consegui provar a partir do item (b)

q.e.d

5 Exercício 4.17.

Nem se dê ao trabalho de corrigir este e o próximo exercício, eles estão errados, ou, no mínimo, incompletos

Queremos provar que o conjunto: $f\restriction_s = \{(x,y) \in f : x \in s\}$ é um isomorfismo de ordens entre $(s, \trianglelefteq)$ e $(f[s], \preceq)$. Ou seja:

$$\forall x \in s \forall y \in f[s](x \trianglelefteq y \Leftrightarrow f\restriction_s(x) \preceq f\restriction_s(y))$$

Sendo que:

$$y \in f[s] \Leftrightarrow \exists x \in s(f(x) = y)$$

Em outras palavras:

$$\forall x \in s(x \trianglelefteq f(x) \Leftrightarrow f\restriction_s(x) \preceq f\restriction_s(f(x)))$$

6 Exercício 4.21.

(a) Para mostrar que $(S, \preceq)$ é uma ordem total temos que mostrar que:

$$\forall x \in s \forall y \in s(x \preceq y \vee y \preceq x)$$

Suponha por absurdo que não ocorre nenhuma das coisas acima, por hipótese temos que:

$$\forall x, y \in S(x \preceq y \Leftrightarrow x = y \vee (x \neq y \wedge f(\triangle(x,y)) = 0))$$

Portanto, existem $x, y \in S$ tais que:

$$x \neq y \wedge (x = y \vee x(\triangle(x,y) \neq 0))$$

$$x \neq y \wedge x(\triangle(x,y)) \neq 0$$

Como $x \in \{0,1\}$

$$x \neq y \wedge x(\triangle(x,y)) = 1$$

$$\triangle(x,y) = min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}$$

Note que $x(\triangle(x,y)) = x(min\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}) = 1$

7 Exercício 5.5.

(A ordem das demonstrações nesse exercício vai ficar meio esquisita, mas, vamos lá

(i) ⇒ (iii)

Nossa hipótese é que:

$$(x \leq y \wedge x \neq y)$$

Pelo modo como definimos $x \leq y$:

$$((x \in y \vee x = y) \wedge x \neq y)$$

$$((x \in y \wedge x \neq y) \vee (x = y \wedge x \neq y)$$

A segunda condição no nosso **"ou"** não pode ocorrer, portanto, ocorre que:

$$(x \in y \wedge x \neq y)$$

Em particular:

$$x \in y$$

(i) ⇒ (ii)

Queremos provar que:

$$\neg(y \in x \vee y = x)$$

que é a mesma coisa que:

$$(y \notin x \wedge y \neq x)$$

Primeiramente, vamos provar que $y \neq x$. Por hipótese, temos:

$$x \leq y \wedge x \neq y$$

Portanto, $y \neq x$ decorre diretamente da nossa hipótese.

Agora, vamos provar que $y \notin x$. Já sabemos que $(i) \Rightarrow (iii)$, então temos que $x \in y$. Suponha por absurdo, que $y \in x$. Como α é um ordinal e $x \in \alpha$, em particular x é um ordinal

$$\therefore y \subseteq x$$

$$x \in y \wedge y \subseteq x \Rightarrow x \in x$$

O que é um absurdo pois α é um ordinal.
(iii) $\Rightarrow$ **(i)** provamos no item anterior que $x \in y \Rightarrow y \notin x$, devemos provar, portanto, que $x \neq y$, suponha por absurdo que $x = y$, teremos que $x \in x$, o que é um absurdo, pois α é um ordinal.
(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Temos, por hipótese que:

$$x \neq y \wedge y \notin x$$

Suponha, por absurdo que $x \notin y$

Nesse caso $\neg(xRy) \wedge \neg(yRx)$. Ou seja, não há relação de ordem em α, que é um ordinal, então é um absurdo.
(ii) $\Rightarrow$ **(i)**

Como (ii) $\Rightarrow$ (iii) e (iii) $\Rightarrow$ (i), então, (ii) $\Rightarrow$ (i)
(iii) $\Rightarrow$ **(ii)**

Como (iii) $\Rightarrow$ (i) e (i) $\Rightarrow$ (ii), então, (iii) $\Rightarrow$ (ii)

q.e.d

8 Exercício 5.13.

Eu vou separar as bolinhas em números pra organizar melhor

1. $\alpha = \beta \vee \alpha < \beta \vee \beta < \alpha$

Primeiramente vamos provar que uma dessas coisas ocorre (na real, não vamos, porque já o fizemos).

A demonstração é a própria proposição 5.12.

Agora, vamos provar que apenas uma dessas coisas ocorre.

1.1. Suponha, por absurdo, que $\alpha = \beta \wedge \alpha < \beta$

Como $\alpha = \beta$, $\alpha < \alpha \Rightarrow \alpha \in \alpha$, que é um absurdo, pois $\alpha \in \beta$ que é um ordinal.

1.2 Suponha, por absurdo, que $\alpha = \beta \wedge \beta < \alpha$

(Análogo ao anterior)

1.3 Suponha, por absurdo, que $\alpha < \beta \wedge \beta < \alpha$

Portanto $\alpha \in \beta$, como β é um ordinal $\alpha \subseteq \beta$

$$\therefore \beta \in \alpha \wedge \alpha \subseteq \beta$$

$$\beta \in \beta$$

O que é um absurdo, pois $\beta \in \alpha$ e α é um ordinal.

2. $\alpha < \beta \Leftrightarrow (\alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta)$

($\Rightarrow$)

Por hipótese:

$$\alpha \in \beta$$

Por si só, isto já satisfaz que:

$$(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta) \wedge (\alpha \neq \beta)$$

pois isto é o mesmo que dizer que:

$$\alpha \in \beta$$

$(\Leftarrow)$
Temos que:

$$(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta) \wedge (\alpha \neq \beta)$$

Que é o mesmo que dizer:

$$\alpha \in \beta$$

Pois α não pode ser simultaneamente igual e diferente de β.
3. $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$
Temos que:

$$\alpha \subseteq \beta \wedge \beta \subseteq \gamma$$

$$\forall x \in \alpha (x \in \beta)$$

$$\forall y \in \beta (y \in \gamma)$$

Como isto é válido para todo y em β, em particular, é valido para os $x \in a$. Portanto

$$\forall x \in a (x \in \gamma)$$

$$\therefore a \subseteq \gamma$$

$$\alpha \leq \gamma$$

4. $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$
Temos que:

$$\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma$$

Como γ é um ordinal:

$$\alpha \in \beta \wedge \beta \subseteq \gamma$$

$$\forall x \in \beta (x \in \gamma)$$

Como isso é valido para todo x, em particular é válido para α

$$\therefore \alpha \in \gamma = \alpha < \gamma$$

$q.e.d$