Teoria Axiomática dos Conjuntos

Beatriz de Faria, 11201810015

Abril, 2021

1 Exercício 6.26.

1.1 $(\Rightarrow)$

Temos:

$$\exists f : a \to \omega : \forall \alpha, \alpha' \in a(\alpha \neq \alpha' \Rightarrow f(\alpha) \neq f(\alpha'))$$

Seja $b \subseteq \omega$ um conjunto tal que:

$$\beta \in b \Leftrightarrow \exists \alpha \in a : f(\alpha) = \beta$$

Sejam, ainda, $c = \omega \setminus b$ e $g : c \to a$ uma função tal que, fixado um $p \in a$:

$$\forall \gamma \in c(g(\gamma) = p)$$

Construa a função $h : \omega \to a$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} h(x) = f^{-1}(x) \text{ se } x \in b \\ h(x) = g(x) \text{ se } x \in c \end{cases}$$

Como f é uma função, f^{-1} nos garante que $\forall \alpha \in a \exists x \in \omega : h(x) = \alpha$.

1.2 $(\Leftarrow)$

Temos, por hipótese que:

$$\exists g : \omega \in a : \mathrm{im}(g) = a$$

Ou seja:

$$\forall x \in a \exists \alpha \in \omega : g(\alpha) = x$$

Para cada $x \in a$, seja

$$\beta := \bigcap \alpha$$

Onde $\alpha \in \omega \wedge g(\alpha) = x$. Seja $\gamma = \bigcup \beta$, vamos provar que $f := g_\gamma \restriction^{-1} (\alpha)$. Note que, como $\gamma \subseteq \omega$, $f : a \to \gamma$, portanto, $f : a \to \omega$ com $\text{im}(f) = \gamma$. Vamos provar que f é injetora, para tanto, fixe $x, y \in a$ quaisquer.

$$f(x) = \beta = \bigcap \alpha$$

$$f(y) = \beta' = \bigcap \alpha'$$

Se $x \neq y$ e $\bigcap \alpha = \bigcap \alpha'$, então, seja $p \in \bigcap \alpha$, pela nossa definição de $\bigcap \alpha$:

$$g(p) = x$$

E como $\bigcap \alpha = \bigcap \alpha'$

$$g(p) = y$$

$$g(p) = x \neq y = g(p)$$

Portanto g não é uma função, o que contradiz nossa hipótese.

q.e.d

2 Exercício 6.32.

Queremos mostrar que existe uma função bijetora $\phi : \wp(a) \to^a 2$ sendo o conjunto:

$${}^a2 = \{f \subseteq a \times 2 : f \text{ é uma função de a em } 2\}$$

Para tanto, vamos mostrar que existem funções injetoras $g : \wp(a) \to^a 2$ e $h :^a 2 \to \wp(a)$, e a existência de $\phi(x)$ será garantida pelo teorema de Cantor–Bernstein.

2.1 $\wp(a) \precsim^a 2$

Fixe $x, y \in \wp(a)$ arbitrários e seja $g : \wp(a) \to^a 2$ definida da seguinte maneira:

$$g(\alpha) = f : \alpha \to 2$$

Sendo f uma função arbitrária do conjunto ${}^a2$. Note que, sejam $x, y \in \wp(a)$

$$g(x) = f : x \to 2 \wedge g(y) = f : y \to 2$$

$$\therefore f(x) \neq f(y)$$

Se tem uma coisa que aprendi com essa matéria é desenhar certas coisas kk porém, aqui eu desenhei uma coisa e escrevi outra. Digo, pela minha intuição gráfica isso está errado porque podemos ter que f(x) e f(y) são as funções constantes iguais a 2 (por exemplo). Porém, a quantidade de pares ordenados em f(x) é maior que a de f(y) se x > y, e aí faz sentido elas serem diferentes.

2.2 ${}^{a}2 \precsim \wp(a)$

Sejam $f, f' \in^a 2$, defina:

Talvez eu não saiba escrever essa função em linguagem matemática, então, vou por extenso

Dado um par ordenado $(x, y) : xfy$ e $m, n \in a$ com $m \neq n \neq x \neq m$, a função que construiremos $h(f)$ levará

$$\begin{cases} (x, y) \to x \text{ se y} = 0 \\ (x, y) \to m \text{ se y} = 1 \\ (x, y) \to n \text{ se y} = 2 \end{cases}$$

Note que, se a possui menos de 3 elementos, y não pode tomar seus 3 valores, portanto, nesse caso particular, defina x, m como os valores que a função assume. Além disso, quando y não assume o valor 0 teremos que $h(f)$ para y=1 será x (e se y não assume nem 0 nem 1, o valor de h será x quando y =2). *O importante é que o x apareça em algum momento*

Para cada $f \in^a 2$ defina $h'(h(f))$ como $\bigcup h(f)$. Ou seja, a união de todos os valores nos quais foram levados nossos pares ordenados. Note que, se $f \neq f'$, existe, pelo menos, um par ordenado em f que não está em f' (estou supondo isto sem perca de generalidade). Assim

$$h'(h(f)) \neq h'(h(f'))$$

e como $h'(h(f))$ é uma função, temos o que queríamos.

q.e.d

3 Exercício 7.20.

Fixe um ordinal α qualquer e seja β tal que $\alpha < \beta$

3.1 Caso 1. $\beta = 0$

Isto não pode ocorrer pois acarretaria em $\alpha \in \emptyset$, o que é um absurdo.

3.2 Caso 2. $\beta = s(\gamma)$

Logo $\omega_\beta = h(\omega_\gamma)$.

Como $\alpha < \beta$, temos que, $\alpha \leq \gamma$. Logo, pela proposição 7.15:

$$\alpha \leq \omega_\alpha \leq \omega_\gamma \leq h(\omega_\gamma)$$

3.3 Caso 3. β é um ordinal limite não nulo

$$\omega_\beta = \sup_{\gamma\in\beta}\omega_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\beta}\omega_\gamma$$

como $\alpha \leq \gamma$:

$$\omega_\alpha \subset \bigcup_{\gamma\in\beta}\omega_\gamma \therefore \omega_\alpha < \omega_\beta$$

q.e.d

4 Exercício 9.2.

4.1 $(\Rightarrow)$

Seja $(a, \trianglelefteq)$ uma boa ordem e, suponha por absurdo que $\exists f : \omega \to a : \forall n \in \omega(f(s(n)) \triangleleft f(n))$.

Fixe um $n \in \omega$ qualquer. Seja o conjunto γ tal que:

$\begin{cases} f(n) \in \gamma \\ \forall f(n) \in \gamma(f(s(n)) \in \gamma) \end{cases}$

Como $(a, \trianglelefteq)$ é uma boa ordem, $\exists m \in \wp(a) : \forall \alpha \in \wp(a)$ m é mínimo em α. Como isto vale $\forall\alpha$ em particular vale para $\gamma \in \wp(a)$. Logo, fixe um $m \in \gamma$ tal que m é mínimo. Temos que, $m = f(i)$ para algum $i \in \omega$ e, como ω é indutivo $s(i) \in \omega$, portanto, $f(s(i)) \in \gamma$ e, pela nossa hipótese sobre f:

$$f(s(i)) \triangleleft f(i) = m$$

O que é um absurdo.

4.2 $(\Leftarrow)$

Pelo lema de Kuratowski-Zorn temos que se $(a, \trianglelefteq)$ é uma ordem parcial tal que toda cadeia em $(a, \trianglelefteq)$ admite limitante inferior em $(a, \trianglelefteq)$, então $\exists m \in a : m$ é minimal em $(a, \trianglelefteq)$. Note que, como $(a, \trianglelefteq)$ é uma ordem total, se existir tal m, teremos que m é mínimo de $(a, \trianglelefteq)$, que é o que queremos demonstrar.

Portanto, vamos provar que toda cadeia em $(a, \trianglelefteq)$ admite limitante inferior, com isso, o Lema de Kuratowski-Zorn nos garantirá que $(a, \trianglelefteq)$ é uma boa ordem. Suponha, por absurdo que $\exists\gamma \in a$ tal que γ não admite limitante inferior.

Fixe um $x \in \gamma$ qualquer. Temos que $\exists y : y \triangleleft x$ (note que, se ocorre y=x na ordem $\trianglelefteq$, teríamos que x é um limitante inferior). Seja f uma função tal que:

$\begin{cases} x = f(n),\ n \in \omega \\ y = f(s(n)),\ s(n) \in \omega \end{cases}$

Note que isto contradiz nossa hipótese de que não existe tal f.

q.e.d

5 Exercício 9.23.

Primeiramente, vamos mostrar que $\forall n \in \omega \setminus \{0\}(|{}^{n}a| = |a|)$. Para tanto, vamos usar o principio da indução finita.

p(1): $x = s(\emptyset)$

$$|{}^{s(\emptyset)}a| = |{}^{1}a|$$

Que, pela proposição 9.16 sabemos que é o mesmo que $|a|$.

Agora, se $|{}^{x}a| = |a|$, então $|{}^{s(x)}a| = |a|$. Tome $k^{\lambda} := |{}^{x}a|$. Teremos que $k^{\lambda+1} = |{}^{s(x)}a|$. Note que, pela proposição 9.16:

$$k^{\lambda+1} = k^{\lambda} \cdot k^{1} = k^{\lambda} \cdot k$$

Além disso, pela proposição 9.18:

$$k^{\lambda} \cdot k = \max\{k^{\lambda}, k\}$$

Se $k = \max\{k^{\lambda}, k\}$ então:

$$|{}^{s(x)}a| = k = |a|$$

Pela nossa definição de k. Se $k^{\lambda} = \max\{k^{\lambda}, k\}$, temos, pela nossa hipótese de indução que:

$$|{}^{s(x)}a| = k^{\lambda} = |{}^{x}a| = |a|$$

Portanto, $|{}^{n}a| = |a|$. Logo, pela proposição 9.21:

$$\bigcup_{n\in\omega} |{}^{n}a| = |{}^{n}a| \cdot \sup_{x\in{}^{n}a}|x|$$

Note que, $\sup_{x\in{}^{n}a}|x| \leq |{}^{n}a|$. Então, $\max\{|{}^{n}a|, \sup_{x\in{}^{n}a}|x|\} = |{}^{n}a|$, pois $x \in^{n} a$. Já vimos, pela nossa indução que $|{}^{n}a| = |a|$.

$$\therefore \bigcup_{n\in\omega} |{}^{n}a| = |{}^{n}a| \cdot \sup_{x\in{}^{n}a}|x| = |{}^{n}a| = |a|$$

q.e.d

6 Exercício 9.27.

Toda lista tem um que eu não consigo fazer :(não sei porque, quase sempre é o último.