Teoria Axiomática dos Conjuntos

Beatriz de Faria, 11201810015

Fevereiro, 2021

1 Exercício 2.1.

Suponha, por absurdo, que existem 2 conjuntos (x, x') $x \neq x'$ que satisfazem a propriedade:

$$\forall y (y \notin Z) \tag{1}$$

Sendo Z, x ou x'.
Como $x \neq x'$, pelo axioma da existensionalidade temos que:

$$\exists a \in x (a \notin x')$$

(Ou vice-versa, mas, podemos supor a proposição acima sem perda de generalidade.)
Porém, como a afirmação (1) é válida $\forall y$, ela é válida, em particular para a.

$$\therefore a \in x \wedge a \notin x$$

Portanto, não existe tal a.

q.e.d

2 Exercício 2.26

Para que $a \neq \emptyset \wedge \bigcap a = \bigcup a$, precisamos encontrar o conjunto a que satisfaça:

$$\forall z (z \in \bigcup a \Leftrightarrow \exists w (w \in a \wedge z \in w)) \tag{1}$$

$$\forall z (z \in \bigcap a \Leftrightarrow \forall w \in a (z \in w)) \tag{2}$$

Pelo Axioma da existensionalidade:

$$\bigcap a = \bigcup a \Leftrightarrow \forall z (z \in \bigcap a \Leftrightarrow z \in \bigcup a)$$

Em outras palavras, (1) ocorre $\Leftrightarrow$ (2) ocorre:

$$\exists w (w \in a \wedge z \in w) \Leftrightarrow \forall w \in a (z \in w)$$

Note que, se existisse um conjunto $w' \in a$ tal que $\exists s \in w'(s \notin w)$. Logo $s \in \bigcup a$ e $s \notin \bigcap a$, o que contradiz a afirmação acima.

$$\therefore \forall w \in a(w = w)$$

Então podemos classificar a como:

$$a = \{w\}$$

Para um conjunto w qualquer.

3 Exercício 2.27

3.1 i

$$a \subseteq \wp(\bigcup a)$$

Queremos provar a equação acima, primeiramente, podemos reescreve-la como:

$$\forall x \in a \Rightarrow x \in \wp(\bigcup a)$$

Para demonstrar essa proposição, primeiramente, fixe um $x \in a$ qualquer. Dizer que $x \in \wp(\bigcup a)$ é equivalente à dizer que $x \subseteq \bigcup a$. Isto é:

$$\forall y \in x(y \in \bigcup a)$$

Tome um $y \in x$ qualquer, como $x \in a$, então $y \subseteq a$. Ou seja, precisamos mostrar que $a \in \bigcup a$. Para tanto, vamos lembrar a definição de $\bigcup a$

$$\forall z(z \in \bigcup a \Leftrightarrow \exists w(w \in a \land z \in w))$$

Em outras palavras, para mostrar que $a \in \bigcup a$, precisamos de um conjunto w tal que $w \in a \land \forall z \in w(z \in a)$. Note que a existência de w é garantida pelo axioma da especificação:

$$\forall a \exists w \forall z(z \in w \Leftrightarrow (z \in a \land \varphi(z)))$$

No nosso caso:

$$\forall a \exists w \forall z(z \in w \Leftrightarrow (z \in a))$$

$q.e.d$

3.2 iii

Primeiramente, vamos mostrar que $\bigcap(a \cup b) \subseteq (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$. Tome um $x \in \bigcap(a \cup b)$ qualquer. Por definição, sabemos que:

$$\forall w \in a \cup b(x \in w)$$

$$\forall w(w \in a \vee w \in b(x \in w))$$

$$\forall w \in a(x \in w) \wedge \forall w \in b(x \in w)$$

$$x \in \bigcap a \wedge x \in \bigcap b$$

$$\therefore x \in (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$$

Agora, vamos mostrar que $(\bigcap a) \cap (\bigcap b) \subseteq \bigcap(a \cup b)$. Para tanto tome um $x \in (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$ arbitrário.

$$x \in \bigcap a \wedge x \in \bigcap b$$

$$\forall w \in a(x \in w) \wedge \forall w \in b(x \in w)$$

$$\forall w(w \in a \vee w \in b(x \in w))$$

$$\forall w \in a \cup b(x \in w)$$

$$x \in \bigcap(a \cup b)$$

q.e.d

3.3 vi

Primeiramente, vamos provar a ida ($\Rightarrow$)

$$\forall z(z \in \bigcup a \Leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge z \in x)$$

Portanto, podemos reescrever $\bigcup a \subseteq \bigcap b$ como (peço desculpas porque vou escrever mesmo, em linguagem matemática me pareceu um pouco confuso):

Para todo z tal que $z \in x \wedge x \in w$, $z \in y$ para algum $y \in b$

E isto pode ser reescrito, mais uma vez, como:

$$\forall x \in a \forall y \in b(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

Ou seja, $x \subseteq y$
Agora, vamos provar a volta ($\Leftarrow$)

$$\forall z(z \in \bigcup a \Leftrightarrow \exists \alpha \in a \land z \in \alpha) \tag{1}$$

$$\forall n(n \in \bigcap b \Leftrightarrow \forall y \in b(n \in y)) \tag{2}$$

Tome um $z \in \bigcup a$ qualquer. Por hipótese, nós temos que:

$$\forall x \in a \forall y \in b(x \subseteq y)$$

Como isto é válido $\forall x$, em particular, é válido para o conjunto α empregado em (1):

$$\forall z(z \in \bigcup a \Leftrightarrow \exists x \in a \land z \in x)$$

Como $x \in a$, $\forall y \in b$ $(z \in y)$, devido a nossa hipótese. Em outras palavras:

$$z \in \bigcap b$$

$q.e.d$

4 Exercício 2.30

Suponha, por absurdo, que existem 2 conjuntos r e r' que satisfazem:

$$\forall z(z \in R \Leftrightarrow \exists x \in a \exists y \in b : z = (x, y))$$

Sendo a e b dois conjuntos arbitrários e R um conjunto tal que:

$$\forall x \in a \forall y \in b((x, y) \in R) \tag{1}$$

O Axioma da existensionalidade nos diz que:

$$r \neq r' \Leftrightarrow \exists z \in r'(z \notin r) \lor \exists z \in r(z \notin r')$$

Suponha, sem perda de generalidade que, $\exists z \in r'(z \notin r)$. Em outras palavras, existe, no mínimo, um z tal que:

$$z = (x, y) \land (x, y) \notin r$$

Porém, pela equação (1) todo par ordenado formado pelos conjuntos a e $b \in R$, como r é um conjunto que satisfaz essa equação então $z \in r \land z \notin r$

$q.e.d$

5 Exercício 2.36

Queremos provar que existem conjuntos a e b tais que:

$$\forall z(z \in p \Rightarrow \exists r \in a \exists s \in b(z = (r, s)))$$

Por hipótese, temos que, $z \in p \Rightarrow \exists x \exists y(z = (x, y))$, em outras palavras queremos provar que

$$\forall x(z = (x, y) \Rightarrow \exists r(x \in r \wedge r \in a)) \tag{1}$$

$$\forall y(z = (x, y) \Rightarrow \exists s(y \in s \wedge s \in a)) \tag{2}$$

Para tanto, precisamos de conjuntos r e s tais que, $\forall x(z = (x, y) \Rightarrow x \in r)$ e $\forall y(z = (x, y) \Rightarrow y \in s)$. Note que, pelo axioma do par, podemos construir os conjuntos r e s como: $r = \{x\}$ e $s = \{y\}$. Isto nos permite reescrever a hipótese como:

$$z \in p \Rightarrow \exists x \in r \exists y \in s(z = (x, y))$$

Sejam os conjuntos a e b:

$$a = \bigcup r$$

Note que, pela definição de $\bigcup r$ isso satisfaz (1).

$$b = \bigcup s$$

Note que, pela definição de $\bigcup s$ isso satisfaz (2).

q.e.d

6 Exercício 2.40

Queremos mostrar que $\bigcup c$ é uma função que denotaremos pela letra R, isto é:

$$\forall x \in dom(\bigcup c) \exists! y(xRy)$$

Note que

$$x \in dom(\bigcup c) \Leftrightarrow \exists f(dom(f) \in c \wedge x \in dom(f)) \tag{1}$$

Temos por hipótese que:

$$\forall g, h \in c(\forall z \in dom(g) \cap dom(h)(g(z) = h(z))) \tag{2}$$

Como isto vale para quaisquer funções, em particular vale para f (da proposição 1)

Isto nos garante que $\exists y(f(x) = y)$, agora resta mostrar que ele é único. Note que, para que y não seja único, precisamos de um x tal que $x \in dom(g) \wedge x \in dom(h)$, sendo $dom(g)$

e $dom(h)$ o domínio funções quaisquer em c. (se x não pertence a g ou h, x não está no domínio de c. Se x pertence há apenas $dom(g)$ ou $dom(h)$, então y é único, pois x é único).

Então, fixe um x tal que $x \in dom(g) \wedge x \in dom(h)$, note que, pela hipótese (proposição 2), $g(x) = h(x) = y$, portanto y é único.

q.e.d

7 Exercício 2.52

Queremos construir um conjunto b de modo que a função f seja uma bijeção de a em b:

$$\forall x \in a \forall y \in a(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \trianglelefteq f(y))$$

Sendo $\leq$ a ordem parcial de a e $\trianglelefteq$ a ordem parcial de b definida como:

$$\forall x \in b \forall y \in b(x \trianglelefteq y \Leftrightarrow x \subseteq y)$$

A partir disto podemos reescrever nossa proposição inicial como:

$$\forall x \in a \forall y \in a(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subseteq f(y))$$

Ou seja, precisamos construir um conjunto b, de modo que:

$$\forall x \in a \forall y \in a(x \leq y \Leftrightarrow \exists z1, z2 \in b(z1 \subseteq z2))$$

Sendo $z1 = f(x) \wedge z2 = f(y)$. Seja f a função que leva um elemento x de a no conjunto das partes de x, isto é:

$$\forall x \in a \exists z \in b(z = \wp(x))$$

Primeiramente, vamos ver se isto funciona, no caso,

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \subseteq f(y)$$

7.1 $(\Rightarrow)$

$$\forall x \in a \forall y \in a(x \leq y \Rightarrow \wp(x) \subseteq \wp(y)) \tag{1}$$

Pela contrapositiva, podemos dizer que $x > y \Leftrightarrow \wp(x) \not\subseteq \wp(y)$.

Nossa ordem em a nos garante que:

$$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$$

$$\therefore x > y \Rightarrow xRy \wedge \neg(yRx)$$

(tá, eu tô chutando essa parte eu não consigo provar essa afirmação usando apenas $x \neq y \Rightarrow \neg(xRy \vee yRx)$, na real, eu não sei se eu provei ou se $x > y \Rightarrow yRx \wedge \neg(xRy)$ ou ainda eu deveria usar que $\wp(y) \subset \wp(x)$, de toda forma, foi o que consegui fazer)

Portanto, podemos dividir isto em 2 condições:

$$x > y \Rightarrow xRy \Rightarrow \forall z \in R(\exists s \in x \exists r \in y(z = (s,r) = \{\{s\},\{s,r\}\})$$

$$x > y \Rightarrow \neg(yRx) \Rightarrow \exists z \in R(\exists s \in x \forall r \in y(z \neq (r,s) = \{\{r\},\{r,s\}\})$$

Note que, $\{r,s\} = \{s,r\}$

$$\therefore \forall z \exists s \in x \forall r \in y(z = \{\{s\},\{s,r\}\} \neq \{\{r\},\{s,r\}\})$$

$$\exists \alpha(\alpha \in \{s\} \land \alpha \notin \{r\})$$

Note que, $\{s\} \in \wp(x) \land \{r\} \in \wp(y)$. Portanto, $\alpha \subseteq \wp(x) \land \alpha \nsubseteq \wp(y) \Rightarrow p(x) \nsubseteq p(y)$

7.2 $(\Leftarrow)$

$$\forall x \in a \forall y \in a(\wp(x) \subseteq \wp(y) \Rightarrow x \leq y) \tag{1}$$

1. xRx
Queremos chegar em:

$$\wp(x) \subseteq \wp(x) \Rightarrow R \subseteq x^2 = \{\{x\},\{x,x\}\} = \{\{x\},\{x\}\}$$

Note que, $R \subseteq a^2$ e $x \in a$, portanto, $\forall z \in R \exists x \in a(z = \{\{x\},\{x\}\})$
2. xRy $\land$ yRx $\Rightarrow x = y$

$$\forall z \in R(\exists s \in x \exists r \in y(z = \{\{s\},\{s,r\}\})$$

$$\forall z \in R(\exists s \in x \exists r \in y(z = \{\{r\},\{r,s\}\})$$

$$\therefore$$

$$\forall z \in R(\exists s \in x \exists r \in y(z = \{\{r\},\{r,s\}\} \land z = \{\{s\},\{s,r\}\}))$$

Ok, aqui eu desisto, desculpa :(

7.3 f(x) é uma bijeção

Agora, vamos provar que essa função é uma bijeção, isto é:

$$\forall z \in b \exists ! x \in a(z = \wp(x))$$

Sejam $x, y \in a$ e $\wp(x) = \wp(y)$, temos que:

$$z \in \wp(x) \Leftrightarrow z \subseteq x$$

como $\wp(y) = \wp(x)$

$$z \in \wp(y) \Leftrightarrow z \subseteq x$$

pela definição de conjunto das partes:

$$z \subseteq y \Leftrightarrow z \in \wp(y) \Leftrightarrow z \subseteq x$$

Ou seja, $z \in y \Leftrightarrow z \in x$. Pelo axioma da existensionalidade $y = x$