



DEPARTAMENTO  
DE INGENIERÍA  
AEREOESPACIAL



FACULTAD  
DE INGENIERÍA



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

# Trabajo Final

Desarrollo y validación de un simulador aerodinámico bidimensional, potencial, multielemento y no estacionario basado en el método de los paneles

Bruno F. Barra Atarama

Directores:

- Dr. Ing. Julio Marañón Di Leo
- Ing. Ariel Nicolás Gamarra

Coordinador:

- Ing. Claudio Marcelo Rimoldi

La Plata, noviembre 2025

# Introducción

## Motivación

El estudio del flujo alrededor de cuerpos aerodinámicos en problemas no estacionarios es un aspecto fundamental en la ingeniería aeroespacial ya que permite analizar las fuerzas y momentos que actúan sobre vehículos y estructuras inmersos en un fluido con el que interactúan y evolucionan de forma conjunta con el pasar del tiempo.

Ejemplos de este tipo de problemas pueden ser, el estudio de los modos aeroelásticos de una aeronave, la interacción entre una aeronave y la estela de otra, factores de carga durante una maniobra, transitorios por el cambio en la geometría de un ala o elemento aerodinámico en general, caracterización de un rotor y su estela, entre otros.

Dentro de este campo los métodos de resolución numérica han cobrado gran relevancia al permitir el modelado y resolución de problemas complejos, previamente a la realización de ensayos experimentales costosos y sin recurrir a soluciones analíticas de extensa y laboriosa deducción, que además en la mayoría de los casos su aplicación queda limitada a representaciones de problemas físicos sencillos e ideales.

El método de los paneles, el cual es el tema de este trabajo, es una técnica ampliamente utilizada en la aerodinámica computacional para resolver problemas de flujo potencial sin la necesidad de una discretización del fluido en una malla, lo que la hace computacionalmente menos costosa que otros métodos. Además, esta técnica posee variaciones orientadas para flujo de bajas velocidades, transónicas y supersónicas. También, pueden contemplarse efectos viscosos con adaptaciones basadas en teorías de capa límite o consideraciones experimentales.

Esta herramienta propone un equilibrio entre fidelidad de los resultados y el costo computacional que resulta atractivo en muchas aplicaciones en las que pueda utilizarse. Por esto, se considera importante su estudio e implementación.

## Objetivos

En particular, en este trabajo se desarrollará el método de los paneles bidimensional, incompresible, no viscoso, estacionario y no estacionario, multielemento, de paneles rectos con distribuciones de dobletes constantes y vórtices puntuales y con la aplicación de la condición de Neumann.

La bibliografía respecto al tema es vasta, pero muchas veces se encuentra en un formato el cual creo, personalmente, que no ofrece una conexión clara y completa entre la matemática resultante del método y una potencial implementación, lo que considero esencial para un primer acercamiento al método de los paneles.

Por primer acercamiento no quiero dar la impresión de “incompletitud”, sino remarcar que la aplicación desarrollada abarca una pequeña fracción de la amplia familia de formulaciones del método de los paneles. Cada una de las variantes existentes presenta desafíos propios y está orientada a resolver problemas con características particulares, o similares pero con diferente desempeño numérico o diferentes capacidades algorítmicas. En este sentido, si emprendiera la

tarea de implementar la mayoría de estas variantes con fines prácticos, considero que el punto de partida natural sería precisamente el que aborda este trabajo. Así, a partir de los conceptos adquiridos y lecciones aprendidas aquí, podrían desarrollarse las demás variantes con mayor solvencia.

Por lo tanto y concretamente, el presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo de una *API* (*Application Programming Interface*) para la resolución numérica de flujos de la forma ya mencionada y, además, se busca asentar por escrito de manera clara y sintética los fundamentos físicos y matemáticos del método, de forma que el trabajo no conste solo de una herramienta de cálculo, sino también de una guía comprensible y estructurada del método, donde se disponga de forma completa y compatible con el código, lo que hizo falta resolver para producir una aplicación funcional, validada y con desempeño computacional aceptable; facilitando su reutilización y expansión en potenciales, variados e interesantes futuros desarrollos.

## Estructura

El trabajo consiste, entonces, de dos grandes partes, igual de importantes e íntimamente relacionadas entre sí: este documento y la implementación numérica. Esta última incluye una interfaz gráfica portable sencilla, también referida como *GUI*<sup>1</sup>, para mejorar la accesibilidad del programa.

El presente documento se organiza en capítulos, donde:

1. El primero y el segundo presentan los conceptos físicos y matemáticos involucrados en el método.
2. El tercero, el cuarto y el quinto introducen los fundamentos y el desarrollo numérico del método.
3. En el sexto se aborda la conexión con la implementación, profundizándose más en el método desde lo práctico.
4. En el séptimo se realizan experimentos de validación, se analizan los resultados y surgen posibilidades de mejora.
5. En el octavo se sintetizan las conclusiones a las que se arribó.

También, se brinda en el apéndice A un manual de la *GUI*.

En cuanto al *software*, este se dispone en un repositorio de *Git* al que se puede acceder mediante el siguiente *link*<sup>2</sup>:

<https://github.com/bfbarraatarama/Trabajo-Final-UNLP>

Debe mencionarse, que en este no necesariamente se encontrará la versión de la aplicación al momento de la entrega y defensa de este trabajo, sino que podría ser otra revisada y/o mejorada, sujeta a una licencia *PolyForm Noncommercial License 1.0.0* para la libre utilización de lo desarrollado con fines no comerciales, incluyendo los académicos.

En el sexto capítulo, se comentará la estructura del repositorio, pero esta también puede consultarse directamente en este.

Por el espíritu que se le pretendió dar al trabajo, el contenido del repositorio se encuentra completamente documentado para asistir a quien quiera interiorizarse en la implementación

---

<sup>1</sup>Cuando se refiera a *GUI*, no se estará refiriendo a lo mismo que la *API*. La primera es la interfaz gráfica, mientras que la segunda es el conjunto de clases, métodos, funciones y tipos que se utilizan para, en este caso, diseñar y llevar a cabo simulaciones y realizar visualizaciones con el programa desarrollado. Por ejemplo, la *GUI* hizo uso de la *API* para incorporar las funcionalidades del simulador.

<sup>2</sup>Si el *link* no fuera accesible, pongo a disposición mi correo electrónico: [bfbarraatarama@gmail.com](mailto:bfbarraatarama@gmail.com)

o al usuario que simplemente quiera realizar simulaciones. Por esto, también se disponen de ejemplos de uso en formato de *Jupyter notebooks* y la codificación de los casos de validación.

# Agradecimientos

Indiscutiblemente, culminar esta etapa de mi formación no es fruto solo de mis propios esfuerzos, sino también de personas que estuvieron presentes directamente y de muchas otras que contribuyeron más discretamente.

Quiero agradecer especialmente a mi familia y a los *Backyardigan*. Su presencia significó mucho para mí. Gracias por la paciencia.

También a los *Mentitas*, por las noches en las que me ayudaron a despejarme. Perdón por no poderme quedar hasta tarde.

Gracias a mis amigos y compañeros de la facultad, por su buena onda y compañerismo.

Gracias al Departamento de Ingeniería Aeroespacial, por la dedicación y el trabajo que realizan en nuestra formación.

Gracias a los contribuyentes, por aportar involuntariamente a mi educación.

Les estoy sinceramente agradecido y espero estar a la altura de su afecto, cuidado y posibilidades, que me brindaron.

Otra vez, gracias.

# Índice general

<b>1. Generalidades</b>	<b>7</b>
1.1. Descripción del movimiento de un fluido . . . . .	7
1.2. Ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido . . . . .	8
1.3. Ecuaciones de Euler . . . . .	10
1.4. Análisis dimensional . . . . .	11
<b>2. Fundamentos del flujo incompresible y no viscoso</b>	<b>19</b>
2.1. Velocidad angular, vorticidad y circulación . . . . .	19
2.2. Razón de cambio de la vorticidad . . . . .	21
2.3. Teorema de Kelvin: razón de cambio de la circulación . . . . .	23
2.4. Potencial de velocidad y flujo potencial . . . . .	25
2.5. Condiciones de contorno . . . . .	26
2.6. Ecuación de Bernoulli . . . . .	26
2.7. Elementos vorticosos . . . . .	27
2.8. Teoremas de von Helmholtz . . . . .	29
2.9. Ley de Biot-Savart . . . . .	31
2.10. Función de corriente . . . . .	33
2.11. Solución básica: corriente uniforme . . . . .	34
2.12. Solución básica: fuente puntual . . . . .	35
2.13. Solución básica: doblete puntual . . . . .	38
2.14. Solución básica: vórtice puntual . . . . .	40
2.15. Teorema de Kutta-Joukowski . . . . .	46
2.16. Distribución de singularidades . . . . .	53
2.17. Distribución de línea de fuentes . . . . .	54
2.18. Distribución de línea de dobletes . . . . .	55
2.19. Distribución de línea de vórtices . . . . .	56
<b>3. Solución general al problema del flujo potencial</b>	<b>59</b>
3.1. Solución general . . . . .	59
3.2. Condiciones de contorno . . . . .	64
3.3. La estela . . . . .	64
3.4. Sistema de referencia . . . . .	65
<b>4. Método de los paneles</b>	<b>68</b>
4.1. Método de los paneles bidimensional y no estacionario . . . . .	70
4.2. Condición de Kutta en el primer instante . . . . .	76
4.3. Método de los paneles bidimensional, no estacionario y multielemento . . . . .	78
4.4. Cargas aerodinámicas . . . . .	79

<b>5. Elementos singulares y su influencia</b>	<b>81</b>
5.1. Sistema coordenado en panel bidimensional . . . . .	81
5.2. Velocidades inducidas por una distribución de dobletes constante . . . . .	82
5.3. Velocidades inducidas singulares y regulares . . . . .	82
5.4. Velocidades inducidas en los nodos de una estela . . . . .	83
5.5. Potencial inducido por una distribución de dobletes constante . . . . .	83
5.6. Velocidades inducidas por un vórtice puntual . . . . .	84
5.7. Potencial inducido por un vórtice puntual . . . . .	85
5.8. Derivada parcial del potencial respecto del tiempo . . . . .	85
<b>6. Implementación en <i>Python</i></b>	<b>87</b>
6.1. Selección del lenguaje de programación . . . . .	87
6.2. Algoritmo general . . . . .	88
6.3. Algunos análisis de complejidad temporal . . . . .	89
6.4. Evaluación de las formas de implementar transformaciones de coordenadas . . . . .	93
6.5. Presentación del programa desarrollado . . . . .	96
6.6. Clases, métodos y funciones principales utilizados . . . . .	97
6.6.1. _TernasMoviles2D.py . . . . .	98
6.6.2. Tipos.py . . . . .	98
6.6.3. _Vortices2D.py . . . . .	98
6.6.4. _Paneles2D.py . . . . .	99
6.6.5. _ConjuntoSolidos2D.py . . . . .	100
6.6.6. Importacion.py . . . . .	101
6.6.7. Cinematicas.py . . . . .	102
6.6.8. MP2D.py . . . . .	102
6.6.9. MP2D.simular(...) y MP2D.avanzar(...) . . . . .	103
6.6.10. MP2D, más métodos . . . . .	107
<b>7. Validación</b>	<b>108</b>
7.1. Primera validación: problema estacionario monoelemento . . . . .	108
7.2. Segunda validación: problema estacionario bielemento . . . . .	111
7.3. Tercera validación: problema no estacionario monoelemento (respuesta indicial de Wagner) . . . . .	118
7.4. Cuarta validación: problema no estacionario monoelemento (movimientos armónicos) . . . . .	120
<b>A. Manual de <i>GUI</i></b>	<b>130</b>
A.1. Generalidades . . . . .	130
A.2. Pestaña <i>Sólidos</i> . . . . .	130
A.3. Pestaña <i>Simulación</i> . . . . .	137
A.4. Pestaña <i>Resultados</i> . . . . .	144
A.5. Pestaña <i>Guardado y carga</i> . . . . .	147

# Capítulo 1

## Generalidades

En este capítulo se presentarán los conceptos básicos de la fluidodinámica que sentarán las bases y algunas de las limitaciones del método numérico que se desarrollará.

### 1.1. Descripción del movimiento de un fluido

Defínase un sistema coordenado cartesiano de coordenadas  $x, y, z$  solidario a un sistema de referencia inercial. La posición de una partícula de fluido  $P$  puede describirse en función del tiempo  $t$  con un vector de posición  $\mathbf{P} = (x, y, z)|_P = (x_P, y_P, z_P)$ , tal que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{P}_0, t)$$

donde  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}|_{t=0}$

Esta formulación se corresponde con la descripción lagrangiana del movimiento del fluido, asociada a cada partícula de fluido en el espacio.

Luego, se define la velocidad de una partícula de fluido con:

$$\mathbf{V} = (u, v, w) = \dot{\mathbf{P}} = \left( \frac{\partial x_P}{\partial t}, \frac{\partial y_P}{\partial t}, \frac{\partial z_P}{\partial t} \right);$$

y la aceleración con:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left( \frac{\partial^2 x_P}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y_P}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} \right);$$

Por otro lado, la formulación euleriana describe las propiedades del flujo con campos escalares o vectoriales. La velocidad con esta descripción resulta:

$$\mathbf{V} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

Para obtener la derivada temporal de un parámetro asociado a una partícula de fluido, a partir de una descripción euleriana del flujo, es necesario introducir la derivada sustancial (o lagrangiana), operador que se define como:

$$\frac{D}{Dt} \doteq \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$$

En coordenadas cartesianas:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Por ejemplo, la aceleración que antes se expresó mediante una descripción lagrangiana, se puede plantear como:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u, \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v, \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla w \right)$$

### Observación

Notar los paréntesis en  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ .

Estos se deben a que  $\mathbf{V} \cdot \nabla$  es un operador que luego actúa sobre  $\mathbf{V}$ , mientras que en  $\mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V})$ ,  $\nabla \mathbf{V}$  ya es un tensor que luego se multiplica con  $\mathbf{V}$ . Más claramente:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= \left( u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (u, v, w) = \\ &= \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.1) \end{aligned}$$

Que efectivamente se corresponde con la componente convectiva de la aceleración.

En cambio:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{V}} = (u, v, w) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}, u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y}, u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.2) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{J}_{\mathbf{V}}$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{V}$ . Con esto, también se puede reescribir:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{V}}^T$$

## 1.2. Ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido

A continuación se presentará el conjunto de ecuaciones diferenciales que rige el movimiento de un fluido, en un cubo diferencial con caras normales a las direcciones  $x_i, i = 1, 2, 3$  de un sistema coordenado ortogonal:

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

donde

$\rho$  es la densidad del fluido,

$f_i, i = 1, 2, 3$ , son las fuerzas de masa actuantes en las 3 direcciones  $x_i$ , y

$\tau_{ij}$  son las componentes del tensor de tensiones, cuyas componentes se aplican sobre un cubo diferencial como el que puede verse en la figura 1.1.

La primera ecuación, la 1.3, es la ecuación de conservación de masa, o de continuidad. La segunda, que es vectorial o, bien, 3 ecuaciones escalares, es la ecuación de conservación de cantidad de movimiento del fluido. Ambas son ecuaciones de validez general y se deducen de un análisis de conservación de masa (teorema de transporte de Reynolds), la primera, y de un análisis dinámico de un cubo diferencial como se muestra en la figura 1.1, la segunda.

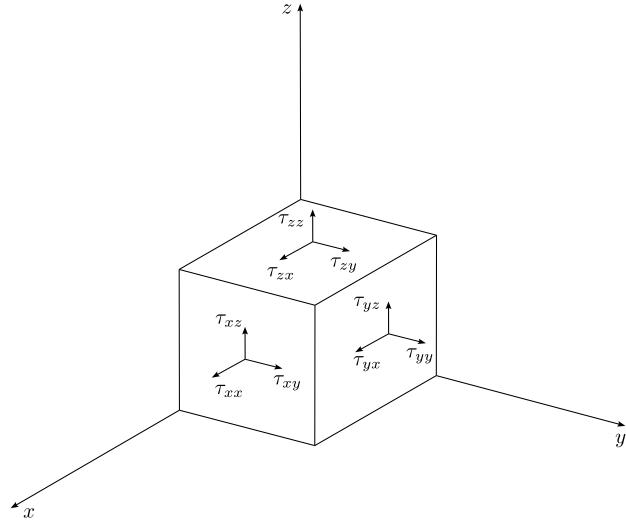


Figura 1.1: tensiones en un cubo diferencial, según un sistema coordenado  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ .

Si el fluido es newtoniano, se tiene:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} \quad (1.5)$$

donde

$p$  es la presión,

$\mu$  es la viscosidad dinámica,

$\lambda$  es la viscosidad volumétrica o de dilatación, y

$\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker.

Si ahora se considera la hipótesis de Stokes, que se define como:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.6)$$

La ecuación 1.5 queda:

$$\tau_{ij} = \left( -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.7)$$

Así, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano puede reescribirse como, en la dirección  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{DV_1}{Dt} &= \\ &= \rho f_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \\ &\quad + \mu \left( 2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3 \partial x_1} \right) = \\ &= \rho f_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right) = \\ &= \rho f_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 V_1 \end{aligned}$$

Procediendo análogamente en las otras direcciones y expresando las tres ecuaciones escalares en una única vectorial:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.8)$$

Aquí  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  es el vector de fuerzas de masa.

La ecuación 1.8 es conocida como la ecuación de Navier-Stokes, aunque también es común referirse por esto al conjunto de 1.8 y 1.3. Esta ecuación es una vectorial, diferencial en derivadas parciales, de segundo orden y no lineal.

Por ejemplo, en coordenadas cartesianas la ecuación de continuidad y la de conservación de la cantidad de movimiento en la dirección  $x$  para un fluido newtoniano, quedan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right) \quad (1.10)$$

### 1.3. Ecuaciones de Euler

La condición de incompresibilidad en el flujo, se puede plantear con:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Entonces, la ecuación de continuidad 1.3 queda:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Luego,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.11)$$

La ecuación 1.11 será, por lo tanto, la condición matemática de incompresibilidad.

Incorporando este resultado en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento vectorial 1.8:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \\ \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \end{aligned} \quad (1.12)$$

La ecuación 1.12, entonces, es la de cantidad de movimiento para un flujo incompresible de un fluido newtoniano<sup>1</sup>. Si ahora, además, el flujo es no viscoso, la viscosidad se anula y 1.12 queda:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (1.13)$$

---

<sup>1</sup>Acá y en el resto del documento al referirse a un fluido newtoniano también se da por hecha la hipótesis de Stokes, por simplicidad.

Las ecuaciones 1.11 y 1.13 precedentes son conocidas como las ecuaciones de Euler y son la base del flujo potencial, por lo que son las que darán pie al desarrollo posterior de gran parte del método numérico propuesto.

Notar que, si la viscosidad es nula el tensor de tensiones es diagonal y, utilizando su expresión para un fluido newtoniano (ecuación 1.7), simplemente queda:

$$\tau_{ij} = \left( -p - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = -p\delta_{ij} \quad (1.14)$$

## 1.4. Análisis dimensional

Las ecuaciones de Euler son considerablemente más sencillas de resolver que las ecuaciones de Navier-Stokes, pero su validez queda sujeta al grado en el que se satisfagan las condiciones de incompresibilidad y de no viscosidad en el flujo de un fluido newtoniano. . Está claro que si el fluido involucrado fuera uno prácticamente incompresible como el agua, la hipótesis de incompresibilidad resulta apropiada. Por otro lado, en el caso del aire la incompresibilidad no queda asegurada por la naturaleza gaseosa del fluido.

En cuanto a la viscosidad, si bien esta propiedad tanto en el agua como en el aire es relativamente pequeña, el flujo no viscoso no queda garantizado en términos prácticos en todo el campo de flujo.

Por ello, para evaluar la validez del modelo de flujo potencial en una situación real, primero puede llevarse a cabo un análisis dimensional que permita poner de manifiesto la importancia relativa de los efectos de compresibilidad y viscosidad.

En el caso de la compresibilidad, inicialmente conviene modelar al fluido como compresible. En particular y siendo esto válido para un fluido como el aire, considerando un flujo compresible isoentrópico se sabe que (sección 4.4 de [1]):

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

donde

$\rho_0$  es la densidad del fluido no perturbado,

$Ma$  el número adimensional conocido como número de Mach y definido como  $Ma = V/a$ , donde  $a$  es la velocidad del sonido en el fluido; y

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  es la razón de calores específicos del gas.

También, la expansión generalizada de un binomio es:

$$(1 + a)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} a^k = 1 + ra + \frac{r(r-1)}{2!} a^2 + \dots, \quad |x| < 1$$

Entonces, siendo  $a = \frac{\gamma-1}{2} Ma^2$  y  $r = -\frac{1}{\gamma-1}$ :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma-1}{\gamma-1} Ma^2 + \frac{-(\gamma-1)(-\gamma+1-1)}{2} \left( \frac{\gamma-1}{2} \right)^2 Ma^4 + \dots = 1 - \frac{1}{2} Ma^2 + O(Ma^4)$$

Entonces, para que la variación de  $\rho$  respecto de  $\rho_0$  sea despreciable, debe ser:

$$Ma^2 \ll 1 \quad (1.15)$$

Para ver lo relativo a la viscosidad, se realiza el siguiente análisis para un fluido newtoniano en la dirección  $x$ , por lo que se recuerda la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dicha dirección, presentada anteriormente.

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \\ &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.10)\end{aligned}$$

Se definen las siguientes variables adimensionalizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, z^* = \frac{z}{L} \\ u^* = \frac{u}{V_0}, v^* = \frac{v}{V_0}, w^* = \frac{w}{V_0} \\ t^* = \frac{t}{T} \\ f_x^* = \frac{f_x}{f_0} \\ p^* = \frac{p}{p_0} \\ \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0} \end{array} \right.$$

donde

$L$  es una longitud característica,

$V_0$  es una velocidad característica,

$T$  es un tiempo o periodo característico,

$f_0$  es una fuerza de masa característica por unidad de masa,

$p_0$  es una presión característica y

$\rho_0$  es una densidad característica

Estas variables características se deben escoger de tal forma de que las variables adimensionales del flujo involucradas tengan magnitud unitaria.

Entonces, introduciendo la adimensionalización en 1.10:

$$\begin{aligned}\rho_0 \rho^* \left( \frac{V_0}{T} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{V_0^2}{L} \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \right) &= \\ &= \frac{\rho_0 V_0^2}{L} \rho^* \left( \frac{L}{V_0 T} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = \\ &\quad = \rho_0 f_0 \rho^* f_x^* - \frac{p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \\ &\quad + \frac{\mu V_0}{L^2} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \right)\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\frac{L}{p_0}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_0 V_0^2}{p_0} \left( \frac{L}{V_0 T} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) &= \\
&= \frac{L}{p_0} \frac{V_0^2}{V_0^2} \rho_0 f_0 \rho^* f_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \\
&+ \frac{L}{p_0} \frac{\mu V_0}{L^2} \frac{\rho_0 V_0^2}{\rho_0 V_0^2} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \right) = \\
&= \frac{\rho_0 V_0^2}{p_0} \frac{L f_0}{V_0^2} \rho^* f_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \\
&+ \frac{\mu}{\rho_0 V_0 L} \frac{\rho_0 V_0^2}{p_0} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \right) \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Ahora bien, es posible introducir en 1.16 los siguientes números adimensionales:

1.  $\frac{L}{V_0 T} = \frac{\omega L}{V_0} = St$ : el cual es el número de Strouhal y supone la relación de la velocidad de un fenómeno periódico -como los desprendimientos vorticosos- y la velocidad del flujo.
2.  $\frac{V_0}{\sqrt{L f_0}} = \frac{V_0}{\sqrt{gL}} = Fr$ : que es el número de Froude, cuyo cuadrado representa la relación entre las fuerzas iniciales y la gravitatoria, en el caso de que esta sea la fuerza de masa presente en el problema bajo estudio.
3.  $\frac{\rho_0 V_0 L}{\mu} = Re$ : es el número de Reynolds, que representa la relación entre fuerzas de inercia y viscosas.

En el caso de gases, la viscosidad puede relacionarse con la velocidad característica de las moléculas,  $c$ , y la distancia media recorrida entre colisiones,  $\lambda$ , con  $\mu \approx \frac{pc\lambda}{3}$ . Con este enfoque cinemático (Yuan [2], p. 257),  $Re \approx \frac{V_0 L}{c \lambda}$  es el producto de las relaciones de velocidades y distancias, macroscópicas y moleculares características.

4.  $\frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} = Eu$ : es el número de Euler, relaciona las fuerzas de presión con las de inercia.

Incorporando los números adimensionales en la ecuación 1.16:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Eu} \left( \textcolor{blue}{St} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) &= \\
&= \frac{1}{\textcolor{blue}{Eu} \textcolor{blue}{Fr}^2} \rho^* f_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \\
&+ \frac{1}{\textcolor{blue}{Eu} \textcolor{blue}{Re}} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \right) \quad (1.17)
\end{aligned}$$

En los casos incompresibles, suele ser representativo  $p_0 = \rho_0 V_0^2$ , con lo cual resulta  $Eu = 1$  y la ecuación anterior resulta:

$$\begin{aligned}
\textcolor{blue}{St} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= \\
&= \frac{1}{\textcolor{blue}{Fr}^2} \rho^* f_x^* - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\textcolor{blue}{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (1.18)
\end{aligned}$$

La ecuación 1.18 pone de manifiesto entonces que para despreciar efectos viscosos en un problema *quasi* estacionario ( $St \ll$ ), debe ser al menos:

$$\frac{1}{Re} \ll 1 \quad (1.19)$$

Para despreciar los efectos de masa, también se puede ver que es necesario que sea  $\frac{1}{Fr} \ll 1$ .

En casos no estacionarios, la dinámica dependerá del régimen no estacionario-visoso en particular, el cual amerita un tratamiento más en detalle que aquí no se cubrirá.

En la misma línea, definir valores en los que las relaciones adimensionales justifican o no la validez de los modelos es una cuestión dependiente del problema, y en general se requiere contar con antecedentes experimentales para discernirlo. Por ello, en la práctica resulta fundamental la caracterización de los problemas particulares que se aborden, ya que a partir de ella se puede adquirir la noción de cuándo el modelo no viscoso e incompresible —o el que se utilice— resulta aplicable. A continuación, se ejemplifican valores de las relaciones adimensionales en algunos problema a modo de exemplificación.

### Ejemplo

En el caso de un vehículo aéreo no tripulado de ala fija de aproximadamente  $35\text{kg}$ , una envergadura de  $4\text{m}$  y de una cuerda media de  $0,4\text{m}$ , que tenga una velocidad de vuelo crucero de  $30\text{m/s}$  en una atmósfera estándar a nivel del mar, donde la densidad del aire es de  $1,225\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , la viscosidad cinemática de  $1,5 \cdot 10^{-5}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ , y la velocidad del sonido  $340,3\text{m/s}$ ; para la fluidodinámica presente en el flujo exterior del ala:

$$\begin{cases} \frac{1}{Fr^2} = \frac{9,81 \cdot 0,4}{30^2} = 2,8 \cdot 10^{-4} \\ \frac{1}{Re} = \frac{1,5 \cdot 10^{-5}}{30 \cdot 0,4} = 1,25 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

En el caso de un submarino de  $170\text{m}$  de longitud, con una velocidad en inmersión de  $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$  y a una profundidad de  $240\text{m}$ , donde la viscosidad cinemática es de aproximadamente  $1,57 \cdot 10^{-6}$  y la densidad de  $1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{Fr^2} = \frac{9,81 \cdot 170}{10^2} = 17 \\ \frac{1}{Re} = \frac{1,57 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 170} = 9,2 \cdot 10^{-10} \end{cases}$$

En el caso del vuelo de un insecto, por ejemplo de una mosquita de fruta, se puede considerar una cuerda típica de  $2\text{mm}$  y una velocidad característica (punta de ala) de  $2\text{m/s}$ , en una atmósfera estándar a nivel del mar:

$$\begin{cases} \frac{1}{Fr^2} = \frac{9,81 \cdot 0,002}{2^2} = 4,9 \cdot 10^{-3} \\ \frac{1}{Re} = \frac{1,5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 0,002} = 1,25 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

En la práctica, en el primer caso el flujo se encuentra en un gris en lo viscoso, pues en el vuelo de una aeronave se encuentra en una condición de “bajo Reynolds”.

El segundo caso sí se suelen considerar modelos no viscosos y en el último todo lo contrario, la dinámica es fuertemente viscosa.

En cuanto a las fuerzas de masas, estas se desprecian en el primer y segundo ejemplo, pero no en el último.

En el caso compresible, aunque lo sea ligeramente, puede seguirse el análisis. Si se emplea

el modelo de flujo compresible isoentrópico de un fluido que sigue el modelo de gas perfecto,

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \approx \frac{p}{\rho}$$

Si ahora se utilizan como magnitudes características a la presión y densidad del fluido no perturbado y la velocidad del cuerpo bajo estudio relativa a este:

$$Eu = \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \approx \frac{a_0^2}{V_0^2} = \frac{1}{Ma_0^2}$$

Con la teoría de flujo isoentrópico, también resulta:

$$p^* = \frac{p}{p_0} = \frac{a^2}{p_0} \rho \approx \frac{a_0^2}{p_0} \rho = \frac{p_0}{\rho_0 p_0} \rho = \frac{\rho}{\rho_0} = \rho^*$$

donde se asumió que la velocidad del sonido se mantiene prácticamente constante al ser las perturbaciones en la velocidad suficientemente pequeñas por 1.15.

Entonces, la ecuación 1.18 queda:

$$\begin{aligned} Ma_0^2 \left( St \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) &= \\ &= \frac{Ma_0^2}{Fr^2} \rho^* f_x^* - \frac{\partial \rho^*}{\partial x^*} + \\ &+ \frac{Ma_0^2}{Re} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial z^*} \right) + \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Aquí se puede ver, como afirma Karamcheti en [3] p. 23, que para despreciar los efectos de la compresibilidad completamente, también debe verificarse:

$$\begin{cases} \frac{Ma^2}{Fr^2} \ll 1 \\ \frac{Ma^2}{Re} \ll 1 \end{cases}$$

En Karamcheti [3] también se exponen condiciones para efectos térmicos, pero estos últimos no se abordan en el presente trabajo, ya que no se procura elaborar una herramienta con el que se puedan resolver problemas de convección térmica o hipersónicos

### Ejemplo

Para el caso de la dinámica de la aeronave ejemplificada anteriormente:

$$\begin{cases} Ma^2 = \left( \frac{30}{340,3} \right)^2 = 0,0078 \ll 1 \\ \frac{Ma^2}{Fr^2} = \frac{0,088^2}{\frac{30^2}{9,81 \cdot 0,4}} = 3,4 \cdot 10^{-5} \ll 1 \\ \frac{Ma^2}{Re} = \frac{0,088^2}{\frac{30 \cdot 0,4}{1,5 \cdot 10^{-5}}} = 9,68 \cdot 10 - 9 \ll 1 \end{cases}$$

Por otra parte, una aeronave de transporte comercial transónica puede tener una cuerda de 3m, un Ma de crucero de 0,85 a 10000m, donde la viscosidad cinemática es  $3,53 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

y la velocidad del sonido  $300\frac{m}{s}$ :

$$\begin{cases} Ma^2 = 0,85^2 = 0,72 \approx 1 \\ \frac{Ma^2}{Fr^2} = \frac{0,85^2}{\frac{(0,85 \cdot 300)^2}{9,77 \cdot 3}} = 3,27 \cdot 10^{-4} \ll 1 \\ \frac{Ma^2}{Re} = \frac{0,85^2}{\frac{0,85 \cdot 300 \cdot 3}{3,53 \cdot 10^{-5}}} = 3,3 \cdot 10^{-9} \ll 1 \end{cases}$$

En la práctica, los efectos de la compresibilidad solo se desprecian en el primer caso, mientras que en el segundo se podrían desarrollar, y así es, variaciones de densidad considerables.

Como se pudo ver en los ejemplos precedentes, en todos los casos el análisis dimensional sugiere la posibilidad de despreciar los efectos viscosos. Sin embargo, esta afirmación no es del todo correcta.

Aquí se toma como velocidad característica a la relativa entre el vehículo y el flujo sin perturbar, pero no debe olvidarse que la condición de no deslizamiento se cumple en toda superficie sólida y la velocidad relativa evoluciona desde 0 hasta una del orden de la del desplazamiento relativo. Así, en el movimiento relativo de un sólido y un fluido, existe una región del flujo circundante donde los efectos viscosos son relevantes, la capa límite, y otra exterior donde ya son despreciables, comúnmente referida como la del flujo potencial externo.

Para visualizar el espesor de la capa límite se puede realizar otro breve análisis dimensional considerando flujo bidimensional e incompresible, que será el caso en el resto de desarrollos. Las ecuaciones de continuidad y de conservación de cantidad de movimiento en  $x$  quedan:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Además, suponiendo que el flujo es estacionario, las fuerzas de masa despreciables y teniendo presente que:

1. el flujo es de una placa plana con normal con dirección  $y$  y cuya velocidad relativa al fluido tiene dirección  $x$  y magnitud  $V_0$ ,
2. el espesor de la capa límite es  $\delta$ ,
3. la variación de velocidad en  $x$  que se desarrolla en el espesor de la capa límite es del orden de  $V_0$ ,
4. la longitud en la que se desarrolla la capa límite es  $L$  y
5. la viscosidad y la densidad del fluido son  $\rho$  y  $\mu$ ;

resulta:

$$\frac{V_0}{L} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{LO(v)}{V_0 \delta} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = 0$$

donde  $O(v)$  refiere al orden de magnitud de  $v$ .

Para que esta igualdad se cumpla necesariamente ambos términos deben ser nulos o bien tener la misma magnitud y signos opuestos. En este último caso:

$$\frac{LO(v)}{V_0\delta} = 1$$

$$O(v) = \frac{V_0\delta}{L} \ll V_0$$

Pasando a la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\rho V_0^2}{L} \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{LO(v)}{V_0\delta} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -O \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\mu V_0^2}{\delta^2} \left( \frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Si, como se verá a continuación, el espesor de la capa límite es pequeño en comparación con L, el término en rojo es más pequeño y:

$$\frac{\rho V_0^2}{L} \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{L}{V_0\delta} \frac{V_0\delta}{L} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -O \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\mu V_0^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\rho V_0^2}{L} \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -O \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\mu V_0^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

Si todos los términos son del mismo orden, y en particular los iniciales y el viscoso ya que estamos dentro de un flujo de bajo Reynolds:

$$\frac{\rho V_0^2}{L} \approx \frac{\mu V_0}{\delta^2}$$

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu L}{\rho V_0}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{V_0 L}{\nu}}} = \frac{L}{\sqrt{Re_L}}$$

### Ejemplo

Suponiendo una aeronave pequeña con una cuerda alar de 1,5m cuya velocidad relativa al aire es de  $35 \frac{m}{s}$  a nivel del mar,

$$Re = \frac{35 \cdot 1,5}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 3,5 \cdot 10^6$$

$$\delta \approx \frac{1,5}{\sqrt{3,5 \cdot 10^6}} \approx 1mm$$

En el ejemplo anterior del VANT el número de Reynolds sugería la posibilidad de despreciar los efectos viscoso. Si bien esto puede ser cierto, es menester mencionar que en aerodinámica de alas con Re menores a  $10^6$  la capa límite es susceptible a perturbaciones y generar resultados experimentales no del todo consistentes con la teoría potencial.

Analizando la conservación de cantidad de movimiento en la dirección  $y$ :

$$\begin{aligned}
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
\rho \frac{V_0 \delta}{L} \left( \frac{V_0}{L} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{V_0 \delta}{L \delta} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) &= -O \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \frac{V_0 \delta}{L \delta^2} \left( \frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \\
\rho \frac{V_0^2 \delta}{L^2} \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) &= -O \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + V_0^2 \rho \frac{\mu \delta}{\rho V_0 L \delta^2} \frac{1}{\partial y^{*2}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \\
&= -O \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + V_0^2 \rho \frac{\delta}{Re} \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}
\end{aligned}$$

Multiplicando por  $\frac{\rho V_0^2 \delta}{L^2}$  ambos miembros

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{L^2}{\rho V_0^2 \delta} O \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}$$

Entonces, como los términos iniciales y el viscoso tienen el mismo orden, debe ser:

$$O \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\rho V_0^2 \delta}{L^2} \approx \frac{\delta}{L} O \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \ll O \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

donde se consideró que  $\frac{\partial p}{\partial x}$  puede ser a lo sumo del mismo orden que los términos iniciales y viscosos de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x.

Esto implica que la variación de presiones en la dirección y es pequeña y hasta despreciable. Por eso se dice que la presión del flujo potencial externo se imprime sobre la capa límite y se propaga sin cambios hasta la superficie del sólido.

Los resultados de este análisis dimensional se verifican en desarrollos más detallados y extensos que no se cubrirán aquí, pero que dejan una conclusión importante que sí atraviesa el tema tratado: bajo condiciones de un flujo externo incompresible y no viscoso, en un cuerpo impenetrable aerodinámico, hidrodinámico o semejante que se desplace dentro de un fluido y del que la capa límite no se desprende debido a gradientes adversos de presiones, el espesor de la capa límite es despreciable frente a la geometría del sólido de éstas características y el flujo no viscoso externo prácticamente desliza libremente por su superficie, la cual experimenta la presión generada por el flujo externo y una distribución de tensiones de corte debidas exclusivamente al flujo viscoso de la capa límite.

# Capítulo 2

## Fundamentos del flujo incompresible y no viscoso

En esta sección se formularán nuevas propiedades, ahora sí particularmente de los flujos incompresibles y no viscosos, cuya resolución numérica es el objetivo de este trabajo. Dado que en este punto la matemática se vuelve más recurrente, se optará por exponer los resultados relevantes y posteriormente los desarrollos o demostraciones, si lo amerita y adecuadamente diferenciados.

### 2.1. Velocidad angular, vorticidad y circulación

Para cualquier campo de flujo  $\mathbf{V}$  en un instante de tiempo  $t$ , se define:

$$\text{Velocidad angular: } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

$$\text{Vorticidad: } \zeta \doteq 2\omega \quad (2.2)$$

$$\text{Circulación: } \Gamma \doteq \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.3)$$

#### Demostración

$$\boldsymbol{\omega} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

En el plano cartesiano, un elemento diferencial queda definido por dos de sus segmentos frontera contiguos. Siendo los diferenciales de longitud de igual magnitud, el elemento diferencial siempre será un rombo.

Observando la figura 2.1, se puede ver que el vector que va de 1 a 3 en el instante  $t$  es:

$$\mathbf{r}_3(t) = dx\mathbf{e}_x = dy\mathbf{e}_y$$

Y en el instante  $t + \Delta t$ , con  $\Delta t \rightarrow 0$  y para el mismo elemento diferencial (se obvia en la notación matemática por simplicidad):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{r}_3(t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \left( dx + \frac{\partial u}{\partial y}(t)dy\Delta t \right) \mathbf{e}_x + \left( dy + \frac{\partial v}{\partial x}(t)dx\Delta t \right) \mathbf{e}_y \right)$$

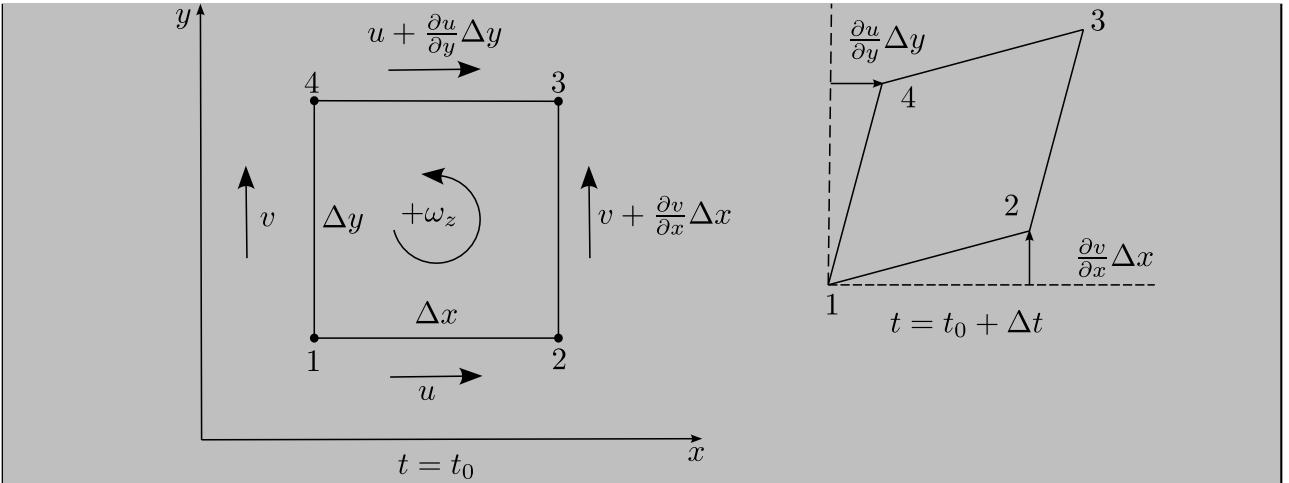


Figura 2.1: elemento diferencial con velocidad angular.

En el instante  $t$ , está claro que el ángulo del segmento **1 – 3** respecto del eje  $x$  será  $\theta(t) = \pi/4$ . En el instante  $t + \Delta t$ , en cambio, está dado por  $\theta(t + \Delta t) = \operatorname{tg}^{-1}(\theta(t + \Delta t))$ . Para el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , puede emplearse un desarrollo de Taylor centrado en  $\operatorname{tg}_0 = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$  y truncado a la primera potencia:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\theta(t + \Delta t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg}(\theta(t + \Delta t))) \approx \\ &\approx \lim_{\Delta t g \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}_0} \Delta t g \right) = \lim_{\Delta t g \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{4} + 0,5 \Delta t g \right)\end{aligned}$$

donde  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t g = 0$

$\Delta t g$  puede obtenerse, para el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , con el valor conocido de la tangente en el instante  $t$  y de las componentes de  $\mathbf{r}_3(t + \Delta t)$  como:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t g &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial x}(t) dx \Delta t}{dx + \frac{\partial u}{\partial y}(t) dy \Delta t} - 1 \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \Delta t \frac{dy \frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial v}{\partial x}(t) - \frac{1}{\Delta t} - \frac{\partial u}{\partial y}(t)}{dx \frac{1}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}(t) \Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \Delta t \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t} \right)\end{aligned}$$

Así, aplicando la definición de derivada sustancial sobre el elemento diferencial bajo estudio, la velocidad angular del elemento es:

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{D\theta}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\pi}{4} + 0,5 \Delta t g - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 0,5 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Así, se verifica la componente en  $z$  de la velocidad angular. Para las otras componentes se procede de forma análoga.

La circulación y la vorticidad (o la velocidad angular) están relacionadas mediante:

$$\Gamma \doteq \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.4)$$

donde  $C$  es la frontera  $\partial S$  de la superficie  $S$ , orientable y con vector normal  $\mathbf{n}$ , ambas contenidas en un dominio abierto  $D$  en donde el campo de velocidad  $\mathbf{V}$  tiene derivadas parciales continuas.

Esta es una aplicación directa del teorema de Stokes, recordando que  $\zeta = \nabla \wedge \mathbf{V}$  (2.2).

## 2.2. Razón de cambio de la vorticidad

Para un flujo incompresible y no viscoso tridimensional, en el cual las fuerzas de masa involucradas son conservativas (como la gravitatoria):

$$\frac{D\zeta}{Dt} = (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (2.5)$$

y en el caso bidimensional:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

### Demostración

En el espacio tridimensional:

$$\frac{D\zeta}{Dt} \stackrel{?}{=} (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (2.5)$$

Partiendo de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de un fluido newtoniano incompresible:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.10)$$

Dividiendo por la densidad y desarrollando la derivada sustancial:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{f} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

El término asociado al convectivo puede escribirse, utilizando identidades (ver [4]), como:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) = \nabla \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \wedge \zeta$$

Tomando el rotor de ambos miembros:

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \wedge \zeta \right) &= \nabla \wedge \left( \mathbf{f} - \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \right) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \wedge \nabla \frac{V^2}{2} - \nabla \wedge (\mathbf{V} \wedge \zeta) &= \nabla \wedge \nabla F - \nabla \wedge \nabla \frac{p}{\rho} + \nu \nabla \wedge (\nabla^2 \mathbf{V}) \end{aligned}$$

donde  $F$  es una función  $\Re^3 \rightarrow \Re$  cuyo gradiente es  $\mathbf{f}$  (que existe por ser  $\mathbf{f}$  conservativa) y todos los términos en rojo se anulan por ser rotos de gradientes de funciones escalares a valores reales.

Los últimos términos de ambos lados de la ecuación anterior se pueden reescribir:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \zeta - (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{D\zeta}{Dt} - (\zeta \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nu \nabla^2 \zeta$$

## Demostración

$$\nabla \wedge (\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{\zeta}) \stackrel{?}{=} (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}$$

Por identidad:

$$\nabla \wedge (\mathbf{V} \wedge \boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{V} (\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta}) - \boldsymbol{\zeta} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\zeta}$$

El primer término en rojo se anuló porque la divergencia de un rotor es nula y el segundo por la condición de incompresibilidad (Ec. 1.11).

## Demostración

$$\nabla \wedge (\nabla^2 \mathbf{V}) \stackrel{?}{=} \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}$$

Desarrollando el miembro izquierdo:

$$\nabla \wedge (\nabla^2 \mathbf{V}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_k} & \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_k} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} \end{pmatrix}$$

El miembro derecho:

$$\nabla^2 \boldsymbol{\zeta} = \nabla^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} \end{pmatrix}$$

Por lo que son iguales y se verifica  $\nabla \wedge (\nabla^2 \mathbf{V}) = \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}$

Agrupando los dos primeros términos del miembro izquierdo en  $\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt}$  y pasando el último al lado derecho:

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}$$

La cual es la ecuación para la razón de cambio de la vorticidad para un fluido newtoniano, en un flujo incompresible y viscoso sobre el cual actúan fuerzas de masa conservativas.

Evidentemente, si el flujo es además no viscoso:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = (\zeta \cdot \nabla) V \quad \checkmark$$

En el plano:

$$\frac{D\zeta}{Dt} \stackrel{?}{=} \mathbf{0} \quad (2.6)$$

Como la vorticidad solo tiene componente no nula en  $z$  y la velocidad solo en  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{D\zeta}{Dt} = (\zeta \cdot \nabla) V &= \left( \left( 0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (u, v, 0) + \nu \nabla^2 \zeta = \\ &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} (u, v, 0) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) 0 + \nu \nabla^2 \zeta = \nu \nabla^2 \zeta \end{aligned}$$

Que es la razón de cambio en el caso bidimensional. Si además el flujo es no viscoso:

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \mathbf{0} \quad \checkmark$$

Observando la ecuación 2.6, en el plano la vorticidad de una partícula de fluido no cambia y si el flujo es inicialmente irrotacional ( $\zeta|_{t_0} = 0$ ), así permanecerá si el flujo es incompresible, no viscoso y con fuerzas de masa conservativas (el peso, por ejemplo). Si inicialmente era rotacional, cada partícula conservará su vorticidad y esta no cambiará.

Viendo la ecuación 2.5, lo primero también es cierto para el caso tridimensional pero lo segundo no, ya que la vorticidad de cada elemento puede variar con el tiempo según el campo de velocidades. Esto junto con el teorema de Kelvin y los de von Helmholtz dan lugar a lo que se conoce como alargamiento de vórtice (*vortex stretching* en inglés).

Es importante reconocer que es posible contar con un flujo externo irrotacional en muchos problemas de ingeniería, ya que un flujo inicialmente en reposo es irrotacional y un vehículo que en un momento se desplaza con una velocidad relativa no nula respecto a un fluido en reposo puede entenderse como un vehículo que inicialmente estaba en reposo junto al fluido y posteriormente aceleró. De esta forma, el flujo irrotacional se limitará al campo interno de la capa límite y a la estela, como se verá más adelante.

## 2.3. Teorema de Kelvin: razón de cambio de la circulación

Sea  $C(t)$  una curva cerrada de partículas de fluido (que siempre contiene a las mismas partículas), si el flujo es incompresible, no viscoso y con fuerzas de masa conservativas:

$$\frac{D\Gamma}{Dt}(C(t)) = 0 \quad (2.7)$$

### Demostración

$$\frac{D\Gamma(C(t))}{Dt} \stackrel{?}{=} 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{D\Gamma(C(t))}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{r} = \\
&= \oint_{C(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = \oint_{C(t)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C(t)} d\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right) = \\
&= \oint_{C(t)} \left( \mathbf{f} - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{r} \right) = \oint_{C(t)} \nabla \left( F - \frac{p}{\rho} \right) (\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

donde el primer término en rojo es nulo porque la integral cerrada de un diferencial exacto es nula; y el segundo porque la integral de línea cerrada de un campo vectorial conservativo es nula y el gradiente de una función escalar (en este caso  $F - \frac{p}{\rho}$ ) es uno conservativo. Notar que  $F$  es el potencial de  $\mathbf{f}$ , siendo esto posible al ser  $\mathbf{f}$  conservativo.

En la siguiente demostración se demuestra la segunda igualdad y también  $\frac{D}{Dt} d\mathbf{r} = d\mathbf{V}$ .

### Demostración

$$\frac{D}{Dt} \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{?}{=} \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{r}$$

Si  $C(t)$  se parametriza con el vector posición  $\mathbf{r}(s, t)$ , donde  $s \in [a, b]$  tal que para dos instantes cualesquiera un mismo valor de  $s$  refiere a la misma partícula, en esos instantes:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{D}{Dt} \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) ds = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t + \Delta t), t + \Delta t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t + \Delta t) ds - \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) ds \right)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

- El vector  $\mathbf{r}(s, t + \Delta t)$  puede aproximarse con:

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{r}}{Dt}(s, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{r}(s, t + \Delta t) - \mathbf{r}(s, t)) \\
\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{r}(s, t + \Delta t) &= \mathbf{r}(s, t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D\mathbf{r}}{Dt}(s, t) \Delta t = \mathbf{r}(s, t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \Delta t
\end{aligned}$$

- Y el vector  $\mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t + \Delta t), t + \Delta t)$  con:

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t)) \\
\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t + \Delta t), t + \Delta t) &= \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \Delta t
\end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{Dt} \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_a^b \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) + \Delta t \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(t), t) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \mathbf{r}(s, t) + \Delta t \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \right) ds - \\
&\quad - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_a^b \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) ds = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_a^b \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) + \Delta t \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) \right. \\
&\quad \left. + \Delta t \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) + \Delta t^2 \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \right) ds = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} \int_a^b \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) + \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \right. \\
&\quad \left. + \Delta t \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) \right) ds = \\
&= \int_a^b \left( \mathbf{V}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) + \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \right) ds = \\
&= \int_a^b \mathbf{V} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{D\mathbf{r}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \right) ds + \int_a^b \frac{D\mathbf{V}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) ds = \\
&= \int_a^b \mathbf{V} \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) ds \right) + \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{r} + \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{r} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

### Observación

Notar que

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{D\mathbf{r}}{Dt}(\mathbf{r}(s, t), t) \right) ds = \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(\mathbf{r}(s, t), t) ds \right)$$

Tiene sentido físico, representando el lado izquierdo la velocidad relativa de dos partículas (en un mismo instante) infinitesimalmente alejadas según  $ds$  mientras que el lado derecho es la derivada sustancial del segmento entre estas dos mismas partículas, que es lo mismo que lo anterior. Esto es así por la parametrización de la curva de fluido con  $s$ .

El diferencial  $ds$  puede incluirse en la derivada material del segundo término, ya que esta última evalúa se toma  $s$  fijo por cómo se definió la parametrización (misma partícula), por lo que  $ds$  permanece constante durante la variación.

Una demostración similar se puede encontrar en la referencia [5]

## 2.4. Potencial de velocidad y flujo potencial

Habiendo visto que es posible estudiar un flujo irrotacional, o sea

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

bajo esta hipótesis sobre el campo vectorial  $\mathbf{V}$  es posible introducir la función escalar  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , tal que:

$$\nabla \Phi = \mathbf{V} \quad (2.9)$$

donde la función  $\Phi$  se denomina potencial de velocidad. De esta forma, la ecuación de continuidad para un flujo incompresible:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla \Phi = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.10)$$

Esta última ecuación, la de continuidad para un flujo irrotacional, es la de Laplace, la cual es una diferencial en derivadas parciales, de segundo orden, homogénea y lineal, por lo que vale el principio de superposición.

De la resolución de esta ecuación se obtiene el campo de velocidades especificando condiciones de contorno apropiadas.

## 2.5. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno requeridas para resolver la ecuación de Laplace consiste en especificar valores escalares en la frontera del dominio en la que se resuelve.

En nuestro problema en particular, de la condición general de no deslizamiento en el flujo no viscoso solo sigue vigente la condición de impenetrabilidad sobre la superficie del sólido inmerso en el fluido. Esta puede escribirse como:

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})|_{S.sólido} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S.sólido} = (\mathbf{V}_B \cdot \mathbf{n})|_{S.sólido} \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie del sólido y  $\mathbf{V}_B$  refiere a la velocidad del sólido, por *body* en inglés.

La otra frontera del flujo que se puede considerar es el infinito. Si se considera un sistema de referencia inercial solidario a una masa de fluido que inicialmente tuviera un movimiento uniforme, suficientemente lejos de los sólidos que se ponen en movimiento en el seno del fluido, las perturbaciones ocasionadas por estos decaen a cero y:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \Phi = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

## 2.6. Ecuación de Bernoulli

En un flujo potencial (incompresible, no viscoso, inicialmente irrotacional y con fuerzas de masa conservativas):

$$E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad (2.13)$$

donde  $C(t)$  es una función del tiempo y  $E$  el potencial de las fuerzas de masa.

Considerando como estado de referencia al del flujo sin perturbar, en un mismo instante  $t$ :

$$\left( E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)|_{r,t} = \left( E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)|_{|r| \rightarrow \infty, t}$$

Si se desprecian las fuerzas de masa porque el fluido es aire por ejemplo, si en el estado de referencia  $V_\infty = 0$  y, por lo tanto,  $\Phi_\infty = cte$  es una constante arbitraria:

$$p_\infty - p = \rho \left( \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.14)$$

En el caso estacionario, necesariamente el movimiento debe ser un movimiento rectilíneo uniforme -y si hay múltiples sólidos, deben estar animados como un cuerpo rígido- y, además, el marco de referencia en el que se plantea la ecuación de Bernoulli debe ser solidario al movimiento, por lo que ahora  $V_\infty = V_{traslación}$  y  $V$  es la velocidad del fluido relativa al cuerpo, o los cuerpos:

$$p_\infty - p = \frac{\rho}{2} (V^2 - V_{traslación}^2) \quad (2.15)$$

### Demostración

$$E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \stackrel{?}{=} C(t) \quad (2.13)$$

Partiendo de la ecuación de Euler (1.13):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{f} - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

Empleando la identidad

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \frac{V^2}{2} - \mathbf{V} \wedge \boldsymbol{\zeta} = \nabla \frac{V^2}{2}$$

la ecuación anterior queda:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} = \mathbf{f} - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right)$$

donde la vorticidad se anula porque se considera flujo irrotacional. Si además se considera  $\mathbf{f}$  conservativa con potencial  $-E$ ; y recordando que para un flujo potencial  $\mathbf{V} = \nabla \Phi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \frac{V^2}{2} + \nabla E + \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) = \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + E + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Para que la última ecuación se satisfaga en todo el dominio en el que el flujo es potencial, el término entre paréntesis a lo sumo puede ser función del tiempo, o sea:

$$E + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad \checkmark$$

## 2.7. Elementos vorticosos

La naturaleza vectorial de la vorticidad da lugar a la posibilidad de estudiar geometrías asociadas a ella, como en el caso del campo de velocidad. Estas son:

- Línea vorticosa: es una curva tangente a la vorticidad (ver figura 2.2) y se define con

$$(\boldsymbol{\zeta} \wedge d\mathbf{r})|_{l.v.} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

- Superficie vorticosa: es el conjunto de líneas vorticosas que pasan a través de una curva.
- Tubo vorticoso: superficie vorticosa cuando la curva que la forma es cerrada (ver figura 2.3).
- Filamento vorticoso: tubo vorticoso de área transversal infinitesimal.

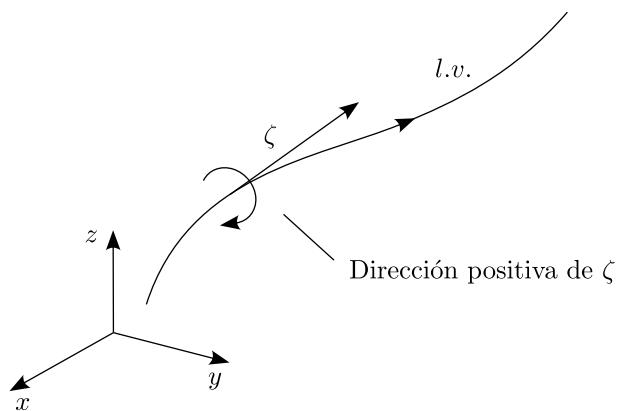


Figura 2.2: línea vorticosa.

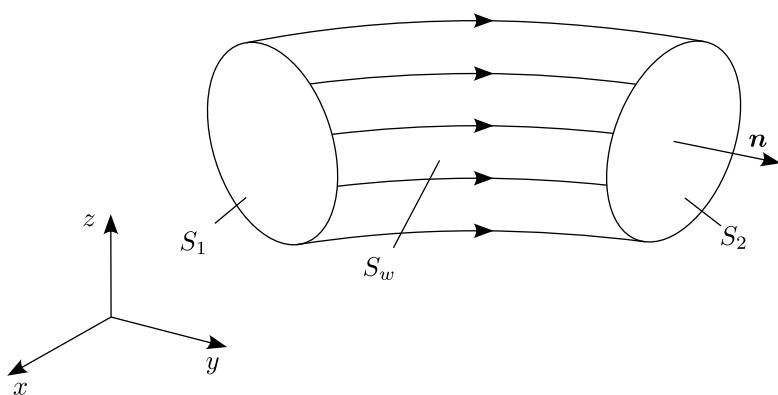


Figura 2.3: tubo vorticoso.

Si la vorticidad tiene componentes con derivadas parciales continuas en un dominio abierto  $D$  que contenga a un tubo vorticoso, o a una parte de este, y a su interior, la circulación del campo a lo largo de cualquier curva cerrada que se encuentre sobre la superficie es constante a lo largo del tubo:

$$\Gamma_{C_1} = \Gamma_{C_2}, \text{ con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ sobre un mismo tubo vorticoso} \quad (2.17)$$

## Demostración

$$\Gamma_{C_1} \stackrel{?}{=} \Gamma_{C_2}, \text{ con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ sobre un mismo tubo vorticoso} \quad (2.17)$$

Sea  $S_w$  una superficie vorticosa y considérese la superficie  $S = S_w \cup S_1 \cup S_2$  como se muestra en la figura 2.3, entonces  $S$  resulta cerrada y orientable con normal  $\mathbf{n}$  exterior. Si la vorticidad tiene componentes con derivadas parciales continuas en un dominio abierto  $D$  que contenga a  $S$  y la región  $R$  interior a  $S$ , por el teorema de Gauss o de la divergencia (Matemática B [6], pág. 202):

$$\iint_S \zeta \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_R (\nabla \cdot \zeta) dV = \iiint_R \mathbf{0} dV = 0$$

El miembro izquierdo puede reescribirse:

$$\iint_S \zeta \cdot \mathbf{n} dA = \iint_{S_w} \zeta \cdot \mathbf{n} dA + \iint_{S_1} \zeta \cdot \mathbf{n} dA + \iint_{S_2} \zeta \cdot \mathbf{n} dA$$

donde el producto escalar entre la vorticidad y la normal se anula en  $S_w$  al ser esta última tangente a la vorticidad.

Entonces

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} \zeta \cdot \mathbf{n} dA + \iint_{S_2} \zeta \cdot \mathbf{n} dA = 0 \\ & \Gamma_{C_2} = \oint_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \zeta \cdot \mathbf{n} dA = \iint_{S_1} \zeta \cdot (-\mathbf{n}) dA = \oint_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma_{C_1} \end{aligned}$$

donde el signo menos se introduce para que  $C_1$  y  $C_2$  sean recorridas con el mismo sentido en las integrales, con la regla de la mano derecha generando una normal con el mismo sentido de la vorticidad.

En particular, un filamento vorticoso tiene una circulación finita, la cual también se conserva en su longitud, y estará dada por:

$$\Gamma_{f.v.} = \zeta dA \quad (2.18)$$

con lo cual, la vorticidad es inversamente proporcional a la sección transversal del filamento vorticoso. Si el área de la sección transversal fuera nula, la vorticidad sería infinita y, para que esto no ocurra, los filamento vortic平os se dice que no pueden originarse ni extinguirse en el fluido.

## 2.8. Teoremas de von Helmholtz

Todo esto conlleva a los teoremas de vórtices para flujos incompresibles y no viscosos, de Hermann von Helmholtz y que pueden resumirse en:

1. La intensidad de un filamento vorticoso es constante en toda su longitud. Se desprende de 2.17.
2. Un filamento vorticoso no puede comenzar y terminar en un fluido, debe formar una curva cerrada o extenderse al infinito (se cierra allí). Surge de 2.18
3. El fluido que forma un tubo vorticoso continúa formando un tubo vorticoso, cuya intensidad permanece constante durante todo su movimiento.
4. Un filamento vorticoso es transportado por el fluido: se mueve con la velocidad local del mismo.

Los dos últimos teoremas se demuestran a continuación.

### Demostración

Teorema 4: ¿un filamento vorticoso es transportado por el fluido: se mueve con la velocidad local del mismo?

El movimiento de dos partículas de fluido contiguas pueden describirse con:

$P_1$ :

$$\frac{D\mathbf{r}_1}{Dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t)$$

$P_2$ :

$$\frac{D\mathbf{r}_2}{Dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_2, t)$$

con

$$\mathbf{r}_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{l} = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{l}$$

donde digamos que  $\mathbf{r}_2$  se aproxima a  $\mathbf{r}_1$ .

Entonces:

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{D}{Dt}d\mathbf{l} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_1 + d\mathbf{l}, t) - \mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t)$$

La expansión en serie de Taylor truncada a la primera potencia del primer término del último miembro es:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_1 + d\mathbf{l}, t) \approx \mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t) + (\nabla \mathbf{V})(\mathbf{r}_1, t)d\mathbf{l}$$

Luego:

$$\frac{D}{Dt}d\mathbf{l} = (\nabla \mathbf{V})d\mathbf{l}$$

En notación de índices:

$$\left( \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt}(\mathbf{r}_1, t) \right)_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\mathbf{l}_j(\mathbf{r}_1, t) \quad (2.19)$$

Pero a la vez, recordando la ecuación para la razón de cambio de vorticidad y reescribiéndola en la misma notación indicial:

$$\left( \frac{D\zeta}{Dt}(\mathbf{r}_1, t) \right)_i = \zeta_j(\mathbf{r}_1, t) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

O sea, comparando 2.19 y 2.20, con el tiempo la distancia entre partículas de fluido contiguas evolucionan de la misma forma que la vorticidad, con el mismo tensor de deformación lineal  $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ .

La validez de 2.19 y 2.20 se extiende a todo el campo de fluido donde el flujo sea incompresible, no viscoso y con fuerzas de masa conservativas, y en particular lo son en un filamento vorticoso. Entonces, si en un instante  $d\mathbf{l}$  unía dos partículas materiales contiguas sobre un filamento vorticoso -es decir, era tangente al vector vorticidad-, en el instante posterior siguen siendolo porque fueron transformados por el mismo tensor de deformación lineal, lo que conserva la tangencia. Entonces las líneas vorticosas coinciden con líneas materiales. ✓

### Demostración

Teorema 3: ¿el fluido que forma un tubo vorticoso continúa formando un tubo vorticoso, cuya intensidad permanece constante durante todo su movimiento?

La primera parte de este teorema se explica con el teorema 4. Esto podría haberse trasladado a dicho teorema, pero se mantuvo el enunciado clásico de los teoremas. ✓

La segunda parte, surge de lo anterior y del teorema de Kelvin 2.7, pues si entre un instante el filamento vorticoso convectó con el fluido, es una curva material  $C(t)$  cuya circulación en un flujo incompresible, no viscoso y con fuerzas de masa conservativas debe permanecer constante. ✓

Los teoremas de von Helmholtz pueden generalizarse para un caso barotrópico, pero esto no fue abordado ya que no hace falta para el presente trabajo.

## 2.9. Ley de Biot-Savart

Dado un filamento vorticoso con circulación  $\Gamma$ , el campo de velocidades debido a este en un flujo incompresible es:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \int_{f.v} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (2.21)$$

En el caso de un flujo que sea, aun más, potencial, la circulación es invariante en el tiempo.

### Demostración

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \stackrel{?}{=} \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \int_{f.v} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (2.21)$$

Sea  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  un campo vectorial tal que  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}$  no puede ser un gradiente de una función escalar, pues de lo contrario  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ .

En cualquier caso,  $\mathbf{B}$  así definido satisface la ecuación de continuidad para un flujo incompresible (1.11):

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = 0$$

pues la divergencia de un campo rotor es nula.

Como  $\mathbf{B}$  no es un gradiente de un función escalar, se impone que su divergencia sea nula, o sea:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \zeta &= \nabla \wedge \mathbf{V} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ \zeta &= -\nabla^2 \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.22)$$

El campo  $\mathbf{B}$  que satisface la ecuación 2.22, también conocida como la de Poisson, se halla empleando una forma del teorema de la divergencia (ver Karamcheti [3], pag. 532) y es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{\zeta(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV$$

donde  $R$  es la región del espacio donde se distribuye la vorticidad.

Así, la velocidad queda

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \iiint_R \frac{\zeta(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathcal{V}$$

En forma diferencial:

$$d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \frac{\zeta(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathcal{V} \quad (2.23)$$

En el caso de un filamento vorticoso donde (ver figura 2.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \zeta d\mathcal{A} \\ d\mathcal{V} = d\mathcal{A} dl \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dl = \frac{\zeta}{\zeta} dl \\ \end{array} \right. \quad (2.26)$$

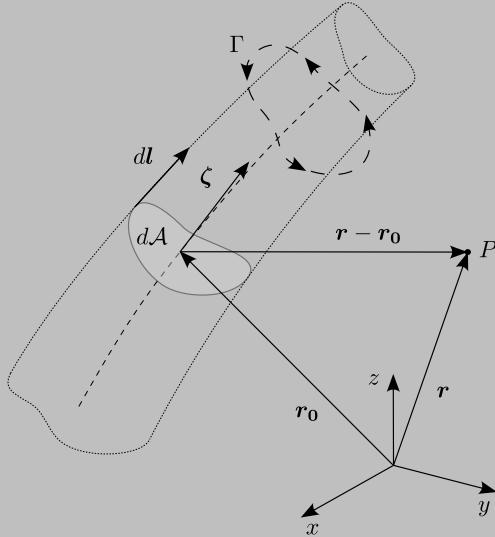


Figura 2.4: filamento vorticoso.

Entonces, la contribución a la velocidad de un elemento vorticoso diferencial (ecuación 2.23) queda:

$$\begin{aligned} d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \frac{\zeta(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \frac{\frac{\Gamma}{d\mathcal{A}} \zeta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathcal{A} dl = \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \Gamma \frac{dl}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{4\pi} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{dl_x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} & \frac{dl_y}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} & \frac{dl_z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} ((-(y - y_0)dl_z + (z - z_0)dl_y) \mathbf{e}_x + (-(z - z_0)dl_x + (x - x_0)dl_z) \mathbf{e}_y + \\ &+ (-(x - x_0)dl_y + (y - y_0)dl_x) \mathbf{e}_z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \wedge dl) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \end{aligned}$$

Finalmente, la velocidad debida a todo el filamento vorticoso es:

$$\mathbf{V} = \int_{f.v} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{f.v} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad \checkmark$$

## 2.10. Función de corriente

En un flujo bidimensional, además del potencial de velocidad existe la función escalar  $\Psi(\mathbf{r}, y)$ , tal que:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.27)$$

ó, en coordenadas polares:

$$\begin{cases} V_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (2.28)$$

Así definida, esta función satisface la ec. de continuidad para un flujo incompresible no necesariamente irrotacional:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Esta función tiene la particularidad de que las líneas de corriente son equipotenciales de esta función y que el caudal volumétrico entre las líneas de corrientes es la diferencia de los valores de la función de corriente:

$$\begin{aligned} \Psi \Big|_{A \in l.c.} &= \Psi \Big|_{B \in l.c.} \\ Q &= \Psi \Big|_{l.c,1} - \Psi \Big|_{l.c,2} \end{aligned}$$

La función de corriente no se utilizará a la hora de la resolución numérica, pero si facilitará el desarrollo de algunos conceptos y por eso se la presenta, aunque sea brevemente.

### Demostración

$$\Psi \Big|_{A \in l.c.} \stackrel{?}{=} \Psi \Big|_{B \in l.c.}$$

Una línea de corriente puede definirse como:

$$\mathbf{V} \wedge d\mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Desarrollando el producto y utilizando la definición de la función de corriente:

$$\mathbf{V} \wedge d\mathbf{l} = (u dy - v dx) \mathbf{e}_z = d\Psi \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

$$d\Psi \Big|_{l.c.} = 0$$

Entonces, a lo largo de una línea de corriente  $\Psi$  es constante y:

$$\Psi \Big|_{A \in l.c.} = \Psi \Big|_{B \in l.c.} \quad \checkmark$$

### Demostración

$$Q \stackrel{?}{=} \Psi \Big|_{l.c.1} - \Psi \Big|_{l.c.2}$$

El flujo a través de un área diferencial entre dos líneas de corriente es, viendo la figura 2.5:

$$Q = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = -v dx + u dy = d\Psi$$

Integrando entre las líneas de corriente 1 y 2:

$$Q_{l.c.1, l.c.2} = \iint_{l.c.1}^{l.c.2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} = \int_{l.c.1}^{l.c.2} d\Psi = \Psi_{l.c.2} - \Psi_{l.c.1} \quad \checkmark$$

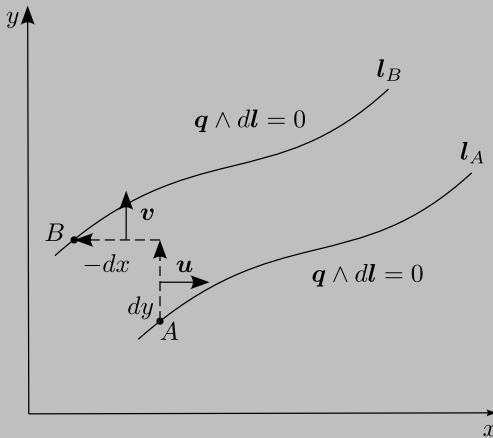


Figura 2.5: caudal entre dos líneas de corriente.

A continuación, se presentarán soluciones básicas de la ecuación de Laplace 2.10 para un flujo potencial y algunas de sus características.

Se advierte que cuando se presenten expresiones en coordenadas esféricas o polares para las soluciones básicas, el origen del sistema es la ubicación del elemento puntual que se esté analizando, y que en general estos se ubican en  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , en coordenadas cartesianas.

## 2.11. Solución básica: corriente uniforme

Este tipo de flujo pese a su sencillez es útil para modelar sistemas de referencia inerciales en problemas estacionarios.

- En tres dimensiones y coordenadas cartesianas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = U_\infty x + V_\infty y + W_\infty z \quad (2.30)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = U_\infty \mathbf{e}_x + V_\infty \mathbf{e}_y + W_\infty \mathbf{e}_z \quad (2.31)$$

- En dos dimensiones:

- Coordenadas polares con  $\mathbf{V} = U_\infty \mathbf{e}_x$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = V_\infty r \cos(\theta) \quad (2.32)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = -V_\infty r \sin(\theta) \quad (2.33)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = V_\infty (\cos(\theta) \mathbf{e}_r - \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta) \quad (2.34)$$

- Coordenadas cartesianas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = U_\infty x + V_\infty y \quad (2.35)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = -V_\infty x + U_\infty y \quad (2.36)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = U_\infty \mathbf{e}_x + V_\infty \mathbf{e}_y \quad (2.37)$$

### Demostración

Esta solución es trivial y el caso tridimensional es una extensión del bidimensional, por lo que basta verificar sólo el primero.

1. Ec. 2.10:

$$\nabla^2 \Phi \stackrel{?}{=} 0, \quad r \neq 0$$

2. Ec. 2.9:

$$\mathbf{V} \stackrel{?}{=} \nabla \Phi, \quad r \neq 0$$

1.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}(U_\infty x) + \frac{\partial}{\partial y^2}(V_\infty y) + \frac{\partial}{\partial z^2}(W_\infty z) = 0 \quad \checkmark$$

2.

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z = U_\infty \mathbf{e}_x + V_\infty \mathbf{e}_y + W_\infty \mathbf{e}_z \quad \checkmark$$

Es importante notar que a esta solución, a diferencia de las que se presentarán a continuación, no se le exige satisfacer 2.12 ( $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ) ya que no modela una perturbación en el fluido debido al movimiento de un sólido, sino una condición cinemática.

## 2.12. Solución básica: fuente puntual

Una fuente o sumidero puntual es una singularidad que introduce o extrae masa, respectivamente, en el punto del espacio en el que se encuentra y de forma radial, como se muestra en la figura 2.6. A continuación, se presentarán el potencial y la velocidad asociados en diferentes sistemas coordenados.

- En tres dimensiones:

- Coordenadas esféricas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma}{4\pi r}, \quad r \neq 0 \quad (2.38)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad r \neq 0 \quad (2.39)$$

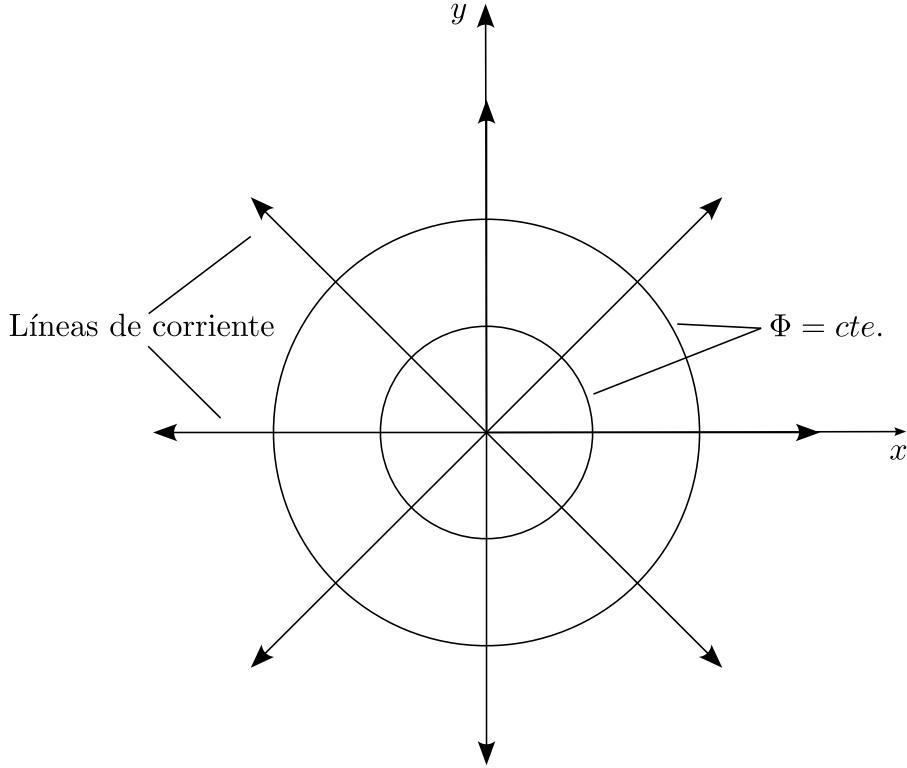


Figura 2.6: fuente puntual.

- Coordenadas cartesianas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\sigma}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.40)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.41)$$

Notar que esta solución tiene un singularidad en  $\mathbf{r}_0$ . Aun más, el flujo a través de una esfera de radio  $r$  centrada en la fuente es:

$$Q = V \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{4\pi r^2} 4\pi r^2 = \sigma, \quad r \neq 0$$

Con lo cual  $\sigma$  representa el caudal que se introduce o se extrae puntualmente en la fuente o en el sumidero, según sea la intensidad  $\sigma$  positiva o negativa, respectivamente. De esta forma, la singularidad tiene sentido físico ya que en esta singularidad se viola la conservación de la masa.

- En dos dimensiones:

- Coordenadas polares:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln(r), \quad r \neq 0 \quad (2.42)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\pi} \theta, \quad r \neq 0 \quad (2.43)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad r \neq 0 \quad (2.44)$$

- Coordenadas cartesianas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.46)$$

Nuevamente, el flujo a través de una circunferencia de radio  $r$  centrada en la fuente es:

$$Q = V2\pi r = \frac{\sigma}{2\pi r} 2\pi r = \sigma, \quad r \neq 0$$

### Demostración

Una fuente puntual debe satisfacer:

1. Ec. 2.10:

$$\nabla^2 \Phi \stackrel{?}{=} 0, \quad r \neq 0$$

2. Ec. 2.9:

$$\mathbf{V} \stackrel{?}{=} \nabla \Phi, \quad r \neq 0$$

3. Ec. 2.12

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} \stackrel{?}{=} \mathbf{0}$$

■ En tres dimensiones:

1.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \\ &= -\frac{\sigma}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r^2}{r^2} \right) = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{-\sigma}{4\pi r} \right) \mathbf{e}_r = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

3.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-\sigma}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r = \mathbf{0} \quad \checkmark$$

■ En dos dimensiones:

1.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \\ &= \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (\ln(r)) \right) = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{r} \right) = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma}{2\pi}\ln(r)\right)\mathbf{e}_r = \frac{\sigma}{2\pi r}\mathbf{e}_r, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

3.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\pi r}\mathbf{e}_r = \mathbf{0} \quad \checkmark$$

## 2.13. Solución básica: doblete puntual

Un doblete puntual es una singularidad menos fácil de describir. Se puede pensar, y de hecho puede deducirse matemáticamente así, como una fuente y un sumidero dispuestos sobre un eje y que se aproximan arbitrariamente a un punto. Esto resulta en líneas de flujo que emanan del doblete, viajan alrededor de este y vuelven a él, siempre sobre planos que contienen al eje mediante el cual se juntaron la fuente y el sumidero. Esto se puede ver en la figura 2.7.

De esta forma, se define el vector doblete  $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{e}_\mu$  como se ve en la figura 2.7, el cual es tangente al eje de aproximación de la fuente y el sumidero, y cuyo sentido va desde el sumidero hacia la fuente o, bien, en el mismo sentido en el que se inyecta y sustrae fluido en el doblete.

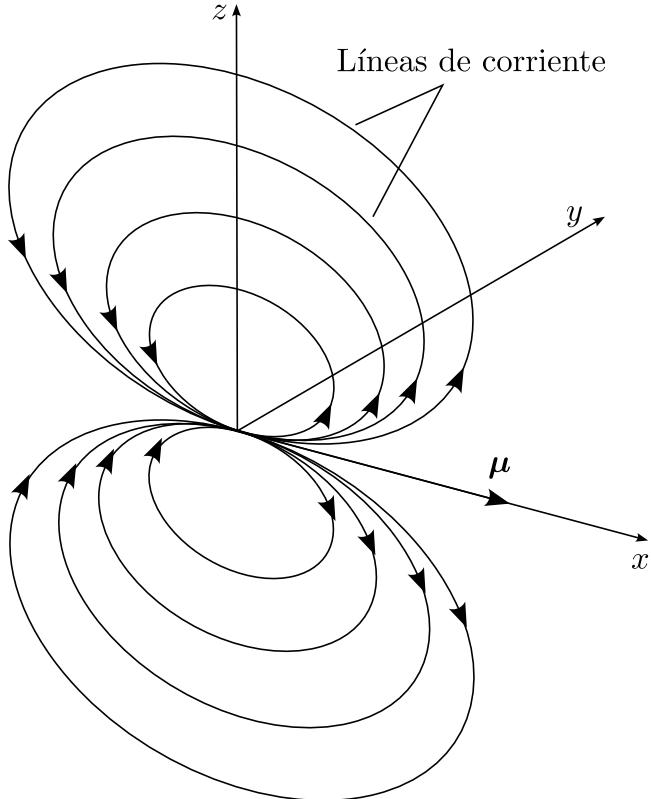


Figura 2.7: doblete puntual.

■ En tres dimensiones:

- Coordenadas esféricas con  $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{e}_r(r, 0, 0)$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu\cos\theta}{4\pi r^2}, \quad r \neq 0 \quad (2.47)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\mu\cos(\theta)}{2\pi r^3}\mathbf{e}_r + \frac{\mu\sin(\theta)}{4\pi r^3}\mathbf{e}_\theta, \quad r \neq 0 \quad (2.48)$$

- Coordenadas cartesianas con  $\boldsymbol{\mu} = (\mu, 0, 0)$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} & \left( (3(x - x_0)^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2) \mathbf{e}_x + \right. \\ & \left. + 3(x - x_0)(y - y_0) \mathbf{e}_y + 3(x - x_0)(z - z_0) \mathbf{e}_z \right), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

- En dos dimensiones:

- Coordenadas polares con  $\boldsymbol{\mu} = \mu \mathbf{e}_r(r, 0)$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.51)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.52)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2\pi r^2} (\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.53)$$

- Coordenadas cartesianas con  $\boldsymbol{\mu} = (\mu, 0, 0)$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x - x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.54)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mu}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^4} (((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) \mathbf{e}_x + 2(x - x_0)(y - y_0) \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.55)$$

En coordenadas cartesianas pueden obtenerse análogamente expresiones similares si  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{e}_y$  y  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{e}_z$ ; y para obtener el potencial y la velocidad por un doblete con  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ , o en el caso bidimensional  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y)$ , se combinan linealmente los efectos de los anteriores dobletes, paralelos a los ejes coordenados.

Si  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_r(r, 0, 0)$ ,

$$\frac{\partial \Phi_{fuente}}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \Phi_{fuente} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r(r, \theta, \phi) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{4\pi r^2} \cos(\theta) = \Phi_{doblete}, \quad \mu = \sigma, \quad r \neq 0$$

Lo que concuerda con el hecho de que el doblete puede obtenerse a partir de una fuente y un sumidero. Lo mismo ocurre en el caso bidimensional.

### Demostración

Un doblete puntual debe satisfacer:

1. Ec. 2.10:

$$\nabla^2 \Phi \stackrel{?}{=} 0, \quad r \neq 0$$

2. Ec. 2.9:

$$\mathbf{V} \stackrel{?}{=} \nabla \Phi, \quad r \neq 0$$

3. Ec. 2.12

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} \stackrel{?}{=} \mathbf{0}$$

- En tres dimensiones:

1.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left( -\frac{\mu \cos(\theta)}{4\pi} \right) (-2r^{-3}) \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\mu \sin(\theta)}{4\pi r^2} \right) = \\
&= \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\mu}{4\pi r^4 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2(\theta)) = \\
&= -\frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^4} + \frac{\mu}{4\pi r^4 \sin(\theta)} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu \sin(\theta)}{2\pi r^3} \mathbf{e}_\theta, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

3.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu \sin(\theta)}{4\pi r^3} \mathbf{e}_\theta \right) = \mathbf{0} \quad \checkmark$$

- En dos dimensiones:

1.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -\frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( -\frac{1}{r^2} \right) \right) - \frac{\mu}{2\pi r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin(\theta)) = \\
&= -\frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^3} + \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^3} = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

2.

$$\mathbf{V} = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu \sin(\theta)}{4\pi r^3} \mathbf{e}_\theta, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

3.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\mu \sin(\theta)}{4\pi r^3} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0} \quad \checkmark$$

## 2.14. Solución básica: vórtice puntual

En esta instancia, se considera oportuno presentar la velocidad inducida por un segmento de filamento vorticoso. Este por sí solo viola el teorema 2 de Helmholtz, ya que un filamento vorticoso no puede originarse ni extinguirse en el fluido, por lo que este segmento deberá ser parte de un filamento vorticoso que se extienda al infinito o que se cierre en sí mismo.

Si el filamento vorticoso inicia en 1 y termina en 2 (ver figura 2.8), tiene circulación  $\Gamma = \Gamma(t)$  con sentido según la regla de la mano derecha con  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , entonces la velocidad inducida en el punto P es:

- En tres dimensiones:

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left( (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right) \right) \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|^2}, \quad \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0} \quad (P \notin f.v.1,2) \quad (2.56)$$

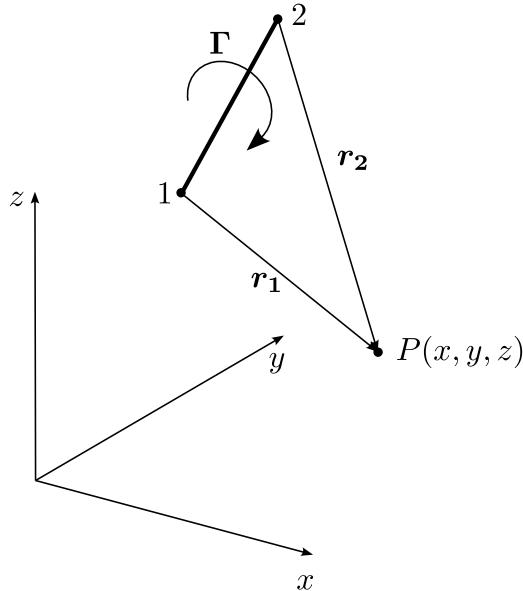


Figura 2.8: segmento vorticoso.

En el caso bidimensional, el filamento vorticoso sería uno de longitud infinita<sup>1</sup> normal al plano  $xy$ , al cual llamaremos vórtice puntual.

- En dos dimensiones:

- Coordenadas polares:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta, \quad r \neq 0 \quad (2.57)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r), \quad r \neq 0 \quad (2.58)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta, \quad r \neq 0 \quad (2.59)$$

- Coordenadas cartesianas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y - y_0}{x - x_0} \right), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.60)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} ((y - y_0) \mathbf{e}_x - (x - x_0) \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \quad (2.61)$$

Vale aclarar a esta altura, que solo es posible presentar el potencial del vórtice bidimensional ya que es el único filamento vorticoso tratado hasta el momento que satisface Helmholtz 2.

Este potencial existe pues, como se demostrará, toda la circulación se genera en el vórtice puntual y es nula para cualquier curva que no lo encierre. Así, la vorticidad resulta nula fuera del vórtice, el campo de velocidad es irrotacional allí, y por lo tanto existe una función potencial de la velocidad.

### Demostración

Un vórtice puntual debe satisfacer:

1. Ec. 2.10:

$$\nabla^2 \Phi \stackrel{?}{=} 0, \quad r \neq 0$$

<sup>1</sup>Por lo que sí satisface Helmholtz 2.

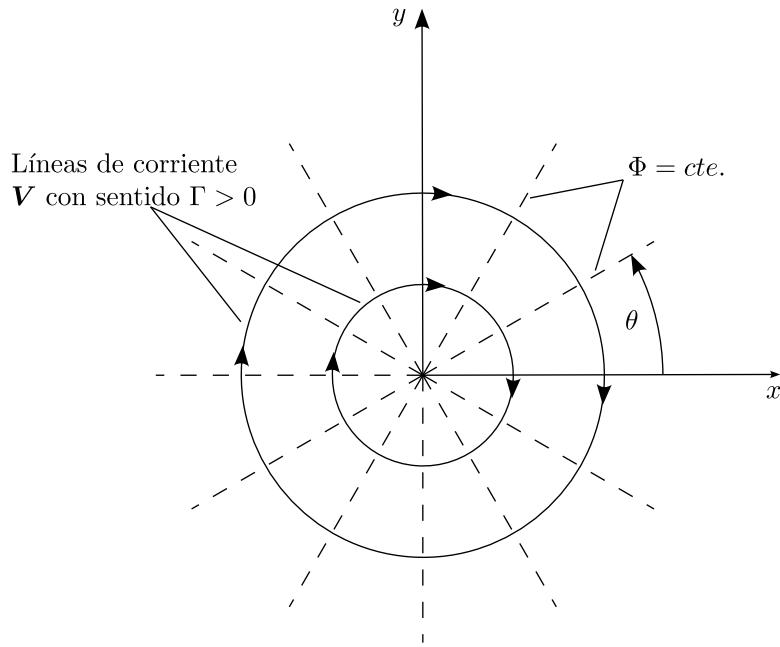


Figura 2.9: vórtice puntual.

2. Ec. 2.9:

$$\mathbf{V} \stackrel{?}{=} \nabla\Phi, \quad r \neq 0$$

3. Ec. 2.12

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} \stackrel{?}{=} \mathbf{0}$$

1.

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \frac{\partial}{\partial\theta}(1) = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

2.

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

3.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0} \quad \checkmark$$

### Demostración

En tres dimensiones:

$$\mathbf{V} \stackrel{?}{=} \frac{\Gamma}{4\pi} \left( (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right) \right) \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|}, \quad \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0} \quad (P \notin f.v.1,2) \quad (2.56)$$

La ley de Biot-Savart establecía para una filamento vorticoso:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \int_{f.v.} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (2.21)$$

En forma diferencial:

$$d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

En forma escalar y utilizando la nomenclatura de la figura 2.10:

$$dV_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \sin(\beta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} dl$$

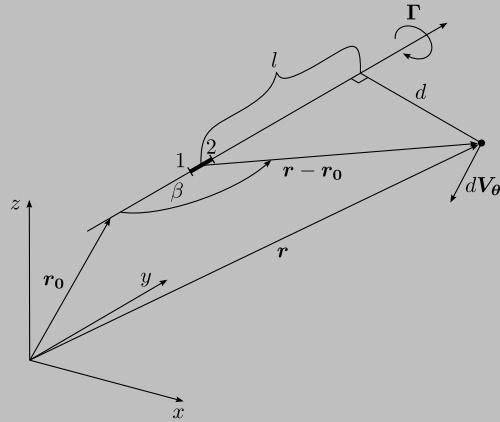


Figura 2.10: segmento vorticoso.

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{d}{l} = \tan(\pi - \beta) = \frac{\tan(\pi) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\pi)\tan(\beta)} = -\tan(\beta)$$

$$\Rightarrow l = -d \tan^{-1}(\beta)$$

$$\Rightarrow dl = d \tan^{-2}(\beta) \cos^{-2}(\beta) d\beta = \frac{d}{\sin^2(\beta)} d\beta$$

y que:

$$d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \frac{d}{\sin(\beta)}$$

entonces

$$dV_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin(\beta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} dl = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin^3(\beta)}{d^2} \frac{d}{\sin^2(\beta)} d\beta = \frac{\Gamma}{4\pi d} \sin(\beta) d\beta$$

Integrando y con la nomenclatura de la figura 2.11,

$$V_{\theta,1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi d} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin(\beta) d\beta = \frac{\Gamma}{4\pi d} (\cos(\beta_1) - \cos(\beta_2)) \quad (2.62)$$

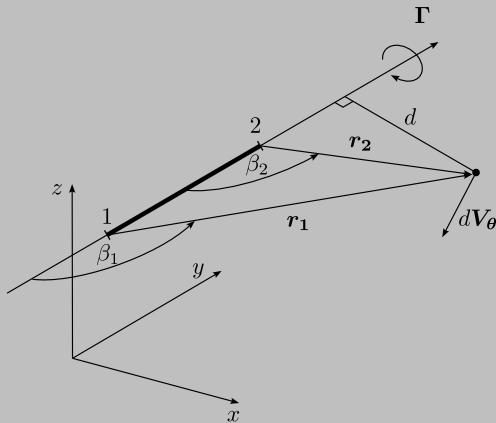


Figura 2.11: segmento vorticoso.

Volviendo sobre la figura 2.8, puede notarse que el área del paralelogramo definido por los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  es:

$$A = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{d}$$

Pero también puede obtenerse con el módulo del producto vectorial:

$$A = |\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|$$

Igualando y despejando d:

$$d = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|}$$

También por el módulo del producto escalar:

$$\begin{aligned} \cos(\beta_1) &= \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} \\ \cos(\beta_2) &= \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V_\theta &= \frac{\Gamma}{4\pi d} (\cos(\beta_1) - \cos(\beta_2)) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right) = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|} \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right) \end{aligned}$$

Para incorporar la dirección y el sentido, debe tenerse en cuenta que la velocidad inducida en  $P$  es ortogonal al plano definido por  $P$  y los puntos 1 y 2. Una normal a este plano que tenga el sentido de la velocidad inducida teniendo en cuenta el sentido de la circulación  $\Gamma$  es:

$$\frac{\mathbf{V}_\theta}{|\mathbf{V}_\theta|} = \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V_\theta &= \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|} \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right) \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|} = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left( (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} \right) \right) \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|^2}, \quad \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \neq \mathbf{0} \quad (P \notin f.v.1,2) \quad \checkmark \end{aligned}$$

## Demostración

En dos dimensiones:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) \stackrel{?}{=} -\frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta, \quad r \neq 0 \quad (2.59)$$

El vórtice puntual es el caso particular de un filamento vorticoso que se extiende en el infinito en el espacio; o sea,  $\beta_1 = 0$  y  $\beta_2 = \pi$ . Reemplazando esto en la ecuación 2.62:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos(\beta_1) - \cos(\beta_2)) = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad r \neq 0$$

Ahora bien, si se elige la convención de la figura 2.9 para el sentido positivo de la circulación:

$$\mathbf{V}_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{e}_r, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

También, puede obtenerse el campo generado por un vórtice puntual resolviendo el flujo incompresible pero viscoso y sin fuerzas de masa, alrededor de un cilindro circular infinitamente largo y de radio  $R$ , y finalmente tomando el límite  $R \rightarrow 0$  (Katz-Plotkin [7], p. 50).

### Demostración

¿La vorticidad está acotada al vórtice puntual?

Si  $C_1$  es una circunferencia de radio  $r$  centrada en el vórtice recorrida en el sentido de circulación positiva:

$$\Gamma_{C_1} = \oint_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{2\pi}^0 V_\theta r d\theta = \int_{2\pi}^0 -\frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_{2\pi}^0 d\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi} (0 - 2\pi) = \Gamma$$

Sin embargo, una curva  $C_2$  que encierre un área diferencial fuera del vórtice, como la mostrada en la figura 2.12:

$$\begin{aligned} \Gamma_{C_2} &= \oint_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A \cup B \cup C \cup D} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= -\frac{-\Gamma}{2\pi r} r \Delta\theta + 0 + \frac{-\Gamma}{2\pi(r + \Delta r)} (r + \Delta r) \Delta\theta + 0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \Delta\theta (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Siguiendo, recordando la relación entre la circulación y la vorticidad:

$$\Gamma \doteq \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.4)$$

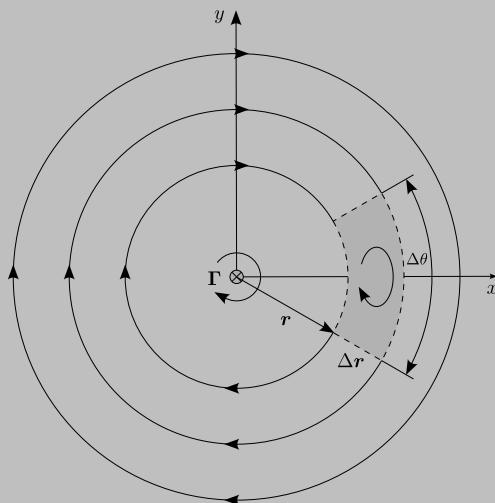


Figura 2.12: circulación en vórtice puntual.

En la curva  $C_2$ , ya que encierra un área diferencial:

$$\Gamma_{C_2} = \zeta \cdot \mathbf{n} \Big|_r, \quad r \neq 0$$

Por lo que debe ser

$$\zeta = \mathbf{0}, \quad r \neq 0$$

De esta forma, se puede ver que la circulación se genera en la singularidad y que la vorticidad se limita a este punto. ✓

## 2.15. Teorema de Kutta-Joukowski

En un flujo potencial, las únicas fuerzas involucradas son las de masa y las resultantes de presión sobre las superficies de los cuerpos.

Un caso particular que resulta interesante tratar, es el de un vórtice puntual de circulación  $\Gamma$  ubicado dentro de un flujo uniforme  $\mathbf{V}_\infty$ . En este caso, la resultante aerodinámica sobre una superficie determinada por una línea de corriente cerrada arbitrariamente próxima al vórtice (ver figura 2.13) es, por unidad de longitud:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{V}_\infty \wedge \Gamma \quad (2.63)$$

la cual es normal al flujo uniforme y, por lo tanto, se corresponde con la sustentación  $L$  del elemento.

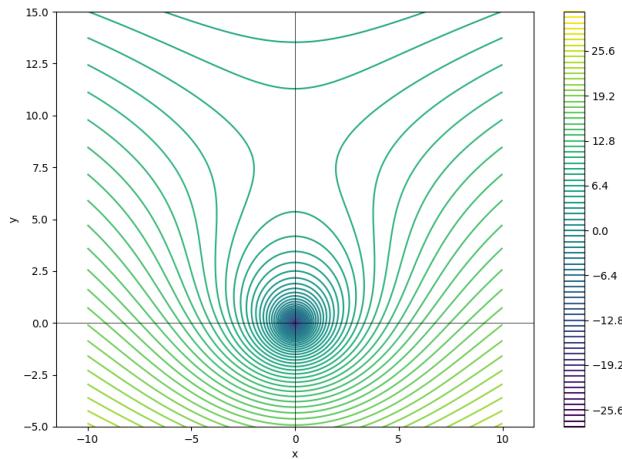


Figura 2.13: líneas de corriente de la superposición de un flujo uniforme (con sentido  $x^+$ ) y un vórtice.

Este resultado puede generalizarse para obtener:

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{V} \wedge \Gamma \quad (2.64)$$

donde  $\mathbf{V}$  es la velocidad local.

Desde el punto de vista físico esto tiene sentido ya que, recordando la ecuación de Bernoulli (2.15), considerando flujo estacionario por simplicidad y despreciando el potencial de las fuerzas de masa porque se está trabajando sobre una superficie arbitrariamente cercana a un punto:

$$p = p_\infty - \rho \frac{V^2 - V_\infty^2}{2}$$

Luego, observando la composición de velocidades del flujo uniforme y del vórtice, se puede advertir que en la semicircunferencia inferior ( $y^-$ ) el fluido se acelera y genera depresión, mientras que en la superior ( $y^+$ ) se frena y genera sobrepresión. Ambos fenómenos tienen el efecto de generar fuerzas con sentido  $y^-$  y el efecto neto también es este.

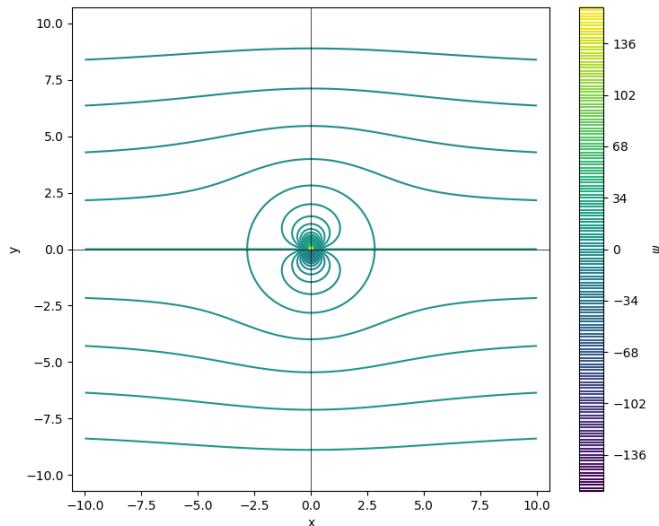


Figura 2.14: líneas de corriente de la superposición de un flujo uniforme y un doblete con  $\mu$  enfrentado al flujo uniforme.

Si se ubicara un doblete con  $\mu = (-|\mu|, 0)$  en lugar de un vórtice no se genera ninguna asimetría en el flujo sobre la única superficie cerrada que existe (ver figura 2.14). En el caso de ubicar un doblete con  $\mu = (|\mu|, 0)$  o, bien,  $\mu = (0, \mu)$ , se forman curvas cerradas simétricas respecto del eje  $x$  pero que no encierran a la singularidad (ver figura 2.15).

Si se ubicara una fuente, se forma la que se llama *Proa de Fuhrmann*, la cual es una superficie no cerrada, simétrica respecto del eje  $x$  y que se extiende al infinito por uno de sus lados como se puede ver en la figura 2.16. Si bien no es cerrada, rápidamente se puede concluir de que sobre esta no existirá una componente de fuerza no nula perpendicular a la corriente uniforme.

Por todo esto, resulta lógico pensar que para que exista una fuerza aerodinámica sobre un cuerpo en flujo potencial, debe existir algún tipo de asimetría en el flujo.

La ecuación 2.64 se trasladará también al caso tridimensional de filamentos vorticosos y será importante recordar que para que no existan fuerzas aerodinámicas, no deben existir asimetrías en el flujo y en el caso de un filamento vorticoso esto implica que:

$$\Gamma = 0 \quad (2.65)$$

### Demostración

$$\mathbf{F} \stackrel{?}{=} \rho \mathbf{V}_\infty \wedge \Gamma \quad (2.63)$$

Normalmente, para demostrar el teorema de Kutta-Joukowski se considera el flujo debido a la superposición de una corriente uniforme  $U_\infty \mathbf{e}_x$ , un doblete con  $\mu = (-U_\infty 2\pi R^2, 0)$  y un vórtice de circulación  $\Gamma$ , con ambas singularidades en el origen.

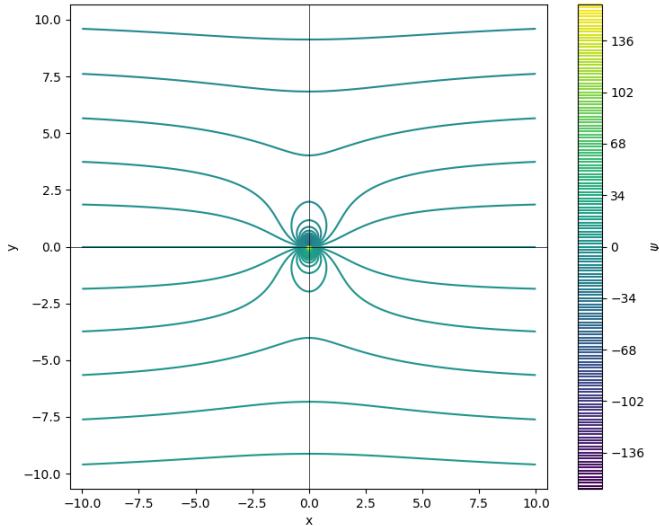


Figura 2.15: líneas de corriente de la superposición de un flujo uniforme y un doblete con  $\mu$  alineado con y con el mismo sentido del flujo uniforme.

La función de corriente resultante es:

$$\begin{aligned}\Psi &= U_\infty r \operatorname{sen}(\theta) - \frac{\mu \operatorname{sen}(\theta)}{2\pi r} + \frac{\Gamma \ln(r)}{2\pi} = \\ &= U_\infty r \operatorname{sen}(\theta) - U_\infty \operatorname{sen}(\theta) \frac{R^2}{r} + \frac{\Gamma \ln(r)}{2\pi} = U_\infty \operatorname{sen}(\theta) \left( r - \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma \ln(r)}{2\pi}\end{aligned}$$

Si  $r = R$ ,  $\Psi = \frac{\Gamma \ln(R)}{2\pi}$  y  $C : r = R$  resulta ser una línea de corriente ( $\Psi$  es constante en ella), la cual es una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen.

Luego, esta circunferencia puede modelar la superficie de un sólido impenetrable y sobre ella se puede calcular una resultante de presiones. Si  $\mathbf{n}$  es la normal interior a la superficie:

$$\mathbf{F} = \int_C p \mathbf{n} dl = \int_0^{2\pi} -p \mathbf{e}_r R d\theta = -R \int_0^{2\pi} p (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta$$

Para obtener la presión  $p$  sobre la superficie se considera la ec. de Bernoulli (2.15) en estado estacionario y despreciando las fuerzas de masa:

$$p = p_\infty - \rho \frac{V^2 - V_\infty^2}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -R \left( p_\infty \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta - \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (V^2 - V_\infty^2) (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \operatorname{sen}(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta \right)$$

La velocidad se obtiene superponiendo las de las soluciones básicas:

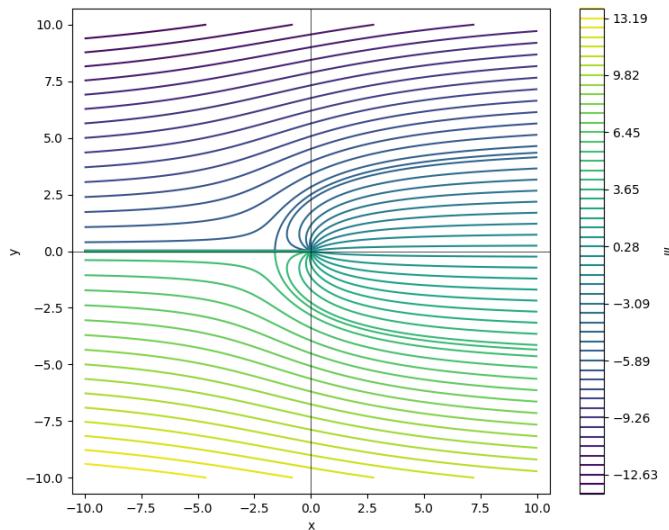


Figura 2.16: líneas de corriente de la superposición de un flujo uniforme y una fuente.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \left( U_{\infty} \cos(\theta) - \frac{\mu \cos(\theta)}{2\pi r^2} \right) \mathbf{e}_r - \left( U_{\infty} \sin(\theta) + \frac{\mu \sin(\theta)}{2\pi r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) \mathbf{e}_{\theta} = \\
 &= U_{\infty} \cos(\theta) \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_r - \left( U_{\infty} \sin(\theta) \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) \mathbf{e}_{\theta}
 \end{aligned}$$

En  $r = R$ :

$$\mathbf{V}(r = R) = - \left( 2U_{\infty} \sin(\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) \mathbf{e}_{\theta}$$

Entonces,

$$V^2(r = R) = 4U_{\infty}^2 \sin^2(\theta) + 2U_{\infty} \sin(\theta) \frac{\Gamma}{2\pi R} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} (V^2 - V_\infty^2) (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta = \\
&= \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} \left( 4U_\infty^2 \sin^2(\theta) + 2U_\infty \sin(\theta) \frac{\Gamma}{2\pi R} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} - U_\infty^2 \right) (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta = \\
&\quad = \frac{\rho R}{2} \left( \left( \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} - U_\infty^2 \right) \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta + \right. \\
&+ 4U_\infty^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2(\theta) \cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin^3(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta + \frac{2U_\infty \Gamma}{\pi R} \int_0^{2\pi} (\sin(\theta) \cos(\theta) \mathbf{e}_x + \sin^3(\theta) \mathbf{e}_y) d\theta \Big) = \\
&\quad = \frac{\rho R}{2} \left( 4U_\infty^2 \left( \frac{\sin^3(\theta)}{3} \mathbf{e}_x + \left( -\cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3} \right) \mathbf{e}_y \right) \Big|_0^{2\pi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2U_\infty \Gamma}{\pi R} \left( \frac{\sin^2(\theta)}{2} \mathbf{e}_x + \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \mathbf{e}_y \right) \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\rho R}{2} \frac{2U_\infty \Gamma}{\pi R} \pi \mathbf{e}_y = \rho U_\infty \Gamma \mathbf{e}_y
\end{aligned}$$

Siendo  $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{e}_z$  y  $\mathbf{V}_\infty = U_\infty \mathbf{e}_x$ :

$$\rho \mathbf{V}_\infty \wedge \mathbf{\Gamma} = -\rho U_\infty \Gamma (\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y) = \rho U_\infty \Gamma \mathbf{e}_y \quad \checkmark$$

Este resultado es independiente del radio  $R$ , por lo que puede tomarse el límite  $R \rightarrow 0$ .

También, es posible llegar a lo mismo considerando únicamente a la corriente uniforme y al vórtice, independizándose del doblete. Observando la figura 2.13, puede notarse que suficientemente cerca del vórtice las líneas de corriente son cerradas. Esto es cierto incluso arbitrariamente cerca del vórtice. Entonces, sobre estas líneas de corriente es posible calcular una resultante de presiones

Ya que estas líneas de corriente ya no son circunferencias (en el caso anterior esto era posible por la presencia del doblete), la integral de la presión sobre el cuerpo ya no puede realizarse directamente. Podría pensarse que en el límite  $r \rightarrow 0$  la influencia de la corriente uniforme es despreciable frente a la del vórtice. Y si bien esto es cierto y las líneas de corriente tienden a ser circunferencias, la integral es sensible a esto y el límite analítico bajo esta hipótesis queda la mitad del valor enunciado por el teorema de Kutta-Joukowski (2.63).

Primeramente, una línea de corriente implica:

$$\Psi = U_\infty r \sin(\theta) + \frac{\Gamma \ln(r)}{2\pi} = cte$$

De esta ecuación no puede despejarse explícitamente  $r$ , para así introducirla en la integral. Entonces, los pares  $(r, \theta)$  de una línea de corriente fueron resueltos numéricamente y el resto de los cálculos también. Se adjunta el código utilizado al final de esta demostración.

Similarmente a la demostración anterior, la presión  $p$  queda:

$$p = p_\infty - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{U_\infty \Gamma}{\pi r} \sin(\theta) \right)$$

El vector de presión será  $\mathbf{p} = p \mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}$  puede hallarse teniendo en cuenta que si  $\nabla \Phi$  es tangente a las líneas de corriente,  $\nabla \Psi$  será ortogonal a ellas:

$$-\mathbf{n} = \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \left( U_\infty \sin(\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right) \mathbf{e}_r + U_\infty \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta$$

donde el signo menos es para que  $\mathbf{n}$  sea interior.

Por último, la fuerza se obtendrá al sumar todos los aportes de la presión aplicada en segmentos de la superficie de integración:

$$\mathbf{F} = \int_C \mathbf{p} dl$$

lo cual se realiza en forma numérica en el código.

En la figura 2.17 se puede apreciar que en las líneas de corriente cerradas la fuerza de sustentación neta sigue lo establecido por el teorema de Kutta-Joukowski y que la resistencia total es nula, por tratarse de un flujo potencial bidimensional.

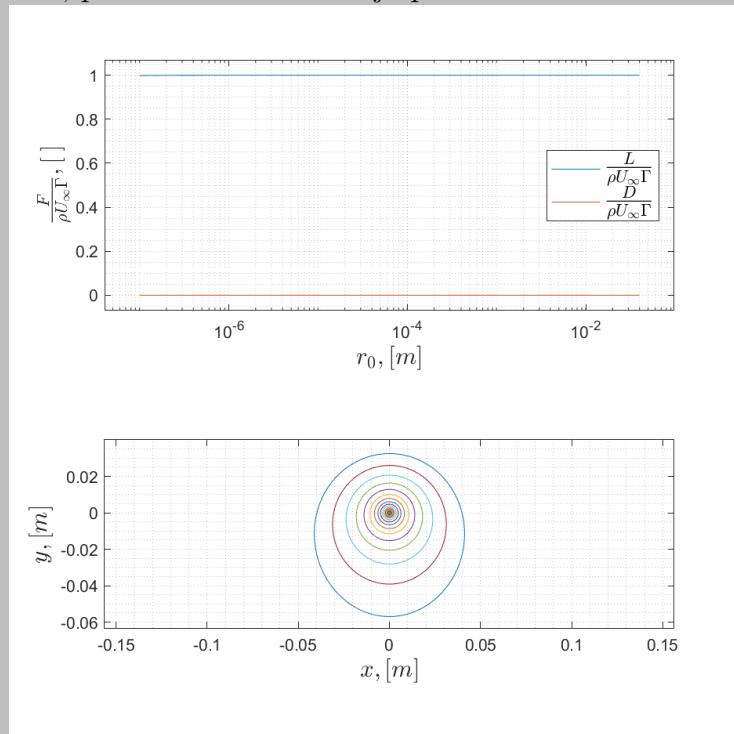


Figura 2.17: resultados de la resolución numérica de la fuerza aerodinámica resultante alrededor de un vórtice puntual embestido por una corriente uniforme.

```
%% Kutta-Joukowski
set(groot,'defaultAxesXMinorGrid','on','defaultAxesXMinorGridMode','
    manual');set(groot,'defaultAxesYMinorGrid','on','
    defaultAxesYMinorGridMode','manual');
clear; close all

r0=logspace(-7,-1.4,50); % Radios de los puntos (r0,0) que pertenecerán a
    las l.c.
nDth=2e2; % Cantidad de intervalos de theta.
z=zeros(length(r0),nDth); % Puntos de las l.c.
L=zeros(1,length(r0)); % Sustentación.
D=L; % Resistencia.
V=z; % Velocidades.
for i=1:length(r0)
    [Fi,zi,Vi]=Ffun(r0(i),nDth); % Para cada r0 se obtiene la fuerza
        % adimensionalizada con rho*Uinf*Gamma.
    L(i)=imag(Fi);
    D(i)=real(Fi);
    z(i,:)=zi;
    V(i,:)=Vi;
end
```

```

f=figure;
subplot(211); semilogx(r0,L,r0,D); axis padded
legend("$\frac{L}{\rho U_\infty \Gamma}$","$\frac{D}{\rho U_\infty \Gamma}$", ...
    "Interpreter","latex","FontSize",15,"Location","best");
ylabel("$\frac{F}{\rho U_\infty \Gamma}$", "[ :]$","Interpreter","latex",
    "FontSize",15)
xlabel("$r_0$, [m]$","Interpreter","latex","FontSize",15)

subplot(212); plot(real([z z(:,1)]).',imag([z z(:,1)]).'); axis equal
padded
xlabel("$x$, [m]$","Interpreter","latex","FontSize",15)
ylabel("$y$, [m]$","Interpreter","latex","FontSize",15)

f.Position=[400,200,600,600];
saveas(f,"..\..\Documentos\V1\Imágenes\Kutta-Joukowski.png")
%% Función para calcular la resultante adimensionalizada, la l.c. y la
velocidad
function [F,z,V]=Ffun(r0,nDth)
UInf=1;
Gamma=1;
pInf=1;
rho=1;

[r,th]=lCorriente(r0,nDth,UInf,Gamma); % Se obtienen las l.c.\%
z=r.*exp(sqrt(-1)*th); % Posiciones como complejos.

nr=UInf*sin(th)+Gamma/2/pi./r; %Componentes polares de los vectores
normales.
nth=UInf.*cos(th);

nx=nr.*cos(th)-nth.*sin(th); %Componentes cartesianas de los vectores
normales.
ny=nr.*sin(th)+nth.*cos(th);

n=complex(nx,ny);

n=-n./abs(n); % Se hace unitario e interior al vector normal.

dl=abs(diff([z z(1)]));
dl=(dl+[dl(end) dl(1:end-1)])/2; % Se calculan las longitudes dl
centrando
% los segmentos en cada z calculado.

Vr=UInf*cos(th); % Velocidad en polares.
Vth=-UInf*sin(th)-Gamma/2/pi./r;

Vx=Vr.*cos(th)-Vth.*sin(th); % Velocidad en cartesianas.
Vy=Vr.*sin(th)+Vth.*cos(th);

V=complex(Vx,Vy);

V2=UInf^2+UInf*Gamma/pi./r.*sin(th)+Gamma^2/4/pi^2./r.^2; % Rapidez al
cuadrado.

p=pInf-rho/2*(V2-UInf^2); % Presión.
p=p.*n;

F=sum(p.*dl); % Resultante.

```

```

F=F/rho/UIInf/Gamma; % Resultante adimensionalizada.
end

%% Funcion para calcular las l.c.
function [r,th]=lCorriente(r0,nDth,UIInf,Gamma)
arguments
    r0 (1,1) double {mustBePositive}
    nDth (1,1) double {mustBePositive,mustBeInteger}
    UIInf (1,1) double {mustBePositive}
    Gamma (1,1) double {mustBeReal}
end
Psi=Gamma/2/pi*log(r0); % Valor de la función de corriente en la l.c.
th=linspace(0,2*pi,nDth+1); % Coordenadas angulares.
th=th(1:end-1);
r=zeros(1,nDth); % Coordenadas radiales.
for i=1:nDth
    % Se resuelve la ecuación de la l.c.
    [ri,~,flag]=fsolve(@(r) UIInf*r*sin(th(i))+Gamma/2/pi*log(r)-Psi,r0,
        optimset("Display","off","TolFun",1e-10));
    if ismember(flag,1:4)
        r(i)=ri;
    else
        error("No se resolvió la ecuación en r0 = "+r0)
    end
end
end

```

## 2.16. Distribución de singularidades

Para el método de los paneles resultará necesario formular el efecto sobre el potencial o la velocidad de distribuciones de singularidades y por ello es necesario tratar este tema. Si bien hay gran variedad de distribuciones específicas, en este momento se introducirán de forma general y posteriormente se presentarán las que se emplearon, con sus particularidades.

Como se vió anteriormente, en las soluciones singulares del problema de flujo potencial, el potencial de un elemento tenía la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}) = k_\Phi \cdot I \cdot f_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (2.66)$$

donde

$k_\Phi$  es una constante,

$I$  es la intensidad que caracteriza al elemento, y

$f_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$  es una función de la posición del punto de evaluación  $\mathbf{r}$  y la ubicación de la singularidad  $\mathbf{r}_0$

Eventualmente,  $I$  podría depender del tiempo, pero eso no afecta en la resolución de la ecuación de continuidad y las condiciones de borde con las ecuaciones vistas.

Este tipo de soluciones puntuales pueden integrarse en un espacio de mayor dimensión con:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_R k_\Phi i(\mathbf{r}_0) f_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) d\mathcal{H}$$

donde  $R$  es la región donde se distribuyen los elementos singulares (posicionados con  $\mathbf{r}_0$ ),  $d\mathcal{H}$  es el diferencial correspondiente a dicho espacio y  $i = \frac{dI}{d\mathcal{H}}$  es la densidad de intensidad. Así, pueden tratarse distribuciones de línea, superficiales y volumétricas.

El tratamiento para el caso de la velocidad es el mismo:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = k_V \cdot I \cdot \mathbf{f}_V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (2.67)$$

A continuación, se desarrollarán las distribuciones lineales de fuentes, dobletes y sumideros sobre segmentos rectos.

## 2.17. Distribución de línea de fuentes

Se dispondrá la distribución en un segmento  $\mathcal{L} : (x, y) \in \{(x, y) \in \Re^2 : y = 0, x \in (x_1, x_2)\}$ .

Antes de meterse en la matemática, es lógico pensar que la distribución propuesta hará que se emita fluido desde el segmento  $\mathcal{L}$  de forma simétrica respecto del eje  $x$  y, por lo tanto, la velocidad  $v$  tendrá una discontinuidad allí, como se ve en la figura 2.18.

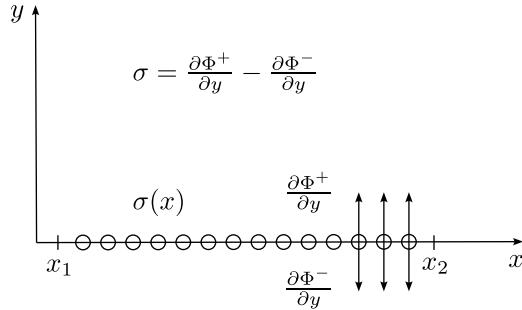


Figura 2.18: distribución de fuentes.

El potencial y la velocidad inducidos por esta distribución según la definición de la geometría y las ecuaciones 2.45, 2.46, 2.66 y 2.67 son:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x_0) \ln(\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}) dx_0 \quad (2.68)$$

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma(x_0)}{(x - x_0)^2 + y^2} ((x - x_0)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) dx_0 \quad (2.69)$$

Observando la ecuación para la velocidad, se puede ver que para  $y \rightarrow 0^\pm$  el integrando para la componente  $v$  tiende a  $0^\pm$  excepto cuando  $x = x_0$ . Entonces, en el límite  $y \rightarrow 0^\pm$ , la velocidad en el entorno de  $x_0$  depende a lo sumo del elemento en  $x_0$  y, luego,  $\sigma(x_0)$  puede reemplazarse por  $\sigma(x)$  y sacarse fuera de la integral, a la vez que el límite de integración puede sustituirse por  $(-\infty, \infty)$ , ya que  $\sigma(x) = 0$  fuera de  $\mathcal{L}$ . Entonces:

$$\lim_{y \rightarrow 0} v = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0$$

Aquí puede verificarse que la componente  $v$  tiene una discontinuidad en  $y = 0$ , ya que si se acerca arbitrariamente al segmento  $\mathcal{L}$  por los  $y^+$  o los  $y^-$ , el límite cambia de signo. Por ello hay que seguir con esta consideración en mente.

Utilizando la variable  $\lambda$

$$\lambda = -\frac{x - x_0}{y}, \quad y \neq 0$$

Luego,

$$\begin{cases} d\lambda = \frac{dx_0}{y} \\ (x - x_0)^2 = \lambda^2 y^2 \end{cases} \quad (2.70)$$

$$(2.71)$$

Sustituyendo para el caso  $y \rightarrow 0^+$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} v = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{\lambda^2 y^2 + y^2} d\lambda$$

Notar que se usó  $\lambda = -\frac{x-x_0}{y}$  para conservar el signo de la integral. En el caso  $y \rightarrow 0^-$  se utiliza  $\lambda = \frac{x-x_0}{y}$

Retomando,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} v = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2} d\lambda = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1}(\lambda) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\sigma(x)}{2}$$

Luego,

$$v(x, 0^\pm) = \pm \frac{\sigma(x)}{2} \quad (2.72)$$

Entonces:

$$\Delta(v) = v^+(x) - v^-(x) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}_y} \right)^+(x) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}_y} \right)^-(x) = \sigma(x) \quad (2.73)$$

En el caso de la componente  $u$ , a simple vista se puede advertir que es simétrica respecto del eje  $x$  y que, cuando  $y \rightarrow 0$ , la velocidad  $u(x, 0^\pm)$  no solo depende del aporte de la fuente en  $x_0$ :

$$\lim_{y \rightarrow 0} u = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma(x_0)}{x - x_0} dx_0$$

Si  $\sigma(x_0)$  fuera constante, por ejemplo:

$$u(x, 0^\pm) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x - x_0} = -\frac{\sigma}{2\pi} \ln|x - x_0| \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right|$$

y se verifica para este caso particular la simetría mentada. Que sea simétrica la componente  $u$  respecto del eje  $x$  no quita que haya un singularidad sobre la distribución y cabe recordar que la expresión anterior se corresponde a un límite.

## 2.18. Distribución de línea de dobletes

La distribución espacial considerada es la misma que antes, o sea  $\mathcal{L}$ . De la definición de la geometría y las ecuaciones 2.54, 2.55, 2.66 y 2.67 se desprende:

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x_0) \frac{y}{(x - x_0)^2 + y^2} dx_0 \quad (2.74)$$

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu(x_0)}{((x - x_0)^2 + y^2)^2} \left( (x - x_0)y \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} ((x - x_0)^2 - y^2) \mathbf{e}_y \right) dx_0 \quad (2.75)$$

En primer lugar debe notarse que el potencial de velocidad (2.74) es semejante a la componente  $v$  de la distribución unidimensional de fuentes (2.69), por lo que:

$$\Phi(x, 0^\pm) = \mp \frac{\mu(x)}{2} \quad (2.76)$$

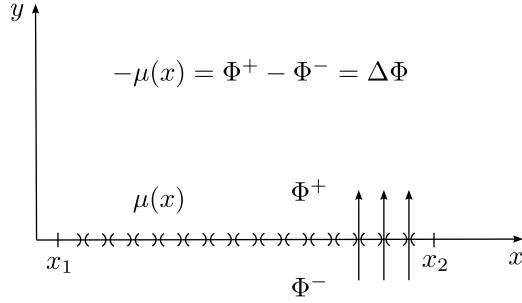


Figura 2.19: distribución de dobletes.

Luego,

$$u(x, 0^\pm) = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (2.77)$$

y la circulación sobre un superficie que encierre a  $\mathcal{L}$ , en particular aquella compuesta por los segmentos infinitesimalmente próximos a  $\mathcal{L}$ ,  $y = 0^+$  y  $y = 0^-$ , ambos entre  $x_1$  y  $x$  con  $x > x_1$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_{x_1}^x u(x^*, 0^+) dx^* + \int_x^{x_1} u(x^*, 0^+) dx^* = -\frac{1}{2} \int_{x_1}^x \frac{\partial \mu}{\partial x^*} dx^* + \frac{1}{2} \int_x^{x_1} \frac{\partial \mu}{\partial x^*} dx^* = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x_1}^x \frac{\partial \mu}{\partial x^*} dx^* - \frac{1}{2} \int_{x_1}^x \frac{\partial \mu}{\partial x^*} dx^* = -\mu(x) + \mu(x_1) \end{aligned}$$

donde se consideró  $\mu(x_1) = 0$  por hallarse en el extremo de la distribución.

Luego, existe una relación entre el salto de potencial generado por la distribución, la intensidad del doblete y la circulación generada:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{\mu}{2}(x) - \frac{\mu}{2}(x) = -\mu(x) = \Gamma(x) \quad (2.78)$$

## 2.19. Distribución de línea de vórtices

Con la misma distribución espacial y 2.60, 2.61, 2.66 y 2.67, queda:

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x - x_0} dx_0 \quad (2.79)$$

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\gamma(x_0)}{(x - x_0)^2 + y^2} (ye_x - (x - x_0)e_y) dx_0 \quad (2.80)$$

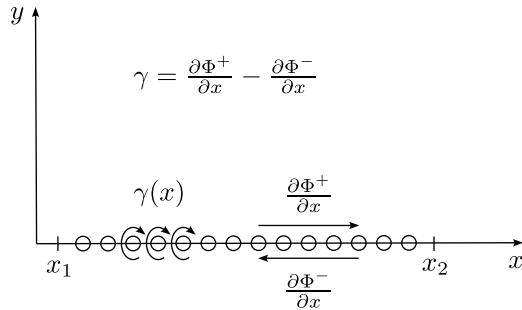


Figura 2.20: distribución de vórtices.

Ahora, la componente  $u$  es semejante a la  $v$  de la distribución de fuentes y:

$$u(x, 0^\pm) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \quad (2.81)$$

La circulación en este caso queda:

$$\Gamma(x) = \int_{x_1}^x u(x_0, 0^+) dx_0 - \int_{x_1}^x u(x_0, 0^-) dx_0 = \int_{x_1}^x \gamma(x_0) dx_0 = \Gamma(x)$$

Recordando,

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi(x) = \int u dx + C(y)$$

En  $y \rightarrow 0$ :

$$\Phi = \int_{x_1}^x u(x^*, 0^+) dx^* + C(0^+) = \int_{x_1}^x \frac{\gamma(x_0)}{2} dx_0 + C(0^+)$$

Luego,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = v(x, 0^+)$$

Si  $v$  fuera finita en  $y = 0$ , al ser simétrica respecto del eje x:

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta y}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta C = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} v \Delta y = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta\Phi(x) &= \int_{x_1}^x \frac{\gamma(x_0)}{2} dx_0 - \int_x^{x_1} \frac{\gamma(x_0)}{2} dx_0 + C(0^+) - C(0^-) = \\ &= \int_{x_1}^x \gamma(x_0) dx_0 + \underset{\textcolor{red}{\Delta y \rightarrow 0}}{\lim} v \Delta y = \int_{x_1}^x \gamma(x_0) dx_0 \end{aligned}$$

O sea,

$$\Delta\Phi(x) = \int_{x_1}^x \gamma(x_0) dx_0 = \Gamma(x) \quad (2.82)$$

Si se presta atención a las relaciones expuestas en 2.78 y 2.82, puede notarse que un mismo flujo puede modelarse con una distribución de dobletes o, bien, de vórtices, yaciendo la semejanza en:

$$\gamma(x) = -\frac{d\mu}{dx}(x) \quad (2.83)$$

Esta similitud se extiende a distribuciones de mayores dimensiones, por ejemplo entre un panel de dobletes y un anillo vórticoso en tres dimensiones.

### Demostración

¿La componente  $v$  es continua en  $y = 0$ ?

Para esto y a modo de ejemplo, se resolverá la componente  $v$  tanto para una distribución  $\gamma$  constante como para una lineal, entre  $x_1$  y  $x_2$ .

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_0, & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} v = -\frac{\gamma_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x-x_0} dx_0 = \frac{\gamma_0}{2\pi} \ln|x-x_0| \Big|_{x_2}^{x_2} = \frac{\gamma_0}{2\pi} \ln \left| \frac{x-x_2}{x-x_1} \right|$$

tiene un valor finito en  $x_1 < x < x_2$ . ✓

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma'_0 x_0 : \quad \begin{cases} \gamma_0 \neq 0, & x_1 < x_0 < x_2 \\ \gamma'_0 \neq 0, & x_1 < x_0 < x_2 \\ \gamma_0 = \gamma'_0 = 0, & x_1 < x_0, \quad x > x_2 \end{cases}$$

Esta distribución se puede obtener superponiendo una distribución de  $\gamma$  constante y otra lineal. El límite para la primera existe en  $x_1 < x < x_2$ . Veremos qué pasa con la segunda.

$$\lim_{y \rightarrow 0} v_2 = -\frac{\gamma'_0}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_0}{x-x_0} dx_0 = \frac{\gamma'_0}{2\pi} (x \ln|x-x_0| + x_0) \Big| = \\ \frac{\gamma'_0}{2\pi} \left( x \ln \left| \frac{x-x_2}{x-x_1} \right| + x_2 - x_1 \right)$$

el cual también existe en  $x_1 < x < x_2$ . ✓

# Capítulo 3

## Solución general al problema del flujo potencial

### 3.1. Solución general

En esta sección se abordará la resolución de la ecuación de continuidad para un flujo potencial (2.10) para terminar de introducir los fundamentos generales y pasar luego a la resolución por el método de los paneles, que se tiene por objetivo implementar.

La resolución de la ecuación 2.10 se llevará a cabo en la región  $R$  del espacio comprendido entre la superficie de un sólido y el infinito, ocupado por el fluido.

Sea  $\mathbf{n}$  el vector unitario, normal y exterior a la frontera  $S = S_B \cup S_w \cup S_\infty$  de  $R$ , donde  $S_B$  es la frontera del sólido;  $S_w = S_{w,u} \cup S_{w,l}$  modela la estela viscosa, la cual se considera suficientemente delgada (sin volumen) tal que la velocidad sea tangente a ella; y  $S_\infty$  representa la frontera en el infinito (ver figura 3.1); y sean  $\Phi$  un potencial de velocidad en la región  $R$  de interés,  $\Phi_i$  uno en la región limitada por  $S_B$  y  $\Phi_\infty$  la del flujo sin perturbar.

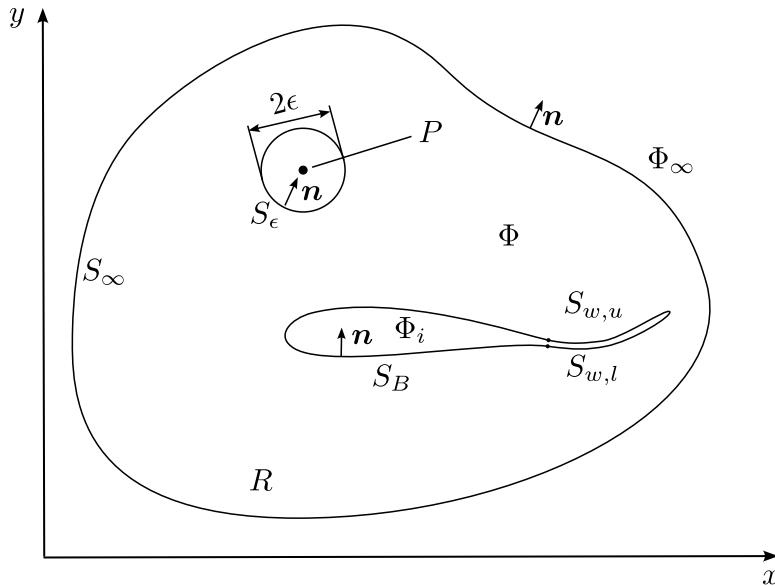


Figura 3.1: problema de flujo potencial

Con estas definiciones, el potencial de velocidad en un punto de prueba  $P(x, y, z)$  es:

$$\Phi^T(P, t) = \Phi^*(P, t) + \Phi_\infty \quad (3.1)$$

donde

1.

$$\Phi^*(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B(t)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_w(t)} \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{A} \quad (3.2)$$

2.

$$\Phi_\infty(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r} \right) d\mathcal{A} \quad (3.3)$$

donde  $\Phi$  es el potencial de velocidad de perturbación externo,  $\Phi_i$  el interno,  $\Phi_\infty$  el del flujo no perturbado y  $r$  es la distancia al punto de prueba  $P$ .

$\Phi^*$  se introduce para utilizar la expresión en 3.9 de forma genérica para denotar:

$$\Phi(P, t) = \begin{cases} \Phi^*, & P \in R \\ 0, & P \notin R \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\Phi_i(P, t) = \begin{cases} \Phi^*, & P \notin R \\ 0, & P \in R \end{cases} \quad (3.5)$$

Recordando 2.73 y 2.78, sean

$$\mu = -(\Phi - \Phi_i) \quad (3.6)$$

$$\sigma = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}} \right) \quad (3.7)$$

$$\mu_w = -(\Phi_u - \Phi_l) \quad (3.8)$$

donde  $\Phi_u$  es el potencial en la superficie superior de  $S_w$  ( $\S_u$ ) y  $\Phi_l$  aquel en la inferior ( $\S_l$ ); sea  $S_w^*$  una superficie laminar que modela a la estela con espesor infinitesimal<sup>1</sup> y reordenando las integrales en 3.2:

$$\Phi^*(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B(t) \cup S_w^*(t)} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{A} - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B(t)} \frac{\sigma}{r} d\mathcal{A} \quad (3.9)$$

entonces  $\mu$  y  $\sigma$  representan las intensidades de dobletes y fuentes (o sumideros) distribuidos en las superficies  $S_b$  y  $S_w^*$ .

En ningún momento se especificaron los valores de  $\mu$  y  $\sigma$ , por lo que para cada problema pueden definirse combinaciones lineales particulares de dobletes y fuentes.

En el caso bidimensional:

$$\Phi^*(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B(t)} \sigma \ln(r) d\mathcal{A} - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B(t) \cup S_w^*(t)} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) dl \quad (3.10)$$

$$\Phi_\infty(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_\infty} \left( \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) \right) dl \quad (3.11)$$

donde las integrales ahora son simples por la reducción de la dimensión del problema.

### Observación

Notar que en las expresiones anteriores los potenciales dependen del tiempo solo por las regiones de integración. Es importante remarcar este concepto. En las demostraciones siguientes se omitirá la dependencia con el tiempo.

<sup>1</sup>Resulta de hacer colapsar las superficies  $S_{w,u}$  y  $S_{w,l}$

## Demostración

$$\Phi^*(P) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_w} \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{A} + \Phi_\infty(P)$$

Comencemos con  $\Phi$ . Luego se derivará rápidamente lo relativo a  $\Phi_i$ .

Sean  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  dos funciones escalares de la posición (y podría ser también el tiempo) con derivadas parciales de segundo orden continuas en  $R$ , por la segunda identidad de Green ([8], p. 215):

$$\iint_S \left( \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right) d\mathcal{A} = \iiint_R (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) d\mathcal{V}$$

Sean  $\Phi_1 = \frac{1}{r}$ , donde  $r$  es la distancia al punto  $P(x, y, z)$  (ver figura 3.1), y  $\Phi_2 = \Phi$ , con  $\Phi$  siendo el potencial de velocidad del flujo de interés; entonces, tanto  $\Phi_1$  como  $\Phi_2$  satisfacen la ecuación de Laplace excepto en  $P$  y si  $P$  está dentro de  $S_b$  (por lo tanto fuera de la región de integración  $R$ ), la ecuación anterior queda:

$$\iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} = 0 \quad (3.12)$$

## Demostración

$$\nabla^2 \Phi_1 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\nabla^2 \Phi_2 \stackrel{?}{=} 0$$

Para verificar la primera ecuación se emplea el operador de Laplace en coordenadas esféricas y observar que solo hace falta analizar el término radial ya que  $\Phi_1$  solo depende de  $r$ :

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (-r^{-2})) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (-1)) = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

La segunda ecuación es fácil de verificar recordando que se estableció que  $\Phi_2 = \Phi$  era el potencial del flujo de interés, por lo que verifica la ecuación 2.10 de continuidad para un flujo potencial, la cual es la de Laplace.  $\checkmark$

Si  $P$  está en el interior de la región  $R$ , debe excluirse de la región de integración mediante una frontera de  $R$  adicional ( $S_\epsilon$ ), esférica de radio  $\epsilon$  y centrada en  $P$ .

Así, la ecuación 3.12 queda:

$$\iint_{S \cup S_\epsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} = 0$$

considerando coordenadas esféricas con terna  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$  y origen en  $P$ , resultan  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} = -\left( \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot (-\mathbf{e}_r) \right)$ , y la integral sobre  $S_\epsilon$  queda:

$$\iint_{S_\epsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} = \iint_{S_\epsilon} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) d\mathcal{A} = 0$$

Considerando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  y que  $\Phi$  y  $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$  no varían demasiado en la esfera:

$$d\mathcal{A} = 4\pi\epsilon^2$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r^2} \right) d\mathcal{A} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial r}(P) + \frac{\Phi(P)}{\epsilon^2} \right) 4\pi\epsilon^2 = 4\pi\Phi(P)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S_\epsilon} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} &= \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} - 4\pi\Phi(P) = 0 \\ \Rightarrow \Phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si ahora se introduce un potencial *interior* dentro de  $S_B$  y  $P$  se encuentra dentro de  $R$  (o sea, fuera del dominio de integración, que es interior a  $S_B$ ), la ecuación 3.12 queda:

$$-\iint_{S_B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} = 0$$

O bien,

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} = 0$$

donde el signo menos surge de que se mantuvo el vector normal  $n$  exterior a  $R$  (e interior a  $S_B$ ), cuando en la identidad de Green la normal debe ser exterior a  $S_B$ .

Sumando esto, que es nulo, a  $\Phi(P)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_w \cup S_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} \end{aligned}$$

Sea  $\Phi_\infty = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A}$  y la estela lo suficientemente delgada como para que no tenga volumen y la velocidad sea tangencial a ella por Helmholtz 4, y por lo tanto  $\frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{S_w} = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_w} \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\mathcal{A} + \Phi_\infty(P) \quad \checkmark \end{aligned}$$

En el caso de  $\Phi_i$ , se puede obtener, análogamente a la ecuación 3.13:

$$\Phi_i(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right) d\mathcal{A}$$

donde el signo menos se debe a que se mantuvo  $n$  exterior a  $R$ .

Empleando la ecuación 3.12, donde  $P$  era interior a  $S_B$ :

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{r} \right) \right) dA = 0$$

Sumando esto a  $\Phi_i$  y siguiendo el mismo planteo que para  $\Phi$  se llega a la misma expresión. ✓

### Demostración

$$\Phi^*(P) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \left( \sigma \ln(r) - \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) \right) dA - \frac{1}{2\pi} \int_{S_w^*} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) dA + \Phi_\infty(P)$$

Nuevamente, primero se desarrollará la expresión para  $\Phi$ .

En dos dimensiones, se considera  $\Phi_1 = \ln(r)$  y la aplicación de la segunda identidad de Green en dos dimensiones queda:

$$\begin{aligned} \int_S \left( \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right) dl &= \iint_R (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) dA \\ \int_S \left( \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) \right) dl &= \iint_R (\ln(r) \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \ln(r)) dA = 0 \end{aligned}$$

donde el primer término en rojo es nulo por la misma razón que en el caso tridimensional.

### Demostración

$$\nabla^2 \ln(r) \stackrel{?}{=} 0$$

En coordenadas polares:

$$\nabla^2 \ln(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (\ln(r)) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{r} \right) = 0, \quad r \neq 0 \quad \checkmark$$

Con  $P$  interior a  $R$ , con  $S_\epsilon$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $dl = 2\pi\epsilon$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\ln(r)) = \nabla \ln(r) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{r}$  y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left( \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) dl \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \ln(\epsilon) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_P + \Phi(P) \frac{1}{\epsilon} \right) 2\pi\epsilon = 2\pi\Phi(P)$$

si  $\Phi(P)$  y  $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}$  se comportan bien y no varían demasiado en la circunferencia.

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_S \left( \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) \right) dl + 2\pi\Phi(P) &= 0 \\ \Phi(P) &= -\frac{1}{2\pi} \int_S \left( \ln(r) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \Phi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) \right) dl \end{aligned}$$

Considerando el aporte del potencial interior:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \left( \ln(r) \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}} - \Phi_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln(r)) \right) dl = 0$$

Sumando este a  $\Phi(P)$ , introduciendo el potencial en el infinito, las distribuciones de dobletes y fuentes, y haciendo la misma consideración de la estela de espesor nulo, de igual forma que antes:

$$\Phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} \left( \sigma \ln(r) - \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\ln(r)) \right) d\mathcal{A} - \frac{1}{2\pi} \int_{S_w^*} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\ln(r)) d\mathcal{A} + \Phi_\infty(P)$$

donde cabe recordar que el signo menos se debe al remplazo con las intensidades  $\mu$  y  $\sigma$ .

Reordenando las integrales:

$$\Phi(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B(t)} \sigma \ln(r) d\mathcal{A} - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B(t) \cup S_w^*(t)} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\ln(r)) d\mathcal{A} + \Phi_\infty(P) \quad \checkmark$$

Para el caso de  $\Phi_i$  el procedimiento es igual al realizado para el caso tridimensional, pero con las expresiones correspondientes en dos dimensiones.

## 3.2. Condiciones de contorno

Distribuyendo dobletes y/o fuentes sobre la superficie de un sólido para modelar el problema de flujo potencial alrededor de este, el potencial resultante en un punto P se obtiene mediante las ecuaciones precedentes (3.1, 3.9 y 3.3 en tres dimensiones; y 3.1, 3.10 y 3.11 en dos). Resta aplicar las condiciones de borde.

El requerimiento de que la perturbación decaiga se satisface directamente por el tipo de singularidades utilizadas, como se demostró para cada una.

La condición de impenetrabilidad era:

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})|_{S_B} = \frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_B} = (\mathbf{V}_B \cdot \mathbf{n})|_{S_B} \quad (2,11)$$

Luego,

$$((\nabla \Phi^T - \mathbf{V}_B) \cdot \mathbf{n}) \Big|_{S_B} = 0 \quad (3.14)$$

la cual es conocida como condición de borde de Neumann.

Existen otras alternativas, como la de Dirichlet o del método indirecto pero que no se abordó, y la combinación de ambos, que tampoco se trató.

De esta forma, para resolver el flujo, debe hallarse la función potencial de velocidad que satisfaga 3.14, lo cual a su vez depende completamente de la especificación de singularidades en la superficie del sólido.

En la siguiente sección se presenta una condición física adicional que emerge en el problema no estacionario y en el capítulo 4 se presenta otra, que también aplica en el caso estacionario y es netamente física.

## 3.3. La estela

Habiendo descrito el paso matemático que permite resolver un flujo en todo el espacio a partir de la especificación de distribuciones de singularidad en las superficies  $S$  y  $S_w$ , nos enfocaremos ahora en entender qué es la estela.

Anteriormente se comentó que la solución de 3.14 en un instante dado no depende directamente del tiempo, pues el potencial —y por ende las velocidades involucrada en 3.14— inducido por un sólido y su estela no dependen de él explícitamente.

La dependencia con el tiempo en la solución general viene dada a través de la estela, tanto por su geometría como por su constitución singular. De hecho, si bien el concepto de estela tiene una acepción física, en el presente método la estela es en realidad un artilugio matemático para conservar la irrotacionalidad del flujo alrededor de un cuerpo que se mueve inmerso en un fluido.

Es sabido que un sólido al moverse arbitrariamente desde el reposo (respecto del fluido no perturbado) cambia la circulación alrededor de él, lo cual en un flujo potencial no es concebible por el teorema de Kelvin 2.7. En la realidad, este cambio de circulación es permitido por la viscosidad del medio, lo cual tampoco es captado por un flujo potencial. Entonces aquí es donde surge la estela.

Cuando se la presentó como  $S_w$  en la figura 3.1, esta delimita junto al sólido con frontera  $S$  una única región separada de la región  $R$  de interés y donde, en  $R$ , el flujo es potencial. Haciendo esto, cualquier generación de vorticidad por parte del sólido -que es permitida por la disposición de dobletes sobre su superficie-, puede ser compensada por la generación de vorticidad de la estela, permaneciendo la circulación alrededor de  $S \cup S_w$  invariante y, más aún porque se partió del reposo, nula.

Entendiendo, ahora, la estela desde este punto de vista, se puede ver que la dependencia con el tiempo estará dada por los teoremas de von Helmholtz 3 y 4, pues distribuciones de línea de dobletes no dejan de ser distribuciones de línea de vórtices o filamentos vorticosos: la estela preservará las intensidades de los filamentos vorticosos que la constituyen y convectará con el fluido.

Entonces, en un problema no estacionario en cada instante la estela se forma en el borde de fuga y posteriormente se desprende y permanece en el fluido, guardando información de lo que sucedió instantes anteriores, como si de un historial se tratara. Este proceso es conocido como enrollamiento de la estela, o *WRU* por las siglas de *wake roll-up* en inglés. He aquí la dependencia con el tiempo.

Hace unos párrafos se hizo referencia a un movimiento arbitrario desde el reposo. En esta afirmación yace un aspecto que es importante notar: cualquier movimiento de un sólido respecto de un fluido no perturbado puede pensarse como el producto de haber acelerado antes a dicho sólido desde una condición en la que se encontraba en reposo respecto al fluido no perturbado. Esto tiene dos implicancias que ameritan comentarlas:

1. El movimiento rectilíneo uniforme de un sólido respecto a un fluido en reposo es el producto de haber acelerado al sólido desde el reposo relativo al fluido no perturbado hasta la velocidad del movimiento y haber mantenido esa condición durante un tiempo arbitrariamente grande.
2. Cualquier resolución no estacionaria en flujo potencial requiere, *a priori* comenzar en el instante en el que un sólido está en reposo.

Estas dos cuestiones se retoman en el siguiente capítulo.

## 3.4. Sistema de referencia

Antes de pasar a la descripción del método de los paneles como tal, se comentará acerca del sistema de referencia que se utilizará.

Ya que la aplicación a desarrollar tiene como objetivo resolver flujos no estacionarios, para aplicar la condición de impenetrabilidad resulta conveniente utilizar una terna móvil

$TM(O, \{\hat{e}_i\}, i = x, y, z)$  solidaria al cuerpo alrededor del cual se quiere analizar el flujo (o uno de los cuerpos). Este, a su vez, estará referenciado a una terna solidaria al fluido no perturbado  $TF(\Omega, \{\hat{E}_i\}, i = X, Y, Z)$ , mediante el vector posición  $\mathbf{R}_0(t) = (O - \Omega) = X_0 \mathbf{E}_X + Y_0 \mathbf{E}_Y + Z_0 \mathbf{E}_Z$  y la orientación instantánea, tal que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\psi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\psi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

La matriz de rotación surge de la multiplicación secuencial de las matrices de rotación definida por cada ángulo en  $\Theta(t)$ :

$$\mathbf{T}(\psi, \theta, \phi) = \Phi(\phi)\Theta(\theta)\Psi(\psi) \quad (3.17)$$

$$\Psi(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\Theta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\Phi(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Esta secuencia particular de ángulos de Euler es la de Tait-Bryan, que es de uso común en la navegación aeronáutica. Los ángulos de esta secuencia de rotaciones se denominan habitualmente “rumbo”, “cabeceo” y “rolido”.

El vector posición de un punto  $P$  según la terna fija queda:

$$\mathbf{R}(t) = (\mathbf{P} - \Omega) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t) \quad (3.21)$$

donde

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{P} - \Omega) = xe_x + ye_y + ze_z \quad (3.22)$$

es el vector posición relativa a la terna móvil.

Para describir la velocidad en el sistema de referencia intercial a partir de la información del movimiento de la terna móvil y de los cuerpos en función del sistema móvil, es necesario definir primero la velocidad angular de la terna móvil.

Para esto se introducen dos ternas móviles auxiliares,  $TM(\Omega, \{\eta_i\})$  y  $TM(\Omega, \{\zeta_i\})$ , las cuales surgen de realizar la primera rotación sobre la terna fija y las dos primeras sobre la misma, respectivamente. Con esto, en la terna fija resulta:

$$\begin{aligned} \omega_{TM}(\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \dot{\phi} \zeta_1 + \dot{\theta} \eta_2 + \dot{\psi} E_z = \\ &= \Psi^{-1}(\psi)\Theta^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi^{-1}(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3.23) \end{aligned}$$

El caso bidimensional (ver figura 3.2) se simplifica considerablemente ya que solo se permite la rotación  $\Theta(\theta)$ , o sea el cabeceo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{T}(\theta) = \Theta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\theta) = \Theta^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

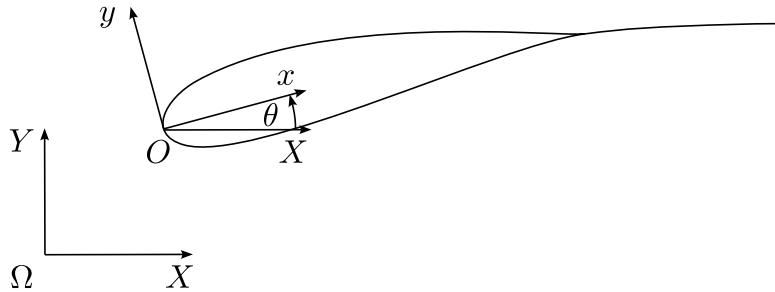


Figura 3.2: ternas global y local de un sólido, utilizadas en la descripción cinemática.

Para las velocidades se tiene la ley de variación de velocidades:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \boldsymbol{\omega}_{TM} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \mathbf{V}_{rel,P} \quad (3.28)$$

donde todos los vectores se encuentran definidos en la terna fija.

Para el estudio de la dinámica de aeronaves también se utilizan las velocidades angulares \$p\$, \$q\$ y \$r\$ referidas a la terna móvil solidaria a la aeronave. O sea, en la terna móvil:

$$\boldsymbol{\omega}_{TM}(p, q, r) = (p \ q \ r)^T \quad (3.29)$$

Y en la terna fija:

$$\boldsymbol{\omega}_{TM}(\psi, \theta, \phi, p, q, r) = \mathbf{T}^{-1}(\psi, \theta, \phi)(p \ q \ r)^T \quad (3.30)$$

En la implementación, sin embargo se emplea \$\boldsymbol{\omega}\_{TM}\$ definida en la terna fija.

# Capítulo 4

## Método de los paneles

Finalmente, se abordarán las definiciones numéricas que darán lugar a los programas que resuelven el flujo potencial alrededor de sólidos aerodinámicos.

Hasta aquí se formularon ecuaciones para obtener el potencial  $\Phi^T$  en función de distribuciones continuas de dobletes y fuentes sobre las superficies de los sólidos y las estelas; y consideraciones físicas para tener en cuenta la impenetrabilidad de los sólidos y otra consideración física que aún no se introdujo. Con todo esto se podría resolver el problema y calcular las cargas aerodinámicas con la ecuación de Bernoulli.

De forma analítica, lo anterior es posible de resolver en un número pequeño de problemas y con limitada aplicación. Aquí es donde aparece el método de los paneles, resolviendo las dificultades introduciendo la discretización.

En realidad, el método de los paneles propone múltiples discretizaciones, que son:

1. Discretización (partición) de las superficies del sólido en  $N$  paneles y de la estela en  $N_W$  paneles (ver figura 4.1), de ahí el nombre.
2. Discretización de las distribuciones de singularidades en distribuciones que siguen pautas definidas dentro de cada panel. Estas pautas son adicionales y generalmente apuntan a conservar la continuidad de las distribuciones. En lo que sigue y en el programa implementado, cada sólido tiene paneles de un mismo tipo de singularidad y los paneles de su estela también son de un mismo tipo; y los tipos de singularidad se mantienen en el tiempo.
3. Discretización de la aplicación de la condición de impenetrabilidad, la cual solo se realiza en un punto de cada panel, llamado de colocación.

En este primer acercamiento solo se considerará un único sólido aerodinámico por simplicidad. La extensión a múltiples sólidos es natural y se realiza luego.

Empecemos por aplicar la condición de Neumann en el  $i$ -ésimo punto de colocación, perteneciente al  $i$ -ésimo panel,  $i = 1, 2, \dots, N$ :

$$((\nabla \Phi^T - \mathbf{V}_B) \cdot \mathbf{n}) \Big|_i = ((\mathbf{V} - \mathbf{V}_B) \cdot \mathbf{n}) \Big|_i = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Ahora bien,  $\Phi^T$  es una integral, la cual es aditiva en la región de integración y goza de linealidad; si, además, la región de integración se divide en  $N$  y  $N_W$  paneles (sólido y estela, respectivamente); y si se considera que las distribuciones de singularidades son constantes en cada panel,

$$\Phi^T(\mathbf{R}) = \sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} \Phi_j + \Phi_\infty = \sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} x_j f_j(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}_j) \quad (4.1)$$

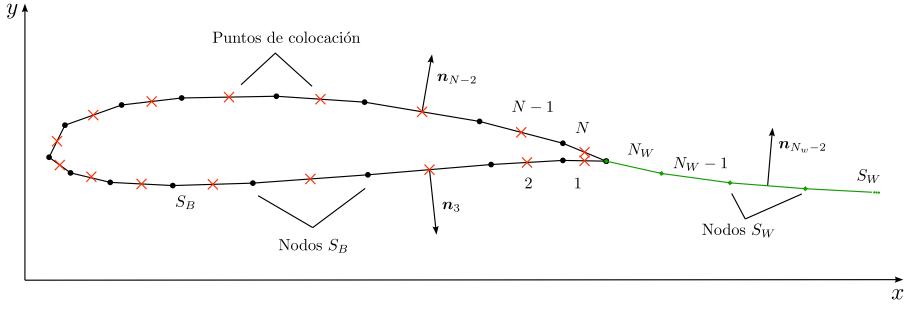


Figura 4.1: Discretización de un sólido y su estela.

Notar que la normal se definió exterior al sólido, al contrario que lo que se definió en la figura 3.1 durante la deducción. Esto no es un problema porque lo que produce es introducir un signo menos en las ecuaciones del potencial, que es absorbido por las intensidades de las singularidades.

y

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}) = \sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} \nabla \Phi_j^T = \sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} \mathbf{V}_j + \mathbf{V}_\infty = \sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} x_j \mathbf{g}_j(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}_j) \quad (4.2)$$

donde se denotó como  $x_j$  al valor de la intensidad de la singularidad del  $j$ -ésimo panel; y como  $f_j$  y  $\mathbf{g}_j$  a funciones que terminan de definir la contribución del  $j$ -ésimo panel al potencial total y a la velocidad en el punto  $\mathbf{R}$ , las cuales dependen de una serie de parámetros del panel según la singularidad y que se guardan en el vector  $\boldsymbol{\theta}_j$ . También, se anularon  $\Phi_\infty$  y  $\mathbf{V}_\infty$ , porque se considera un marco de referencia solidario a al fluido no perturbado, en reposo.

Con estas definiciones,  $x_j$  puede ser la intensidad de distribuciones constantes de dobletes, de fuentes o de una combinación de ambas con proporción conocida y tenida en cuenta en las funciones  $f_j$  y  $\mathbf{g}_j$ .

En el caso de que se utilicen otro tipo de singularidades de orden mayor existirán nuevos sumandos; y en el caso de que se combinen dobletes y fuentes, pero especificando uno y no el otro (es práctica habitual definir la intensidad de la fuente de antemano), también se tratarían como términos por separado. Estas últimas dos vías no se abordan en el presente trabajo, pero pueden explorarse en un futuro sin demasiada complejidad adicional.

Sobre las últimas ecuaciones, también cabe destacar que las funciones  $f_j$  y  $\mathbf{g}_j$  solo dependen de:

- la posición y actitud del  $i$ -ésimo panel respecto al punto de evaluación  $\mathbf{R}$ ,
- la geometría de los paneles,
- el tipo de singularidad (solo dobletes, solo fuentes o una combinación de ambos),

y no dependen de la intensidad del panel. Dicho de otra forma, son las contribuciones al potencial y la velocidad de los paneles con intensidad unitaria.

Ya que el trabajo aborda la resolución de flujos no estacionarios en el cual se involucra la derivada  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , se define convenientemente la utilización un sistema de referencia fija (solidaria con el fluido no perturbado) y un sistema coordenado acorde para definir el potencial y la velocidad inducidas por las distribuciones de singularidades en todos los casos, con lo cual  $\Phi_\infty$  y  $\mathbf{V}_\infty$  se anularon en 4.1 y 4.2.

Con todo esto, la condición de impenetrabilidad 3.14 queda:

$$((\mathbf{V} - \mathbf{V}_B) \cdot \mathbf{n}) \Big|_i = \left( \sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} x_j \mathbf{g}_j(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\theta}_j) - \mathbf{V}_{B,i} \right) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N$$

Luego,

$$\sum_{j:S_j \subset (S_B \cup S_w)} x_j \mathbf{g}_j(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\theta}_j) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{V}_{B,i} \cdot \mathbf{n}_i = b'_i, \quad i = 1, \dots, N$$

donde se utilizó

$$b'_i = \mathbf{V}_{B,i} \cdot \mathbf{n}_i \quad (4.3)$$

Sean

$$\begin{cases} f_{ij} = f_j(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}_j) \\ \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_j(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\theta}_j) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} f_{ij} = f_j(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}_j) \\ \mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}_j(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\theta}_j) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=1}^N x_j \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i + \sum_{j=1}^{N_w} x_{w,j} \mathbf{g}_{w,ij} \cdot \mathbf{n}_i = b'_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Ahora, defínase el coeficiente de influencia del  $j$ -ésimo panel sobre el punto de colocación del  $i$ -ésimo panel como:

$$\begin{cases} c_{ij} = \mathbf{g}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i \\ c_{w,ij} = \mathbf{g}_{w,ij} \cdot \mathbf{n}_i \end{cases} \quad (4.6)$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{N_w} c_{w,ij} x_{w,j} = b'_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

En 4.7 tanto los coeficientes de influencia como  $b'_i$  se pueden conocer en un instante dado habiendo definido la singularidad utilizada y la cinemática<sup>1</sup>. Por lo tanto, se redujo el problema del flujo potencial a un sistema de  $N$  ecuaciones lineales con  $N + N_w$  incógnitas,  $x_j$  y  $x_{w,j}$ , válido para cualquier instante. Evidentemente, el sistema está subdeterminado y todavía deben introducirse otras consideraciones físicas.

## 4.1. Método de los paneles bidimensional y no estacionario

Como se vió en el capítulo anterior, en todos los instantes bajo estudio el sólido se mueve mientras genera una estela en el fluido aguas abajo. El enrrollamiento de la estela, así como el movimiento, es continuo pero claramente en una implementación numérica, como lo es el método de los paneles esto no es posible de capturar y calcular. Por eso, en flujo no estacionario se introduce una nueva discretización, la del tiempo.

Motivado por la estrecha y particular relación entre el tiempo y la estela, el método de los paneles no estacionario también define que en cada instante un panel de estela es generado. Por lo tanto, cada uno de los  $N_w$  paneles que se muestran en la figura 4.1 fueron generados en  $N_w$  instantes de resolución distintos.

---

<sup>1</sup>Se puede notar que si se tiene un único sólido y es rígido, las influencias  $f_{ij}$ ,  $\mathbf{g}_{ij}$  y  $c_{ij}$  no varían con el tiempo, pues la geometría relativa permanece invariante. En el caso de múltiples sólidos, esto es cierto si además los sólidos se mueven como un conjunto rígido. Esta simplificación, sin embargo no fue tenida en cuenta en la implementación para mantener generalidad. Los coeficientes de influencia  $c_{w,ij}$  de las estelas en general sí varían, pues las estelas no son rígidas.

Antes de seguir, debe quedar en claro el siguiente hecho. El método de los paneles resuelve el flujo en base la cinemática de los sólidos inmersos en el fluido circundante. De esta forma, la cinemática debe ser definida de forma exógena.

Igualmente, esto no quita la posibilidad de que entre un instante resuelto por el método de los paneles y el siguiente se utilice información de las fuerzas y momentos aerodinámicos para definir dinámicamente la evolución de los sólidos con un módulo de dinámica de sólidos integrado<sup>2</sup>. Sin embargo, es necesario reconocer que esto no forma parte del método de los paneles en sí.

También, a partir de este momento se abandona la relativa generalidad que se manejó hasta el momento, pues desde aquí nos limitaremos a flujo bidimensional y la utilización únicamente de paneles rectos y dos tipos de singularidades: distribuciones de dobletes constantes y vórtices puntuales, como se definió en la Introducción. No se utilizan fuentes, porque solo con ellas no podrían modelarse cuerpos sustentadores. En desarrollos futuros sería interesante introducir la combinación de ambas en conjunto con la condición de Dirichlet, pues tiene ventajas numéricas. En el capítulo 7 se hará alguna mención de esto.

Sin más, definamos que la resolución por el método de los paneles no estacionario comienza en el instante  $t = t_1 = 0$ .

Ya que el sólido está en movimiento, la condición de impenetrabilidad discreta (4.7), debe satisfacerse en este instante.

Otro fenómeno físico que tiene lugar en un cuerpo aerodinámico en movimiento es que, en el borde de fuga, la presión permanece continua. Dado que la geometría del borde de fuga es, en general, finitamente aguda (en contraste con un *cusped trailing edge*), en el marco de la teoría de flujo potencial este punto suele ser tratado como un punto de remanso: una línea de corriente se origina allí, en lugar de provenir desde el infinito. Sin embargo, resulta de interés determinar la velocidad en el borde de fuga, y existen diversas formas de hacerlo. Aquí se presentará una de ellas más adelante. Lo que debe quedar claro es que, en general, la velocidad en el borde de fuga no será nula.

En realidad, en movimientos fuertemente no estacionarios, esta condición, conocida como la de Kutta, no se satisface, así como también deja de ser cierto que la capa límite es lo suficientemente delgada como para aproximar el problema con flujo potencial. Sin embargo, bajo condiciones no demasiado restrictivas, que luego se discutirán, la condición de Kutta se cumple en justa medida y permite incorporar una nueva ecuación.

Ya que la condición de Kutta establece que no hay diferencia de presiones entre el extradós y el intradós en el borde de fuga, tampoco existen cargas aerodinámicas. O sea, recordando 2.65, allí:

$$\Gamma_{TE} = 0 \quad (4.8)$$

Para desarrollar la forma en la que se impone la condición de Kutta en el primer instante resuelto y en los posteriores, hay que ver qué sucedió antes de  $t_1$ .

Existen tres posibilidades:

- En  $t_1$  y cualquier instante antes, el sólido se encuentra en reposo y la solución del problema en  $t_1$  es la homogénea:  $x_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, N$  y  $x_{w,1} = 0$
- El sólido en  $t_1$  y durante un periodo de tiempo arbitrariamente grande antes de  $t_1$  está animado de un movimiento rectilíneo uniforme. Entonces, en este caso en el primer instante se tiene al sólido y una estela arbitrariamente larga que se desprende de él ( $N_w \rightarrow \infty$ ).

---

<sup>2</sup>En la implementación, como se mencionará en el capítulo 6, se permite la incorporación de este tipo de módulos gracias al diseño del programa

Evidentemente, las infinitas intensidades de los paneles de la estela no pueden resolverse sólo con la condición de Neumann en los puntos de colocación. Debe resolverse esta subdeterminación de otra forma.

Para ello, nótese que en un marco de referencia solidario al sólido, el problema antes de  $t_1$  que se trata aquí es estacionario. En tal caso, en un método de los paneles estacionario basta con ubicar un vórtice puntual en el borde de fuga en lugar de una estela infinitamente larga. Sin embargo, ambos enfoques son equivalentes.

Para entender por qué son equivalentes hace falta explicar algunas cuestiones más en este capítulo, por lo que ahora basta con decir que tener una estela infinitamente larga, en este caso particular, no es un problema y, aún más, para resolver  $t_1$  y presentar las próximas ecuaciones, basta con considerar el panel de dobletes adyacente al borde de fuga y dar por hecho que el resto de su geometría es conocida. Es decir, lo único que se debe saber es que uno de los nodos del panel se encuentra en el borde de fuga y que su intensidad es lo único desconocido.

Esta discusión se retoma en 4.2.

- El sólido antes de  $t_1$  estuvo animado de una cinemática arbitraria. En este caso, no es posible resolver el campo de fluido a partir de soluciones recién a partir de  $t_1$ , si no se conocen las propiedades de la estela en  $t_1$ .

De las alternativas presentadas, la única que tiene sentido abordar es la segunda, pues la primera tiene solución trivial (y es un caso particular de la segunda) y la tercera no es resoluble.

Por lo tanto en  $t_1$ , la estela se modela como un panel recto con uno de sus nodos ubicado en el borde de fuga y con una distribución de dobletes constante con una intensidad  $\mu_{w,1}$ , como se muestra en la figura 4.2.

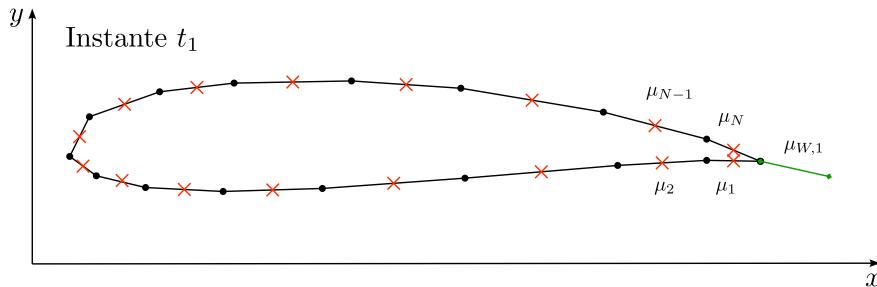


Figura 4.2: discretización en el instante  $t_1$ .

Recordando que entre la distribución de dobletes y de vórtices existe la relación:

$$\gamma(x) = -\frac{d\mu}{dx}(x) \quad (2.83)$$

Por 4.8 y 2.83, se puede concluir que en el borde de fuga la distribución de dobletes debe ser constante:

$$\mu_{TE} = \mu_N - \mu_1 = \mu_{w,1} \quad (4.9)$$

Notar primero, que se utilizó la indexación de los paneles mostrada en 4.1 y 4.2 es tal que:

- $i = 1$  refiere al panel del intradós adyacente al borde de fuga,
- $i = 2$  indica el panel adyacente al  $i = 1$ , en el intradós,
- $i = 3$  indica el siguiente panel adyacente a  $i = 2$ , y

- $i = 4, 5, \dots, N$  son los paneles restantes, continuando con esta nomenclatura. Entonces,  $i = N$  indica el panel del extradós adyacente al borde de fuga.

Segundo, que  $\mu_{w,1}$  tenga el mismo signo  $\mu_N$  y no que  $\mu_1$  es debido a la convención utilizada para el sentido de la normal de los paneles de la estela (ver la figura 4.1), que tienen continuidad con la normal definida en el extradós y no con la del intradós. La otra opción también es válida, pero la condición de Kutta quedaría planteada con el signo cambiado, por lo que solo basta con ser conscientes de esto y nada más.

Volviendo, en términos de las incógnitas planteadas, 4.9 queda:

$$\mu_{TE} = (x_N - x_1) = x_{w,1} \quad (4.10)$$

donde  $x_{w,1}$  es el único panel de estela que existe en este primer instante de resolución y la única incógnita introducida por esta, como se indicó antes.

Combinando 4.7 y 4.10 se llega a:

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{N_w} c_{w,ij} x_{w,j} = \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j + (x_N - x_1) c_{w,i1} = b'_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

Entonces, de forma matricial y en  $t_1$ :

$$\begin{bmatrix} c_{11} - c_{w,11} & c_{12} & \cdots & c_{1(N-1)} & C_{1N} + C_{w,11} \\ c_{21} - c_{w,21} & c_{22} & \cdots & c_{2(N-1)} & C_{2N} + C_{w,21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{(N-1)1} - c_{w,(N-1)1} & c_{(N-1)2} & \cdots & c_{(N-1)(N-1)} & C_{(N-1)N} + C_{w,(N-1)1} \\ c_{N1} - c_{w,N1} & c_{N2} & \cdots & c_{N(N-1)} & C_{NN} + C_{w,N1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_{N-1} \\ b'_N \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Ahora sí se tiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  cuadrado y cuya solución define la distribución de singularidades de forma completa, en el instante  $t_1$ . Prosigamos.

En el instante  $t = t_2 = \Delta t_1$ , el cuerpo ya se desplazó según el movimiento prescrito y se formó un nuevo panel de la estela cuya intensidad es  $\mu_{w,2} = x_{w,2}$  y que va desde el borde de fuga hasta la posición del anterior panel de estela, ver figura 4.3.

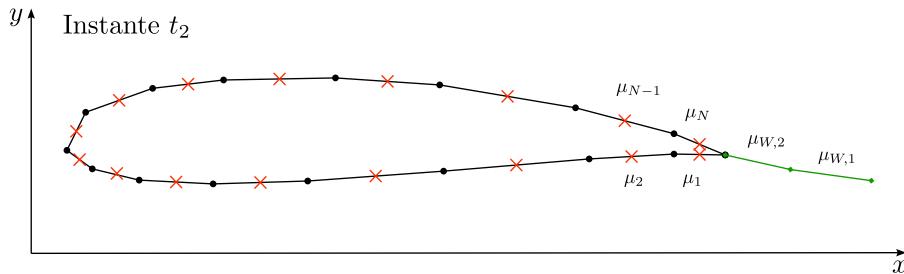


Figura 4.3: discretización en el instante  $t_2$ .

Así como el borde de fuga se desplazó (respecto de la terna fija) debido a la cinemática, el anterior panel de estela también durante el enrrollamiento.

Para introducir el enrrollamiento en el método de los paneles no estacionario, se introduce el *time-stepping*, que es básicamente desplazar los puntos que conforman la estela mediante una rutina de integración numérica a partir de la última posición conocida de sus nodos y la velocidad del fluido por Helmholtz 4, siempre en términos de la terna fija.

Existen diversas formas de realizar esta integración. Particularmente, en este trabajo se implementó el método de Euler explícito, que establece:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t \quad (4.13)$$

### Observación

Otra rutina de integración numérica, o familia de estas, que podría utilizarse durante el enrrollamiento es la de Runge-Kutta. Este tipo de métodos permiten mejorar la convergencia, aumentando la complejidad del error  $O(\Delta t^p)$ . Es decir, incrementan  $p$  y por lo tanto discretizaciones suficientemente pequeñas mejoran las estimaciones.

En particular, el método de integración directa tiene orden global lineal  $O(\Delta t)$ , mientras que Runge-Kutta de orden 2 tiene orden global cuadrático  $O(\Delta t^2)$ . Sin embargo, este mejor desempeño de Runge-Kutta en sus diferentes órdenes, viene acompañado de la necesidad de hacer estimaciones intermedias; o sea, de resolver múltiples veces el problema del método de los paneles entre dos instantes que se quieren simular.

Como se verá en el capítulo de validación 7, en el simulador se nota el impacto de las limitaciones de la integración directa implementada. Por lo tanto, la incorporación de técnicas de integración de mayor orden constituyen un punto de investigación futura.

La posición antigua del panel de estela antiguo es conocida -recordar que de este, solo nos interesa el nodo que se encontraba en el borde de fuga-. Sin embargo, la velocidad es desconocida aún.

Habiendo resuelto 4.12, en realidad se puede conocer dicha velocidad, pero su cálculo depende del tipo de panel y singularidad, y algunas consideraciones más que ameritan su tratamiento especial, que se realiza posteriormente. Por eso, ahora basta con saber que inmediatamente después de resolver 4.12, la velocidad del fluido en el borde de fuga se puede calcular e integrar para obtener la nueva posición del nodo de estela.

Entonces, ahora tenemos la nueva posición del sólido, la nueva posición del antiguo panel de estela y la del actual también -el borde de fuga-, por lo que se pueden calcular los coeficientes de influencia del nuevo sistema.

En cuanto a la intensidades, tenemos  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  para el sólido y  $x_{w,1}$  y  $x_{w,2}$  para la estela<sup>3</sup>. La condición de Neumann 4.7 representaba  $N$  ecuaciones y ahora tenemos  $N + 2$  incógnitas.

Aplicando nuevamente 4.9 para el panel de la estela adyacente al borde de fuga, se añade una ecuación:

$$\mu_{TE} = (x_N - x_1) = x_{w,2} \quad (4.14)$$

Para la ecuación restante, basta recordar que el teorema 3 de von Helmholtz establece que la intensidad de los filamentos vorticosos permanece invariante en el tiempo en un flujo potencial y por lo tanto, como se dijo en la sección 3.3, la intensidad del panel antiguo no cambió y se mantiene para el nuevo instante. Con lo cual, ahora:

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{N_w} c_{w,ij} x_{w,j} = \sum_{j=1}^N c_{ij} x_j + c_{w,i1} x_{w,1} + (x_N - x_1) c_{w,i2} = b'_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Pero, entonces, el término asociado al primer panel de estela se puede pasar al término independiente:

---

<sup>3</sup>En la notación se omitió la dependencia con el tiempo por simplicidad, pero en principio estas variables no son las mismas que en el instante  $t_1$ . Lo mismo vale para los instantes restantes

$$\sum_{j=1}^N c_{ij}x_j + (x_N - x_1)c_{w,i2} = b'_i - c_{w,i1}x_{w,1}, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.15)$$

De forma matricial, en  $t_2$ :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_{11} - c_{w,12} & c_{12} & \cdots & c_{1(N-1)} & C_{1N} + C_{w,12} \\ c_{21} - c_{w,22} & c_{22} & \cdots & c_{2(N-1)} & C_{2N} + C_{w,22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{(N-1)1} - c_{w,(N-1)2} & c_{(N-1)2} & \cdots & c_{(N-1)(N-1)} & C_{(N-1)N} + C_{w,(N-1)2} \\ c_{N1} - c_{w,N2} & c_{N2} & \cdots & c_{N(N-1)} & C_{NN} + C_{w,N2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_{N-1} \\ b'_N \end{pmatrix} - x_{w,1} \begin{pmatrix} c_{w,11} \\ c_{w,21} \\ \vdots \\ c_{w,(N-1)1} \\ c_{w,N1} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (4.16)$$

Y, de este modo, se puede resolver el instante  $t_2$ .

Para resolver el siguiente instante,  $t_3 = t_2 + \Delta t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ , se sigue el mismo procedimiento, ahora generando el tercer panel de estela, aplicando Kutta sobre este y aplicando la conservación de la vorticidad sobre el primero y el segundo, y se construye y resuelve el siguiente sistema:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_{11} - c_{w,13} & c_{12} & \cdots & c_{1(N-1)} & C_{1N} + C_{w,13} \\ c_{21} - c_{w,23} & c_{22} & \cdots & c_{2(N-1)} & C_{2N} + C_{w,23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{(N-1)1} - c_{w,(N-1)3} & c_{(N-1)2} & \cdots & c_{(N-1)(N-1)} & C_{(N-1)N} + C_{w,(N-1)3} \\ c_{N1} - c_{w,N3} & c_{N2} & \cdots & c_{N(N-1)} & C_{NN} + C_{w,N3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_{N-1} \\ b'_N \end{pmatrix} - x_{w,1} \begin{pmatrix} c_{w,11} \\ c_{w,21} \\ \vdots \\ c_{w,(N-1)1} \\ c_{w,N1} \end{pmatrix} - x_{w,2} \begin{pmatrix} c_{w,12} \\ c_{w,22} \\ \vdots \\ c_{w,(N-1)2} \\ c_{w,N2} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (4.17)$$

Siguiendo con esta lógica hasta un instante arbitrario  $t_T = \sum_{\tau=1}^T \Delta t_\tau$ :

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} c_{11} - c_{w,1}(T+1) & c_{12} & \cdots & c_{1(N-1)} & C_{1N} + C_{w,1(T+1)} \\ c_{21} - c_{w,2}(T+1) & c_{22} & \cdots & c_{2(N-1)} & C_{2N} + C_{w,2(T+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{(N-1)1} - c_{w,(N-1)(T+1)} & c_{(N-1)2} & \cdots & c_{(N-1)(N-1)} & C_{(N-1)N} + C_{w,(N-1)(T+1)} \\ c_{N1} - c_{w,N}(T+1) & c_{N2} & \cdots & c_{N(N-1)} & C_{NN} + C_{w,N(T+1)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_{N-1} \\ b'_N \end{pmatrix} - \sum_{\tau=1}^T x_{w,\tau} \begin{pmatrix} c_{w,1\tau} \\ c_{w,2\tau} \\ \vdots \\ c_{w,(N-1)\tau} \\ c_{w,N\tau} \end{pmatrix} = \\
&= \mathbf{b}' - [\mathbf{C}_{w1} \ \cdots \ \mathbf{C}_{wT}] \begin{pmatrix} x_{w,1} \\ \vdots \\ x_{w,T} \end{pmatrix} = \mathbf{b}' - Cw\mathbf{x}_w = \mathbf{b} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

La ecuación 4.18 es finalmente el sistema de ecuaciones general a resolver en los diferentes instantes.

## 4.2. Condición de Kutta en el primer instante

Ahora que ya se analizó en qué consiste el método de los paneles no estacionario para un sólido, puede retomarse la aplicación de la condición de Kutta en el primer instante, cuando en este y en infinitos instantes anteriores el cuerpo estuvo animado con un movimiento rectilíneo uniforme.

Primero, notar que entre el instante  $T$  arbitrario y el posterior  $T + 1$ , donde en ambos el cuerpo estaba animado del movimiento rectilíneo uniforme, el problema evoluciona como se muestra en la figura 4.4 pues el problema es estacionario, por lo tanto las velocidades calculadas en los nodos de la estela en  $T$  son las mismas que en  $T + 1$ , por ende las integraciones producen geométricamente la misma estela, lo cual a su vez causa lo anterior. Entonces, puede verse que debe ser  $\mu_{T+1} = \mu_T = \mu_{T-1} = \dots$

En segundo lugar, se anticipa la equivalencia entre un panel recto con una distribución de dobletes constante y uno con dos vórtices puntuales en sus nodos, como se muestra en la figura 4.5 y que se demostrará en la sección 5.2.

Entonces, si en el instante  $T$  se reemplaza a las distribuciones de dobletes por vórtices puntuales equivalentes, como en la figura 4.6, todos los vórtices de la estela excepto el que se encuentra en el borde de fuga se cancelan y se obtiene el modelo por el método de los paneles de un sólido en flujo estacionario<sup>4</sup>: singularidades distribuidas sobre la superficie del sólido y un vórtice puntual en el borde de fuga.

Luego, si el instante  $T$  es el instante  $t_1$ , el primer instante de resolución es equivalente a resolver un problema estacionario y, como se dijo antes, no importa la geometría real del panel que en ese instante se desprende del sólido, pues lo único que sobrevive en esta cancelación es el vórtice en el borde de fuga. Además, cuando se planteó 4.9, puede notarse que la intensidad incógnita en ese instante,  $\mu_{w,1}$ , es  $-1$  veces la intensidad del vórtice.

También, esta equivalencia entre singularidades es consistente con la aplicación de la condición de Kutta en el borde de fuga, pues reemplazando los paneles adyacentes al borde de fuga por vórtices puntuales, se puede ver en la figura 4.7 que la condición de Kutta implica que los

---

<sup>4</sup>Sería estacionario, si además el marco de referencia fuera solidario al sólido.

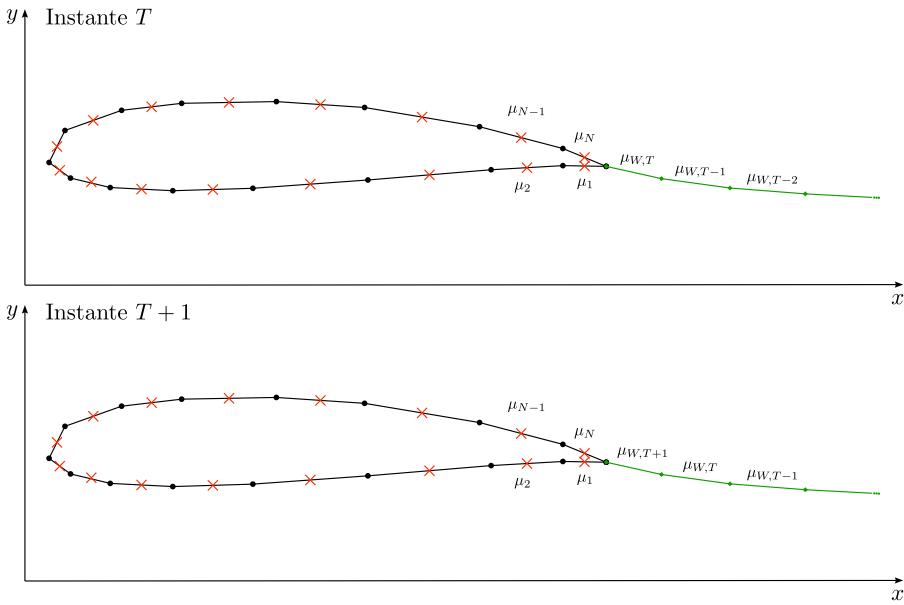


Figura 4.4: discretizaciones en los instantes  $T$  y  $T + 1$ .

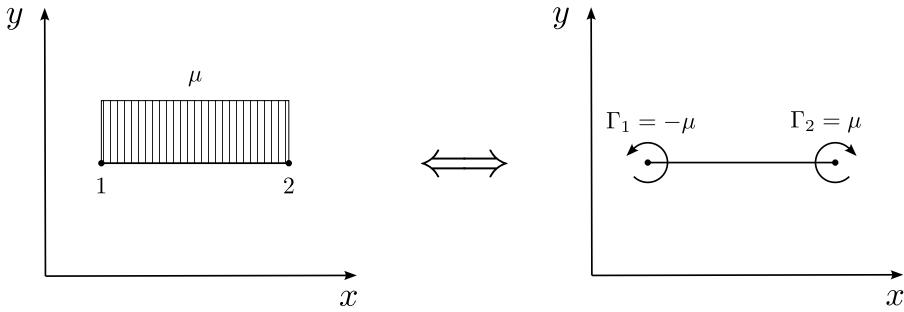


Figura 4.5: equivalencia doblete constante y vórtices

vórtices del sólido y de la estela allí se cancelen, implicando  $\Gamma_{TE} = \mu_N - \mu_1 - \mu_{w,1} = 0$ , o sea 4.9.

Entonces, una resolución no estacionaria puede iniciarse tanto desde el reposo como desde un movimiento rectilíneo uniforme del sólido completamente establecido. Lo segundo es altamente conveniente, porque permite iniciar simulaciones desde una condición generalmente más cercana a las cinemáticas que se pueden contemplar, pero existe una última consideración que pudo haberse vislumbrado ya.

Si luego del instante  $t_1$  el movimiento del sólido siguiera siendo el movimiento rectilíneo uniforme establecido, en el método de los paneles no estacionario no es correcto seguir imponiendo la equivalencia con una estela compuesta por un único vórtice. En este caso, el método sigue siendo el mismo y en cada instante debe enrollarse la estela, que en este caso “termina” en un vórtice. En el capítulo 7 se mostrará que esto es así y que los coeficientes aerodinámicos permanecen constantes en el tiempo por más de que se esté enrollando la estela y el término  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  no sea nulo, a diferencia de lo que ocurre en un sistema de referencia solidario al sólido.

Podría haberse presentado primero el método estacionario describiendo todo en base al vórtice en el borde de fuga y luego el enfoque no estacionario, pero se prefirió este orden de presentar las cosas para hacer énfasis en que el estado estacionario es un caso particular de un movimiento no estacionario y que existe una forma natural y numérica de ver esto a partir del método de los paneles.

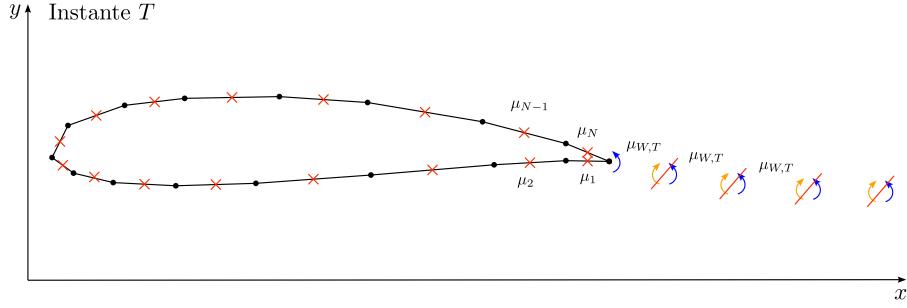


Figura 4.6: discretización equivalente con dobletes puntuales.

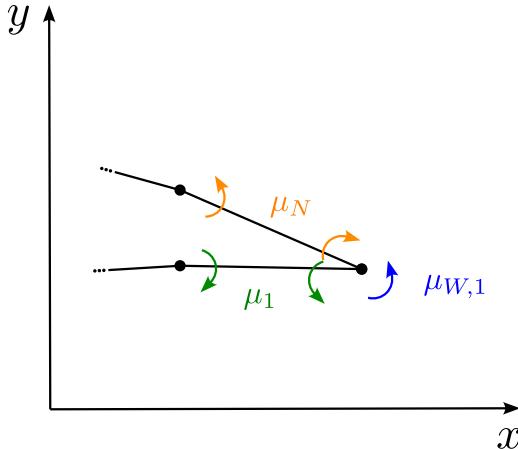


Figura 4.7: visualización de la condición de Kutta con la equivalencia de vórtices.

### 4.3. Método de los paneles bidimensional, no estacionario y multielemento

Cuando se tienen múltiples elementos, básicamente se realiza el mismo procedimiento pero teniendo en cuenta más paneles.

Si a las matrices y vectores de 4.18 se le asignan dos supraíndices, donde el primero,  $k$ , refiera al sólido al que pertenece el punto de colocación y el segundo,  $l$ , al sólido que influencia al anterior, para un elemento se tendría:

$$A^{11} \mathbf{x}^1 = \mathbf{b}'^1 - C_w^{11} \mathbf{x}_w^1$$

Para  $N_S$  elementos:

$$\begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1N_S} \\ A^{21} & A^{22} & \dots & A^{2N_S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N_S 1} & A^{N_S 2} & \dots & A^{N_S N_S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{N_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}'^1 \\ \mathbf{b}'^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}'^{N_S} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} C_w^{11} & C_w^{12} & \dots & C_w^{1N_S} \\ C_w^{21} & C_w^{22} & \dots & C_w^{2N_S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_w^{N_S 1} & C_w^{N_S 2} & \dots & C_w^{N_S N_S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_w^1 \\ \mathbf{x}_w^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_w^{N_S} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Como se puede ver, considerar múltiples elementos matemáticamente no introduce una complejidad mucho mayor. Sin embargo, esto sí repercute en la organización de la implementación y la gestión de la contribución de los diferentes sólidos, pero esto se tratará más adelante.

Algo que si debe destacarse aquí es el hecho de la interferencia. Claro está que si uno va a trabajar con varios sólidos, estos no deben interferir entre sí. La implementación no presenta una rutina de detección de interferencias sólido-sólido, así que la responsabilidad de que esto no ocurra corre por parte del usuario.

Una interferencia igual de problemática, que en el presente trabajo tampoco se atiende y sobre la que se tiene menos control, es la interferencia de las estelas con sólidos. Matemáticamente, esto no debiera ocurrir, ya que el campo de fluido queda separado en regiones, una externa de interés y  $N_S$  internas a cada sólido, por la condición de impenetrabilidad impuesta a través de la adecuada especificación de singularidades sobre las superficies sólidas. Sin embargo, como la condición de no penetración se impone solo sobre un número finito de puntos de colocación y, además, la estela no se desplaza exacta y continuamente con el fluido sino que numéricamente se la desplaza en pasos de tiempo finitos, las estelas tienen la capacidad de penetrar a los sólidos.

Exponiendo las dos fuentes que dejan abierta la posibilidad de que ocurran este tipo de interferencias, las alternativas para lidiar con esto son, viendo los resultados generados en una simulación: aumentar la discretización de los sólidos y/o disminuir el paso del tiempo en el *time marching* de las simulaciones.

## 4.4. Cargas aerodinámicas

Ya sea en el caso monoelemento como en el multielemento, conociendo la distribución de singularidades y sus intensidades, se tiene completamente definido el potencial externo y su gradiente, la velocidad. Con esto, se puede conocer la distribución de presión haciendo uso de la ecuación de Bernoulli no estacionaria:

$$p_\infty - p = \rho \left( \frac{V^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.14)$$

Así como se pospuso el tratamiento de la obtención de la velocidad inducida, se pospone el cálculo de la derivada temporal del potencial, pues también requiere su explicación más detenida, pero a esta altura una implementación ya lo podría calcular con lo resuelto hasta el momento.

Entonces, para obtener fuerzas y momentos aerodinámicos, basta con integrar la distribución de presión obtenida. Esto se realiza numéricamente y comúnmente, así como en el programa desarrollado, considerando que la presión es constante a lo largo de cada panel y con el valor que adquiere en el punto de colocación. O sea:

$$\Delta \mathbf{F}_i^k = -(p_i - p_\infty)_i^k \mathbf{n}_i^k \Delta l_i^k \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N^k} \Delta \mathbf{F}_i^k \quad (4.21)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{N_S} \sum_{i=1}^{N^k} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_M) \wedge \Delta \mathbf{F}_i^k \quad (4.22)$$

El coeficiente de presiones se obtiene directamente como:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{Q_{ref}} \quad (4.23)$$

donde  $Q_{ref}$  es la presión dinámica de referencia.

Por otro lado, ya que el primer instante de resolución formulado es equivalente a un problema estacionario salvo en el marco de referencia, si se corrige esto puede utilizarse la ecuación de Bernoulli estacionaria para calcular lo mismo que antes:

$$p_{\infty} - p = \frac{\rho}{2} (V^2 - V_{traslación}^2) \quad (2.15)$$

Esta corrección simplemente consiste en transformar las velocidades resueltas por el método de los paneles no estacionario al sistema de referencia solidario al sólido, que son las que se utilizan en 2.15.

Resulta, entonces, que desarrollando un programa que resuelva flujos no estacionarios, se tiene casi inmediatamente un programa que resuelve problemas estacionarios. Este hecho es aprovechado e incorporado en la implementación. Esto, además de añadir funcionalidad al programa desarrollado, también permite expandir el proceso de validación, ya que se puede incorporar problemas estacionarios durante esta, que también pone en tela de juicio a casi toda la rutina no estacionaria, pues es compartida.

# Capítulo 5

## Elementos singulares y su influencia

En esta capítulo se especificarán las expresiones de las contribuciones al potencial y la velocidad de los paneles, así como la de la derivada temporal de potencial en cualquier punto del campo.

En primer lugar, todas las contribuciones presentadas en este capítulo están definidas en función de coordenadas referidas a un sistema de referencia local al panel tratado  $TP(P_1, \{\hat{e}_{p,i}\}, i = x, y, z)$ , por lo que para utilizarlas en un sistema global deben transformarse las coordenadas de entrada y de salida, como se verá a continuación. En general se utilizará el subíndice  $p$  para lo relativo a la terna local a un panel.

### 5.1. Sistema coordenado en panel bidimensional

En dos dimensiones, en el programa elaborado se propone ubicar el sistema coordenado local al panel con el origen en uno de sus extremos, el eje  $x_p$  paralelo al panel y con la normal al panel,  $\mathbf{n}_p$  con el mismo sentido (y dirección) que el eje  $y_p$ . Ver figura 5.1.

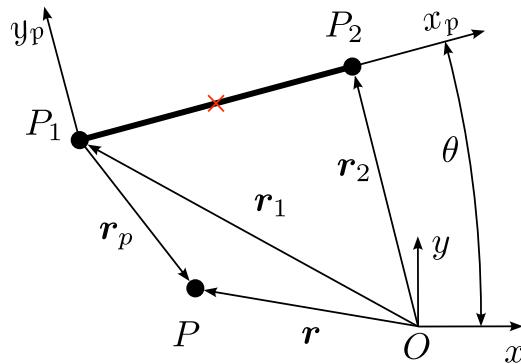


Figura 5.1: esquema y nomenclatura de los sistemas de coordenadas global y relativo al panel con nodos  $P_1$  y  $P_2$  en dos dimensiones.

Los puntos  $P_1(x_{p,1}, 0)$  y  $P_2(x_{p,2}, 0)$  son los extremos del panel.

Con esta propuesta, resulta:

$$\theta = \text{Arg}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (5.1)$$

$$x_{p,2} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (5.2)$$

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \quad (5.3)$$

Y como se definió en las ecuaciones 3.24 y 3.26:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas las componentes de la velocidad en la terna local, para pasar a la global deben utilizarse 3.25 y 3.27

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

## 5.2. Velocidades inducidas por una distribución de dobletes constante

Ya que esto se encuentra apropiadamente desarrollado en el capítulo 10 de [7], solo se adjuntarán aquí las expresiones utilizadas y se harán algunos comentarios.

En todas las expresiones que se presentan en el resto del capítulo están referidas al marco local a un panel, salvo que se indique lo contrario, por lo que se omite el subíndice  $p$ .

Ahora pasemos a exponer las contribuciones de un panel que se ubica sobre el eje  $x$  entre  $x_1 = 0$  y  $x_2$  en un punto  $P(x, y)$  y sobre el que se define una distribución constante de dobletes,

$$u = \begin{cases} -\frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{y}{(x-x_1)^2+y^2} - \frac{y}{(x-x_2)^2+y^2} \right) = -\frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-x_2)^2+y^2} \right), & P \notin \text{panel} \\ 0, & P \in \text{panel}, \quad y \rightarrow 0^\pm, \quad x \notin \{0, x_2\} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$v = \begin{cases} \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2+y^2} \right) = \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2+y^2} \right), & P \notin \text{panel} \\ \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) = \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x-x_2} \right), & P \in \text{panel}, \quad y \rightarrow 0^\pm, \quad x \notin \{0, x_2\} \end{cases} \quad (5.5)$$

Como se puede ver, la contribución es singular en los extremos del panel y, por lo tanto, los puntos de colocación se ubican en la zona central, normalmente a la mitad.

Es importante destacar que estas expresiones, y las que se muestren a continuación a menos que se aclare otra cosa, están definidas para un único panel, por lo cual en un problema del método de los paneles son contribuciones y para hallar las velocidades y potenciales inducidos en un punto es necesario sumar las contribuciones de todas las singularidades. Esto podría explicitarse en la notación anteponiendo  $\Delta$  en las variables, pero por simplicidad no se hace y se deja este comentario en su lugar.

## 5.3. Velocidades inducidas singulares y regulares

Si bien con 5.4 y 5.5 ya se puede construir el sistema de ecuaciones que resuelva las intensidades de los paneles de los sólidos y de los últimos paneles de estela creados, en realidad hace falta seguir indagando sobre la velocidad inducida.

Recuérdese la siguiente ecuación:

$$u(x, 0^\pm) = \mp \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (2.77)$$

Esta establece que una distribución de dobletes, introduce un salto en la componente de la velocidad tangencial a la superficie en la que se distribuye, de forma proporcional a su variación a lo largo de este. Puesto que los paneles considerados son rectos y la distribución es constante, este salto es nulo y por eso se obtuvo que sobre el panel la componente tangencial es nula y sin un salto.

Sin embargo, no debe olvidarse que el método de los paneles es un método numérico que introduce sucesivas discretizaciones en un problema continuo, simplificándolo. Una de estas simplificaciones fue aproximar la distribución continua de dobletes y con derivada en dirección tangencial no necesariamente nula, por una constante a trozos, con discontinuidades en los extremos y derivada nula en el intermedio. Luego, si simplemente se utiliza 5.5 para calcular la velocidad tangencial, se está perdiendo la cantidad asociada a la discontinuidad generada por la distribución continua real.

Entonces, para tenerla en cuenta, en esta implementación se propone realizar diferencias finitas para aproximar la derivada en los puntos de colocación, unilateralmente para los de los paneles adyacentes al borde de fuga y de forma centrada para el resto.

A las cantidades expresadas en 5.4 y 5.5, se las llama componentes principales, medias o singulares, mientras que la asociada a 2.77 se la llama componente de perturbación o regular.

Pese a esto, el sistema de ecuaciones que resuelve las intensidades de los paneles se puede construir, porque únicamente importa la componente normal y la autoinfluencia en este caso depende solo de las componentes principales. En donde sí hace falta introducir la componente regular es en el cálculo de velocidades inducidas en los puntos de colocación, cuando se quieren conocer las presiones.

## 5.4. Velocidades inducidas en los nodos de una estela

La instancia restante donde se desea conocer las velocidad en un caso que todavía no se cubrió es el enrollamiento de una estela, donde se debe utilizar la velocidad inducida en los extremos de los paneles de la estela, para desplazarlos. Esto incluye el cálculo de la velocidad inducida en el borde de fuga.

Con la equivalencia de la distribución de dobletes constantes con vórtices puntuales en sus extremos, en este caso el problema se reduce a calcular la velocidad inducida en los puntos de interés sin considerar el aporte de los vórtices ubicados allí, pues su autoinfluencia es singular.

Por ejemplo, en el borde de fuga no se consideran los vórtices ubicados allí de los paneles adyacentes del sólido y de la estela. Luego, se calcularía la influencia de  $N - 2$  paneles de dobletes y 3 vórtices, los restantes de los paneles adyacentes. En el primer instante, solo se computaría la contribución a la velocidad inducida en el borde de fuga, de 2 vórtices, pues la estela solo tiene el vórtice de arranque y no un panel de una distribución de dobletes<sup>1</sup>.

En el resto de paneles de estela sucede lo mismo, pero con los paneles correspondientes.

## 5.5. Potencial inducido por una distribución de dobletes constantes

La expresión de la contribución de un panel al potencial utilizando la función  $f$  (en 4.1) era:

$$\Phi = \mu f(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}) \quad (5.6)$$

---

<sup>1</sup>En realidad sí, pero el extremo está en el infinito y su contribución es nula.

donde se reemplazó  $x$  por  $\mu$ , pues ahora estamos considerando una distribución constante de dobletes.

Con esto, en [7] se define:

$$f = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1), & P \notin \text{panel} \\ \mp \frac{1}{2}, & P \in \text{panel}, \quad y \rightarrow 0^\pm, \quad x \notin \{0, x_2\} \end{cases} \quad (5.7)$$

Donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos de los vectores que van desde los extremos 1 y 2 del panel, respectivamente, hasta el punto de evaluación, y un eje polar arbitrario (ver figura 5.2). Nótese que esta dependencia con el ángulo se puede ver pensando al panel de dobletes constantes como dos vórtices puntuales.

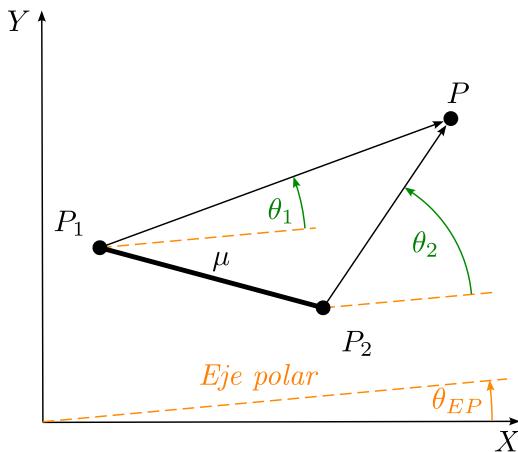


Figura 5.2: esquema de panel con distibución de dobletes constantes donde se muestran los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y un eje polar desde el que se pueden medir.

Gracias a esta posibilidad de elegir un eje polar arbitrario, en particular uno solidario al sistema fijo ( $\theta_{EP} = 0$  en la figura 5.2), es que se utilizó la formulación para el potencial con ángulos y no coordenadas relativas ni la función arcotangente. Esto cobra relevancia al momento de tener que aproximar derivadas temporales con diferencias finitas, donde utilizar ángulos permite tener control sobre la normalización de estos, lo cual posibilita garantizar su consistencia y se asegura la continuidad de la derivada del potencial. Se profundiza sobre esto en el siguiente capítulo.

## 5.6. Velocidades inducidas por un vórtice puntual

En este caso las componentes de velocidad que se consideran son:

$$u = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, & P \notin \text{vórtice} \\ 0, & P \in \text{vórtice} \quad (x = x_0, y = y_0) \end{cases} \quad (5.8)$$

$$v = \begin{cases} -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, & P \notin \text{vórtice} \\ 0, & P \in \text{vórtice} \quad (x = x_0, y = y_0) \end{cases} \quad (5.9)$$

donde  $x_0$  e  $y_0$  son las coordenadas de la posición del vórtice. En este caso, no importa el sistema de coordenadas en el que se trabaje, como pasó con el potencial en términos del ángulo.

## 5.7. Potencial inducido por un vórtice puntual

Como lo realizado para la distribución de dobletes constante, se utiliza el ángulo  $\theta$  comprendido entre el vector que va desde el vórtice hasta el punto de evaluación y un eje polar arbitrario (ver figura 5.3).

$$f = \frac{1}{2\pi} \theta, \quad P \notin \text{vórtice} \quad (5.10)$$

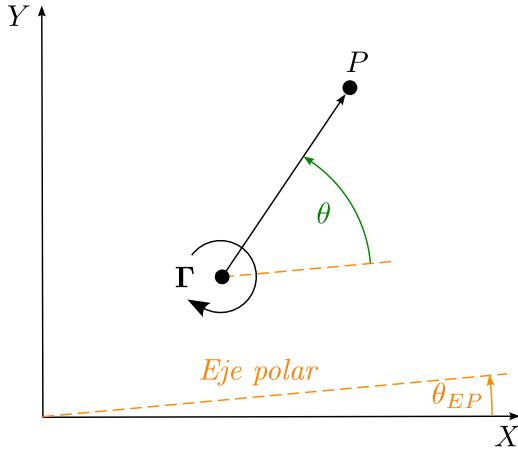


Figura 5.3: esquema de vórtice puntual donde se muestra el ángulo  $\theta$  y un eje polar desde el que se puede medir.

## 5.8. Derivada parcial del potencial respecto del tiempo

Lo último que queda para calcular la distribución de presiones con 2.14, es la derivada temporal del potencial en los puntos de colocación.

Las expresiones vistas anteriormente, como se dijo, son contribuciones. A partir de aquí se retoma el marco del método de los paneles y las variables anotadas son las totales, es decir la suma de las contribuciones.

Para obtener la derivada parcial del potencial respecto del tiempo, se tienen dos formas de hacerlo.

La primera es aplicar diferencias finitas sobre el potencial, quedando:

$$\left. \frac{\partial \Phi(X, Y)}{\partial t} \right|_T \approx \frac{\Phi(X, Y) \Big|_T - \Phi(X, Y) \Big|_{T-1}}{t_T - t_{T-1}} \quad (5.11)$$

En la expresión anterior el punto de evaluación en el sistema global no cambia en los dos potenciales calculados, solo varía la dependencia con el tiempo.

Esta forma de calcular el potencial es válido cuando el punto de evaluación es exterior a todos los sólidos en ambos instantes. Sin embargo, cuando se quiere conocer esta derivada en los puntos de colocación, de un sólido en el instante más nuevo, al momento de aplicar 2.14, alguno de estos puntos queda dentro del sólido en el instante más antiguo (ver figura 5.4). Con lo cual, emplear diferencias finitas de esta forma conlleva a diferenciar atravesando la superficie de un sólido, que es singular.

Para solucionar esto, en este caso conviene recurrir a la definición de la derivada lagrangiana, pero no siguiendo una partícula de fluido, sino a un punto de colocación (por eso se la denota como  $\frac{D_B}{D_B t}$ , para diferenciarla de la solidaria a una partícula de fluido):

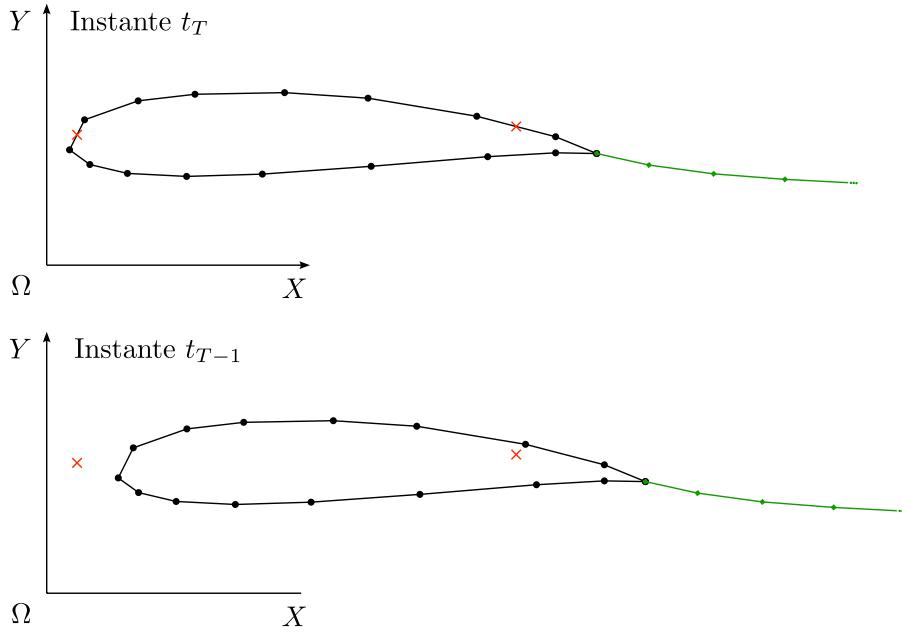


Figura 5.4: esquematización del problema de aplicar diferencias finitas como en 5.11.

$$\begin{aligned} \frac{D_B \Phi}{D_B t} \Big|_{PC} &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\mathbf{V}_B \cdot \nabla) \Phi \right) \Big|_{PC} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V}_B \cdot \mathbf{V} \right) \Big|_{PC} \\ \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{PC} &= \left( \frac{D_B \Phi}{D_B t} - \mathbf{V}_B \cdot \mathbf{V} \right) \Big|_{PC} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ahora, tanto  $\mathbf{V}_B$ , la velocidad cinemática, como  $\mathbf{V}$ , la velocidad del fluido, se pueden calcular como antes. El término restante de la derivada sustancial sí requiere emplear diferencias finitas de la siguiente forma:

$$\frac{D_B \Phi}{D_B t} \Big|_{PC} \approx \frac{\Phi_{PC,T} - \Phi_{PC,T-1}}{t_T - t_{T-1}} \quad (5.13)$$

Entonces, para calcular este término solo hace falta calcular el potencial total en un punto de colocación en ambos instantes, con lo anteriormente visto y en ningún caso se hace una evaluación en el campo interior a algún sólido.

En esta expresión se puede ver que los puntos de colocación deben preservar su correspondencia física con el paso del tiempo. Es decir, un punto de colocación en el instante  $T$  de la expresión 5.13 debe ser físicamente el mismo que el considerado en el instante  $T - 1$  y de forma consistente con la velocidad cinemática especificada, de lo contrario se estaría introduciendo un término convectivo que no se compensa en ningún lado.

Esto produce dos limitaciones. La primera, no puede cambiarse el número de paneles que conforman un sólido entre un instante y otro. Esto se controla en cada paso con la ejecución de una brevíssima rutina durante la simulación. La segunda es que no puede modificarse la discretización arbitrariamente aún preservando el número de paneles, pues debe asegurarse la correspondencia física (puntos de colocación y velocidad cinemática consistentes). Este aseguramiento queda relegado al usuario por su dependencia con el problema particular que se resuelva.

Por último, notar que en el primer instante las diferencias finitas quedan indeterminadas en el caso no estacionario, por lo que se omiten los resultados correspondientes en la simulación (se los representa con  $NaN$ ).

# Capítulo 6

## Implementación en *Python*

Hasta el momento se definió el método de los paneles desde el “papel”. Esto no tiene el propósito de restarle importancia, pues permite comprender el método y, sobre todo, implementarlo en un programa de forma satisfactoria.

Sin embargo, a la hora de desarrollar una implementación surgen dificultades que antes no se percibían, como pueden ser: la materialización de los paneles como una estructura de datos, la organización de estos para conformar múltiples sólidos en múltiples instantes, el cálculo de las transformaciones de coordenadas, los coeficientes aerodinámicos, el ensamblaje de las matrices de coeficientes, la complejidad temporal que esto conlleva, etc.

Por eso, esta sección tiene por objetivo mostrar cuáles fueron las soluciones particulares utilizadas y los criterios detrás de estas.

### 6.1. Selección del lenguaje de programación

Las principales tres alternativas fueron: *Matlab*, *Java* y *Python*.

Ya que el título de este capítulo anticipa la decisión tomada, comenzaré definiendo las razones por las cuales desarrollé el código en *Python*.

Si bien este era el lenguaje con el que estaba menos familiarizado al comenzar el trabajo final -de hecho, mi primer código fue uno para realizar transformaciones de coordenadas para esta aplicación-, tiene grandes virtudes y, además, sería el lenguaje con el que estaría trabajando a la par en otras actividades, con lo cual pude cruzar experiencias y plasmar algunas buenas prácticas.

Las características que más valoré a la hora de elegirlo fueron:

- Accesibilidad: es un *software* libre, con lo cual aquellas personas que transiten por la facultad y quieran hacer uso del programa que he desarrollado, no tendrían barreras legales o de acceso a las herramientas necesarias para estudiarlo, aplicarlo o extenderlo.
- Ecosistema: tiene un gran número de bibliotecas para el cómputo numérico, visualización y con otros objetivos que puedan ser necesarios en un futuro, igualmente libres.
- Difusión y soporte: esta variedad de bibliotecas también cuenta con documentación y una gran comunidad, disponiendo de ejemplos y foros de ayuda que permiten mejorar la comprensión sobre lo que se implementó y facilitarían el desarrollo de futuras extensiones.
- Portabilidad: es un lenguaje soportado en Windows, macOS y Linux. El código fue desarrollado en Windows, pero si se desea implementar una versión en otro sistema operativo, sería posible con cambios mínimos.

- Facilidad y flexibilidad: tanto el tipado dinámico<sup>1</sup> como el paradigma de programación orientada a objetos son permisibles, lo cual favorece la implementación ágil de programas. Esto también reduce el control del flujo de datos, pero con un uso cuidadoso y responsable es ventajoso.

*Matlab*, por su parte, es el lenguaje que más utilicé hasta el momento y con el que más comodidad tenía a la hora de programar, pero este sufre claramente por la falta de accesibilidad, que era fundamental para mí.

Previamente también había utilizado *Java* y no tiene problemas de accesibilidad. Si bien tiene un vasto ecosistema, difusión y soporte, su ecosistema científico es menos inmediato y está menos integrado que el de *Python*. Además, el lenguaje es más verboso<sup>2</sup> y con tipado explícito estrictamente necesario (estático), lo que puede hacer más difícil la comprensión del código y la implementación por parte de futuros usuarios no necesariamente experimentados.

En cuanto a rendimiento, no resulta claro de antemano qué lenguaje se impone. Aquí se conjugan la naturaleza de la compilación de cada uno de los lenguajes con técnicas que permiten mejorar este aspecto de forma manual. Por lo cual, no fue un factor tenido en cuenta durante la selección del lenguaje de programación.

En definitiva, la riqueza y sencillez del ecosistema científico y la flexibilidad de *Python* resultaron mejor alineadas con las necesidades de desarrollo ágil y extensibilidad de este trabajo.

## 6.2. Algoritmo general

Ya que conjugar todos los aspectos del método de los paneles en un código funcional es una labor extensa, primero se presentará un esquema general de resolución de un problema no estacionario.

Para ello se define la siguiente notación:

- $N_S$  es el número de sólidos,  $N_s$  es el número total de paneles que conforman los sólidos y  $N_{w,i_t}$  es el número total de paneles que constituyen a las estelas en la iteración  $i_t = 1, 2, 3, \dots$
- $N_{w,i_t-1} = N_{w,i_t} - N_S$  ya que en cada paso se generan  $N_S$  nuevos paneles de estela.
- $N = N_s + N_S$  es el número de nodos que conforman a los sólidos y  $N_{w,i_t} + N_S$  es el número de nodos que constituyen a las estelas. En el caso de los sólidos y si fueran cerrados, la cantidad puede disminuirse a  $N_s$  simplemente. En algunas implementaciones no necesariamente son cerrados y en la que se presenta sí, pero con posibilidades de no respetar esto en el futuro, por lo que se mantiene lo primero.

El algoritmo queda:

1. Generación de la cinemática de sólidos: a esta altura del análisis se considera que la cinemática de los sólidos está prescrita. Por cinemática se entiende: la cinemática de la terna móvil de cada sólido (posición y velocidad del origen, actitud y velocidad angular),

---

<sup>1</sup>El tipado (*typing* en inglés) se refiere a la definición de los tipos de datos esperados en variables y funciones. En *Python*, el tipado es dinámico y los tipos se determinan automáticamente en tiempo de ejecución, sin necesidad de declararlos previamente. Pese a ello, *Python* permite el uso *type hints*, que son anotaciones opcionales de tipo que ayudan a prevenir errores y facilitan la lectura del código. Debido a esto, fueron utilizadas en la implementación desarrollada.

<sup>2</sup>Un lenguaje se dice que es más verboso cuando requiere escribir más código o instrucciones para describir una misma operación.

las coordenadas de los nodos del panelado en el sistema móvil y las velocidades relativas de los puntos de colocación también en el sistema móvil. Todo esto debe estar disponible en cada instante de resolución.

2. Enrollamiento de la estela: en términos simples, en este punto se busca conocer las posiciones de las estelas. En el primer instante, esto implica ubicar el vórtice de arranque en cada uno de los bordes de fuga de los  $N_S$  sólidos. En el resto, implica ubicar  $N_S$  nuevos nodos de estela en el borde de fuga y desplazar los  $N_{w,i_t-1} + N_S$  nodos de las estelas del paso anterior (vórtice de arranque más dobletes constantes), integrando temporalmente la velocidad del fluido en los nodos. Para ello debe calcularse la velocidad inducida en cada uno de los  $N_{w,i_t-1} + N_S$  nodos de las estelas, por cada una de las  $N_s + N_{w,i_t-1}$  singularidades, y luego sumar las contribuciones para obtener las resultantes.
3. Construcción del sistema de ecuaciones lineales (SEL): en primer lugar, esto requiere el cálculo de velocidades inducidas en los puntos de colocación suponiendo intensidades unitarias. Esto implica calcular para cada uno de los  $N_s$  puntos de colocación,  $N_s + N_{w,i_t}$  velocidades inducidas (componentes principales). Luego, debe obtenerse la componente normal de cada una de estas velocidades, para construir las matrices  $A$  y  $b$  del sistema de ecuaciones lineales  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  donde  $A \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$  y  $b \in \mathbb{R}^{N_s \times 1}$ .
4. Resolución del SEL: se resuelve el sistema y se asignan las intensidades de los  $N_s$  paneles de sólidos y las  $N_S$  intensidades de los nuevos paneles de estela, por la condición de Kutta.
5. Cálculos aerodinámicos: para eso se requiere conocer la distribución de presiones sobre los sólidos mediante Bernoulli ( $N_s$  presiones) y para ello, a su vez, se necesita calcular la velocidad inducida en los puntos de colocación.

Conservando las velocidades inducidas calculadas en 3 y conociendo las intensidades calculadas en 4, las componentes principales de las velocidades se calculan escalando las velocidades por sus intensidades y sumando las contribuciones en cada panel.

Finalmente, deben sumarse a las anteriores las componentes regulares mediante diferencias finitas de las  $N_s$  intensidades de paneles sólidos.

### 6.3. Algunos análisis de complejidad temporal

Con esto en mente, se puede estudiar la complejidad temporal del algoritmo, paso a paso. Cabe destacar que este análisis no es preciso, ya que el costo temporal de procesamiento —de aquí en adelante, se referirá al costo temporal simplemente como “costo”, mientras que el costo espacial en memoria será referido explícitamente— de muchas operaciones es ignorado y solo se capta el flujo global. Con el se pretende poder ganar noción del método y con esto justificar algunas propuestas.

Antes de estudiar paso a paso el costo, conviene dejar en claro que:

- $O(N_{w,i_t}) = O(i_t)$  ya que  $N_{w,i_t} = N_{w,0} + N_S \cdot i_t$ .
- $O(N_s) = O(N_S) = O(1)$

donde la última igualdad es cierta si se considera la complejidad sólo en el límite del número de iteración.

A continuación, se presentan el costo de los pasos en función del número de operaciones realizadas y un costo representativo de ejecutar una operación; y luego la complejidad temporal tomando el límite respecto de  $i_t$ .

1. Generación de la cinemática de sólidos:

$$c_1 N_s \Rightarrow O(1)$$

donde  $c_1$  representa el costo de procesar cada cinemática.

2. Enrollamiento de la estela:

$$\begin{cases} c_2^1 N_S \Rightarrow O(1) & i_t = 1 \\ c_2^1 N_S + c_2^2 (N_{w,i_t-1} + N_S) + c_2^3 (N_{w,i_t-1} + N_S)(N_s + N_{w,i_t-1}) \Rightarrow O(i_t^2), & i_t > 1 \end{cases}$$

donde  $c_2^1$  representa el costo de incorporar un nuevo nodo de estela,  $c_2^2$  el de una integración y  $c_2^3$  el de calcular una influencia.

3. Construcción del SEL:

$$c_3 N_s (N_s + N_{w,i_t}) \Rightarrow O(i_t)$$

donde  $c_3$  representa el costo de calcular un coeficiente de influencia.

4. Resolución del SEL:

$$c_4^1 + c_4^2 (N_s + N_S) \Rightarrow O(1)$$

donde  $c_4^2$  representa el costo de resolver el sistema de ecuaciones lineales y  $c_4^1$  el de asignar las intensidades resueltas.

Dependiendo del método de resolución del SEL,  $c_4^1$  puede ser  $O(N_s^3)$ , o  $O(N_s^2)$  en algunos métodos iterativos sobre matrices dispersas. El programa utiliza por defecto `numpy.linalg.lstsq(A, b, lapack_driver='gelsy')`, que implementa la solución por mínimos cuadrados mediante una factorización QR con pivotado, implicando la complejidad más alta,  $O(N_s^3)$ . La razón de esta elección se fundamenta luego en base al rendimiento real del programa.

5. Cálculos aerodinámicos:

$$c_5^1 N_s (N_s + N_{w,i_t}) + c_5^2 N_S \Rightarrow O(i_t)$$

donde  $c_5^1$  representa el cálculo de combinar las intensidades con las velocidades singulares calculadas previamente asumiendo intensidades unitarias, y  $c_5^2$  el costo de calcular y sumar una la velocidad regular en un punto de colocación.

Por lo tanto, pueden hacerse los siguientes comentarios:

- Los problemas estacionarios se resuelven más lentamente a medida que transcurren las iteraciones, ya que la complejidad temporal de la resolución de cada iteración es  $O(i_t^2)$ .

Aun más, si una simulación se desarrolla por  $T$  iteraciones, la complejidad del costo de la simulación es

$$\sum_{i_t=1}^T O(i_t^2) = O\left(\sum_{i_t=1}^T i_t^2\right) = O\left(\frac{T(T+1)(2T+1)}{6}\right) = O(T^3)$$

Con esto se ve que simulaciones extensas pueden volverse altamente costosas.

- El refinamiento de la discretización de los sólidos tiene un costo alto,  $O(N_s^3)$ , pero aproximadamente constante durante una simulación.

- En base a lo primero y lo segundo, aunque dependen de las magnitudes de los coeficientes de costos elementales, se puede decir que los costos de los primeros instantes de una simulación no estacionaria probablemente estén dominados por el número de paneles de los sólidos, mientras que a medida que las iteraciones transcurren, el costo asociado dependerá más del número de iteración. En simulaciones estacionarias, directamente el problema lo domina el panelado de los sólidos.

El análisis de costos también permiten analizar otro punto: si las coordenadas de los sólidos se guardaran en las coordenadas solidarias a cada sólido, en un paso de resolución se incrementaría el número de transformaciones de coordenadas llevadas a cabo, respecto a guardarlas en el sistema global.

Para clarificar esto, primero se estudiará el guardado de las coordenadas en el sistema global, que fue el enfoque implementado.

Cuando se recibe la cinemática de un sólido, esta se encuentra en la terna móvil solidaria a él, ya que se considera lo más cómodo para el diseño de simulaciones.

Una vez ingresada esta cinemática, la implementación actual transforma toda la cinemática al sistema de referencia fijo. El coste de esto por cada panel sólido es el que se denotó anteriormente como  $c_1$  y el coste de esto, como antes, sería  $c_1 N_s$

Ahora bien, si se guardara en las coordenadas relativas, podría decirse que la nueva constante de costo el paso 1 del algoritmo es despreciable en este análisis frente a  $c_1$ .

Este costo evitado, sin embargo, se traslada al cálculo de influencias, ya que ahora en el paso 2, en el 3 y en el 5, tienen lugar las siguientes operaciones adicionales, a menos que se indique lo contrario.

## 2. Enrollamiento:

- Se transforman las  $N_{w,i_t-1} + N_S$  posiciones de los nodos de las estelas a la terna fija.
- Se transforman todas las posiciones a cada una de las  $N_S$  ternas móviles, excepto una si se implementa esta optimización (para no transformar y destransformar en el caso de las matrices de autoinfluencia<sup>3</sup>).
- Se calculan las velocidades inducidas como antes, por lo que no se tiene en cuenta en el costo adicional.
- Se suman las velocidades inducidas que se encuentren en el mismo sistema coordenado (lo cual es una optimización que resulta en  $(N_{w,i_t-1} + N_S)N_S$  velocidades inducidas diferentes, en lugar de  $(N_{w,i_t-1} + N_S)(N_s + N_{w,i_t-1})$ ) y se transforman al sistema global para terminar de sumarlas e integrarlas. Igualmente, el enfoque de esta evaluación se encuentra en las transformaciones de coordenadas.
- Se transforman las  $N_{w,i_t-1} + N_S$  nuevas posiciones a las coordenadas relativas al sólido al que se asocia cada panel. También se podría diferenciar el almacenamiento de las estelas y hacerlo en el sistema fijo, pero igual se tiene el costo adicional de las instancias anteriores.

El costo adicional en transformaciones de coordenadas de esto, en términos del costo individual por transformación,  $c_T$ , es

$$\begin{aligned} c_T(N_{w,i_t-1} + N_S + (N_{w,i_t-1} + N_S)(N_S - 1) + (N_{w,i_t-1} + N_S)N_S + N_{w,i_t-1} + N_S) = \\ = c_T N_{w,i_t} (2N_S + 1) \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Las matrices diagonales  $A^{ii}$  y  $C_w^{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_S$  en 4.19.

### 3. Construcción del SEL:

- Se transforman los  $N_s$  puntos de colocación a la terna fija.
- Se transforman los  $N_s$  puntos de colocación a cada una de las ternas móviles, excepto una si se implementa esta optimización.
- Se calculan las velocidades inducidas como antes. Para armar el SEL se requiere la componente normal que puede calcularse en este momento por lo que no hacen falta en este paso realizar más transformaciones.

El costo adicional en transformaciones de coordenadas queda:

$$c_T(N_s + (N_S - 1)N_s) = c_T N_S N_s$$

### 5. Cálculos aerodinámicos:

Se suman, por punto de colocación, las velocidades inducidas calculadas en 3 que estén en el mismo sistema coordenado (optimización que resulta en  $N_s N_S$  velocidades inducidas en lugar de  $N_s(N_s + N_{w,it})$ ) y luego se transforman estas al fijo para sumarlas y así poder obtener las velocidades absolutas (sumándole a lo anterior las componentes regulares) necesarias para los cálculos aerodinámicos usando 2.14.

El costo en transformaciones de coordenadas queda:

$$c_T N_S N_s$$

En total, el costo adicional en la iteración  $i_t$  de guardar las posiciones de los nodos de sólidos y estelas en coordenadas relativas, en lugar de usar coordenadas globales es:

$$c_T(N_{w,it}(2N_S + 1) + 2N_S N_s - \textcolor{blue}{N_s}) = c_T(N_{w,it}(2N_S + 1) + N_s(2N_S - 1)) \Rightarrow O(i_t)$$

Notar que término en azul es el costo adicional de transformar inicialmente las coordenadas en la alternativa global. En la expresión final, todos los términos son positivos para  $N_S \geq 1$  y además el primero crece con el número de iteración, con lo cual resulta claro que conviene almacenar las coordenadas en el sistema fijo.

Pasando a otro punto, pero íntimamente relacionado con el anterior, se recuerda que las expresiones utilizadas para calcular las velocidades inducidas se encuentran en un sistema local al panel que influye, por lo tanto en este procedimiento también se efectúan transformaciones de coordenadas. Precisamente, por cada velocidad inducida calculada se realiza una transformación para ubicar el punto de evaluación en el sistema local del panel y otra para llevar la velocidad inducida calculada devuelta al marco fijo.

Las velocidades inducidas son calculadas en 2 y 3. Enfocándose solamente en el costo de las transformaciones de coordenadas, el costo combinado queda:

$$\begin{aligned} 2c_T((N_{w,it-1} + N_S)(N_s + N_{w,it-1}) + N_s(N_s + N_{w,it})) &= \\ &= 2c_T((N_{w,it} - \textcolor{red}{N_S} + \textcolor{red}{N_S})(N_s + N_{w,it} - N_S) + N_s^2 + N_s N_{w,it}) = \\ &= 2c_T(N_s N_{w,it} + N_{w,it}^2 - N_{w,it} N_S + N_s^2 + N_s N_{w,it}) = \\ &= 2c_T(N_s^2 + 2N_s N_{w,it} + N_{w,it}^2 - N_S N_{w,it}) = 2c_T((N_s + N_{w,it})^2 - N_S N_{w,it}) = \\ &= 2c_T(N^2 - N_S N_{w,it}) \rightarrow O(N^2) \end{aligned}$$

Entonces, se puede ver que en general las transformaciones de coordenadas son abundantes en el método de los paneles y por lo tanto amerita una evaluación de las formas de implementarlas.

## 6.4. Evaluación de las formas de implementar transformaciones de coordenadas

Originalmente, la implementación de las transformaciones de coordenadas recurría al uso de *NumPy* para realizar las aproximadamente  $N^2(it)$  transformaciones de forma individual iterando con dos bucles de *Python* (uno de vectores y otro de ternas). Los tiempos de ejecución se hacían restrictivos en la fase de validación no estacionaria. Al menos no permitían una depuración ágil, en particular en el modo no estacionario donde se hacía notar la complejidad cúbica.

Si bien el máximo rendimiento computacional no es el objetivo de este trabajo, se exploró si habían formas alternativas de llevar a cabo las transformaciones de coordenadas y con esto, debido a la gran presencia de esta operación, acelerar las simulaciones hasta un nivel práctico.

Anticipando, la respuesta a esta incógnita fue afirmativa. Además, el nuevo enfoque se trasladó a la forma de realizar otros cálculos también, mejorando el desempeño del simulador en general, y es por esto que se decidió introducir esto antes que otros aspectos de implementación.

Para evaluar esto se propuso medir el tiempo que llevaba transformar  $N$  vectores por  $N$  ternas móviles en el plano, inspirado en la aproximada proporcionalidad del número de transformaciones en el cálculo de influencias con el cuadrado del número de paneles, con diferentes implementaciones incluyendo la original y otras alternativas.

Las nuevas formas de implementar las transformaciones propuestas involucran uno o ambos conceptos que se describen a continuación:

- Vectorización: en lugar de recorrer bucles de *Python*, ahora estos se realizan en simultáneo con las operaciones matriciales involucradas por las transformaciones. Esto implica que ahora los vectores y las ternas se agrupan, cada uno, en arreglos de mayor dimensión y las funciones realizan todas las transformaciones sobre todo el conjunto aplicando las operaciones matemáticas directamente sobre estos. El almacenamiento en arreglos permite optimizar el guardado de la información en memoria y luego acelerar el acceso a esta durante las operaciones.
- Compilación: los programas se traducen a código nativo optimizado. La compilación tiene un costo adicional, frente a la ejecución en modo lectura de *Python*, asociado a considerar. En el caso de no compilar entre iteraciones, este costo se amortiza.

Las herramientas utilizadas para incorporar estas mejoras y realizar su evaluación fueron las provistas por las bibliotecas *NumPy* y *JAX*. Ambas tienen funciones que permiten vectorización, mientras que *JAX* es la única que permite introducir compilación *JIT* de funciones. En el caso de *JAX*, permite ejecutar en *CPU* multihilo y *GPU* si el *backend* está disponible.

En esta comparativa, se usaron las siguientes clases de *Python*:

- *TernaMovil2D\_numpy*: la cual es la clase originalmente utilizada, que guarda una única terna móvil por instancia. Su método de transformación solo realiza la operación sobre un vector con la única terna almacenada, a lo cual se refiere como *pointwise*.
- *TernasMoviles2D\_numpy*: esta es una clase muy similar a la utilizada actualmente. Una instancia almacena  $N$  ternas móviles y el método transforma  $M$  vectores, cada uno por las  $N$  ternas, lo que se denota como *full batch*. Adicionalmente y para ampliar la comparativa, también presenta un método que transforma un único vector con cada una de las  $N$  ternas.
- *TernasMoviles2D\_jax*: esta es análoga a *TernasMoviles2D\_numpy*, pero utilizando la biblioteca *JAX*. Esta clase será utilizada por funciones *JAX* para empaquetar información en sus atributos pero en sí no tiene métodos, ya que esto restringe la compilación con *JIT*.

Los métodos que utilizan *NumPy* no requieren una mayor descripción, pero las que usan funciones de *JAX* sí. Las funciones evaluadas fueron:

- *R2r\_jax\_pointwise*: análoga a *TernasMoviles2D\_numpy.R2r\_pointwise*, ya que transforma un único vector con las  $N$  ternas almacenadas en *TernasMoviles2D\_jax*.
  - *R2r\_jax\_full*: análoga a *TernasMoviles2D\_numpy.R2r\_full*, ya que transforma  $M$  vectores cada uno con las  $N$  ternas almacenadas en *TernasMoviles2D\_jax*.
- Tanto esta como la función previa recompilan al cambiar  $N$  o  $M$ , forzando la recompilación en cada paso del simulador y imposibilitando la amortización de la compilación. Para evitar esto se propuso la siguiente solución.
- *R2r\_jax\_prealloc*: análoga a *R2r\_jax\_full*, pero evita el cambio de firma y la recompilación subsecuente al cambiar  $M$  o  $N$ . Esto lo logra prealocando<sup>4</sup> espacio y fijando valores  $M$  y  $N$  más grandes que los estrictamente necesarios.
  - *R2r\_jax\_vmap*: internamente es análoga al método original empleado, *TernaMovil2D\_numpy.R2r\_pointwise*, pero vectoriza la operación utilizando *vmap* de la biblioteca *JAX*.

Ahora sí, el *benchmark* consiste en registrar por variante el tiempo total que conlleva transformar  $N$  vectores por  $N$  ternas móviles, para distintos valores de  $N$  y 30 veces por cada uno de ellos, para luego calcular las medias y los desvíos estándar muestrales de las observaciones. El tiempo total incluye el tiempo de ejecución y, si hubiera, el de compilación, ya que durante una simulación las recompilaciones que tengan lugar contribuyen al tiempo implicado.

Se definió  $\max(N) = 5000$ , pues se considera que es una cantidad altamente abarcativa en el caso no estacionario bidimensional. En el caso tridimensional, que no fue abordado, este valor podría resultar insuficiente ya que de por sí los sólidos se conforman de más paneles por la tercera dimensión,  $N \cdot Q$  donde  $Q$  es el número de discretizaciones introducidas por la tridimensionalidad, pero además cada sólido no genera un único panel de estela en cada instante de simulación sino  $Q$  paneles. Sin embargo, como esta formulación no fue implementada, hasta aquí llega este comentario.

Los resultados disponibles en la figura 6.1 muestran comportamientos esperables. En primer lugar, se puede ver que el enfoque original es superado casi siempre, en algunos casos por dos órdenes de magnitud en la media.

Por otro lado y siguiendo con la media, se puede ver que a los menores números de transformaciones evaluados, las implementaciones de *JAX* sufren el costo de la compilación, ya que en dicha región exhiben curvas con poca pendiente, pero alto tiempo de ejecución.

Los mejores resultados en casi todo el rango se obtuvieron con la implementación *TernasMoviles2D\_numpy.R2r\_full*. Recién aproximadamente a  $N = 1100$  comienza a ser superada levemente, de forma mucho menor que lo que esta supera al resto de implementaciones en tamaños menores.

También se advierte que la preallocación con *JAX* es costosa y en el rango evaluado no se amortiza. Los mejores resultados de *JAX* se obtuvieron con *R2r\_jax\_full* y *R2r\_jax\_vmap*, pero en el rango  $10^1$  a  $10^3$  el mejor método de *NumPy* es superior y lo llega a ser en un orden de magnitud.

En cuanto al desvío estándar, los métodos de *NumPy* vectorizados cuentan con los menores desvíos estándar, que aumentan con el número de transformaciones. Con el método original también aumentan con el número de iteraciones, pero son sistemáticamente mayores. En las

---

<sup>4</sup>El término *prealocar* (del inglés *preallocate*) se refiere a reservar espacio de memoria por adelantado, antes de su uso efectivo, con el fin de evitar reasignaciones y mejorar la eficiencia.

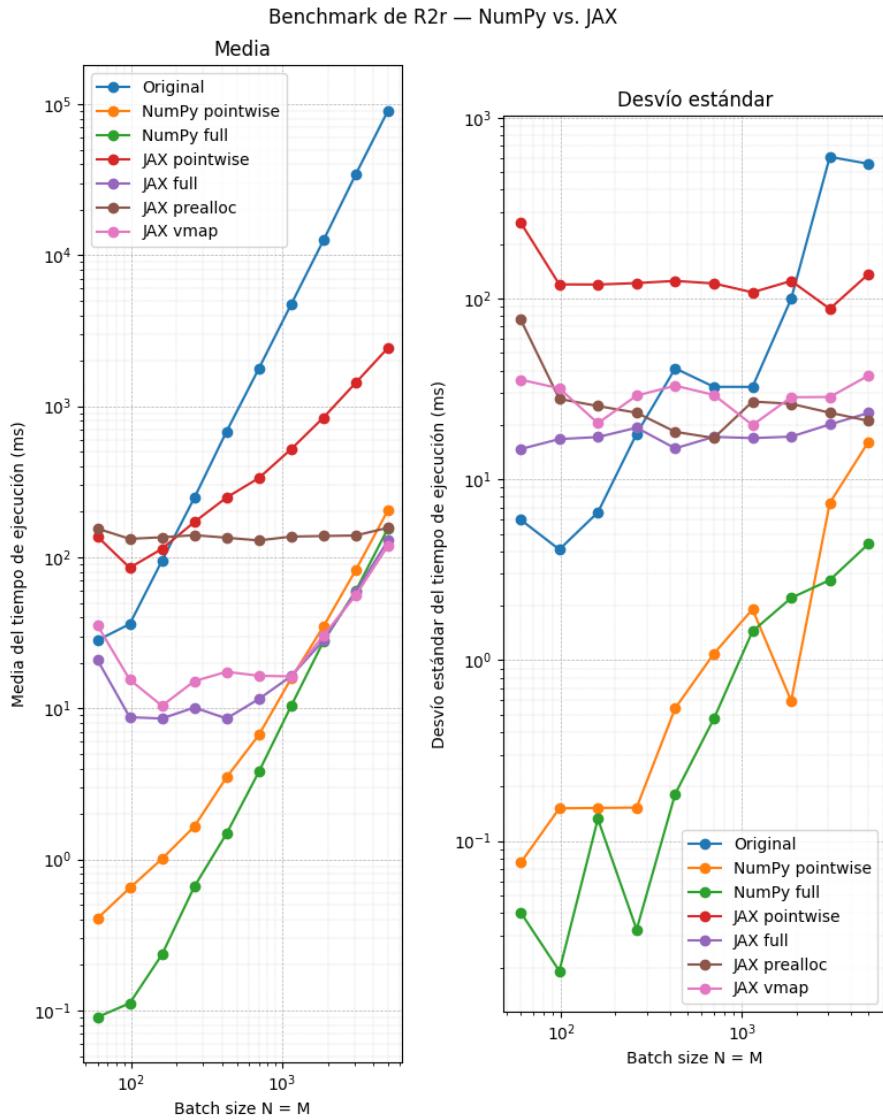


Figura 6.1: resultados del *benchmark* de transformaciones de coordenadas en el plano.

implementaciones de *JAX* y en el rango de  $N$  evaluado el desvío estándar no muestra una marcada variación con  $N$ , probablemente también sea porque la compilación sigue dominando el costo temporal.

Por todo esto se decidió utilizar la clase *TernasMoviles2D\_numpy* y métodos vectorizados como el que se utilizó, que hace uso de la función *einsum(...)* de *NumPy* que aplica sumas, productos, trasposiciones de matrices y otras operaciones tensoriales lineales, al definir la operación utilizando notación de einstein. Por ejemplo el método *R2r\_full* se definió como se muestra en el código 6.1.

Código 6.1: Método *TernasMoviles2D\_numpy.R2r\_full*

```

1  def R2r_full(self,
2      R: np.ndarray,
3      ) -> np.ndarray:
4      """
5          Parameters
6          -----
7          - r : np.ndarray shape (2, M)
8          Conjunto de 'M' vectores a transformar
9          Returns
10         -----
11         R : np.ndarray shape (2, N, M)
12         Vectores transformados (cada uno en las 'N' ternas seleccionadas).

```

```

13     """
14     return np.einsum('nij,jnm->inm', self.T, R[:, None, :] - self.R0[:, :, None])

```

De la misma forma se definió la clase *TernasMoviles2D* con todos los métodos necesarios para llevar a cabo una simulación por el método de los paneles.

Otro punto positivo de este cambio de implementación, además del rendimiento, surge en cuanto a la claridad del código. En la versión anterior, los bucles de *Python* quedaban explícitos, mientras que al vectorizar los bucles anidados no se visualizan y el código escrito se simplifica a una línea.

Este enfoque vectorizado con *NumPy*, como se dijo, se implementó también en el resto de funciones, métodos y clases. Esto, combinado con el almacenamiento de la cinemática en coordenadas globales produjo una mejora de dos órdenes de magnitud en el costo total de simulaciones semejantes respecto a una versión del programa anterior que no contaba con estas mejoras.

Al trasladar esto a otras partes del código también apareció la necesidad de enmascarar elementos de los arreglos para aplicar diferentes cálculos o bien no hacerlo y resolver todo con un caso, para posteriormente recalcular la minoría de los elementos (costo  $O(N)$  contra el total  $O(N^2)$ ) que correspondan a otro caso con la rutina apropiada. Este enmascaramiento era resuelto anteriormente con bloques lógicos dentro de los bucles anidados.

Con lo cual puede decirse que los resultados del *benchmark* llevado a cabo no se trasladan directamente al simulador, ya que al momento de la implementación real emergen otras modificaciones necesarias que tienen costos temporales asociados y que no fueron medidos de forma aislada.

Además, dicha versión previa no alcanzó el grado de madurez que el programa final<sup>5</sup>, la comparación de costos realizada es meramente estimativa y, como se aclaró anteriormente, el fin de esta evaluación era mejorar en la medida de lo posible el rendimiento del programa sin pretender ser este el objetivo principal.

Con esto, se encuentra discutida en gran parte la implementación de la clase *TernasMoviles2D* y un aspecto general del simulador presentado. En la sección siguiente a la inmediatamente posterior se discutirán también los aspectos generales del resto de clases y métodos utilizados.

## 6.5. Presentación del programa desarrollado

Para posibilitar la lectura de las secciones que siguen, se describirá aquí el formato en el que se pone a disposición lo desarrollado.

Básicamente, la presentación es como la de un repositorio de *Git* que cuenta con la siguiente estructura:

```

TrabajoFinal/
└── Trabajo Final - Bruno F. Barra Atarama.pdf : memoria escrita (el presente
    documento)
└── src/ : código fuente del simulador
    ├── MP2D.py : clase principal para diseñar simulaciones, realizarlas y graficar
    ├── Cinematicas.py : generadores de cinemáticas (prescritas, aeroelásticas y
        flap)
    ├── Tipos.py : tipado y configuraciones auxiliares
    ├── Importacion.py : importación y discretización de perfiles
    ├── TernasMoviles2D.py : módulos auxiliares
    └── Vortices2D.py

```

---

<sup>5</sup>De hecho presentaba *bugs* que fueron corregidos en la versión final, por lo que no se lo pone a disposición

```

    └── _ConjuntoSolidos2D.py
    └── Paneles2D.py
gui/ : recursos de la interfaz gráfica
    ├── GUI.py : código fuente de la interfaz gráfica
    ├── GUI.spec : archivo de especificaciones de PyInstaller para la compilación
    └── logos.png : logos institucionales
gui/build/ : archivos temporales generados durante la compilación (no versionado)
gui/dist/ : carpeta de salida del ejecutable compilado (no versionado)
    └── GUI.exe : ejecutable stand-alone de la interfaz gráfica
Ejemplos/ : notebooks de ejemplo de uso y validación
    ├── ejemploBase.ipynb : simulación de perfil fijo con ángulo de ataque variable
    ├── ejemploAlaFlap.ipynb : caso ala-flap basado en NACA Report 614
    ├── ejemploCargaYGuardado.ipynb : guardado/carga de simulaciones (.npz / .mat)
    ├── ejemploCinematicaAeroelastica.ipynb : cinemática aeroelástica
    ├── ejemploWagner.ipynb : respuesta impulsiva
    ├── ejemploAnimacion.ipynb : generación de la animación del campo de velocidades
    └── animación.mp4 : animación del campo de velocidades
    ├── testArmonico.ipynb : oscilaciones armónicas, validación con NACA TN 2465
    └── benchmarkTernasMoviles.ipynb : test de performance
Ejemplos/rec/ : datos auxiliares y resultados guardados
    ├── NACATN2465/ : CSV de curvas experimentales del reporte
    ├── perfiles/ : algunas coordenadas de perfiles en formato Selig y Lednicer
    ├── *.npz / *.mat : ejemplos de simulaciones guardadas
    └── *.png : gráficos de Cp, polares, etc
LICENSE
README.md
setup.py
requirements.txt

```

Entonces, en la siguiente sección, la 6.6 y subsecciones se tratarán los módulos que se encuentran en *src*.

Luego de esto, en el capítulo 7 se presentarán las validaciones del programa realizadas. Su contraparte en código también se deja a disposición en *Jupyter Notebooks* en la carpeta *Ejemplos*.

## 6.6. Clases, métodos y funciones principales utilizados

En esta sección se intenta brindar una conexión entre la fundamentación física y matemática, el algoritmo general 6.2 y la implementación en *src*. Sin embargo y para que quede claro desde un principio el espíritu de esta sección, la conexión que se pretende dar es conceptual y tal que ayude a comprender el funcionamiento macroscópico de la implementación, mas no se discutirán en profundidad las particularidades de cada uno de los algoritmos desarrollados, ya que para esto se cree necesaria la lectura detenida del código en sí, lo cual no tiene sentido práctico tratarlo aquí. Ahora bien, esta conexión sí ayuda a tener una buena comprensión inicial como punto de partida a la hora de hacer un estudio exhaustivo del código para, por ejemplo, incorporar nuevas funcionalidades o simplemente entender lo desarrollado en el presente trabajo.

También es oportuno hacer la observación que tanto para el estudio en detalle de los códigos así como para la utilización del simulador y su futura expansión, cada clase, método, función y comportamiento de los algoritmos fue documentado, con comentarios y *docstrings*, que de-

jan claramente definidos los atributos, parámetros, salidas y comportamientos particulares, al menos como se los diseñó.

El orden en el que se presentarán las clases, métodos y funciones principales utilizados será tal que se trate lo elemental primero y lo más complejo y lo que orquesta todo, después. Se espera que esto facilite la comprensión.

### 6.6.1. `_TernasMoviles2D.py`

Además de lo cubierto en la sección 6.4, se puede agregar que en esta clase además de implementar las transformaciones definidas en 3.24 e implementadas en el *benchmark*, también tiene definidos métodos que cubren 3.25 y 3.28. También, para una misma funcionalidad se presentan múltiples implementaciones que difieren en firma, ya que en algunos casos, por ejemplo, se pueden transformar  $M$  direcciones cada una con  $N$  ternas móviles, o bien transformar  $N$  direcciones cada una con la terna móvil en la misma posición de un conjunto de tamaño  $N$ . Esto atiende necesidades algorítmicas.

### 6.6.2. `Tipos.py`

Este módulo se desarrolló para condensar el tipado utilizado en el resto de módulos, para asistir a quien utilice el simulador o lo expanda, ya que mediante el tipado se logran sugerencias de *Pylance* y acceso de forma dinámica a los *docstrings* de los tipos, que terminan de definir las características y funcionamiento de los objetos utilizados

### 6.6.3. `_Vortices2D.py`

En este módulo se define la primera clase directamente relacionada al método de los paneles, *Vortices2D*.

Esta clase se emplea para representar un conjunto de  $N$  vórtices puntuales en dos dimensiones, teniendo como atributos un arreglo de vectores posición y un vector de intensidades.

Evidentemente, esta clase está pensada para ser utilizada como representación de los vórtices de arranque necesarios para que se cumpla la condición de Kutta en el primer instante de una simulación no estacionaria, o bien en el caso estacionario.

Esta clase tiene además un método `-en` realidad dos que atienden necesidades algorítmicas distintas, pero que conceptualmente resuelven lo mismo- con el cual se pueden calcular las velocidades inducidas, con intensidades unitarias o con las definidas en una instancia en particular, en  $M$  puntos de evaluación.

Un punto importante en cuanto al cálculo de influencias es que en la implementación se invirtió el sentido de circulación positiva respecto al convencional y utilizado en las expresiones presentadas anteriormente. Esto fue así, para mantener invariante la implementación de la condición de Kutta durante la construcción del SEL, pues se puede ver en la figura 4.7 que el sentido del vórtice de arranque es consistente con la condición de Kutta en 4.10, solo si el sentido de circulación de un vórtice con intensidad positiva es antihorario, al revés de lo estandar.

Otro aspecto importante respecto al cálculo de influencias es la necesidad de diferenciar el cálculo cuando el punto de evaluación es un vórtice de cuando no lo es. En el primer caso, la autoinfluencia está indeterminada y la contribución se considera nula. En el caso de vórtices esto solo sucede cuando se están convectando los vórtices de arranques.

La solución propuesta e implementada para diferenciar el cálculo consiste en pasar, al método que calcula las influencias, un arreglo de enmascaramiento  $E_{ij}$  para definir los casos. En particular y para ejemplificar esto, en el caso de los vórtices se usó: si el punto de evaluación

$i$  no es el vórtice puntual  $j$ , entonces  $E_{ij} = 0$ , de lo contrario  $E_{ij} = -1^6$ . La elección de la numeración de los casos no es arbitraria, pues se decidió que al menos el caso donde el punto de evaluación no coincide con la singularidad sea  $E_{ij} = 0$ , ya que este es el más frecuente e iniciar un arreglo con todos sus valores nulos es más eficiente.

Se prefirió el enfoque por enmascaramiento y no uno por clasificación numérica calculando distancias y definiendo una tolerancia, ya que lo último implicaría: costos adicionales de cálculos y comparaciones, y posibilidad de cometer errores por tolerancias permisivas o restrictivas. Además, los casos son perfectamente predecibles y basta algunas líneas de código para armar el arreglo de enmascaramiento.

Es un hecho de que el enmascaramiento no es gratis, pues: hay que crear el arreglo de enmascaramiento para pasarlo al método de cálculo de influencias, y luego usar la información del arreglo antes del método para realizar el cálculo. O sea, en ambos pasos existen bucles con comparaciones. En una versión no vectorizada, a diferencia de la actual, no hace falta diferenciar entre estos dos bucles, pues en uno solo (de *Python*) se lleva a cabo la lógica de los casos y el cálculo en simultáneo. En el caso vectorizado, el bucle y las comparaciones necesarias para construir el arreglo de enmascaramiento también es en *Python*, por lo que su costo es comparable con el del caso no vectorizado. Sin embargo, para la extracción de información del enmascaramiento se emplean comparaciones e indexaciones implementadas de forma vectorizada con *NumPy*, lo que se vio en el *benchmark* que era mucho más rápido que bucles de *Python*. Con lo cual, el costo adicional del enmascaramiento se espera que sea relativamente pequeño y, sobre todo, que se amortice con la utilización generalizada de operaciones vectorizadas en el resto del código. El programa vectorizado fue dos órdenes de magnitud más rápido que el original, así que se cree que lo anterior fue así.

Por último, el método también cuenta con un método para calcular los ángulos polares de los vectores que van desde los  $N$  vórtices hasta  $M$  posiciones, información que es utilizada para el cálculo de potenciales. Este método es secundario y como se puede ver, para la conexión que se quiere dejar clara en esta sección su aporte no es significativo, por lo que métodos similares de las siguientes clases serán omitidos por esta misma razón sin ser esto indicado.

#### 6.6.4. `_Paneles2D.py`

En este módulo se define una clase similar a *Vortices2D*, ya que representa un conjunto de singularidades distribuidas sobre paneles rectos y contiguos. Actualmente solo se encuentra implementado el caso de distribuciones de dobletes constantes y, análogamente a *Vortices2D*, los atributos de una instancia de esta clase son un arreglo con las posiciones de los nodos de los paneles y un vector de intensidades. Lo primero requiere más atención.

En esta clase los paneles se forman por los nodos consecutivos guardados en el arreglo de una instancia. Esta forma de representar los paneles ya impone dos condiciones: continuidad geométrica y sentido de la circulación a lo largo de la geometría. Esto último, a su vez, permite definir normales a los paneles de forma implícita y consistente en todos ellos.

Esto se retoma en la siguiente clase, pero lo importante es comprender que una vez definido los atributos de intensidades y posiciones de los nodos, se pueden calcular las normales y las posiciones de los puntos de colocación, aunque esto requiere haber definido si estos se ubican a la mitad de un panel, a un tercio de su longitud de distancia respecto al primer nodo o al segundo, etc. Para ello se utiliza un atributo de configuración.

También, instancias de esta clase tienen dos atributos adicionales:

- Las coordenadas  $x_{p,2}$  en el sistema local a cada panel, como se definieron en 5.2.

---

<sup>6</sup>Técnicamente, en el caso de los vórtices, en el segundo caso basta con que  $E_{ij} \neq 0$ , pero se prefirió documentar  $E_{ij} = -1$  para mantener una convención común con los paneles de dobletes, y cualquier otra singularidad que se trate en el futuro

- Las ternas móviles solidarias a cada panel como se definió en 5.1, representadas por una instancia de *TernasMoviles2D*.

Estos dos últimos atributos surgen para evitar recalcular estas variables al momento de tener que calcular influencias. Es decir se disminuyó el costo temporal a partir de un incremento del costo espacial.

Nuevamente, esta clase cuenta con un método de cálculo de influencias donde el enmascaramiento de los puntos de evaluación ahora discrimina 4 casos, donde el punto de evaluación se encuentra:

- fuera del panel,
- en el panel pero no en sus extremos,
- en un extremo del panel, o
- en el otro extremo del panel.

Esta diferenciación atiende la necesidad de calcular las influencias durante la construcción del SEL, pero también a lo discutido en 5.4, cuando se quiere calcular las influencias en los nodos de los estelas.

### 6.6.5. *\_ConjuntoSolidos2D.py*

La clase definida en este archivo, *ConjuntoSolidos2D*, representa un conjunto de sólidos con sus estelas (dobletes y vórtices). Esta clase es meramente contenedora de información, pues actualmente no presenta ningún método especializado.

Los sólidos son representados por un arreglo (lista) de instancias de *Paneles2D*, donde para cada uno se define:

- El borde de fuga como la primera columna (vector de 2 componentes) del arreglo de posiciones de la instancia.
- El borde de fuga como la última columna (vector de 2 componentes) del arreglo de posiciones de la instancia.
- Las posiciones intermedias como las columnas intermedias, desde la segunda hasta la anteúltima columnas, circulando por el perfil en un único sentido primero por el intradós y luego por el extradós, como se convino en la figura 4.1.

Con esto, se diseñó que las normales obtenidas sean hacia afuera del perfil.

También, es importante remarcar que esta representación y la subsecuente implementación, exige que los bordes de fuga estén cerrados. Esto es un chequeo que se realiza en tiempo de ejecución en cada instante. Otros programas, como *Xfoil* toleran bordes de fuga no cerrados añadiendo una fuente entre los nodos extremos con una intensidad tal que se emita fluido como si el borde estuviera cerrado. Como esto no fue abordado no se agrega más, pero al menos se deja este comentario por si pueda ser disparador de trabajo futuro.

Para representar la parte de la estela constituida por dobletes también se emplea un arreglo de instancias de *Paneles2D* comenzando desde el borde de fuga y terminando en el primer panel de dobletes creado. Esto resulta en una indexación invertida respecto de la usada en el desarrollo del método, que resulta por cómo se implementó la construcción de normales en *Paneles2D*: si circulando por los paneles de un sólido como se muestra en la figura 4.1 las normales calculadas son exteriores, para que las normales de la estela de este sólido tengan

continuidad con las normales del sólido en el extradós (como se muestra en la figura 4.1), entonces el arreglo de posiciones de los nodos de la instancia de *Paneles2D* que representa la estela debe comenzar en el borde de fuga y terminar en el vértice de arranque.

Los vértices de arranque, análogamente, se representan con arreglos de instancias de *Vortices2D*.

Todos los panelados se almacenan en coordenadas globales, como se justificó anteriormente. Por lo tanto, las velocidades inducidas calculadas por los métodos de las clases *Vortices2D* y *Paneles2D* ya se encuentran en el sistema inercial.

Además, esta clase cuenta con atributos que permiten evitar recalcular variables durante la simulación: las normales de los paneles de los sólidos, las coordenadas de los puntos de colocación y sus velocidades cinemáticas, todas estas en el sistema global.

Para evitar recalcular influencias durante el posprocesamiento aerodinámico o en algunas visualizaciones posteriores, una vez calculadas las velocidades inducidas, estas también se guardan aquí.

Se destaca que esta clase almacena a un único conjunto, por lo que lo que captura es al conjunto en un único instante y, por ejemplo, para tener una descripción del conjunto a lo largo del tiempo se debe contar con varias instancias de esta clase. En cada instante de simulación, entonces, se instancia un nuevo objeto.

La otra alternativa, que fue la empleada en una versión previa del programa, es la de almacenar cada sólido por separado, pero con su historial de tiempo completo, el cual en cada iteración se iba ampliando.

En principio, ya que los distintos sólidos no necesariamente tienen el mismo número de paneles entre sí, en general no se pueden agrupar sólidos en un mismo arreglo y siempre habrá que agrupar paneles por pertenencia a sólidos y por ubicación temporal de forma diferenciada. Lo que sí cambia entre una alternativa y la otra es el orden en el que se hacen estos agrupamientos y por lo tanto el acceso a la información.

En el caso de que se agrupen los sólidos y sus estelas en un conjunto primero, permite que el conjunto en su totalidad sea rápidamente accedido. Y ya que siempre importa la contribución de todo el conjunto en un instante para conocer características del campo salvo durante el enrollamiento, este acceso inmediato a la totalidad del conjunto permite mayor agilidad y claridad en la escritura del código, respecto a la otra forma de agrupar, donde sería necesario acceder al instante correspondiente en cada sólido por separado.

Esta misma indexación por conjuntos permitiría también agilizar la implementación de paralelización de cómputos, ya que conviene serializar solo la información estrictamente necesaria que a lo sumo será la de dos conjuntos (correspondientes a dos instantes y solo durante el enrollamiento). En la otra forma de estructurar los datos, para preservar la eficiencia de la paralelización y serializar la misma cantidad de información hace falta previamente un proceso de empaquetado de todas las variables de interés en los instantes necesarios.

La paralelización no fue implementada en la versión final, pero sí investigada y aplicada en la anterior. Ya que las contribuciones de dos paneles a velocidades y potenciales en un punto no dependen entre sí, la paralelización es aplicable y podría dar buenos resultados, por eso se deja el comentario anterior, pudiendo ser trabajo futuro acelerar las simulaciones mediante paralelización.

### 6.6.6. Importacion.py

Para construir los panelados e instanciar *ConjuntoSolidos2D* deben conocerse las coordenadas de los nodos y para ello en primer lugar se desarrollaron en este módulo rutinas de importación de coordenadas de perfiles a partir de archivos de texto, por ejemplo .dat, con las coordenadas en formato Selig o Lednicer. Además, con estas coordenadas se proporcionaron

medios para discretizar interpolando linealmente y con la regla del coseno e incluso la de la tangente hiperbólica, que refina aun más el panelado hacia los bordes de ataque y de fuga, inclusive pudiendo ser esto contraproducente.

### 6.6.7. Cinematicas.py

Sin embargo, no basta solo con definir coordenadas, sino que en una simulación no estacionaria, e inclusive una estacionaria, además se necesita definir el resto de la cinemática.

Para esto se diseñaron diferentes funciones de generación de cinemáticas en este módulo que a partir de parámetros que definen la cinemática, información en archivos o rutinas, producen salidas que representan a la cinemática y que respetan las firmas utilizadas durante la simulación y especificadas en *Tipos.py* y el resto de la documentación.

Las cinemáticas cubiertas son: movimiento rectilíneo uniforme, rotación armónica y traslación armónica perpendicular al avance. Además, de la misma forma se implementó una rutina para realizar un barrido de ángulos de ataques (simulación estacionaria), una para obtener las coordenadas relativas de un *flap*, otra para cinemáticas arbitrarias ingresando las variables necesarias o bien leyendo archivos, e incluso una para llevar a cabo simulaciones aeroelásticas.

Respecto a lo último, las simulaciones que se refieren por aeroelásticas, en realidad podrían ser cualquiera en la que la cinemática no esté predefinida y dependa de la evolución de la simulación. Con lo cual, durante la simulación se alimenta al generador de cinemáticas con la información disponible (cinemática, fuerzas y momentos) para definir la cinemática en el nuevo instante.

Todas estas formas de definir la cinemática se muestran ejemplificadas en *Jupyter notebooks* en la carpeta */Ejemplos* y para su mayor comprensión se recomienda directamente verlos o revisar la documentación.

Además de la cinemática de los sólidos, también hace falta la cinemática del punto de toma de momentos, si se quieren calcular momentos aerodinámicos. En este módulo y de forma similar, también se proporcionan medios para hacerlo.

A continuación se aborda la integración de todo lo anterior.

### 6.6.8. MP2D.py

Este es el módulo principal, que articula todo el resto de módulos funcionales para llevar a cabo la simulación y posteriormente acceder a, guardar o graficar los resultados. Su nombre es por Método de los Paneles 2D.

Para ello aquí se define la clase MP2D, que representa a la simulación de un experimento.

Para instanciar una simulación, por lo visto hasta ahora, entonces hace falta definir una forma de generar las cinemáticas de los sólidos y la del punto de toma de momentos si hace falta. Además, es necesario establecer una serie de configuraciones condensadas en diccionarios, respondiendo a las necesidades del usuario, como se muestra a continuación.

Aunque para diseñar una simulación se recomienda leer la documentación de las configuraciones, aquí se mencionarán las más pertinentes.

- *MPConfig['estacionario']*: sirve para indicar si la simulación es estacionaria o no, para utilizar las rutinas correspondientes. El caso estacionario, se implementa exactamente igual a una simulación no estacionaria, salvo en que el tiempo ya no tiene relevancia y puede definirse como alguna variable de interés, en que las estelas siempre se fuerzan a componerse solo del vórtice de arranque y en que se utiliza la expresión estacionaria de Bernoulli, con la transformación a velocidades relativas que eso implica. Esto permite a su vez, reutilizar métodos de graficación temporales, donde ahora cada instante sería una simulación estacionaria distinta y las abscisas una variable que las caracteriza, por

ejemplo el ángulo de ataque en una polar. Por eso también se dispone de la configuración *MPConfig['rotulo\_t']*, para sobreescribir las leyendas que por defecto refieren al tiempo.

- *MPConfig['vorticeArranque']*: sirve para anular las intensidades del los vórtices de arranque. En el caso de que no se anulen, se puede considerar de que las simulaciones comienzan en estado estacionario.
- *MPConfig['aeroelasticidad']* y *MPConfig['RMAeroelasticidad']*: sirven para indicar si la simulación cuenta con la cinemática de los sólidos y/o del punto de toma de momentos, respectivamente, predefinida o si esta es aeroelástica.
- *MPConfig['rigidez']*: escalar que se espera en el rango  $0 \leq rigidez \leq 1$  y que regula la posición del último nodo de estela creado. Surge de una forma alternativa de desplazar a los nodos de estelas que en un instante se encuentran en el borde de fuga únicamente en base a la cinemática del borde de fuga, en contraposición con la convección natural de estos con el fluido. Si la rigidez es unitaria, se utiliza la integración de la velocidad para definir la nueva posición del anteúltimo panel de estela creado, mientras que si es nula este se ubica en la posición anterior del borde de fuga (no se desplazó). Comentarios adicionales respecto a este parámetro se harán en el capítulo 7 de validación.
- *MPConfig['SELSol']*: cadena de caracteres para definir el método de resolución del sistema de ecuaciones lineales. Se encuentran implementados tres: por descomposición *SVD*, QR y LU, y por defecto se utiliza la segunda, por motivos que se expondrán luego.
- *RefConfig*: en este diccionario se definen todas las magnitudes de referencia de la simulación: densidad, presión estática, velocidad, longitud, viscosidad cinemática, velocidad del sonido y aceleración de la gravedad. Además, automáticamente se calcula y guarda la presión dinámica.
- *PanConfig['xPC\_x2\_xyp']*: es la razón  $\frac{x_{p,PC}}{x_{p,2}}$  (coordenadas en el marco local de los paneles, ver figura 5.1) que sirve para posicionar los puntos de colocación, que por defecto se ubican a la mitad<sup>7</sup>.

También se calculan los números adimensionales vistos en el capítulo 1 y se almacenan en el atributo *adimInfo*.

### 6.6.9. **MP2D.simular(...)** y **MP2D.avanzar(...)**

Una vez instanciado el simulador con las cinemáticas y la configuración, el método *MP2D.simular* resuelve la simulación en los instantes posibles o especificados (necesariamente especificados en el caso aeroelástico). Este método, además de algunas rutinas secundarias, invoca en cada paso al método *MP2D.avanzar*, que gestiona todo el proceso de resolución por el método de los paneles en un instante; o sea, implementa lo descrito en 6.2, con los siguientes comentarios siguiendo la numeración de pasos ya utilizada.

1. En primer lugar, se obtiene el número de la iteración y se extrae la cinemática cargada para cada uno de los sólidos, ya sea aeroelástica o no. En el caso aeroelástico, el primer instante debe estar predefinido, pues el simulador aún no puede brindar información relevante.

---

<sup>7</sup>En *PanConfig* actualmente también se define el tipo de singularidad a utilizar en los paneles rectos y la condición de borde, pero como actualmente solo se tratan dobletes constantes y Neumann, están en desuso. Su utilización tendría sentido en desarrollos futuros.

Se instancian objetos de la clase `TernasMoviles2D` para cada uno de los sólidos en ese instante y con estas se transforman las coordenadas de los nodos de cada sólido al sistema global.

Posteriormente se realizan una serie de controles: consistencia del tiempo entre los sólidos y su crecimiento monotónico, conservación del número de paneles de cada sólido y bordes de fuga cerrado. Los controles temporales solo se realizan en el caso no estacionario.

2. Se lleva cabo el enrollamiento de la estela como se definió en 6.2.

Las posiciones de las estelas obtenidas del enrollamiento se encuentran en coordenadas globales y ya se puede instanciar `ConjuntoSolidos2D` en el instante actual. Al hacerlo, ya se cuenta con la información empaquetada en una estructura que el resto del código es capaz de manipular.

3. Para construir el SEL, primero se calculan las velocidades inducidas (valores principales) en los puntos de colocación, tanto por los paneles de los sólidos como los de sus estelas suponiendo intensidades unitarias.

Estas velocidades se calculan previamente a la construcción del SEL para que permanezcan en un flujo exterior al método de construcción , ya que pueden ser reutilizadas para calcular las resultantes una vez resuelto el SEL y conocidas las intensidades de cada panel, multiplicando estas por las influencias y sumándolas.

Para construir el SEL en sí, se calculan las proyecciones normales a los paneles, de estas velocidades inducidas y se utiliza lo definido en 4.19.

4. Para resolver el SEL se propusieron 3 vías distintas, compatibles con las características de la matriz de coeficientes  $A$ : *SVD*, *QR* y *LU*. La matriz  $A$  construida por el método de los paneles en general no es simétrica y está muy mal condicionada. Es sencillo ver que no es simétrica al notar que la influencia de un panel sobre otro, no es la misma que la que el último realiza sobre el primero, ya que pueden disponerse en una geometría no simétrica (posición, orientación y longitud).

El mal condicionamiento también es esperable, sobre todo con discretizaciones finas. Desde el punto de vista de la independencia de las filas de la matriz de coeficientes, cuando se refina la discretización, paneles contiguos son más similares entre sí en cuanto a la influencia que reciben de y la que producen en otros paneles, por lo que las ecuaciones de impenetrabilidad se correlacionan más y la matriz se asemeja más a una singular. La figura 6.2 muestra esta tendencia.

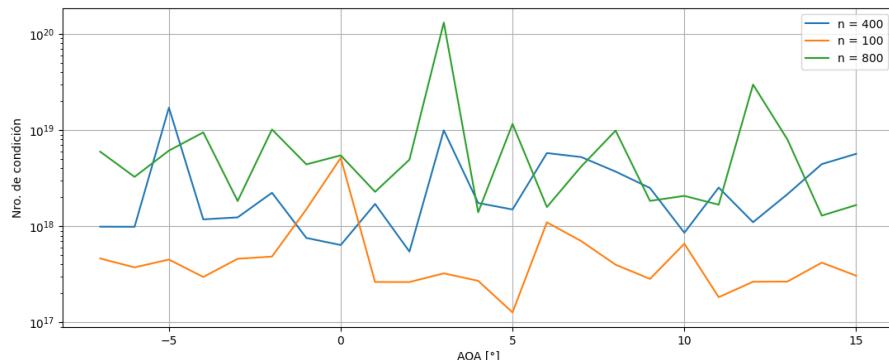


Figura 6.2: número de condición en dos panelados de diferente densidad, en un problema estacionario a diferentes ángulos de ataque.

Respecto a los métodos de resolución, se realizó un experimento numérico donde se repitieron 100 simulaciones como las que produjeron las polares, con cada método de resolución. Allí se encontró que la factorización LU brinda malos resultados o directamente falla, pues es particularmente susceptible a la condición de la matriz de coeficientes.

Entre QR y *SVD* no existen diferencias apreciables en la solución pero sí en tiempo de ejecución: QR resultó en un tiempo de simulación total de aproximadamente  $0,816s$  de media frente a  $0,958s$  de media de SVD(un 18% menos) sin sacrificar consistencia en el equipo utilizado, pues se calculó un desvío estándar muestral de  $0,0033s$  contra  $0,0051s$  respectivamente. Estos resultados pueden ser consultados y repetidos en otro sistema, ejecutando el notebook *Ejemplos/ejemploBase.ipynb*.

Este tiempo de ejecución es el total de la simulación, o sea incluyendo transformaciones de coordenadas, construcción del SEL en sí, etc. Entonces, la diferencia de rendimiento pura entre los métodos de resolución es en realidad mayor. Por este motivo, se decidió definir por defecto el uso de QR para resolver el SEL.

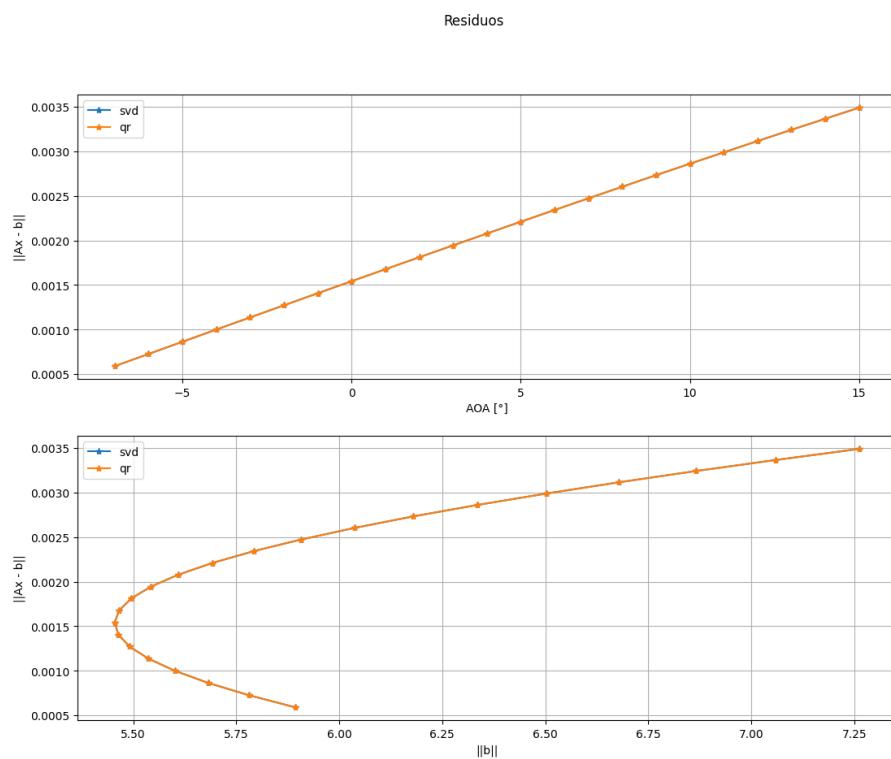


Figura 6.3: residuos de las soluciones del SEL, en un problema estacionario a diferentes ángulos de ataque.

Viendo la figura 6.3, también se puede notar una correlación entre los residuos y el ángulo de ataque. Esto fue detectado y se destaca, pero no se analizó con profundidad en esta ocasión. Puede ser trabajo futuro encontrar el origen de esta relación.

5. Con las intensidades resueltas y como se dijo antes, se calculan las componentes principales de las velocidades inducidas en los puntos de colocación. Por otro lado, se implementa 2.77 mediante diferencias finitas a partir de las intensidades calculadas. Se aplican diferencias finitas como  $\frac{\Delta\mu}{\Delta l}$ , centradas en los paneles intermedios y unilaterales en los adyacentes al borde de fuga.

Es importante reconocer que las diferencias finitas se aplican con pasos heterogéneos, pues la discretización no necesariamente tiene paneles de igual longitud y en la práctica

casi nunca es así. Para solventar esto se implementan algoritmos de diferencias finitas con paso heterogéneo y en particular se considera que los puntos de evaluación son los puntos de colocación.

Las intensidades pueden utilizarse directamente en las diferencias finitas, pero queda definir cómo concebir la discretización de  $l$ . Ya que se quiere aproximar  $\frac{\partial \mu}{\partial l}$ , resulta razonable definir cada  $\Delta l$  como la suma de las distancias de dos puntos de colocación contiguos al nodo intermedio. En contraposición, no se utiliza la distancia euclídea entre los puntos de colocación.

Para el tipo de singularidad escogida, no se puede mejorar esto mucho más. En 7 se verán las implicancias de la necesidad de aproximar  $\frac{\partial \mu}{\partial l}$  frente a una alternativa que utiliza una singularidad de orden mayor que resuelve esto de antemano.

Con esto, se pueden calcular las velocidades tangenciales totales en la superficie de los sólidos y, en el caso estacionario, calcular las diferencias de presiones con 2.15 y el resto de cálculos aerodinámicos.

En ambos casos, las velocidades totales calculadas se almacenan en las instancias de *ConjuntoSolidos2D* como se mencionó anteriormente.

En el caso no estacionario, para calcular la diferencia de presiones con 2.14 aún hace falta calcular  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Para esto se emplea 5.12 y 5.13 en métodos de la clase *MP2D*.

Estos cálculos dependen fuertemente del tipo de singularidad, pero como involucra a dos instantes diferentes, no se los implementó como métodos de la clase *Paneles2D*, que contiene información de un único instante, sino directamente como funciones en *MP2D.py*. En un futuro, si se agregan más tipos de singularidades puede revisarse esta decisión con criterios de funcionalidad o simplemente legibilidad.

Dicho esto, en este punto básicamente se requiere calcular los potenciales netos inducidos en cada punto de colocación en dos instantes contiguos utilizando las expresiones vistas, análogamente a lo realizado con las velocidades, salvo por un detalle no menor y que puede pasar desapercibido al principio.

Por ejemplo, considérse la contribución de un vórtice de arranque por simplicidad. Si se calcula primero el potencial en el instante  $T - 1$  con  $f = \frac{1}{2\pi}\theta$  (5.10), resulta  $\theta_{T-1} = 0,999\pi$  al calcularlo con *np.arctan2(...)* y luego se calcula el potencial en  $T$  con  $\theta_T = -0,999\pi$ , existirá una diferencia de ángulos de  $-1,998\pi$  cuando debería haber sido  $0,002$ . Esta discrepancia no tiene origen en la cinemática modelada, sino en el acotamiento del dominio de cualquier función que mapee direcciones a ángulos como *np.arctan2(...)*, cuya salida se restringe a  $(-\pi, \pi]$ . Esto no se justifica por el modelo físico-matemático y se trasladaría al potencial produciendo resultados incorrectos.

Por eso, al final el cálculo de los potenciales resulta un poco más complejo de lo que se podría esperar y para hacerle frente a esto se propuso la siguiente rutina para calcular la diferencia de potenciales en el instante  $T$ :

- Calcular los ángulos en el instante  $T - 1$  necesarios para el cálculo del potencial en ese instante con *np.arctan2(...)*, guardarlos y calcular el potencial.
- Calcular los ángulos en el instante  $T$  necesarios para el cálculo del potencial en ese instante. En base a los ángulos en el paso  $T - 1$ , “desenvolver” los nuevos para que no existan saltos por el *wrapping* producido por *np.arctan2(...)*. Con los ángulos “desenvueltos”, calcular el potencial en  $T$ .
- Sumar en cada instante las contribuciones sobre los mismos paneles y luego realizar las diferencias.

Con esto, ya se pueden calcular las diferencias de presiones, fuerzas, momentos y coeficientes aerodinámicos. Se almacenan y se procede a resolver otro instante o finaliza la simulación.

Esto sería el núcleo del programa que completa una estructura de datos que, gracias a la formulación del método de los paneles, permite obtener más información del campo fluidodinámico más allá de la superficie de los sólidos.

### 6.6.10. MP2D, más métodos

En primer lugar, se ve inmediatamente que con programación adicional ya se pueden graficar curvas de coeficientes aerodinámicos en función del tiempo (u otra variable en el caso estacionario, como el ángulo de ataque), distribuciones de  $C_p$  escalares o vectoriales y velocidades en las superficies. Justamente, en la clase *MP2D* se proporcionan métodos para hacer esto.

Luego, al conocerse ya la aproximación de la distribución de singularidades, en realidad ya quedó definido el campo fluidodinámico en su totalidad, pues las influencias con las intensidades ya conocidas se pueden calcular sobre cualquier punto del exterior, ya sean velocidades o potenciales. De esta forma y análogamente a lo realizado sobre la superficie, se implementan en *MP2D* métodos para calcular y graficar campos de velocidades y  $C_p$  en la región exterior a los sólidos.

También se implementaron métodos para guardar simulaciones o resultados (en formato *.npz* compatible con *Python* o en *.mat* amigable con *Matlab*), y cargarlos.

Hasta aquí se extiende esta conexión conceptual entre la formulación del método y la implementación. Todos estos métodos adicionales, así como aquellos para generar cinemáticas y la forma de diseñar e implementar simulaciones se encuentran ejemplificados en detalle en la carpeta *Ejemplos/*. Junto con la documentación de los códigos desarrollada, estas son las vías más claras para la comprensión del uso del simulador.

Varios de estos ejemplos, además, representan la memoria de cálculo de las validaciones realizadas y que se presentarán en el siguiente capítulo.

# Capítulo 7

## Validación

Pudiendo consultar de forma clara los *notebooks* que implementan las simulaciones utilizadas para la validación, en este capítulo solo se definirán las validaciones realizadas, los aspectos evaluados, se mostrarán los resultados obtenidos y se harán conclusiones.

### 7.1. Primera validación: problema estacionario mono-elemento

Como primera validación se propuso contrastar resultados con otros obtenidos mediante el programa *Xfoil*, para un perfil NACA 23012 animado de un movimiento rectilíneo uniforme con ángulos de ataque entre  $-7^\circ$  y  $16^\circ$ , con paso de  $1^\circ$ . Ya que *Xfoil* lo permite, también se muestran resultados contemplando efectos viscosos, considerando  $Re = 3 \cdot 10^6$  para garantizar convergencia.

En primer lugar, en la figura 7.1 se muestra el panelado utilizado en el simulador desarrollado, el cual cuenta con 400 paneles y que particularmente se trata del caso en el que el ángulo de ataque es de  $-7^\circ$ . También, se muestra el punto de toma de momentos, que se encuentra a un cuarto de cuerda del borde de ataque, sobre la cuerda media. En esta figura también se muestran las velocidades relativas calculadas sobre la superficie, que se aprecian tangentes a ésta, respetando la condición de impenetrabilidad.

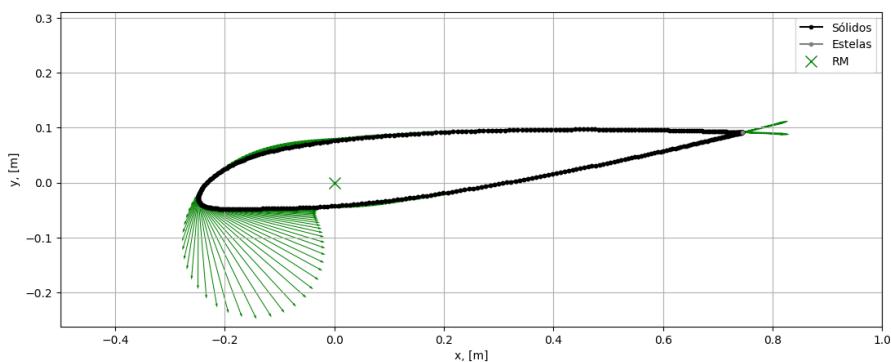


Figura 7.1: panelado considerado (400 paneles), punto de toma de momentos utilizado y velocidades calculadas en los puntos de colocación, en el experimento simulado del NACA 23012 en flujo estacionario a  $-7^\circ$  de ángulo de ataque.

Como en este caso la velocidad relativa al fluido en reposo tiene dirección  $x^+$ , el coeficiente  $C_x$  se corresponde con el  $C_d$  y el  $C_y$  con el  $C_l$ . Las polares obtenidas se muestran en la figura 7.2.

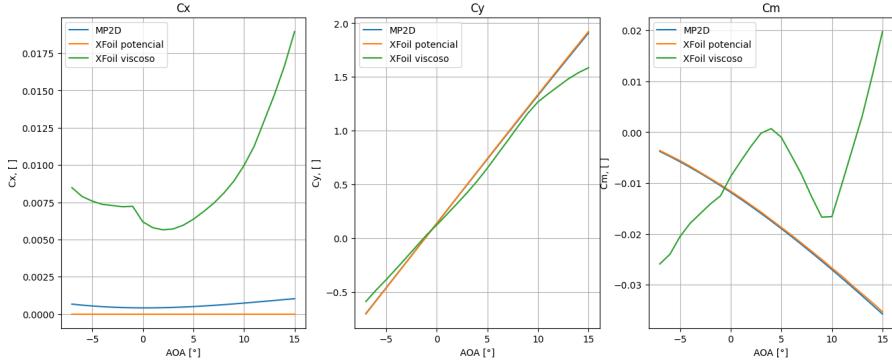


Figura 7.2: polares obtenidas mediante el simulador desarrollado y Xfoil (potencial y viscoso) para un NACA 23012 con 400 paneles en todos los casos y ángulos de ataque entre  $-7^\circ$  y  $16^\circ$  equiespaciados con pasos de  $1^\circ$ .

En los gráficos precedentes se muestran los resultados del presente simulador junto con los obtenidos con Xfoil, tanto en su modo no viscoso como viscoso.

Se puede observar que:

- Las diferencias entre los  $C_l$  y  $C_m$  de los métodos potenciales son casi imperceptibles.
- Los coeficientes aerodinámicos en el problema viscoso difieren sustancialmente de aquellos obtenidos en el potencial. Esto es esperable y el grado de discrepancia depende fuertemente del perfil y las condiciones del experimento.
- El  $C_d$  predicho por el simulador es mucho menor que el de resistencia parásita mostrado. Sin embargo, el  $C_d$  en flujo potencial es nulo en flujo estacionario, pero la curva *MP2D* no muestra esto.

Esto se atribuye a la discretización del perfil y la utilización de dobletes constantes como singularidades, que dificulta la representación de la continuidad de la distribución de singularidades, sobre todo hacia el borde de fuga como se muestra más adelante.

Cambiando la densidad del panelado, se puede notar cómo cambian la magnitudes de las curvas de  $C_d$  obtenidas. Esta falta de consistencia entre discretizaciones apoya la idea de que la presencia de un  $C_d$  no nulo es artefacto numérico del método.

Para ver esto, en la figura 7.3 se vuelven a mostrar las polares, pero ahora con el doble de paneles. Los valores de  $C_d$  disminuyen respecto a los mostrados en la figura 7.2.

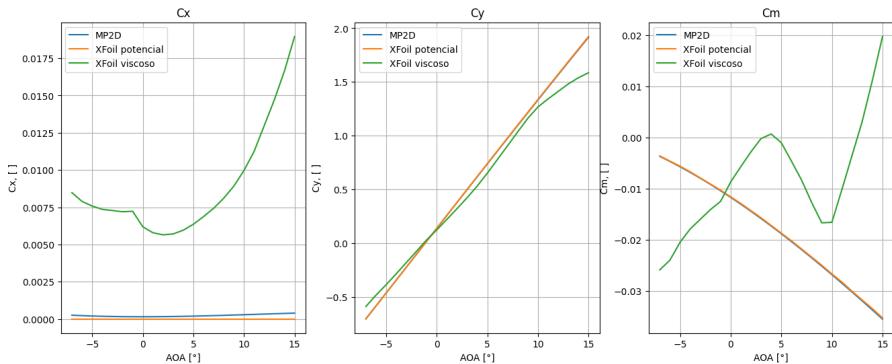
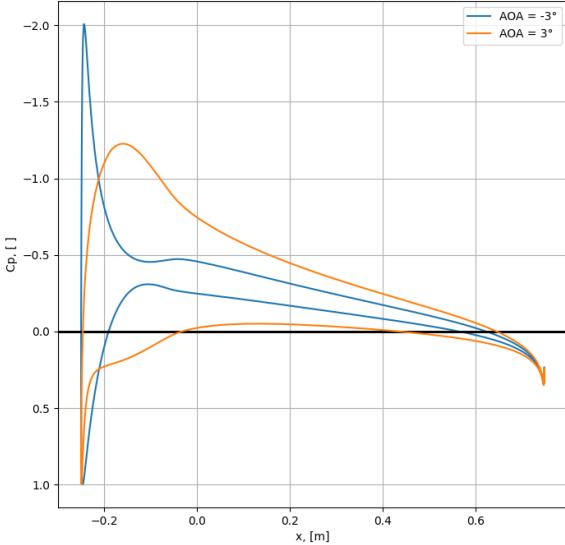
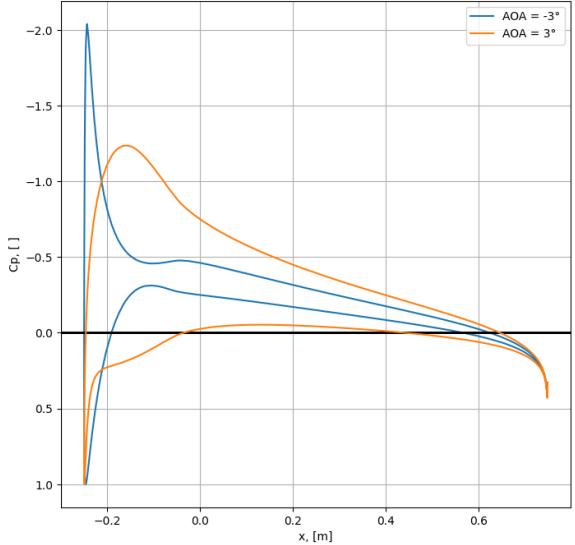


Figura 7.3: polares obtenidas mediante el simulador desarrollado y Xfoil (potencial y viscoso) para un NACA 23012 con 800 paneles en todos los casos y ángulos de ataque entre  $-7^\circ$  y  $16^\circ$  equiespaciados con pasos de  $1^\circ$ .

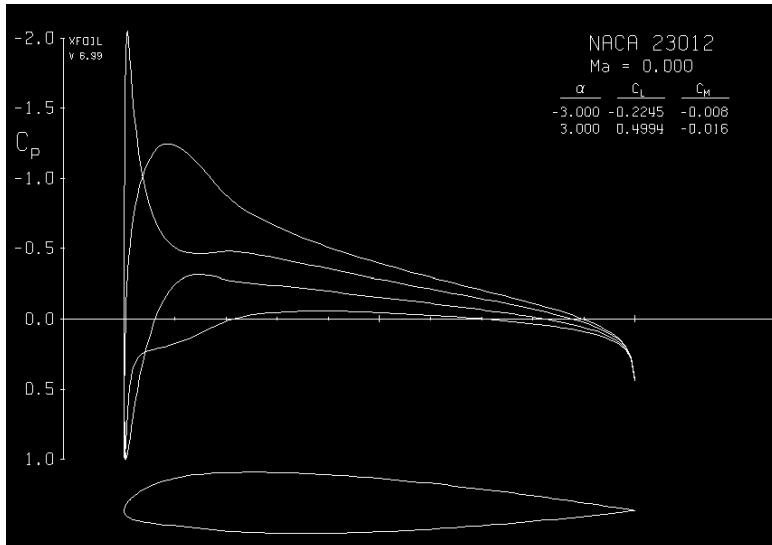
Avanzando, en la figura 7.4 se presentan las distribuciones del  $C_p$  para los ángulos  $-3^\circ$  y  $3^\circ$ , obtenidas con *Xfoil* y el simulador desarrollado.



(a) 400 paneles.



(b) 800 paneles.



(c) 160 paneles.

Figura 7.4: distribuciones de  $C_p$  obtenidas con el simulador desarrollado (7.4a y 7.4b) y *Xfoil* potencial (7.4c)

A menor número de paneles, se puede ver en 7.4a que se acrecienta el defecto en el borde de fuga de la distribución obtenida, respecto al exhibido con la mayor discretización en 7.4b.

Esto se debe al tipo de singularidad utilizada, que al considerar distribuciones de dobletes constantes en cada panel no queda bien representada la continuidad de la distribución real.

*Xfoil* capta mejor el  $C_p$  en el borde de fuga porque utiliza como singularidad distribuciones de vorticidad lineales, frente a dobletes constantes equivalentes a vórtices puntuales que en este trabajo se utilizan. Esto sí permite captar la continuidad, evaluar la velocidad inducida sobre cualquier punto de la superficie, pues ya no hay vórtices puntuales que dejan indeterminada la velocidad hacia los nodos y, además, deja definida la discontinuidad del salto de velocidad tangencial en los paneles sin necesidad de realizar diferencias finitas, por 2.81.

Siguiendo, durante la realización de esta comparativa se detectó que partir de una mejor

lista de coordenadas de los perfiles es menester para obtener resultados satisfactorios.

Por lo anterior, está claro que discretizaciones más densas producen mejores resultados. Sin embargo, si se cuenta con pocas coordenadas del perfil, refinar excesivamente el panelado no produce el efecto deseado, ya que los paneles comienzan a tener que segmentarse sin introducir más curvatura, lo que fuerza al fluido a seguir trayectorias menos suaves e introduce defectos como curvas de  $C_p$  con dientes de sierra y polares degeneradas.

Entonces, para poder mejorar los resultados, debe refinarse el panelado y para esto debe contarse con suficientes coordenadas de los perfiles bajo estudio.

Con esto, se considera que la implementación desarrollada brinda resultados a problemas estacionarios monoelemento, semejantes a los proporcionados por el programa *Xfoil* en modo potencial, con las particularidades indicadas en cuanto al panelado.

Finalmente, se muestran en las figuras 7.5a y 7.5b otros gráficos que es posible generar con el simulador desarrollado para esta misma simulación de validación.

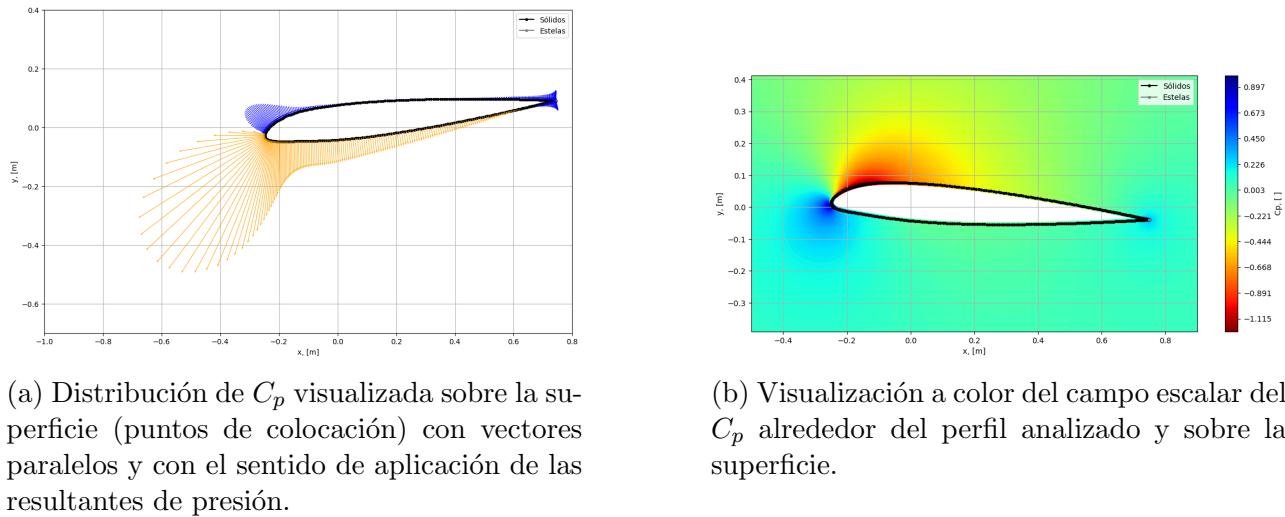


Figura 7.5: visualizaciones adicionales que son posibles de generar con el programa desarrollado.

El campo de  $C_p$  utilizado para confeccionar la figura 7.5b se calcula de forma semejante a lo descrito para los cálculos en la superficie, pero sobre una grilla de puntos exteriores al perfil, tanto en modo estacionario como no estacionario. En la siguiente sección se añadirán algunos comentarios respecto a este tipo de visualizaciones.

## 7.2. Segunda validación: problema estacionario bielemento

Nuevamente se considera un problema estacionario, por lo que el movimiento es un MRU, pero en este caso involucrando a dos elementos en configuración ala-*flap*, con discretizaciones de 400 y 200 paneles, respectivamente.

Se contrastarán los resultados del simulador con los experimentales documentados en el *NACA Report No. 614* [9]. En la figura 7.6 se muestra la configuración ala-*flap* utilizada.

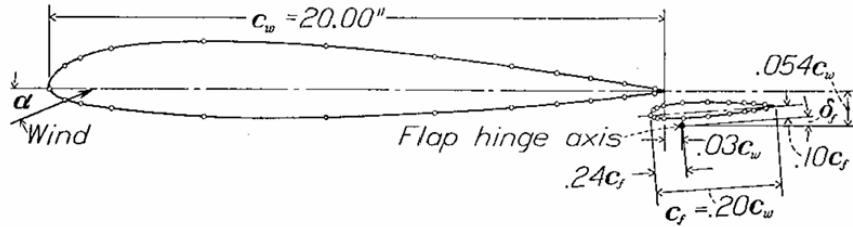


FIGURE 1.—Cross section of model showing orifice locations used in pressure-distribution tests. N. A. C. A. 23012 airfoil with  $0.20c_w$  23012 external-airfoil flap.

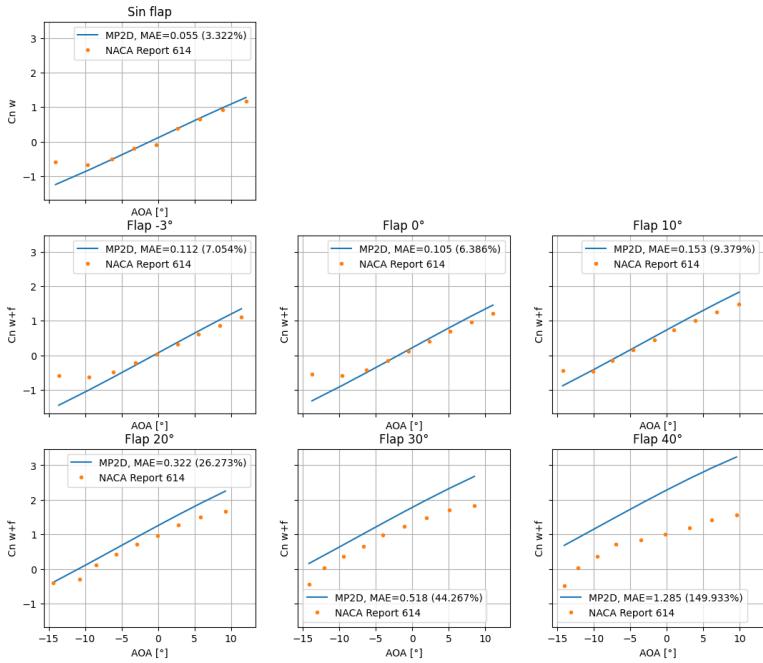
Figura 7.6: configuración ala-flap utilizada en las experiencias de [9].

A continuación se presentan las relaciones adimensionales calculadas para este experimento puntual, en la tabla 7.1. En problemas de cuerpos aerodinámicos embestidos por una corriente uniforme de aire, suele pretenderse que  $Re \geq 10^6$  y  $Ma < 0,3$  para que las hipótesis de flujo no viscoco e incompresible puedan considerarse válidas. Sin embargo, estos límites no son precisos ni garantizan validez o no de las hipótesis, sino que sirven de referencia. En este caso, el flujo queda en el límite superior de aerodinámica de perfiles de bajos Reynolds, mientras que en cuanto a la incompresibilidad existe un margen considerable.

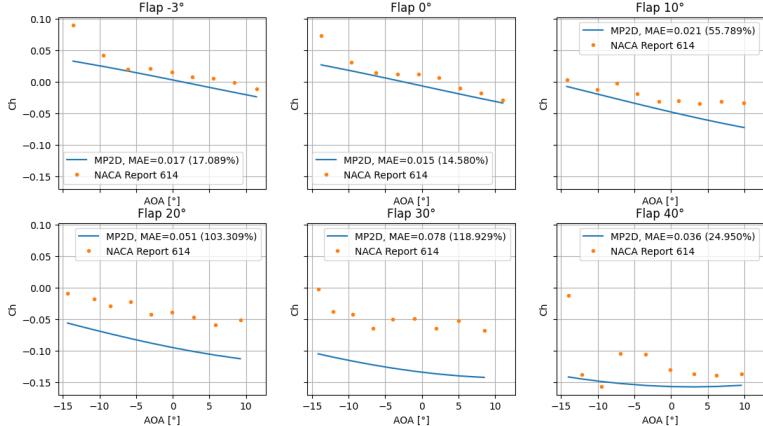
Cuadro 7.1: relaciones adimensionales, segunda validación.

Magnitud	Valor
$Re$	$9,08 \times 10^5$
$Ma$	0,131
$Fr$	25,853
$1/Re$	$1,10 \times 10^{-6}$
$1/Fr^2$	$1,50 \times 10^{-3}$
$Ma^2$	$1,73 \times 10^{-2}$
$Ma^2/Re$	$1,90 \times 10^{-8}$
$Ma^2/Fr^2$	$2,58 \times 10^{-5}$

Se simularon todos los ángulos de ataque y deflexiones evaluadas en las experiencias de [9], obteniéndose la comparación de las polares mostradas en la figura 7.7.



(a) Polares del coeficiente de sustentación.



(b) Polares del coeficiente del momento de charnela del *flap*.

Figura 7.7: comparación de las polares simuladas con el simulador desarrollado y las experimentales de [9]. La métrica mostrada corresponde al error medio absoluto (MAE), mientras que el valor porcentual indica la relación entre dicho error y el rango de los datos para cada deflexión del *flap*.

Allí se observa:

1.  $C_n$  vs.  $\alpha$  (o  $C_{n,w+f}$  vs.  $\alpha$ )

Entre los resultados de la simulación y los experimentos en túnel de viento existe una gran correspondencia en la parte lineal de las polares sin *flap* y con *flap* deflectado  $-3^\circ$ ,  $0^\circ$  y  $10^\circ$ .

Para ángulos de ataque fuera de la región lineal y mayores deflexiones, las discrepancias aumentan. Esto tiene sentido, pues la simulación resuelve un flujo potencial, por lo que predice picos de succión mayores —y mayores gradientes adversos de presiones posteriores— y no capta, por ejemplo, la interacción de las capas límites de los perfiles en la ranura, que tiende a decelerar el flujo allí.

2.  $C_h$  vs.  $\alpha$

Esta comparación sigue la tendencia, aunque en los casos donde el flujo potencial es más aplicable (ángulos de ataque en la región lineal y menores deflexiones del *flap*) hay discrepancias mayores respecto a los resultados a los obtenidos para el  $C_n$ .

Las principales contribuciones a estas diferencias, además del modelo potencial, son:

- El método de los paneles con dobletes constantes discretiza la distribución de presiones de forma constante en cada panel, modificando tanto el módulo de la resultante aerodinámica en cada panel, como su recta de acción.
- El método utilizado para relevar los valores del coeficiente de charnela disponibles en [9]: a diferencia de los otros datos, en este caso se recurrió a la extracción de los valores a partir de la digitalización de las curvas.
- El método de cálculo utilizado en [9]: se utilizó integración mecánica a partir de la geometría del perfil, las presiones medidas en orificios presentes en los perfiles durante los experimentos e interpoladas con criterios adicionales.

Por otro lado, en la figura 7.8 se grafica  $C_x$  vs.  $\alpha$  donde, en este caso, no se contrasta el coeficiente con datos experimentales.

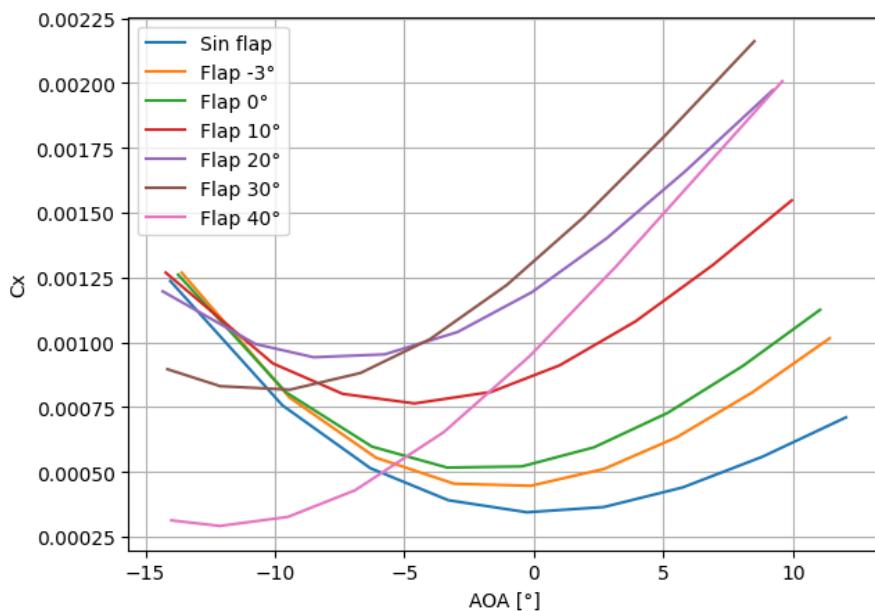


Figura 7.8: Polares del coeficiente de resistencia.

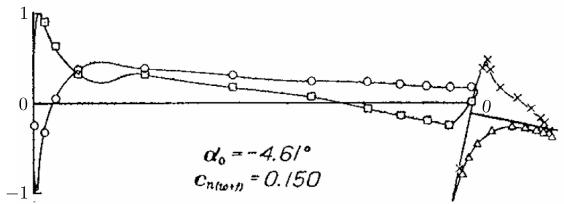
Como la velocidad relativa del perfil al fluido en reposo tiene dirección  $x$ , el coeficiente  $C_x$  se corresponde con el  $C_d$ .

El  $C_d$  en flujo potencial es nulo en flujo estacionario, pero el gráfico no muestra esto. Esto mismo sucedió en el primer caso de validación, en 7.1, y todo lo dicho respecto a esto aplica nuevamente aquí.

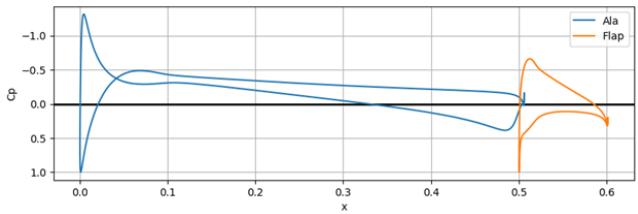
Habiendo obtenido resultados prometedores en cuanto a polares, ahora se compararán las distribuciones de  $C_p$  sobre los perfiles.

Comparando las distribuciones, se aprecia que el pico de succión estimado por el método es mayor a la curva experimental, así como también una mayor sobrepresión hacia el borde de fuga del perfil principal. Por el contrario, la simulación predice un menor pico de succión en el *flap*.

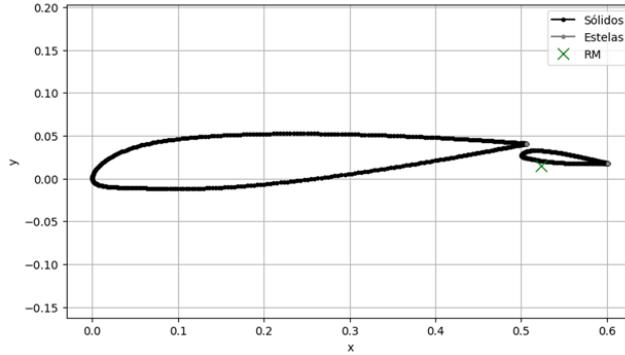
En ambos casos, las diferencias se aprecian en regiones donde no existen mediciones en los ensayos experimentales. Esto no atribuye las diferencias solamente a esto, sino que se añade a las limitaciones del flujo potencial esta fuente de discrepancias.



(a) Distribución de  $C_p$  experimental.



(b) Distribución de  $C_p$  simulada.



(c) Panelado y punto de toma de momentos (eje de rotación del *flap*).

Figura 7.9: Comparación entre resultados experimentales y simulados del caso de validación para un ángulo de ataque de  $-4,61^\circ$  y una deflexión del *flap* de  $10^\circ$ .

Fuera de esto, hay un aceptable grado de correspondencia entre ambas distribuciones.

Luego, se presentan en la figura 7.10 lo mismo para el mismo ángulo de deflexión del *flap*, pero otro ángulo de ataque del conjunto.

Nuevamente, se sobreestimó el pico de succión en el perfil principal, pero ahora no se subestimó tanto la sobrepresión en el borde de fuga y en el resto de la distribución se aprecia considerable semejanza.

En este caso, en el pico de succión sí se tienen más mediciones en la zona donde las distribuciones difieren, por lo que la interpolación ya no constituye una fuente de disimilitud.

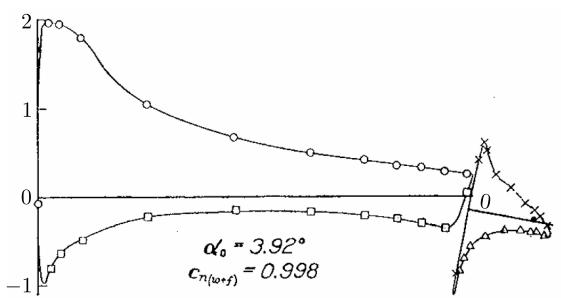
Las discrepancias en ambas configuraciones analizadas en cuanto a distribuciones de  $C_p$  se condicen con la sobreestimación de  $C_n$  en la figura 7.7a.

Por todo esto se puede concluir que el esquema estacionario de la implementación desarrollada alcanza una aceptable correlación con resultados experimentales en un problema multielemento, sobre todo en la sustentación. La estimación de la distribución del  $C_p$  también es adecuada, pero puede introducir discrepancias con la realidad antes que lo inferido sobre la sustentación. El momento de charnela presenta las mayores diferencias.

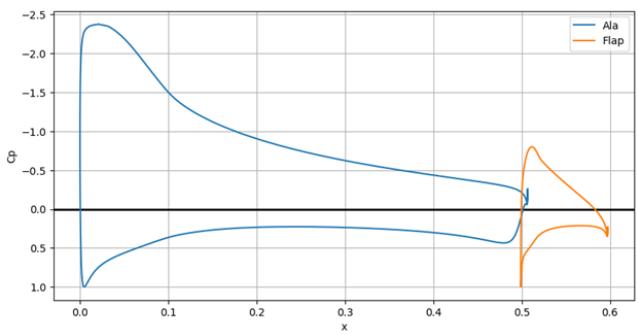
El método comienza a producir peores estimaciones a mayores deflexiones del *flap*, debido a los mayores efectos viscosos que ocurren tanto en la succión del perfil principal como en el canal entre el perfil principal y el *flap*.

En este caso no ocurrió, por la configuración utilizada en [9], pero en problemas donde la separación entre los perfiles es menor, el método potencial y por lo tanto el método de los paneles, predice grandes velocidades, lo cual en la realidad se ve atenuado por la interacción de las capas límites de ambos sólidos.

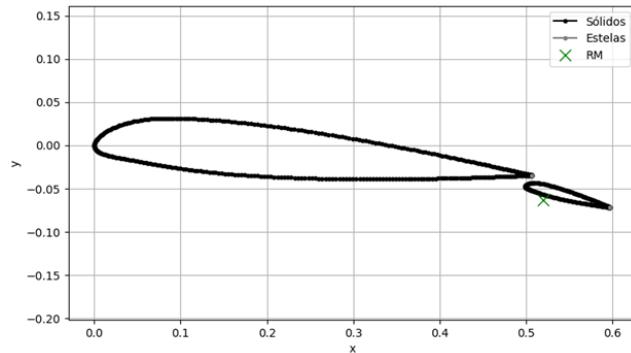
Por último, se incorporan algunas visualizaciones que ya utilizan el esquema no estacionario de la implementación. En estas, la cinemática es la misma y la no estacionariedad viene dada por la elección del marco de referencia, que ahora está fijo y tiene velocidad relativa a los sólidos no nula. La simulación se realizó con un ángulo de ataque de  $3,92^\circ$ , una deflexión de  $10^\circ$  y  $\Delta\tau = \frac{\Delta t U_\infty}{c_w} = 0,002$ , que es el paso de tiempo reducido utilizado.



(a) Distribución de  $C_p$  experimental.



(b)



(c)

Figura 7.10: Comparación entre resultados experimentales y simulados del caso de validación para un ángulo de ataque de  $3,92^\circ$  y una deflexión del flap de  $10^\circ$ .

Primero, en la figura 7.11 se muestran los coeficientes aerodinámicos  $C_x$  y  $C_y$  de cada sólido (que en este caso son iguales a  $C_l$  y  $C_d$ ).

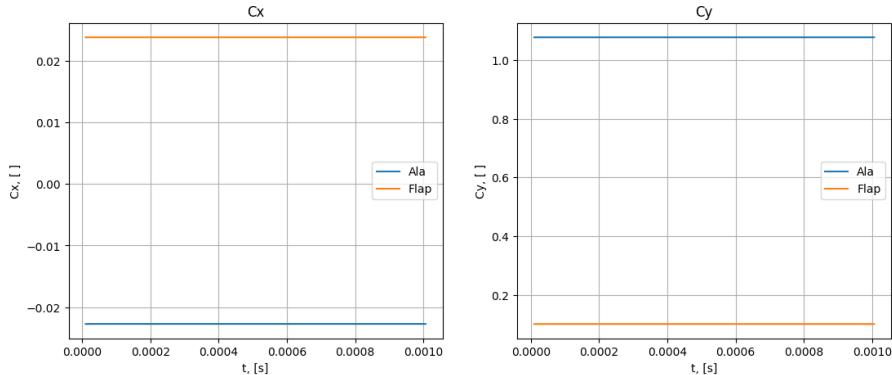


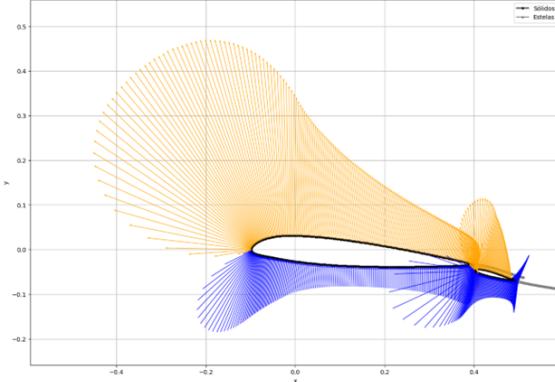
Figura 7.11: evolución temporal de los coeficientes aerodinámicos en la segunda simulación de validación con ángulo de ataque de  $3,92^\circ$ , una deflexión de  $10^\circ$  y  $\tau = \frac{\Delta t U_i \infty}{c_w} = 0,002$ .

Aquí se pueden observar dos cosas:

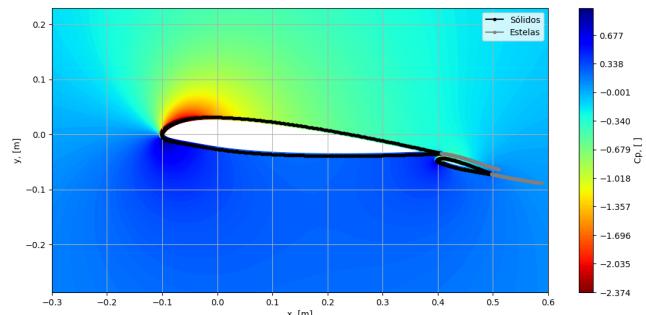
- La simulación produce coeficientes aerodinámicos constantes por más de que se utilice un esquema de resolución no estacionario. Esto es congruente con el hecho de que el experimento en otro marco de referencia sea estacionario. Esto valida hasta cierto punto el modo no estacionario, pues para producir estos resultados, el término  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  está contribuyendo a las diferencias de presiones.
- Los coeficientes  $C_d$  de cada sólido no son nulos. Esto no constituye una contradicción, ya que la paradoja de d'Alembert sugiere que en flujo potencial, la resistencia neta de

todo el conjunto de cuerpos es nula, aunque la individual de cada uno puede ser distinta de cero. Este resultado se obtiene en la sección I.92 de [10], considerando un conjunto de sólidos en lugar de un único sólido A, durante el análisis de conservación de cantidad de movimiento en un volumen de control cilíndrico que contenga al conjunto y que posea una frontera suficientemente alejada del mismo.

Segundo, en la figura 7.12 se repiten las visualizaciones alternativas del  $C_p$  para el caso multielemento y no estacionario.



(a) Visualización vectorial del  $C_p$  sobre las superficies de los sólidos.



(b) Visualización del campo de  $C_p$  en la región exterior a los perfiles y en las superficies.

Figura 7.12: visualizaciones del  $C_p$  en la segunda simulación de validación con ángulo de ataque de  $3,92^\circ$ , una deflexión de  $10^\circ$  y  $\Delta\tau = \frac{\Delta t U_i \infty}{c_w} = 0,002$ .

En la figura 7.13 se muestra un detalle del campo mostrado en la figura 7.12b en la región posterior.

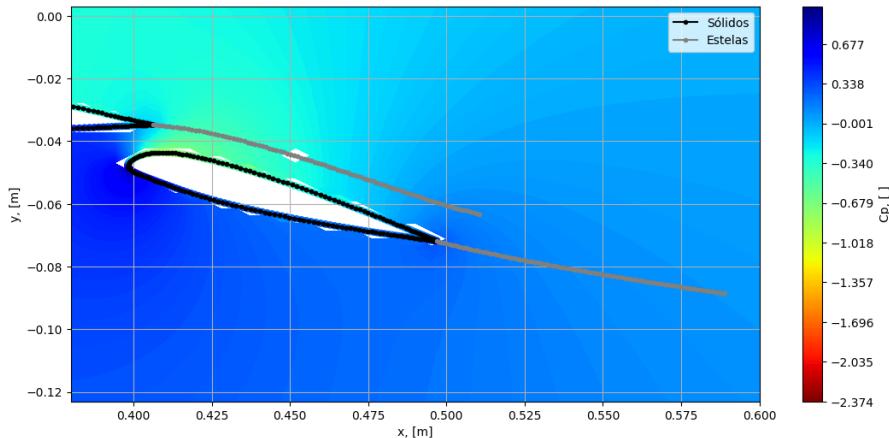


Figura 7.13: detalle del campo de  $C_p$  con  $\tau = \frac{\Delta t U_i \infty}{c_w} = 0,002$ .

Allí, se puede notar cómo la estela convecta con el campo de velocidades. Sobre esto mismo, también se debe entender que la forma en que lo hace depende de la discretización del tiempo utilizada, empeorando la fidelidad de la simulación cuanto más gruesa sea esta, incluso poniendo en riesgo la impenetrabilidad de los sólidos.

Luego, puede advertirse que sobre el propio sólido se dibujaron círculos con el mismo mapa de color, indicando el  $C_p$  en los puntos de colocación. Además, se puede apreciar que este coincide, dentro de lo posible, con el del campo exterior.

Lo anterior, también trae a colación que a veces existe una discrepancia en los colores observados en el flujo exterior y el tangente al sólido. Esto se debe a la discretización con

dobletes constantes, que implican vórtices puntuales en los puntos de colocación. Si un punto de evaluación en el campo exterior de la grilla con la que se construyen los mapas de color, se acerca a estos vórtices, la velocidad allí se encuentra en un entorno singular y produce un  $C_p$  defectuoso.

A raíz de esto último, el método de visualización filtra valores de  $C_p$  que exceden los valores máximo y mínimo en las superficies de los sólidos, pues las mayores perturbaciones se encuentran sobre sus superficies y en el resto del flujo los valores tienden a 0. A esto se deben los agujeros blancos en las estelas: algunos puntos de evaluación quedaron próximos a algunos nodos de las estelas, produjeron  $C_p$  anormales y se filtraron. En otros casos, los valores excesivos de  $C_p$ , producto de la proximidad a los nodos, no son lo suficiente grandes como para ser filtrados y quedan como defectos de la visualización.

Todo esto se puede observar en el mismo detalle, pero generado a partir de una simulación donde se utilizó  $\tau = \frac{\Delta t U_i \infty}{c_w} = 0,02$  (figura 7.14); es decir, la discretización del tiempo fue 10 veces más gruesa.

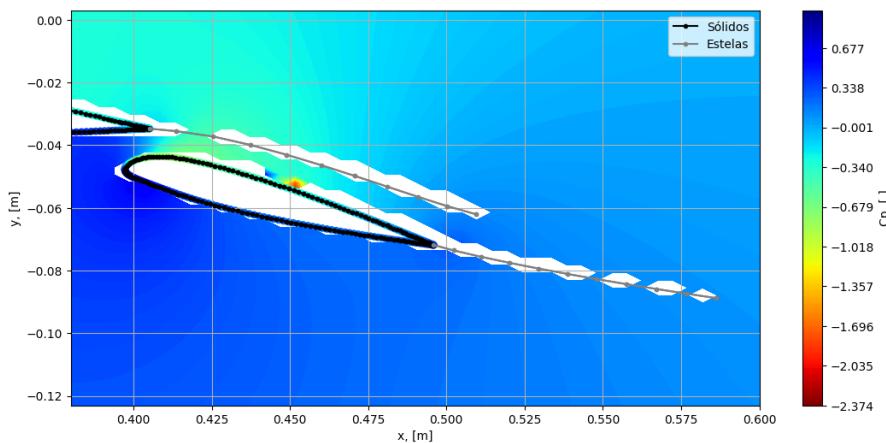


Figura 7.14: detalle del campo de  $C_p$  con  $\tau = \frac{\Delta t U_i \infty}{c_w} = 0,02$ .

Que estos defectos sean más frecuentes con discretizaciones más gruesas, se explica por la menor continuidad de la distribución finita de vórtices, haciendo más fuerte la escala de la singularidad.

En un método de los paneles que utilice distribuciones de singularidad continuas, como XFOIL no presentaría estos defectos por lo que se mencionó en 7.1.

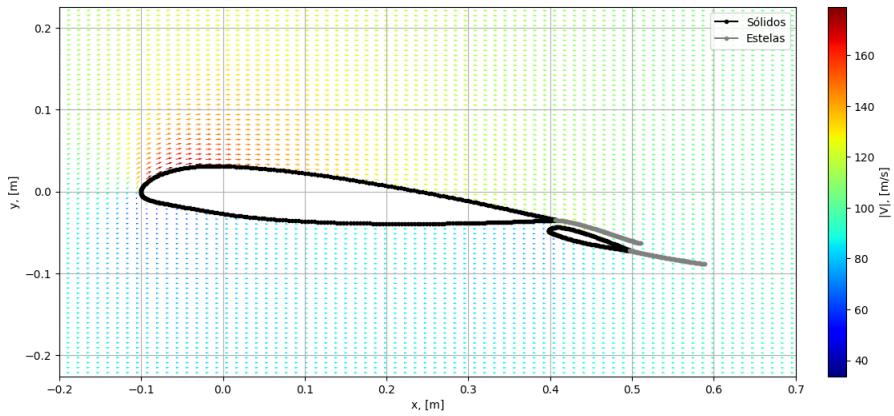
Finalmente, se visualiza el campo vectorial de velocidades y dos detalles del mismo en la figura 7.15.

El campo graficado es el de velocidades relativas y no el de absolutas, que son las que calcula el método de los paneles. En el caso no estacionario, esta visualización solo tiene sentido si solo se considera un sólido o si el conjunto de sólidos se mueve rígidamente entre sí. Lo que se graficaría es  $V_{relativa} = V - V_{cinemática}$ , donde  $V$  es la velocidad del fluido respecto al marco global y  $V_{cinemática}$  la velocidad de transporte de la terna solidaria al conjunto.

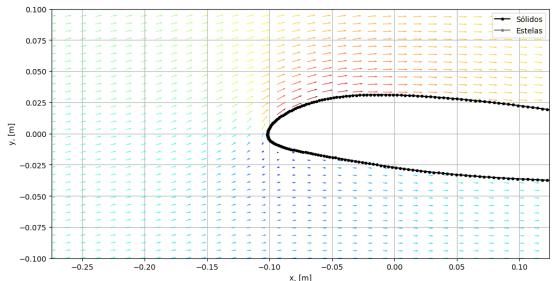
### 7.3. Tercera validación: problema no estacionario mono-elemento (respuesta indicial de Wagner)

Ahora se analizarán los resultados del simulador por método de los paneles en un experimento indiscutiblemente no estacionario.

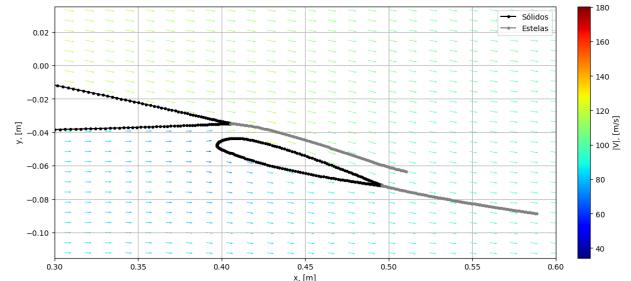
El experimento consiste en acelerar impulsivamente a un sólido desde el reposo hasta una velocidad  $U_\infty$  que mantiene instantes posteriores. Este problema fue desarrollado analítica-



(a)



(b) Primer detalle



(c) Segundo detalle

Figura 7.15: campo vectorial de velocidades relativas en el segundo experimento de validación con ángulo de ataque de  $3,92^\circ$ , una deflexión de  $10^\circ$  y  $\Delta\tau = \frac{\Delta t U_i \infty}{c_w} = 0,002$ .

mente para el caso de una placa plana y se conoce como respuesta indicial de Wagner. En la presente validación se compararán las respuestas de los coeficientes  $C_l$  y  $C_d$  teóricos con los obtenidos numéricamente. En ambos casos el ángulo de ataque siempre es de  $5^\circ$  y en el caso de la simulación se utilizó un perfil NACA 0012.

Para simular la aceleración impulsiva, en el primer instante de resolución se impuso velocidad nula y en el segundo ya se fijó la velocidad de traslación que se mantendrá en el resto de la simulación. Además, el desplazamiento que tiene lugar entre todos los instantes contiguos siempre es  $U_\infty \Delta t$ ; o sea, entre el primer instante y el segundo el desplazamiento implica que en este intervalo la velocidad de traslación ya es  $U_\infty$ .

Como se puede ver en la figura 7.16, las respuestas difieren pero comparten las características fundamentales del experimento:

- El  $C_d$  es infinito al comienzo debido a la componente de masa añadida (inercia del fluido) infinita por la aceleración impulsiva, que decae con el tiempo hasta 0
- El  $C_l$  también es infinito al inicio por el mismo motivo, cae hasta la mitad de  $C_{l,\infty}$  en  $0^+$  y luego crece tendiendo al valor estacionario por la componente circulatoria.

En la simulación también puede apreciarse el desarrollo del vórtice de arranque en la estela, mostrado en la figura 7.17.

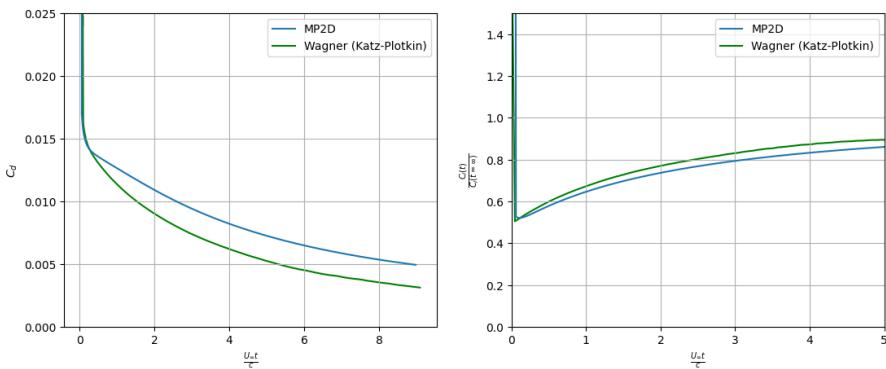


Figura 7.16: respuesta indicial de Wagner teórica (extraída de [7]) y simulada.  $\Delta\tau = \frac{U_\infty\Delta t}{c} = 0,02$ .

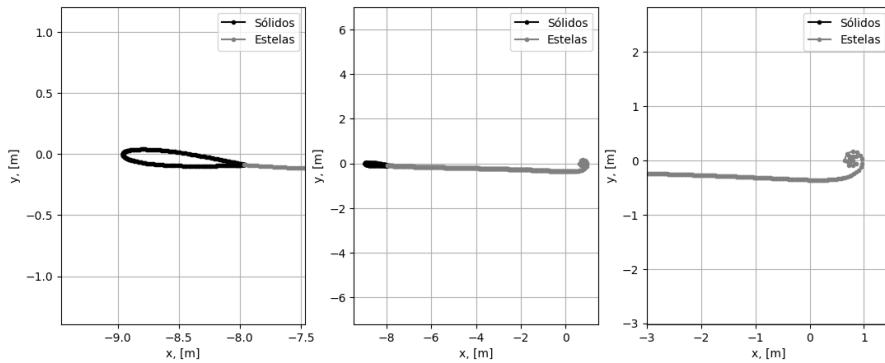


Figura 7.17: panelados en el último instante simulado del experimento de Wagner.

## 7.4. Cuarta validación: problema no estacionario mono-elemento (movimientos armónicos)

Esta última validación no estacionaria utiliza resultados del *NACA Technical Note no. 2465* [11]), en el cual se realizaron múltiples experiencias en túnel de viento de un perfil NACA 0012 animado con oscilaciones armónicas de rotación y traslación perpendicular al flujo no perturbado (*pitch* y *heave*, respectivamente).

En los experimentos se evalúan diferentes frecuencias reducidas  $k = \frac{\omega b}{V}$  (donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $b$  la semicuerda y  $V$  la velocidad de la corriente libre) y diferentes amplitudes.

Ya que se contrastarán los resultados con experiencias de túnel de viento, se exponen las relaciones adimensionales calculadas en la tabla 7.2, como en el caso de la validación 7.2. Nuevamente, se puede ver que en cuanto incompresibilidad y no viscosidad, las experiencias podrían ser comparables a resultados potenciales. Se reitera que estos valores son de referencia.

También, se define el paso angular en  $\Delta\theta = 0,1\text{rad}$  y ya no el temporal para mantener la escala angular de cada simulación particular. Por otro lado, la duración de las simulaciones se determinó en 30 períodos. Esta decisión se fundamenta en la figura 7.18a, donde se aprecia que, para la simulación de un experimento de rotación armónica con amplitud de  $6,74^\circ$  y frecuencia reducida de 0,5, luego de un transitorio inicial, las oscilaciones se estabilizan, lo cual también puede encontrarse en la figura 7.18b donde las variaciones relativas de los picos de cada periodo se encuentra por debajo de 1 %.

En rigor, mientras más periodos mejor, pero esto está limitado por la duración de las simulaciones. También, debería verificarse la estabilización para cada una de las simulaciones realizadas, pero dado que las variaciones relativas también presentan oscilaciones y deben verificarse picos positivos y negativos, se prosigue sin realizar estas verificaciones particulares

Cuadro 7.2: relaciones adimensionales, cuarta validación.

Magnitud	Valor
$Re$	$1,45 \times 10^6$
$Ma$	0,105
$Fr$	14,623
$1/Re$	$6,88 \times 10^{-7}$
$1/Fr^2$	$4,68 \times 10^{-3}$
$Ma^2$	$1,10 \times 10^{-2}$
$Ma^2/Re$	$7,60 \times 10^{-9}$
$Ma^2/Fr^2$	$5,16 \times 10^{-5}$

y con un número de periodos definido de forma razonable aunque sea para una condición.

Ahora, en la figura 7.20a también se puede ver que las respuestas establecidas del  $C_l$  y  $C_m$  son senoidales con media nula, mientras que el  $C_d$  se establece en una señal con el doble de la frecuencia que la entrada y media positiva. Esto coincide con los datos experimentales (que se presentan en la figura 7.19 y en los que además ocurren efectos viscosos) y la teoría potencial.

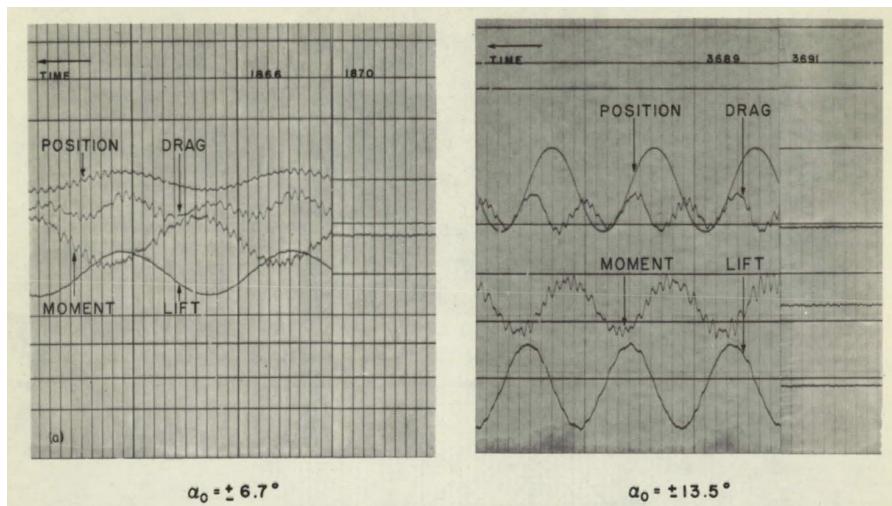
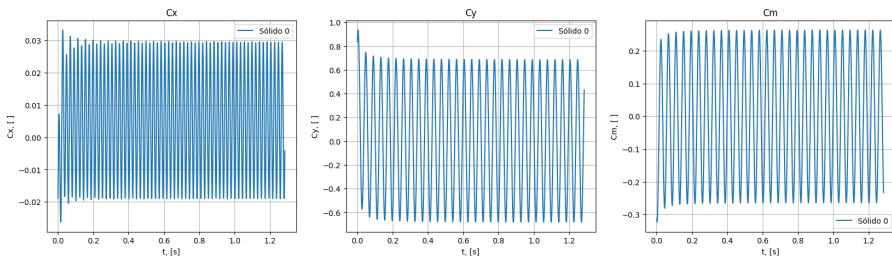


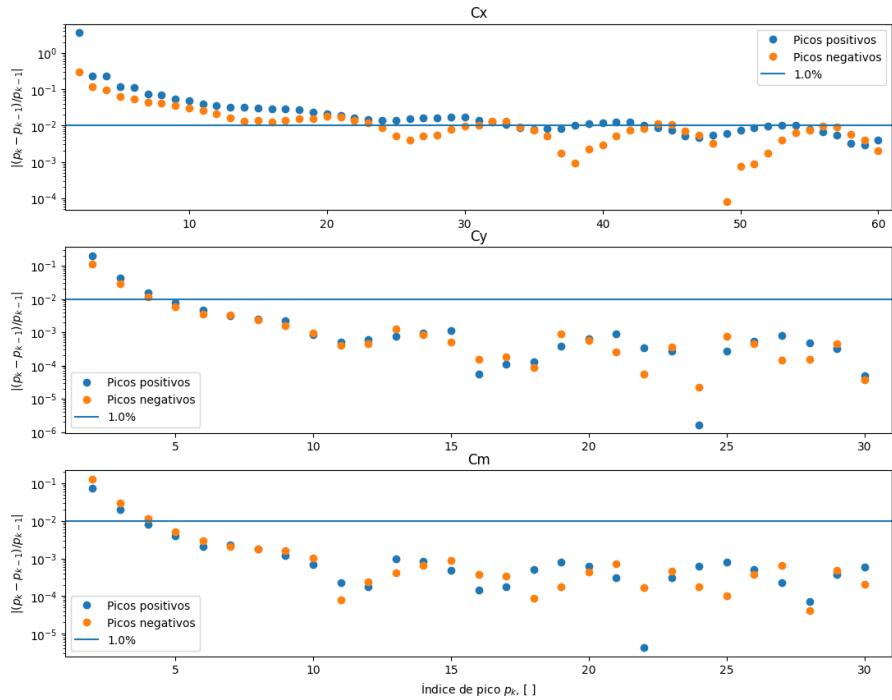
Figura 7.19: mediciones de fuerzas y momento aerodinámicos presentadas en [11].

En la figura 7.20b, se simula el mismo experimento que en la 7.20a, con la única diferencia de que la amplitud de la entrada es del doble.

Comparando las magnitudes de los picos, las amplitudes de  $C_l$  y  $C_m$  se redujeron a la mitad, mientras que  $C_d$  a un cuarto. La linealidad de los dos primeros coeficientes y la relación cuadrática del último también responden correctamente con la teoría potencial, [12].

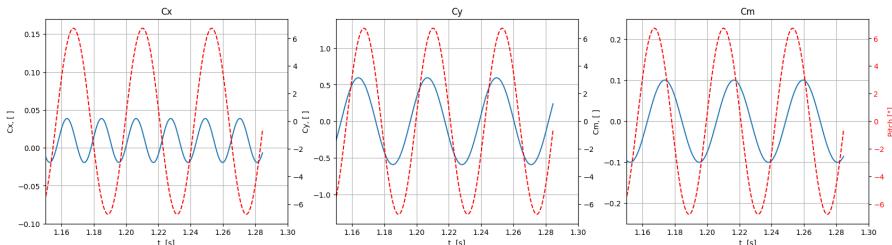


(a) Evolución temporal de los coeficientes aerodinámicos. El coeficiente de momento toma los momentos a sobre la cuerda media a  $0,37c$  del borde de ataque, como en las experiencias NACA.

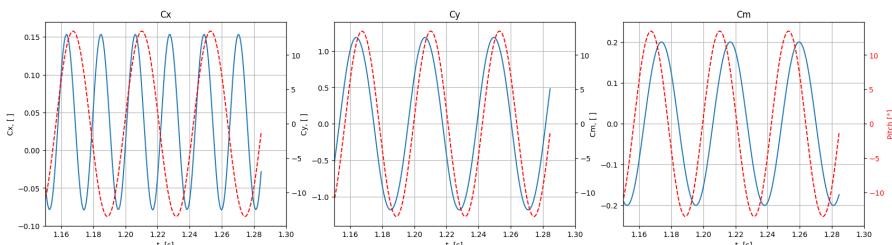


(b) Variaciones relativas de los picos de los coeficientes aerodinámicos.

Figura 7.18: respuestas simuladas en uno de los experimentos de rotación armónica de validación, con amplitud de  $6,74^\circ$  y frecuencia reducida de 0,5.



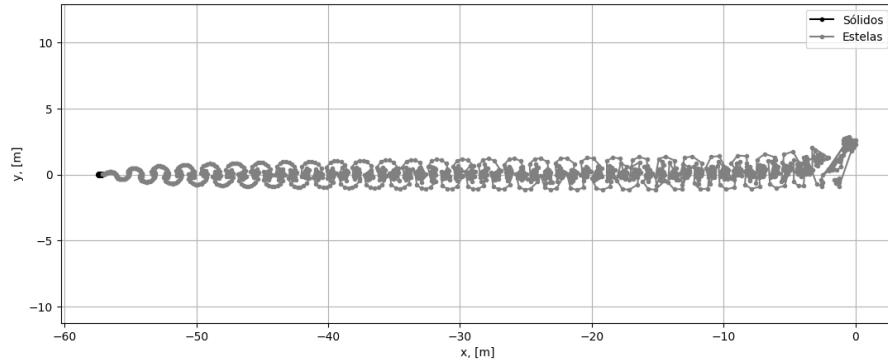
(a) Amplitud:  $6,74^\circ$ .



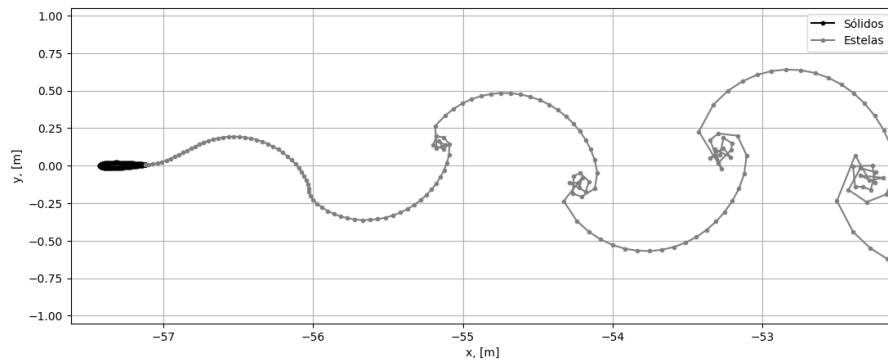
(b) Amplitud:  $13,48^\circ$ .

Figura 7.20: últimos períodos de la señal de entrada (ángulo de cabeceo) y de la salida simulada (coeficientes aerodinámicos) en dos experimentos de rotación armónica con frecuencia reducida de 0,5.

A continuación, se visualiza el sólido y su estela simuladas.



(a) Panelados en el último instante simulado.



(b) Detalle de los panelados en el último instante simulado.

Figura 7.21: simulación de experimento de rotación armónica con amplitud de  $13,48^\circ$  y frecuencia reducida de 0,5.

En las figuras 7.21 se puede ver cómo la oscilación del perfil produce cambios de circulación que originan el patrón típico de la estela en este tipo de experimentos, fenómeno que captura la simulación. Se utilizó la misma simulación que la empleado en la figura 7.20b.

También se puede ver que la discretización angular en este caso permite capturar estelas suaves en las regiones cercanas al perfil, lo cual es crucial para resultados satisfactorios. Sin embargo, a medida que la estela se aleja del perfil y en la zona de cambio de sentido de circulación, la convección de la estela se deteriora por inestabilidad numérica del método.

Se puede probar, variando la discretización temporal, que el submuestreo del tiempo afecta considerablemente los resultados, lo cual tiene sentido, pues las nuevas posiciones de las estelas se obtienen integrando las velocidades con Euler directo, lo que ocasiona que la estela convecte de forma más rígida”, alterando la respuesta en frecuencia.

El parámetro *MPConfig['rigidez']* del simulador surgió por esto mismo. En algunas implementaciones no estacionarias, en lugar de hallar la nueva posición del nodo de la estela que se encuentra en el borde de fuga de un sólido en un instante dado integrando la velocidad en el borde de fuga, directamente se ubica en un punto entre la vieja posición del borde de fuga y la nueva, normalmente más cerca del último. Esto se inspira en la idea de que la vorticidad se genera en el borde de fuga y que por lo tanto la estela se teje en la traza del borde de fuga.

En la realidad ni una cosa ni la otra es cierta, ya que lo que sucede depende de la capa límite viscosa y de la frecuencia reducida del movimiento: a bajas frecuencias reducidas la estela se teje de forma más suave mientras que a altas la condición de Kutta se vulnera.

Entonces, el parámetro *rigidez*, como se puede consultar en la documentación, busca hermanar ambos enfoques haciendo que las nuevas posiciones de los nodos en los bordes de fugas sean un promedio entre ambas propuestas.

En particular, en estas simulaciones, simplemente se integra la velocidad.

También, la inestabilidad numérica o la falta de robustez a la discretización temporal, podrían resolverse hasta cierto punto con un método de integración de orden mayor a la hora de enrollar la estela, por ejemplo Runge-Kutta como se mencionó anteriormente.

En el repositorio, en *Ejemplos/animación.mp4*, se pone a disposición una animación que busca ilustrar mejor que la figura 7.21, la evolución del experimento.

Ya que en el caso estacionario se analizó el número de condición de la matriz de coeficientes (figura 6.2), en este caso también. Por ejemplo, una incógnita que surge naturalmente es si podría evolucionar el número de condición con el número de iteración ya que cambia el número de paneles o por la formación de las estructuras de estela de forma periódica. Para esto se brindan gráficos en la figura 7.22

Viendo la figura 7.22 no se percibe ninguna evidente correlación entre el número de condición y el número de iteración o la frecuencia del movimiento armónico.

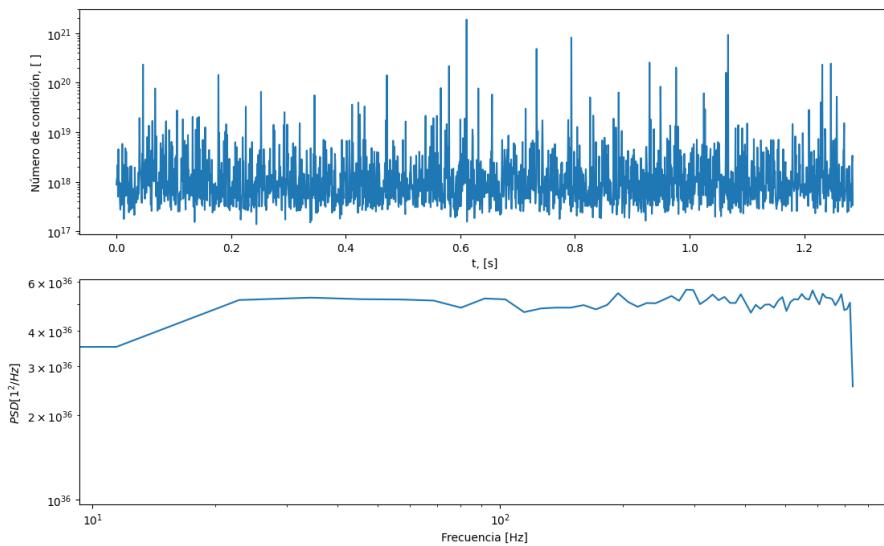


Figura 7.22

En esta simulación también se midieron los tiempos de resolución de cada instante y luego se calculó la tiempo de resolución acumulada desde el principio hasta cada paso. Se obtuvieron las curvas de la figura 7.23, donde se aprecia que inicialmente los tiempo son aproximadamente constante, pero a medida que progresó la simulación la evolución del tiempo por iteración tiende a  $O(i_t^2)$  y el acumulado a  $O(i_t^3)$ , como se anticipada en la sección 6.3.

Luego de estos análisis previos, se pasó a replicar las experiencias de [11], obteniéndose los resultados (amplitud y fase respecto al movimiento de entrada de la sustentación y el momento) expuestos en las figuras 7.24 y 7.25 para la rotación armónica; y las 7.26 y 7.27 para la traslación.

En el movimiento de rotación los resultados son heterogéneos, pero en general es satisfactoria la coincidencia. Las mayores diferencias se encuentran en las curvas de amplitud de la sustentación, para ambas amplitudes de la rotación.

En el método de los paneles las respuestas de la fuerza aerodinámica se encuentran por sobre la curva teórica. Esto no es alarmante, ya que la curva teórica está dada para una placa plana y el perfil simulado por *MP2D* tiene espesor. En flujo estacionario ( $k = 0$ ) la pendiente de la sustentación del perfil NACA0012 calculada por el método de los paneles (ya sea con *Xfoil* o *MP2D*) excede casi un 9%<sup>1</sup> a la predicha con  $2\pi\alpha$  por la teoría de paneles delgados. Entonces y al menos para bajas frecuencias, es esperable que la respuesta simulada exceda en

<sup>1</sup>Se puede comprobar en *testArmonico.ipynb*.

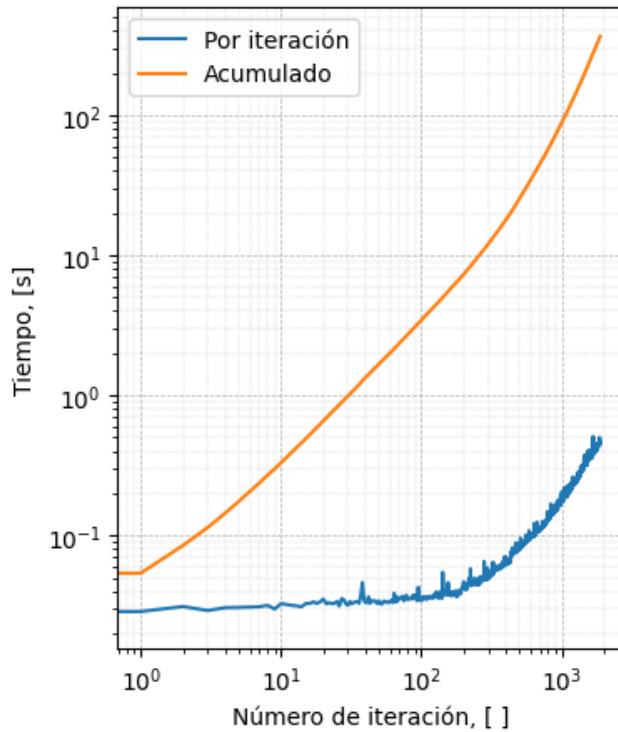


Figura 7.23

amplitud a la curva teórica.

Sin embargo, el método de los paneles no está exento de introducir errores, como los propios errores numéricos de las sucesivas transformaciones de coordenadas, resolución del sistema de ecuaciones lineales, la integración numérica de las velocidades o incluso el número de periodos tomados y la estimación de la amplitud y fase de las señales.

Por otro lado, los menores valores obtenidos en los ensayos experimentales se atribuyen en la bibliografía a las pérdidas viscosas, pérdidas por tridimensionalidad remanente, a vibraciones y efectos elásticos de la estructura y el montaje, así como los errores propios de los instrumentos de calibración.

Independientemente de si en estos experimentos en particular el método de los paneles no ofrecen una predicción especialmente cercana a la realidad, los resultados no fueron incongruentes ni con la teoría de placa plana ni con las experiencias de laboratorio.

En cuanto a la traslación, la semejanza con las curvas teóricas fueron mayores, así como con las experimentales.

Por todo esto, se considera que el método produce resultados razonables también en problemas no estacionarios con cinemáticas más complejas que la de la validación 7.3.

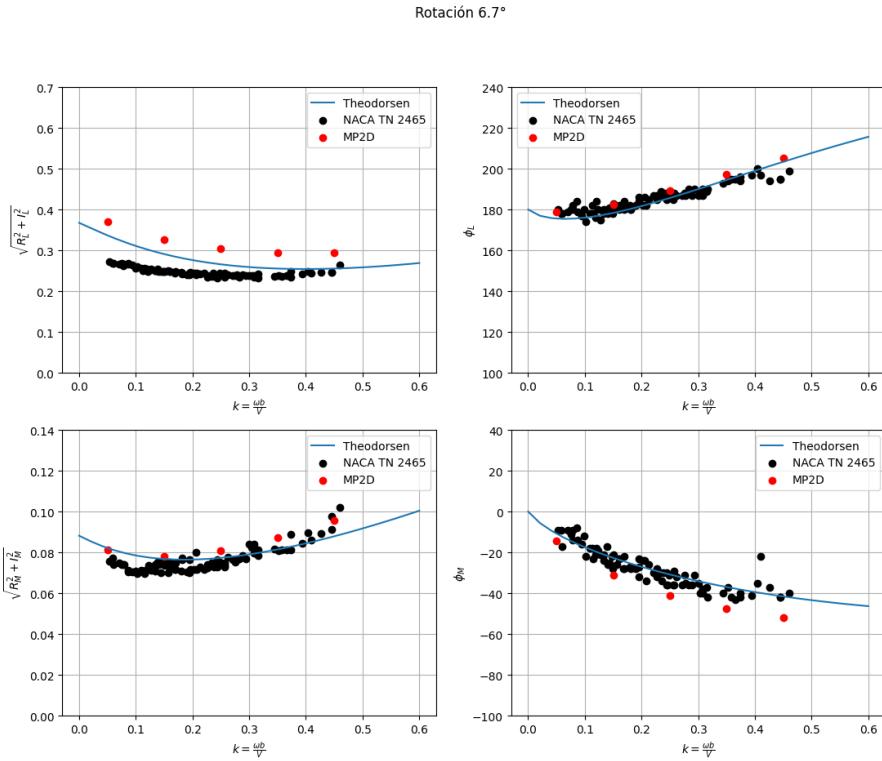


Figura 7.24: comparación de los resultados de la simulación de rotación armónica de amplitud 6,7° con los datos experimentales de [11] y la solución teórica de [12]. Se muestran las amplitudes y fases adimensionales de la sustentación y el momento aerodinámico en función de la velocidad reducida  $k = \omega b/V$ .

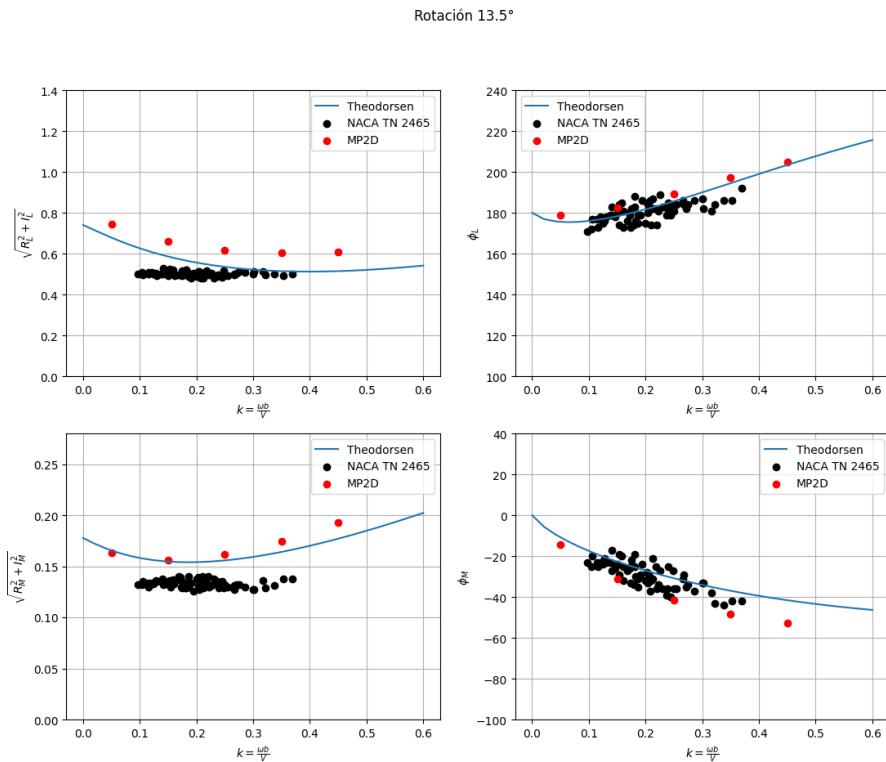


Figura 7.25: comparación de los resultados de la simulación de rotación armónica de amplitud 13,5° con los datos experimentales de [11] y la teoría de [12]. Las curvas corresponden a las amplitudes y fases relativas de la sustentación y el momento respecto al movimiento de entrada, en función de la velocidad reducida.

Traslación 0.0254m

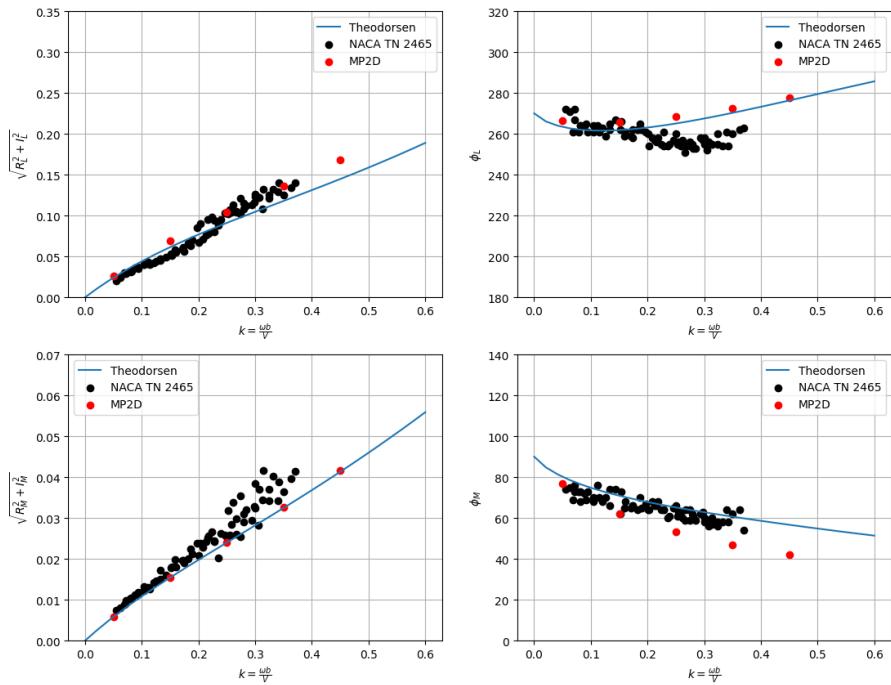


Figura 7.26: comparación de los resultados de la simulación de traslación armónica de amplitud 0,0254m con los datos experimentales de [11] y la solución teórica de [12]. Se observan las amplitudes y fases relativas de la sustentación y el momento adimensionalizados en función de la velocidad reducida  $k = \omega b/V$ .

Traslación 0.0508m

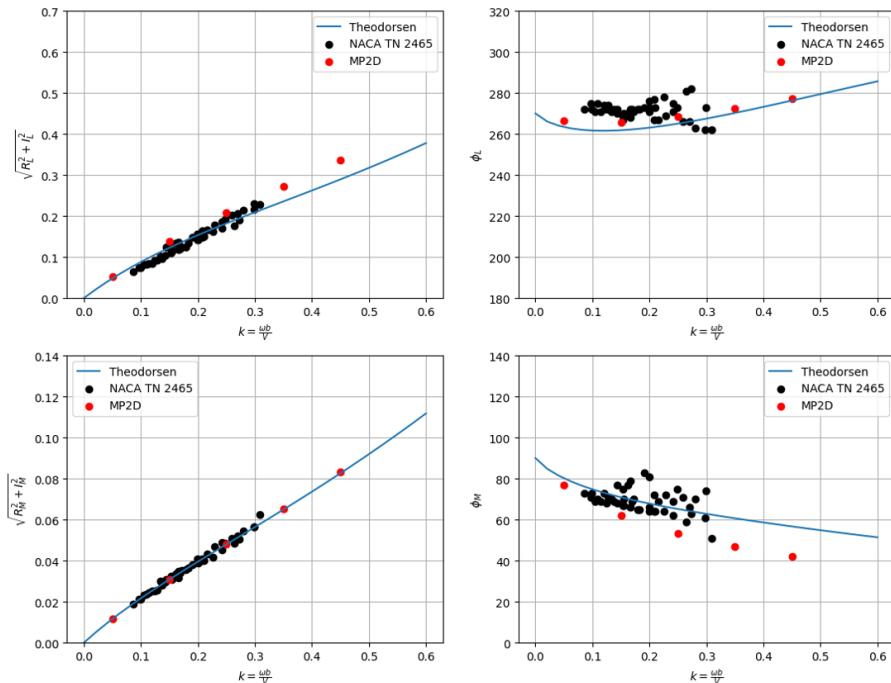


Figura 7.27: comparación de los resultados de la simulación de traslación armónica de amplitud 0,0508 m con los datos experimentales de [11] y la teoría de [12]. Se muestran las variaciones en amplitud y fase de los coeficientes aerodinámicos con la velocidad reducida.

# Conclusiones y líneas de trabajo futuro

## Conclusiones

Tras un camino de numerosas y aleccionadoras idas y vueltas entre la matemática, la física y la implementación, se logró el desarrollo de una *API* que permite el diseño flexible y la resolución de simulaciones de experimentos diversos, incluso no previstos originalmente. Aprovechando esta *API*, se desarrolló una *GUI* para mejorar la accesibilidad del simulador en detrimento de la generalidad, pero aún así con utilidades que pueden ser aprovechadas en aplicaciones prácticas o académicas como complemento para la dicción de cursos de fluidodinámica.

Sin embargo, la aplicabilidad de los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada en problemas bidimensionales, estacionarios o no estacionarios, está sujeta a las características particulares de los casos bajo estudio. Las hipótesis de compresibilidad y no viscosidad imponen límites a la validez de los resultados, a veces no muy claros y que para definirlos hacen falta análisis adicionales y/o la experiencia del usuario fluidodinamista en la aplicación particular.

Por otro lado, se plasmaron en esta memoria escrita y la documentación del repositorio, los fundamentos de y la conexión entre el método y la implementación, a partir de mi experiencia propia a la hora de realizar este trabajo y dejando constancia del camino recorrido, esperando que sirva como punto de partida de futuras investigaciones. Con esto, doy pie a lo siguiente.

## Líneas de trabajo futuro

A lo largo del trabajo se han comentado múltiples aspectos de la implementación actual que pueden dar lugar a estudios y desarrollos posteriores, como:

- consideración del potencial gravitatorio y el empuje resultante en fluidos newtonianos líquidos;
- la utilización de singularidades distribuidas de orden mayor y combinación de las mismas, con el fin de obtener mejorías numéricas, tanto en la calidad de los resultados como en rendimiento;
- el estudio e implementación de la condición de Dirichlet y sus consecuencias numéricas;
- rutinas de integración numérica de orden mayor para mayor estabilidad numérica, permitiendo también la implementación de este tipo de algoritmos en los módulos dinámicos de simulaciones aeroelásticas;
- tolerancia de bordes de fuga abiertos, similar a *Xfoil*;
- paralelización del cómputo y aceleración con *GPU* para alcanzar rendimientos mayores, sobre todo si se apunta al desarrollo de un método tridimensional.

En la dirección de esto último y retirando el foco de los problemas actualmente cubiertos, también resulta de interés continuar el estudio de variantes que incluyan acoplamientos viscosos, que aborden regímenes transónicos y supersónicos, y que se extiendan a un espacio tridimensional.

# Apéndice A

## Manual de *GUI*

La *GUI* desarrollada procura acercar la herramienta de simulación a más estudiantes y usuarios interesados, que no necesariamente deseen hacer uso de los programas mediante la codificación en Python. Pese a su mayor accesibilidad y facilidad de uso, este formato presenta algunas limitaciones respecto a la versión original.

Por eso, en el repositorio de *GIT* donde también se encuentra este documento, los programas y ejemplos en *Python* y *Jupyter Notebooks*, se pone a disposición el código fuente de esta interfaz para poder ser ampliada y mejorada según necesidades particulares, así como este manual de uso de la versión más actualizada.

### A.1. Generalidades

La *GUI* se desarrolló con la biblioteca *PySide6* y cuenta con 5 pestañas:

1. *Sólidos*: en esta se cargarán las coordenadas de los sólidos, se discretizarán, escalarán, posicionaran, nombrarán, editarán y visualizarán, según las necesidades del experimento.
2. *Simulación*: aquí se definen las magnitudes de referencia del experimento, si la simulación es estacionaria o no, y el tipo de cinemática de los sólidos en el caso no estacionario.
3. *Resultados*: esta se dedica a la visualización de resultados, desde el panelado en los diferentes instantes o ángulos de ataque, hasta el campo de  $C_p$ .
4. *Guardado y carga*: en esta se pueden guardar sesiones, cargarlas o guardar los coeficientes aerodinámicos calculados en un *.csv*.
5. *Acerca de ...*: aquí se brinda una breve descripción del programa, contexto, autoría y licencia.

Para facilitar la detección de errores durante ejecución, al abrir la aplicación también se inicia una terminal para que en caso de excepciones no manejadas durante la codificación, se muestren los *traceback* que permiten diagnosticar el error y actuar en consecuencia.

### A.2. Pestaña *Sólidos*

En la figura A.1 se muestra la *GUI* en esta pestaña cuando se inicializa la aplicación.

Aquí se pueden reconocer diferentes bloques de campos, *checkboxes* y botones cuya funcionalidad particular se describirá a continuación. Antes de esto, sin embargo, se explicará más en detalle el propósito de esta pestaña y algunos lineamientos generales.

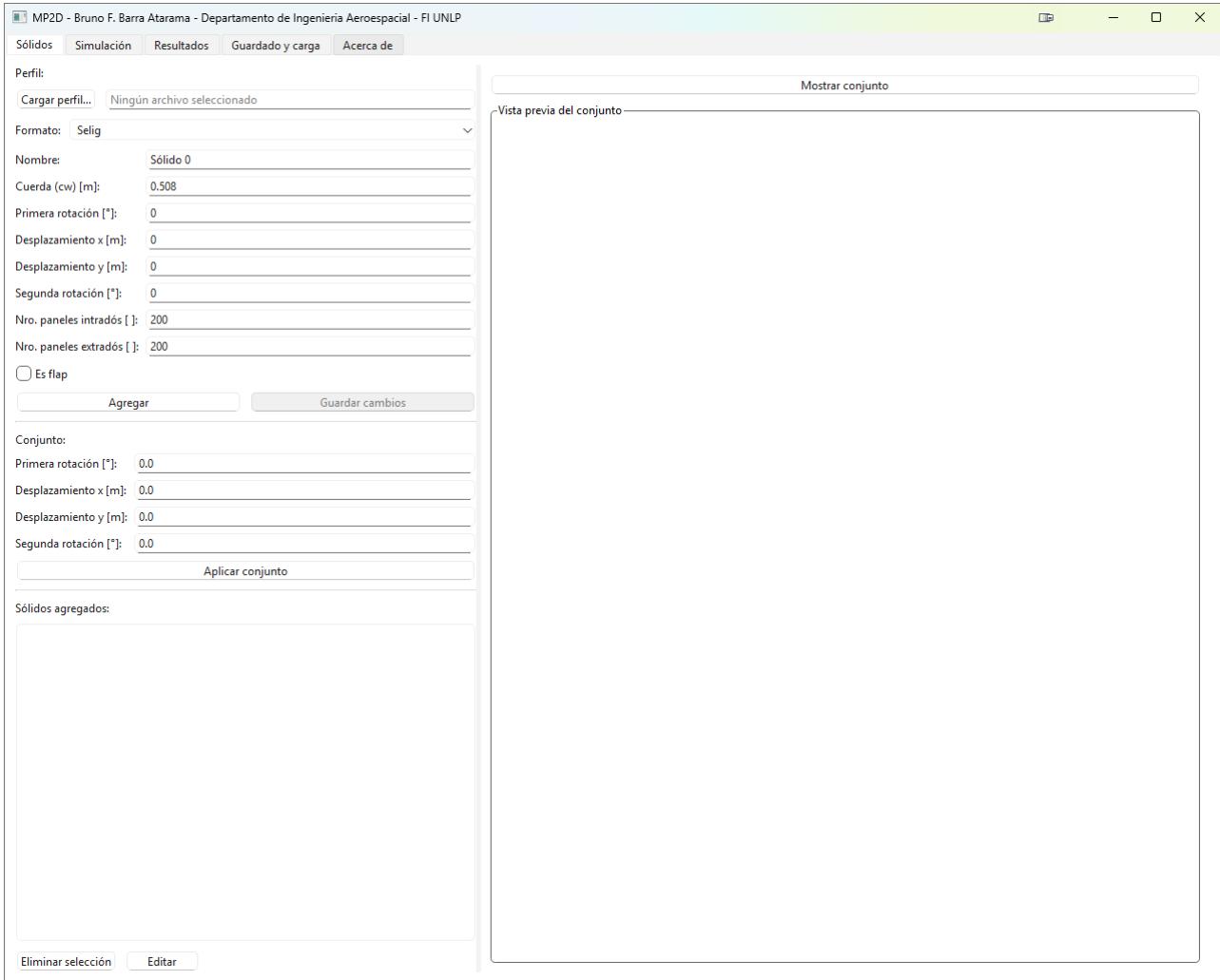


Figura A.1: Captura de la *GUI* en la pestaña *Sólidos*, al iniciarizarse la aplicación.

Esta pestaña tiene como objetivo asistir al usuario a diseñar la geometría que luego se simulará. Por geometría se entiende a los panelados de los múltiples sólidos en posiciones y actitudes deseables por el usuario.

Un aspecto importante que cobra relevancia durante la simulación es el hecho de que en simulaciones estacionarias o no estacionarias con cinemáticas preestablecidas, se propuso que el conjunto sea rígido y solidario a una terna móvil que coincide inicialmente con el sistema  $xy$  que se visualiza con el conjunto cuando se aprieta el botón *Mostrar conjunto*. También, se propuso que los momentos aerodinámicos se calcularan respecto al origen de esta terna móvil. Todo esto con el propósito de que la forma de controlar la posición del punto de toma de momentos en relación al conjunto de sólidos, simplemente sea el desplazamiento del conjunto de tal forma de que este punto quede en el origen.

Para ello, se implementaron las siguientes posibilidades:

- Cargar las coordenadas del perfil de un sólido desde un archivo de texto o un *.dat*, en formato *Selig* o *Lednicer*<sup>1</sup>.
- Escalar, ubicar y orientar el sólido, inclusive con un esquema particular en el caso de que se trate de un *flap*.

<sup>1</sup>Se recuerda que las coordenadas cargadas deben acompañar a la discretización que se realice, debido a la excesiva imposición de la condición de impenetetrabilidad en la que si no se incurriera. Esto se discutió en 7.1

- Agregar múltiples sólidos, así como eliminar o editar alguno en particular.
- Desplazar y orientar el conjunto de sólidos como un rígido.
- Visualizar el conjunto resultante.

A continuación se describen los elementos presentes en esta pestaña en los diferentes bloques.

Cuadro A.1: parámetros de configuración y elementos de *GUI* de la sección *Perfil* de la pestaña *Sólidos*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Formato</i>	NA	Continúa en la siguiente página Formato del archivo de texto o <i>.dat</i> de coordenadas del perfil, <i>Selig</i> o <i>Lednicer</i> .
<i>Cargar perfil...</i>	NA.	Botón para seleccionar el archivo de coordenadas de un perfil desde el explorador de archivos. El dato que se almacena es la ruta al archivo, no el contenido del mismo.
<i>Nombre</i>	NA	Nombre del sólido con el que se identifica en la lista de sólidos posterior o en las leyendas de las visualizaciones.
<i>Cuerda (cw)</i>	NA	Por defecto, se nombran <i>Sólido 0</i> , <i>Sólido 1</i> , etc., siempre priorizando la menor numeración, independientemente del orden en el que se agreguen los sólidos; esto es, si <i>Sólido 1</i> ya existe pero <i>Sólido 0</i> no, por defecto se autocompletará el nombre de un nuevo sólido con <i>Sólido 0</i> y no con <i>Sólido 2</i> Existen dos casos: <ul style="list-style-type: none"> <li>■ El sólido no es un <i>flap</i> y en este caso si las coordenadas se encuentren en un formato válido y acorde con el seleccionado en <i>Formato</i>, las coordenadas se escalarán automáticamente para cumplir con la <i>Cuerda</i> ingresada. Durante este escalamiento, el origen se mantiene allí.</li> <li>■ El sólido es un <i>flap</i> y esta entrada sirve para caracterizar el posicionamiento del <i>flap</i>. Esto se vuelve a tratar en la sección correspondiente.</li> </ul>
<i>Primera rotación</i>	[°]	Ángulo con el cual el sólido, ya escalado, es rotado respecto del origen. Sentido de rotación positivo según $z^+$ por regla de la mano derecha.
<i>Desplazamiento x</i>	[m]	Desplazamiento en $x$ que se aplica sobre el sólido luego de la primera rotación.

Cuadro A.1 – Continuación

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Desplazamiento y</i>	[m]	Desplazamiento en <i>y</i> que se aplica sobre el sólido luego de la primera rotación.
<i>Segunda rotación</i>	[°]	Ángulo con el cual el sólido, ya desplazado, es rotado respecto del origen. Sentido de rotación positivo según $z^+$ por regla de la mano derecha.
<i>Nro. de paneles intradós</i>	NA	Número de paneles en los que se discretizará el intradós del sólido. Se utiliza la regla del coseno para definir el paso de la discretización.
<i>Nro. de paneles extradós</i>	NA	Número de paneles en los que se discretizará el extradós del sólido. Se utiliza la regla del coseno para definir el paso de la discretización.
<i>Es flap</i>	NA	<i>Checkbox</i> que indica si el sólido es <i>flap</i> o no. En caso negativo, no se requiere nada más; en caso positivo, aparecen más campos, como se muestra en la figura A.3 y que se detallan a en la tabla A.2.
<i>Agregar</i>	NA	Botón que añade el sólido configurado al conjunto. En el caso de que el borde de fuga en el archivo de coordenadas no estuviera cerrado - lo cual es común-, al momento de agregar el sólido una ventana emergente preguntará si desease cerrarlo o no. En caso negativo, se abortará la operación y en caso afirmativo se procederá a cerrar el borde de fuga. El mecanismo implementado para cerrar el borde de fuga consiste en, antes de realizar la discretización <sup>2</sup> , mover las coordenadas del borde de fuga del archivo de texto que originalmente son distintas, de forma tangencial al extradós y el intradós, hasta el punto de intersección. Esto evidentemente incrementa la cuerda media del perfil a la vez que esta ya no es paralela al eje <i>x</i> . Lo primero es absorbido en el escalamiento necesario para cumplir con lo definido en <i>Cuerda (cw)</i> o <i>cf</i> , pero para lo segundo se decidió no tomar ninguna medida, para no alterar el ángulo de ataque geométrico del perfil.
<i>Guardar cambios</i>	NA	Botón para guardar cambios en el caso de que se haya activado el modo de edición de un sólido ya agregado.

<sup>2</sup>Para tratar al nuevo punto de borde de fuga como coordenadas y no alterar el paso de la discretización.

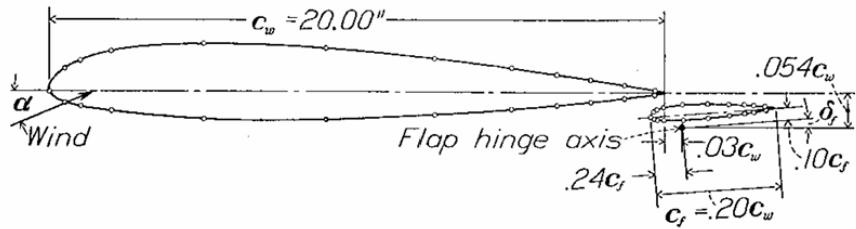


FIGURE 1.—Cross section of model showing orifice locations used in pressure-distribution tests. N. A. C. A. 23012 airfoil with  $0.20c_w$  23012 external-airfoil flap.

Figura A.2: configuración ala-flap utilizada en las experiencias de [9].

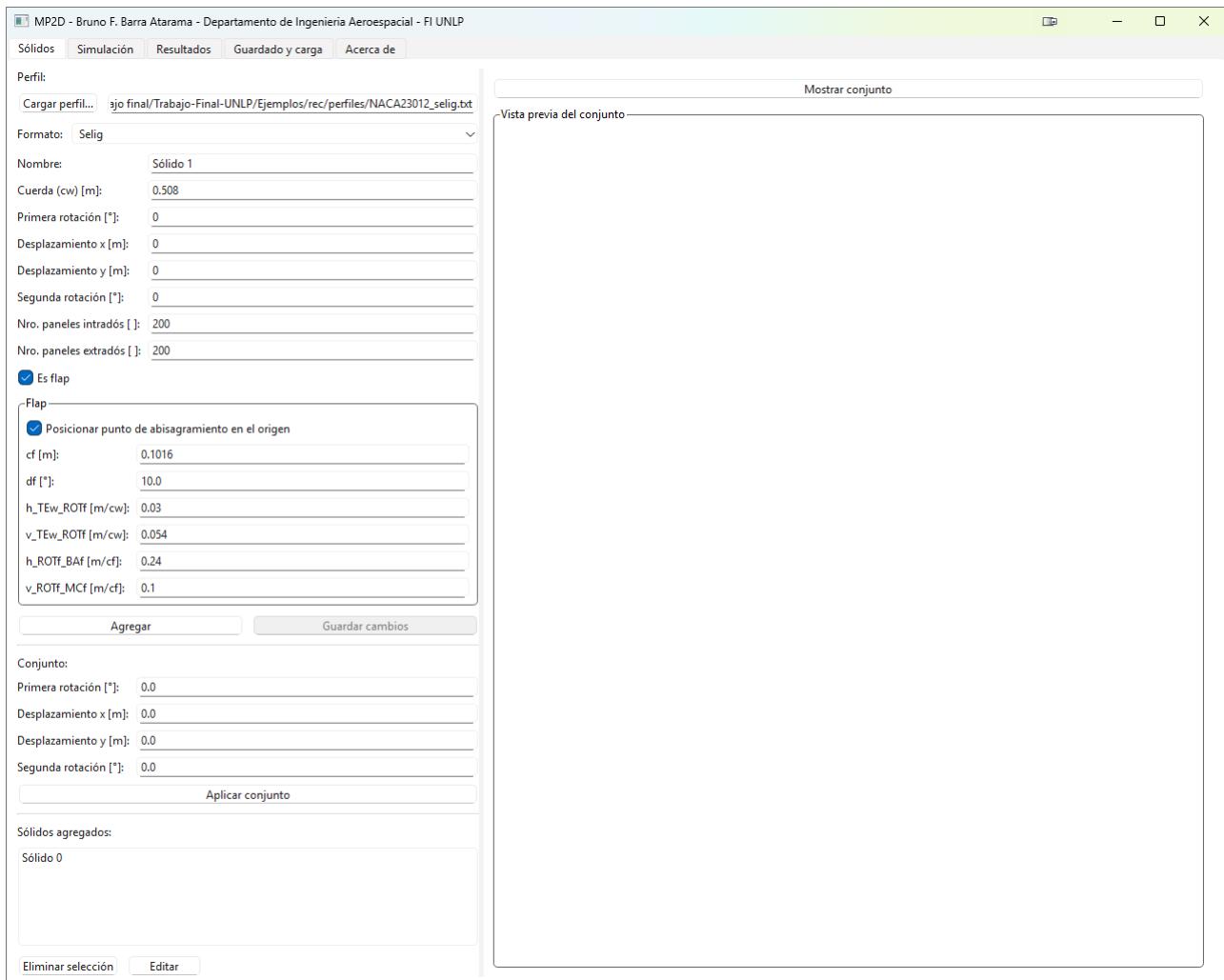


Figura A.3: Captura de la *GUI* en la pestaña *Sólidos*, al marcar la opción *Es flap*.

Cuadro A.2: parámetros adicionales de configuración de *flap* de la pestaña *Sólidos*. La funcionalidad correcta de estos campos adicionales se logra si el perfil de ala no fue rotado ni desplazado. Puede utilizarse de referencia la figura A.2, que dió origen a esta forma de caracterizar la geometría de un conjunto ala-flap.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
Continúa en la siguiente página		

Cuadro A.2 – Continuación

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Posicionar punto de abisagamiento en el origen</i>	NA	<i>Checkbox</i> que produce que, en caso positivo, se completen los campos que desplazan al conjunto de tal forma de que los momentos calculados individualmente por el <i>flap</i> sean los de charnela. Estos campos se completan, pero no se aplican, lo cual es necesario para hacer efectivo este comportamiento.
<i>df</i>	[°]	Deflexión del <i>flap</i> , positiva en sentido horario.
<i>cf</i>	[m]	Cuerda del <i>flap</i> . En este contexto, esta es la cuerda del sólido que se esté configurando, y no <i>Cuerda (cw)</i> . <i>Cuerda (cw)</i> en este caso se utiliza para adimensionalizar los siguientes campos.
<i>h_TEw_ROTf</i>	[m/cw]	Distancia horizontal (paralela a la cuerda media del ala sin rotar) entre el borde de fuga del ala y el eje de rotación del <i>flap</i> . Positivo atrasa ( $x^+$ ) el <i>flap</i> .
<i>v_TEw_ROTf</i>	[m/cw]	Distancia vertical (perpendicular a la cuerda media del ala sin rotar) entre el borde de fuga del ala y el eje de rotación del <i>flap</i> . Positivo desciende ( $y^-$ ) el <i>flap</i> .
<i>h_ROTf_BAf</i>	[m/cf]	Distancia paralela a la cuerda media del <i>flap</i> entre el eje de rotación y el borde de ataque del <i>flap</i> . Positivo adelanta ( $x^-$ ) el <i>flap</i> .
<i>v_ROTf_M Cf</i>	[m/cf]	Distancia perpendicular a la cuerda media del <i>flap</i> entre el eje de rotación y la cuerda media del <i>flap</i> . Positivo asciende ( $y^+$ ) el <i>flap</i> .

Una vez agregados todos los sólidos, el conjunto de ellos también puede transformarse para tener más libertad durante el diseño. Para ello se disponen los parámetros configurables definidos en el cuadro A.3.

Cuadro A.3: parámetros de configuración de la sección *Conjunto* de la pestaña *Sólidos*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Primera rotación</i>	[°]	Continúa en la siguiente página Ángulo con el cual el conjunto es rotado respecto del origen. Sentido de rotación positivo según $z^+$ por regla de la mano derecha.
<i>Desplazamiento x</i>	[m]	Desplazamiento en $x$ que se aplica sobre el conjunto luego de la primera rotación.
<i>Desplazamiento y</i>	[m]	Desplazamiento en $y$ que se aplica sobre el conjunto luego de la primera rotación.

Cuadro A.3 – Continuación

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Segunda rotación</i>	[°]	Ángulo con el cual el conjunto, ya desplazado, es rotado respecto del origen. Sentido de rotación positivo según $z^+$ por regla de la mano derecha.
<i>Aplicar conjunto</i>	NA	Botón que aplica las transformaciones configuradas en los campos precedentes.

Por último se presenta el resto de elementos de *GUI* de la pestaña *Sólidos* en el cuadro A.4.

Cuadro A.4: elementos de *GUI* restantes de la pestaña *Sólidos*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Sólidos agregados</i>	NA	Lista con los sólidos agregados al conjunto. Puede seleccionarse de a uno a la vez. El orden en el que se presentan los sólidos respeta el orden en el que fueron agregados: el primero se encuentra más arriba y el último debajo de todo.
<i>Eliminar selección</i>	NA	Botón que elimina el sólido seleccionado en <i>Sólidos agregados</i>
<i>Editar</i>	NA	Botón para ingresar en el modo edición del sólido seleccionado en <i>Sólidos agregados</i> . Se vuelve a mostrar el contenido guardado en la configuración del sólido seleccionado. Una vez hechas las modificaciones, se guardan con <i>Guardar cambios</i> definido en A.1
<i>Mostrar conjunto</i>	NA	Botón que de existir al menos un sólido, grafica el conjunto en la ventana <i>Vista previa del conjunto</i>
<i>Vista previa del conjunto</i>	NA	Ventana dedicada para visualizar el conjunto diseñado. Es un gráfico interactivo que permite el desplazamiento por el plano, el <i>zoom in</i> y <i>zoom out</i> , configurar márgenes, límites de ejes, etiquetas de los ejes, escalas de los ejes, leyendas, tipos y colores de líneas, y guardar el gráfico en múltiples formatos.

Los valores por defecto de los campos permiten recrear de forma sencilla la configuración ala-*flap* de los experimentos de [9]. Para esto basta con seleccionar un perfil (en [9] se utiliza un *NACA 23012*), hacer *click* en *Agregar* para agregar el perfil principal, luego seleccionar *Es flap* y nuevamente *Agregar*, para agregar el *flap*. Si se presiona *Aplicar conjunto* y se dejó tildada la opción *Posicionar punto de abisagramiento en el origen* para el *flap*, también se podrían obtener los momentos de charnela como se explicó en el cuadro A.2. El conjunto obtenido se muestra en la figura A.4.

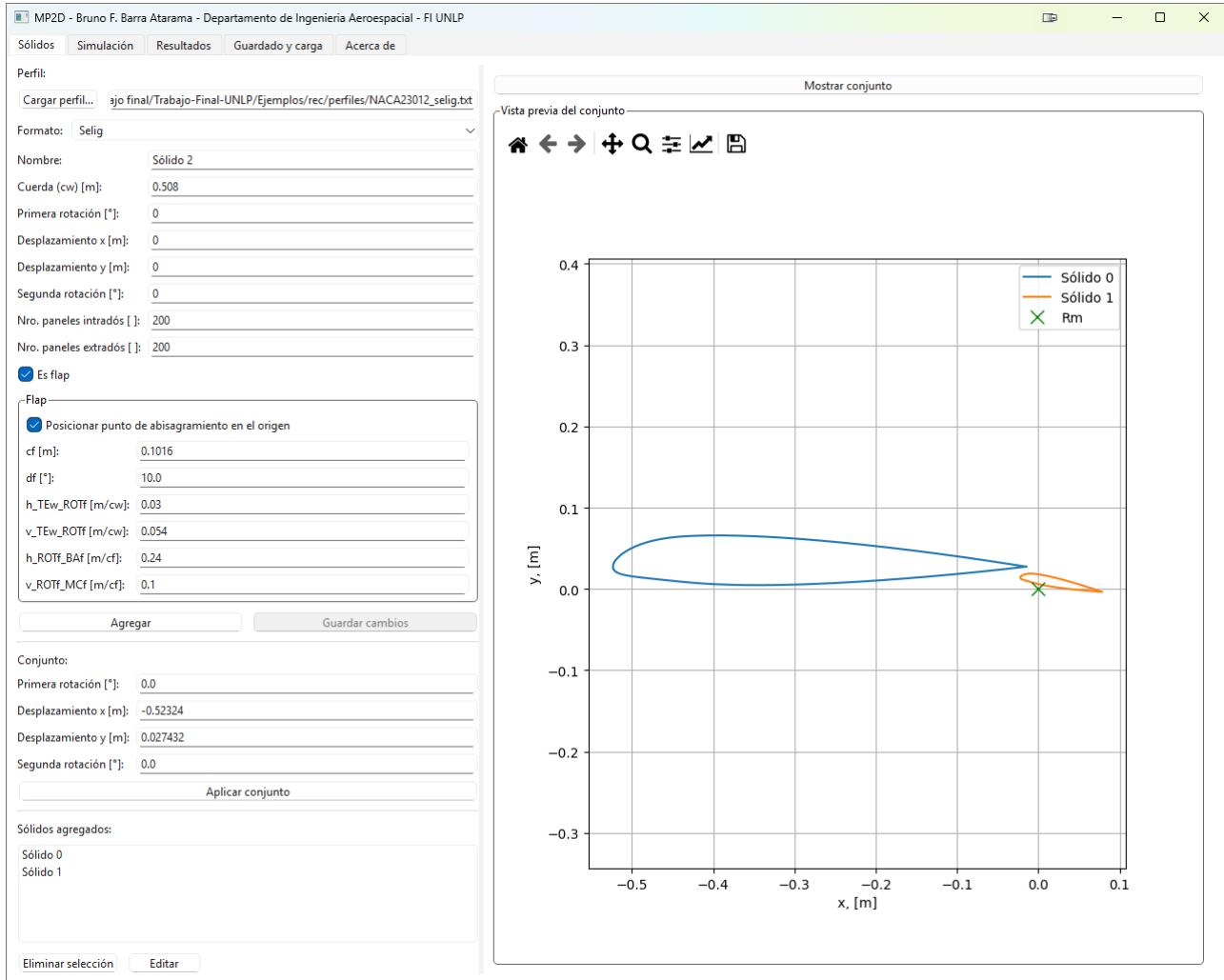


Figura A.4: Captura de la *GUI* en la pestaña *Sólidos*, mostrando un conjunto cargado.

### A.3. Pestaña *Simulación*

Con el conjunto de sólidos ya definido geométricamente, en esta pestaña se atiende la configuración de los experimentos que se simularán.

Para esto, en primer lugar se brindan campos para definir las magnitudes de referencia de la simulación, ver figura A.8. Estos se utilizan para la adimensionalización de coeficientes aerodinámicos, pero no para la especificación de la cinemática ni la resolución por el método de los paneles. Se detallan en el cuadro A.5.

Cuadro A.5: magnitudes de referencia de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
Continúa en la siguiente página		

Cuadro A.5 – Continuación

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
$l$	[m]	Longitud de referencia. Por defecto $0,696m$ . Se utiliza este valor por defecto para, en el caso de utilizar los valores por defecto que buscan recrear los experimentos de [9], adimensionalizar $C_l$ y $C_m$ (total) como en este reporte, con $cw + cf$ . En el caso de que se quiera visualizar el coeficiente de momento de charnela y compararlo con la referencia, debe utilizarse $0,1016m$ , o sea $cf$ .
$V$	[m/s]	Velocidad de referencia. Por defecto, $35,76m/s$ .
		Se utiliza este valor por defecto para recrear los experimentos de [9].
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Densidad de referencia. Por defecto, $1,225kg/m^3$ ( <i>ISA SL SL</i> ).
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	Viscosidad cinemática. Por defecto, $1,5e^{-5}m^2/s$ ( <i>ISA SL</i> ).
$a$	[m/s]	Velocidad del sonido. Por defecto, $340,3m/s$ ( <i>ISA SL</i> ).
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	Aceleración de la gravedad. Por defecto, $9,81m/s^2$ ( <i>ISA SL</i> ).

Luego de la sección de magnitudes de referencia, se dispone el campo de selección de *Modo Estacionario* o *No estacionario*.

En base a la selección, los casos divergen. A continuación, en el cuadro A.6 se presentan los parámetros de configuración en el modo *Estacionario* (también ver figura A.5).

Cuadro A.6: Parámetros de configuración del modo *Estacionario* de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
$V$	[m/s]	Velocidad de traslación del conjunto con dirección $x$ y sentido positivo hacia $x^-$ . Por defecto, $35,76m/s$ .
$\alpha i$	[°]	Ángulo de ataque geométrico inicial. Por defecto, $-5^\circ$ .
$\alpha f$	[°]	Ángulo de ataque geométrico final. Por defecto, $5^\circ$ .
$\Delta\alpha$	[°]	Paso de ángulo de ataque geométrico. Por defecto, $1^\circ$ .

En el caso no estacionario, a su vez se puede seleccionar entre las cinemáticas preestablecidas (ver figura A.6): *Movimiento rectilíneo uniforme*, *Rotación armónica* o *Traslación armónica*, en las cuales el conjunto se mueve como un rígido; pero también se permite seleccionar *Desde archivos de texto*, donde cada sólido puede estar animado con una cinemática particular, definidas en archivos de texto.

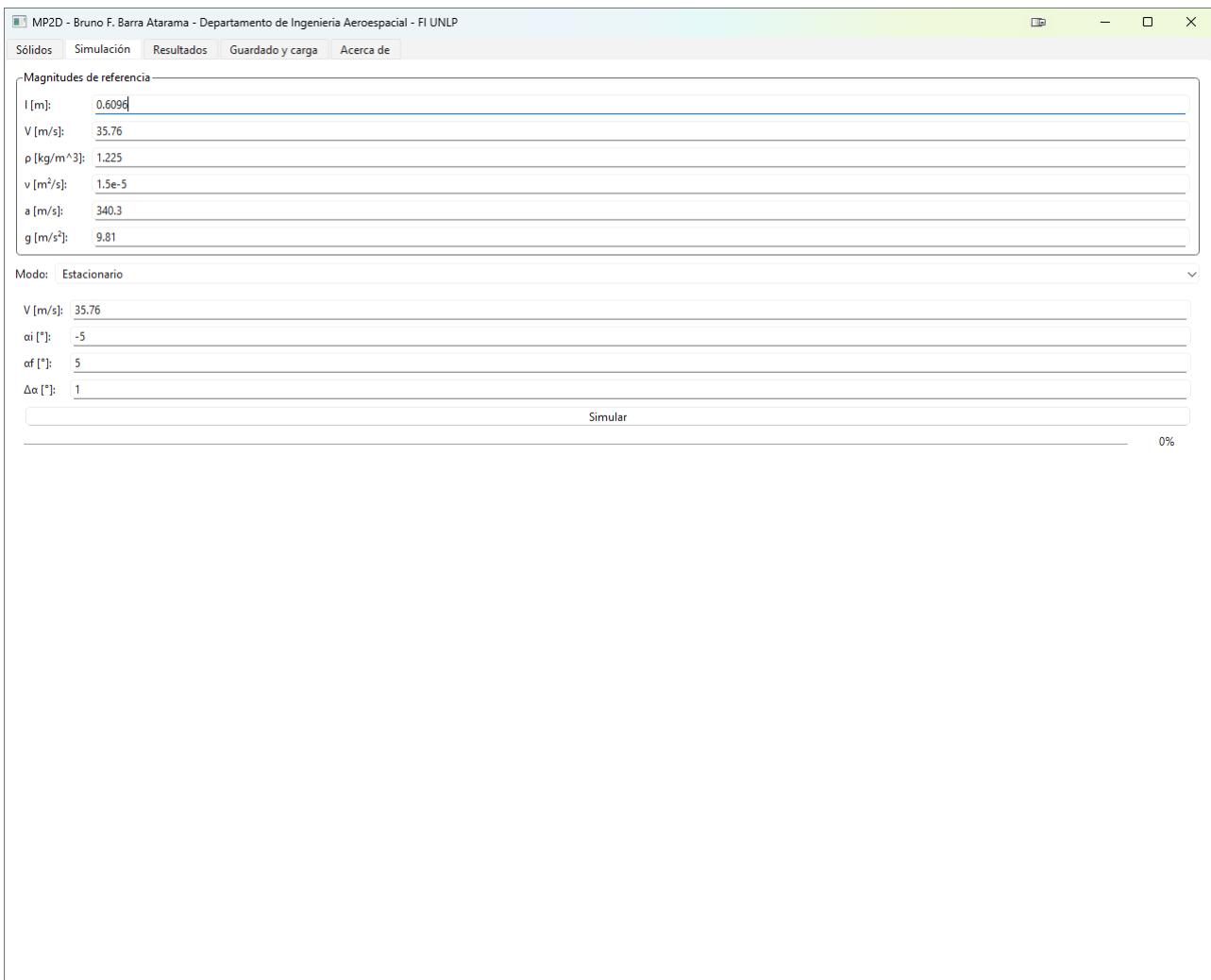
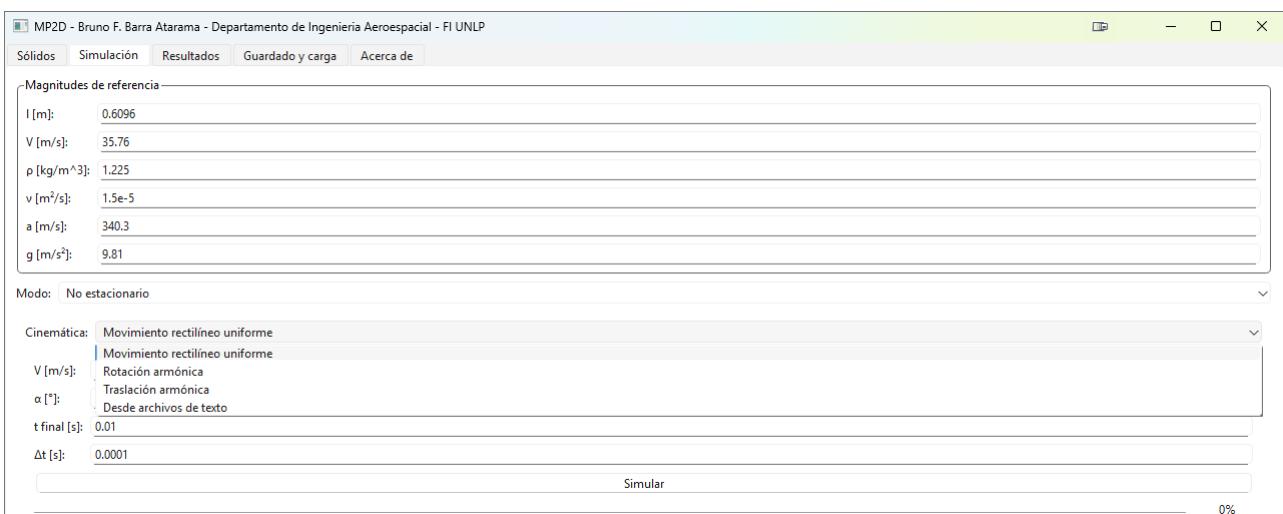


Figura A.5: Captura de la *GUI* en la pestaña *Simulación*.



Los parámetros de configuración de cada una de estas cinemáticas se definen en los siguientes cuadros.

Cuadro A.7: Parámetros de configuración de la cinemática *Movimiento rectilíneo uniforme* de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
$V$	[m/s]	Velocidad de traslación del conjunto con dirección $x$ y sentido positivo hacia $x^-$ . Por defecto, $35,76\text{m/s}$ .
$\alpha$	[°]	Ángulo de ataque geométrico. Por defecto, $0^\circ$ .
$t_{final}$	[s]	Tiempo final. La simulación comienza en $t = 0\text{s}$ . Por defecto, $0,01\text{s}$
$\Delta t$	[s]	Paso de tiempo. Por defecto, $0,0001\text{s}$ .

Cuadro A.8: Parámetros de configuración de la cinemática *Rotación armónica* de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
$V$	[m/s]	Velocidad de traslación del conjunto con dirección $x$ y sentido positivo hacia $x^-$ . Por defecto, $35,76\text{m/s}$ .
$\alpha_0$	[°]	Amplitud del ángulo de ataque geométrico. Por defecto, $6,74^\circ$ .
$\omega$	[rad/s]	Velocidad angular de las oscilaciones. Por defecto, $200\text{rad/s}$
$t_{final}$	[s]	Tiempo final. La simulación comienza en $t = 0\text{s}$ . Por defecto, $0,01\text{s}$
$\Delta t$	[s]	Paso de tiempo. Por defecto, $0,0001\text{s}$ .

Cuadro A.9: Parámetros de configuración de la cinemática *Traslación armónica* de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
$V$	[m/s]	Velocidad de traslación del conjunto con dirección y sentido positivo hacia $x^-$ . Por defecto, $35,76\text{m/s}$ .
$h_0$	[m]	Amplitud de la traslación vertical ( <i>heave</i> ). Por defecto, $0,0254\text{m}$ .
$\omega$	[rad/s]	Velocidad angular de las oscilaciones. Por defecto, $200\text{rad/s}$
$t_{final}$	[s]	Tiempo final. La simulación comienza en $t = 0\text{s}$ . Por defecto, $0,01\text{s}$
$\Delta t$	[s]	Paso de tiempo. Por defecto, $0,0001\text{s}$ .

A continuación, se describirá la configuración del método de entrada *Desde archivos de texto* para las cinemáticas, pero antes se explica un poco más cómo es esta.

Para suplir la menor capacidad de diseño de simulaciones que tiene la *GUI* frente a la codificación directamente en Python utilizando los módulos desarrollados, se decidió añadir este modo de definir la cinemática para cada uno de los sólidos a partir de archivos *.csv*.

El funcionamiento consiste en: para cada sólido del conjunto definido en la pestaña *Sólidos*, agregar un archivo de cinemática (ver figura A.7)que define la cinemática de una terna móvil solidaria a ese sólido en particular, definiendo su movimiento .

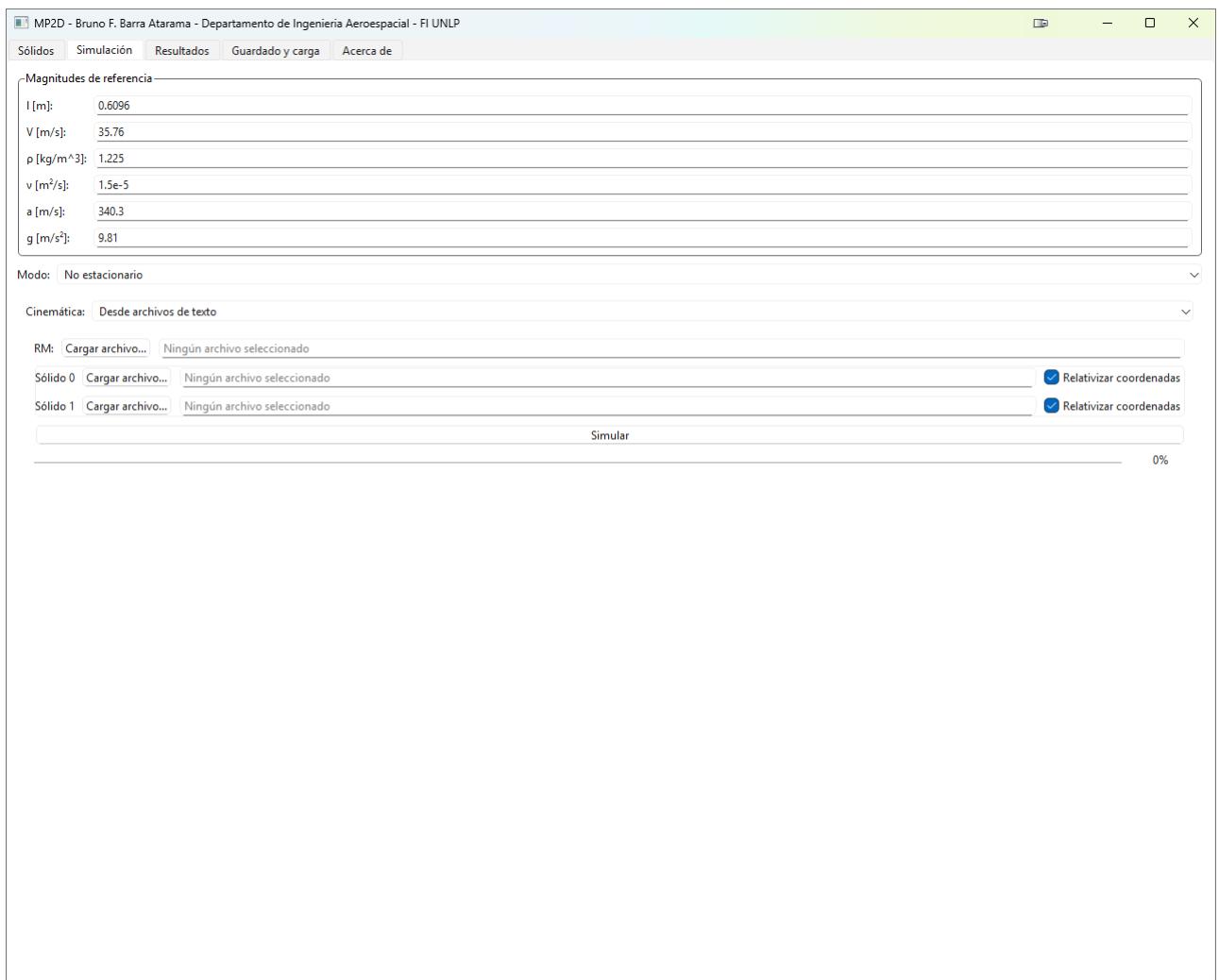


Figura A.7: Captura de la *GUI* en la pestaña *Simulación*, en el modo *No estacionario*, *Desde archivos de texto*.

Por ejemplo, las primeras cuatro líneas de un archivo *.csv* válido pueden verse en la figura A.8. Allí se puede ver que los *headers* necesarios son los que se definen en el cuadro A.10.

```

1 t,RO_X,RO_Y,theta,VO_X,VO_Y,w
2 0.0,0.0,0.0,-0.06841690667817772,-100.0,0.0,0.0
3 1.016e-05,-0.001016,0.0,-0.06841690667817772,-100.0,0.0,0.0
4 2.032e-05,-0.002032,0.0,-0.06841690667817772,-100.0,0.0,0.0

```

Figura A.8: Captura de un archivo *.csv* válido para ser utilizado con el método de definición de cinemáticas *Desde archivos de texto*.

Cuadro A.10: *Headers* necesario de un *.csv* de la cinemática *Desde archivo de texto* de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>t</i>	[s]	Continúa en la siguiente página Instante de simulación. Puede no comenzar en 0, pero siempre debe ser creciente. Los instantes de simulación de los diferentes sólidos deben ser consistentes: tener los mismos instantes hasta que al menos uno de estos <i>.csv</i> termine.
<i>RO_X</i>	[m]	Componente <i>X</i> <sup>3</sup> de la posición del origen de la terna móvil, en el sistema de referencia solidario al fluido no perturbado.
<i>RO_Y</i>	[m]	Componente <i>Y</i> de la posición del origen de la terna móvil, en el sistema de referencia solidario al fluido no perturbado.
<i>theta</i>	[rad]	Actitud de la terna móvil, positivo según <i>Z</i> <sup>+</sup> por regla de la mano derecha.
<i>VO_X</i>	[m/s]	Componente <i>X</i> de la velocidad de traslación del origen de la terna móvil, en el sistema de referencia solidario al fluido no perturbado.
<i>VO_Y</i>	[m]	Componente <i>Y</i> de la velocidad de traslación del origen de la terna móvil, en el sistema de referencia solidario al fluido no perturbado.
<i>w</i>	[rad/s]	Velocidad angular de la terna móvil, positiva según <i>Z</i> <sup>+</sup> por regla de la mano derecha.

Las columnas del *.csv* no necesariamente deben encontrarse en el orden mostrado en la figura A.8, ni ser los únicos disponibles en dicho archivo.

Ya que ahora no resulta claro dónde ubicar el punto de toma de momentos, también se debe cargar un *.csv* donde se defina esto (ver figura A.7). Las columnas que debe contener al menos este archivo son *RO\_X* y *RO\_Y*. Por esto mismo, en el caso de que sea aplicable o directamente no se desee evaluar momentos, puede utilizarse el *.csv* que se emplee para la cinemática de algún sólido.

Dicho esto, en el cuadro A.11 se describen los elementos de *GUI* para ingresar la cinemática de esta forma.

---

<sup>3</sup>En los gráficos se preserva la notación de los ejes en minúsculas por convención, para no forzar la notación particular utilizada en el trabajo.

Cuadro A.11: Parámetros de configuración de la cinemática *Desde archivo de texto* de la pestaña *Simulación*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Cargar archivo...</i> (RM)	NA	Continúa en la siguiente página
<i>Cargar archivo...</i> (sólo)	NA	Botón para seleccionar el <i>.csv</i> asociado al punto de toma de momentos.
<i>Relativizar coordenadas</i> ( sólido)	NA	Botón para seleccionar el <i>.csv</i> asociado a uno de los sólidos del conjunto. Este campo se repite una vez por cada sólido del conjunto.
		<i>Checkbox</i> que define cómo se solidarizan un sólido y su terna móvil. Este campo se repite una vez por cada sólido del conjunto.
		En caso de que esta opción esté seleccionada, en el primer instante la terna móvil se dispone como se encuentre definida en el <i>.csv</i> y el sólido se adhiere a esta en la posición mostrada por <i>Mostrar conjunto</i> en la pestaña <i>Sólidos</i> .
		En el caso opuesto, el sólido como se muestra en la pestaña <i>Sólidos</i> se adhiere a la terna móvil, pero situándose esta en el origen y actitud nula. Luego, en el primer instante esta terna se posiciona como se especifique en el <i>.csv</i> .
		Esto pretende proporcionar más libertad durante el diseño de simulaciones. Para exemplificar brevemente este funcionamiento, pensar en un movimiento rectilíneo uniforme de un sólido con el que se quiera lograr una actitud $\theta$ del perfil. El perfil se encuentra con actitud nula en la pestaña <i>Sólidos</i> y en el <i>.csv</i> la columna <i>theta</i> tiene el valor $\theta$ en todas sus filas. Si la opción <i>Relativizar coordenadas</i> está marcada para este sólido, la actitud que tendrá el perfil durante la simulación sera nula. Si no lo está, será $\theta$ .
		Si ahora el perfil tiene la actitud $\theta$ en la pestaña sólidos y la opción <i>Relativizar coordenadas</i> está marcada, durante la simulación el sólido tendrá actitud $\theta$ , y si no lo está tendrá actitud $2\theta$ .
		Lo mismo vale para la traslación, por lo que puede aprovecharse esta opción para configurar <i>flaps</i> en el <i>.csv</i> sin necesidad de posicionarlos en la pestaña <i>Sólidos</i> , por ejemplo.

Luego de la configuración de la simulación, se encuentra el botón *Simular* que dispara la resolución por el método de los paneles, mostrando el progreso de la misma en una barra de

carga y el porcentaje de completitud (ver figura A.9).

Al finalizar la simulación, se presenta la sección *Relaciones adimensionales* (ver figura A.9), en la que se muestran relaciones adimensionales que pueden ser de interés y que surgen del análisis dimensional realizado en la sección 1.4.

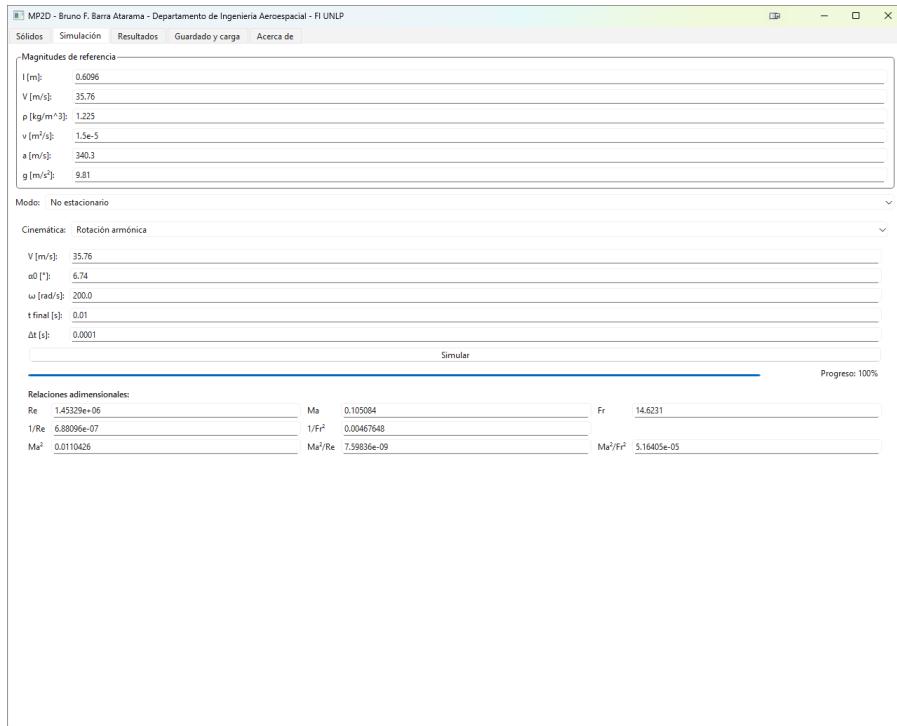


Figura A.9: Captura de la *GUI* en la pestaña *Simulación*, al completar una simulación

## A.4. Pestaña *Resultados*

En esta pestaña se brinda la posibilidad de confeccionar gráficos de interés a partir de una simulación que se haya realizado (por ejemplo, ver A.10). Los tipos de visualizaciones disponibles son:

- *Paneles*: muestra los panelados de los sólidos y estelas.
- $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ : muestra los coeficientes aerodinámicos  $C_x$ ,  $C_y$  y  $C_z$ , o bien  $C_l$ ,  $C_d$  y  $C_m$ , en modo no estacionario y estacionario, respectivamente.
- $C_p$ : muestra las distribuciones del coeficiente de presiones sobre la proyección en  $X$  de los sólidos.
- $C_p$  *vectorial*: muestra la distribución del coeficiente de presiones en cada punto de colocación como vectores.
- $C_p$  *campo*: muestra un mapa de color del coeficiente de presiones en una región del espacio exterior a los sólidos.
- $V$ : muestra las velocidades vectoriales del fluido en los puntos de colocación.
- $V$  *campo*: muestra el campo de velocidades vectorial del fluido en una región del espacio exterior a los sólidos.

Estas visualizaciones se configuran con múltiples parámetros, muchos de ellos compartidos. Por eso, en el cuadro A.12 se muestran todos ellos.

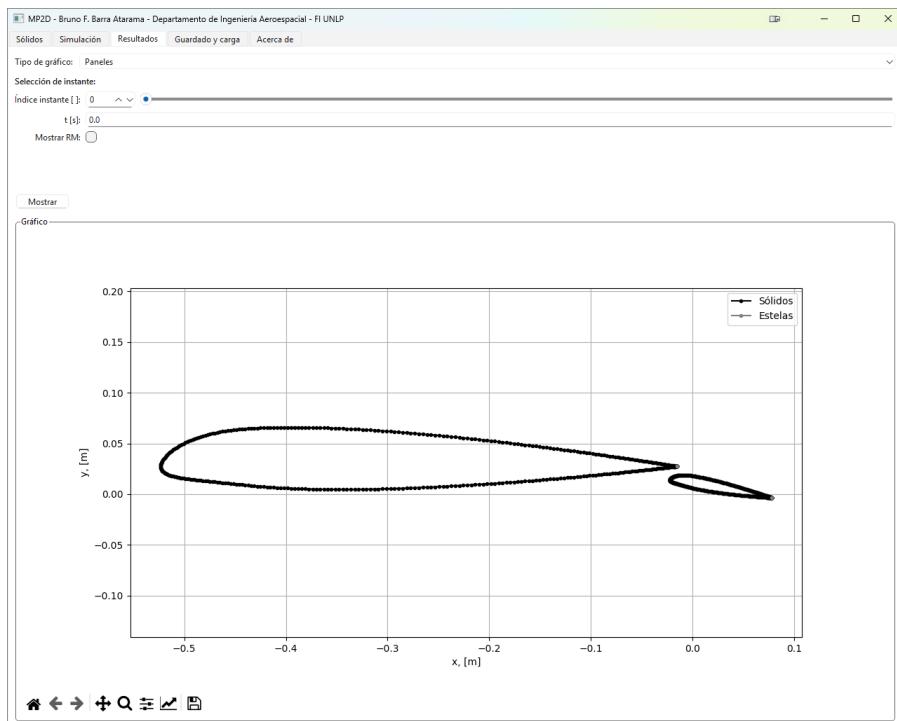


Figura A.10: Captura de la *GUI* en la pestaña *Resultados*.

Cuadro A.12: Parámetros de configuración de las visualizaciones de la pestaña *Resultados*.

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
Selección de instante ó $\alpha$	NA	Continúa en la siguiente página Este elemento de <i>GUI</i> sirve para seleccionar el instante o $\alpha$ asociado a la visualización que se tratará, y se compone de otros 2 elementos: <ul style="list-style-type: none"><li>■ Un selector de índice: que indexa desde 0 y avanza con paso uno. Puede configurarse escribiendo un entero dentro del rango en el campo, haciendo uso del <i>slider</i> horizontal, o bien haciendo uso de la rueda del <i>mouse</i> sobre el campo o sobre el <i>slider</i>.</li><li>■ Una ventana que muestra el instante o el <math>\alpha</math> seleccionado. No es editable, pero permite ver qué se está seleccionado con el elemento anterior.</li></ul>
Mostrar RM	NA	<i>Checkbox</i> que fuerza a que se visualice y etiquete al punto de toma de momentos en la visualización que se tratará.

Cuadro A.12 – Continuación

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
<i>Invertir Cz</i>	NA	<i>Checkbox</i> que en modo no estacionario invierte el coeficiente $C_z$ , por si se prefiriera esto por la convención del sentido positivo de $C_m$ .
<i>Totales</i>	NA	<i>Checkbox</i> que alterna entre visualizaciones de coeficientes aerodinámicos individuales para cada sólido y los totales.
<i>Escala</i>	[ ]	Escala de los vectores respecto de las coordenadas en gráficos vectoriales.
<i>Radio de exclusión</i>	[m]	Radios que controlan la exclusión de puntos de una grilla que sean interiores a los sólidos. Se utiliza en las visualizaciones de <i>campo</i> . Si <i>Radio de exclusión</i> fuere nulo, la clasificación de los puntos en exteriores o interiores no tiene margen. Si fuere estrictamente negativo, puntos exteriores suficientemente cercanos a la frontera se considerarían interiores y se excluirían. Si fuere positivo (no es lo deseado), puntos interiores cercanos a la frontera serían considerados exteriores y no se excluirían. Este parámetro se brinda para poder filtrar los defectos causados por los nodos singulares de los sólidos que fueron discretizados mediante paneles con distribuciones constantes de dobletes, como se discutió en la sección 7.2. La presencia de estos defectos depende de la escala de los sólidos, su discretización, la grilla utilizada y la posición particular en la que se hallen los sólidos, por lo que para evitar visualizaciones con artefactos es necesario poder regular este parámetro a discreción.
<i>Mostrar en superficies</i>	NA	<i>Checkbox</i> que indica si mostrar información en los puntos de colocación de los sólidos en visualizaciones de <i>campo</i> . En el caso de <i>Cp campo</i> se muestran círculos coloreados con el <i>Cp</i> según el mapa de color, y en el caso de <i>V campo</i> se muestran los vectores de velocidad con la misma escala y mapa de color.
<i>Niveles</i>	[ ]	Número de niveles en los que se discretiza el mapa de color de <i>Cp campo</i> .
<i>x mín, x máx, y mín, y máx</i>	[m]	Límites <i>X</i> e <i>Y</i> de la grilla de puntos de evaluación en visualizaciones tipo <i>Campo</i> . Si no se configuran y se muestra la visualización que corresponda, los límites se completan de forma de que el conjunto sea cubierto. Posteriormente se pueden editar estos valores.

Cuadro A.12 – Continuación

Parám./Elem.	Unidades	Descripción
$\Delta x, \Delta y$	[m]	Pasos en $X$ e $Y$ de la grilla de puntos de evaluación en visualizaciones tipo <i>Campo</i> . Si no se configura alguno, se dispone un paso tal la grilla tenga 300 puntos en la dimensión correspondiente.
<i>Reiniciar grilla</i>	NA	Botón que reinicia la grilla a su estado por defecto, permitiendo hacer uso del comportamiento de configuración automática por defecto.
<i>V relativa</i>	NA	<i>Checkbox</i> que indica si mostrar velocidad relativas o absolutas. Solo tiene sentido usar coordenadas relativas en movimientos rígidos del conjunto

Por último, cuando se desee mostrar el gráfico, debe apretarse el botón *Mostrar* que produce un gráfico interactivo que permite el desplazamiento por el plano, el *zoom in* y *zoom out*, configurar márgenes, límites de ejes, etiquetas de los ejes, escalas de los ejes, leyendas, tipos y colores de líneas, y guardar el gráfico en múltiples formatos.

## A.5. Pestaña *Guardado y carga*

En esta pestña se brindan las siguientes funcionalidades:

- *Guardar sesión*: en un *.pkl* de tal forma de guardar los estados de todos los campos de la *GUI* así como la última simulación que se haya completado, si la hubiere. Los archivos seleccionados en la sesión, ya sea de coordenadas, de cinemáticas o de guardado y carga, no son almacenados como tal, sino sus rutas.
- *Cargar sesión*: disponible en un *.pkl* generado por *Guardar sesión*, reestableciendo el estado de todos los campos y la simulación, si estuviere disponible. Si se cargare una simulación, esta no puede ser resumida, pero sí puede realizarse cualquiera de las visualizaciones de la pestaña *Resultados* sin volver a realizar la simulación.
- *Guardar coeficientes*: en un *.csv* con los coeficientes aerodinámicos  $C_x$ ,  $C_y$  y  $C_z$ , de cada uno de los sólidos (si hubiera múltiples) y los totales; así como los instantes o los ángulos de ataque geométrico correspondientes, en el caso no estacionario y en el estacionario, respectivamente.

# Bibliografía

- [1] Ascher H. Shapiro. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. The Ronald Press Conference, 1953.
- [2] S. W. Yuan. *Foundations of Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, 1969.
- [3] K. Karamcheti. *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*. R. E. Krieger Publishing Co., 1980.
- [4] *Wikipedia: Vector calculus identities*. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_calculus\\_identities](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities).
- [5] *Material derivative of integrals*.
- [6] Cátedra de Matemática. *Matemática B, Material Teórico-Práctico*. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, 2019.
- [7] Josep Katz y Allan Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics, Second Edition*. Cambridge University Press, 2001.
- [8] O. D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1929.
- [9] NACA. *NACA Report No. 614, Pressure distribution over an NACA 23012 airfoil with an NACA 23012 external-airfoil flap*. Inf. téc. NACA, 1938. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091690>.
- [10] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan & Co., Ltd., 1962.
- [11] NACA. *Experimental Aerodynamic Derivatives of a Sinusoidally Oscillating Airfoil in Two-Dimensional Flow*. Inf. téc. NACA, 1951. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19930083191>.
- [12] Theodore Theodorsen. *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. NACA, United States, 1949.