$$
\begin{array}{l}
p ::= (\mathsf{lst}\ p\ \ldots) \\
\quad \mid m \\
\quad \mid x \\
m ::= \mathit{Literal} \\
x ::= \mathit{Variable}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
P ::= (D\ \ldots) \\
D ::= (r\ \ldots) \\
r ::= ((d\ p) \leftarrow a\ \ldots) \\
a ::= (d\ p) \mid \delta \\
S ::= (P \vdash (\pi\ \ldots) \parallel C) \\
C ::= ((e\ \ldots) : (\delta\ \ldots)) \mid \bot \\
\pi ::= e \mid \delta \\
e ::= (p = p) \\
\delta ::= (\forall\ (x\ \ldots)\ (p \neq p)) \\
d ::= \mathit{Identifier} \\
\mathit{Identifier} ::= \mathit{Variable}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
p ::= \ldots. \\
\quad \mid (\mathsf{f}\ p)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
p ::= \ldots. \\
\quad \mid (f\ p) \\
D ::= \ldots. \\
\quad \mid M \\
M ::= (c\ \ldots) \\
c ::= ((f\ p) = p) \\
f ::= \mathit{Identifier}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{compile} : P \to (D\ \ldots) \\
\mathsf{compile}[\![((r\ \ldots)\ \ldots)]\!] = (\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}D}[\![(r\ \ldots)]\!]\ \ldots) \\
\mathsf{compile}[\![(D_0\ \ldots\ M\ D_1\ \ldots)]\!] = \mathsf{compile}[\![(D_0\ \ldots\ \mathsf{compile\text{-}M}[\![M]\!]\ D_1\ \ldots)]\!]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{compile\text{-}M} : M \to D \\
\mathsf{compile\text{-}M}[\![M]\!] = (\texttt{([fresh-index 0])}\ \mathsf{compile\text{-}M\text{-}help}[\![\mathsf{freshen\text{-}cases}[\![M]\!]]\!])
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{compile\text{-}M\text{-}help} : M \to D \\
\mathsf{compile\text{-}M\text{-}help}[\![(((f\ p_{in}) = p_{out}))]\!] = (((f\ (\mathsf{lst}\ p_{in}\ p_{out})) \leftarrow)) \\
\mathsf{compile\text{-}M\text{-}help}[\![(((f_0\ p_1) = p_2)\ \ldots\ ((f\ p_{in}) = p_{out}))]\!] = (r\ \ldots\ ((f\ (\mathsf{lst}\ p_{in}\ p_{out})) \leftarrow (\forall\ \mathsf{vars}[\![p_1]\!]\ (p_1 \neq p_{in}))\ \ldots)) \\
\quad \text{where } (r\ \ldots) = \mathsf{compile\text{-}M\text{-}help}[\![(((f_0\ p_1) = p_2)\ \ldots)]\!]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}D} : (r\ \ldots) \to (r\ \ldots) \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}D}[\![(r\ \ldots)]\!] = (\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}r}[\![r]\!]\ \ldots)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}r} : r \to r \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}r}[\![((d\ p) \leftarrow a\ \ldots)]\!] = ((d\ p_0) \leftarrow a_0\ \ldots\ (f_1\ p_1)\ \ldots\ (f_2\ p_2)\ \ldots\ \ldots) \\
\quad \text{where } (p_0\ ((f_1\ p_1)\ \ldots)) = \mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![p]\!], ((a_0\ ((f_2\ p_2)\ \ldots))\ \ldots) = (\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}a}[\![a]\!]\ \ldots)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}a} : a \to (a\ (a\ \ldots)) \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}a}[\![(d\ p)]\!] = ((d\ p_0)\ ((f_1\ p_1)\ \ldots)) \\
\quad \text{where } (p_0\ ((f_1\ p_1)\ \ldots)) = \mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![p]\!] \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}a}[\![(\forall\ (x\ \ldots)\ (p_1 \neq p_2))]\!] = ((\forall\ (x\ \ldots)\ (p_1 \neq p_2))\ ())
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p} : p \to (p\ (a\ \ldots)) \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![(f\ p_0)]\!] = (x\ ((f\ (\mathsf{lst}\ p\ x))\ (f_1\ p_1)\ \ldots)) \\
\quad \text{where } x = \mathsf{fresh\text{-}var}[\![x]\!], (p\ ((f_1\ p_1)\ \ldots)) = \mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![p_0]\!] \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![(\mathsf{lst}\ p\ \ldots)]\!] = ((\mathsf{lst}\ p_1\ \ldots)\ ((f_2\ p_2)\ \ldots\ \ldots)) \\
\quad \text{where } ((p_1\ ((f_2\ p_2)\ \ldots))\ \ldots) = (\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![p]\!]\ \ldots) \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![x]\!] = (x\ ()) \\
\mathsf{extract\text{-}apps\text{-}p}[\![m]\!] = (m\ ())
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\quad (P \vdash (\delta_g\ a\ \ldots) \parallel ((e\ \ldots) : (\delta\ \ldots))) \qquad \text{[new constraint]} \\
\longrightarrow (P \vdash (a\ \ldots) \parallel C) \\
\quad \text{where } C = \mathsf{dis\text{-}solve}[\![\delta_g, (e\ \ldots), (\delta\ \ldots)]\!] \\
\\
\quad (P \vdash ((d\ p_g)\ a\ \ldots) \parallel ((e\ \ldots) : (\delta\ \ldots))) \qquad \text{[reduce]} \\
\longrightarrow (P \vdash (a_f\ \ldots\ a\ \ldots) \parallel C) \\
\quad \text{where } (D_0\ \ldots\ (r_0\ \ldots\ ((d\ p_r) \leftarrow a_r\ \ldots)\ r_1\ \ldots)\ D_1\ \ldots) = P, \\
\qquad ((d\ p_f) \leftarrow a_f\ \ldots) = \mathsf{freshen}[\![((d\ p_r) \leftarrow a_r\ \ldots)]\!], \\
\qquad C = \mathsf{solve}[\![(p_f = p_g), (e\ \ldots), (\delta\ \ldots)]\!]
\end{array}
$$

solve : e $(e \ldots)$ $(\delta \ldots)$ → $((e \ldots) : (\delta \ldots))$ ⊥
solve[[$e_?$, $(e \ldots)$, $(\delta \ldots)$]] = $((e_2 \ldots) : (\delta_2 \ldots))$
 where $((x = p) \ldots) = (e \ldots)$,
 $(e_2 \ldots)$ = unify[[(apply-subst[[$e_?$, $((x = p) \ldots)$]]), $(e \ldots)$]],
 $((x_2 = p_2) \ldots) = (e_2 \ldots)$,
 $(\delta_2 \ldots)$ = check[[(apply-subst[[δ, $((x_2 = p_2) \ldots)$]] $\ldots$)]]
solve[[$e_?$, $(e \ldots)$, $(\delta \ldots)$]] = ⊥

dis-solve : δ $(e \ldots)$ $(\delta \ldots)$ → $((e \ldots) : (\delta \ldots))$ ⊥
dis-solve[[$\delta_?$, $(e \ldots)$, $(\delta \ldots)$]] = $((e \ldots) : (\delta_2 \ldots))$
 where $((x = p) \ldots) = (e \ldots)$,
 any_0 = disunify[[apply-subst[[$\delta_?$, $((x = p) \ldots)$]]]],
 $(\delta_2 \ldots)$ = check[[$(any_0\ \delta \ldots)$]]
dis-solve[[$\delta_?$, $(e \ldots)$, $(\delta \ldots)$]] = ⊥

unify : $(e \ldots)$ $((x = p) \ldots)$ → $((x = p) \ldots)$ ⊥
unify[[$((p = p)\ e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]] = unify[[$(e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]]
unify[[$(((\text{lst}\ p_1 \ldots_1) = (\text{lst}\ p_2\ \ldots_1))\ e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]] = unify[[$((p_1 = p_2) \ldots e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]]
 where $|(p_{1\ldots})| = |(p_2\ \ldots)|$
unify[[$((x = p)\ e \ldots)$, $(e \ldots)$]] = ⊥
 where occurs?[[x, p]],
 $x \neq p$
unify[[$((x = p)\ e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]] = unify[[$(e\{x \to p\} \ldots)$, $((x = p)\ e_s\{x \to p\} \ldots)$]]
unify[[$((p = x)\ e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]] = unify[[$((x = p)\ e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]]
unify[[(), $(e \ldots)$]] = $(e \ldots)$
unify[[$(e \ldots)$, $(e_s \ldots)$]] = ⊥

disunify : δ → δ ⊤ ⊥
disunify[[$(\forall\ (x \ldots)\ (p_1 \neq p_2))$]] = ⊤
 where ⊥ = unify[[$((p_1 = p_2))$, ()]]
disunify[[$(\forall\ (x \ldots)\ (p_1 \neq p_2))$]] = ⊥
 where () = param-elim[[unify[[$((p_1 = p_2))$, ()]], $(x \ldots)$]]
disunify[[$(\forall\ (x \ldots)\ (p_1 \neq p_2))$]] = $(\forall\ (x \ldots)\ ((\text{lst}\ x_p \ldots) \neq (\text{lst}\ p \ldots)))$
 where $((x_p = p) \ldots)$ = param-elim[[unify[[$((p_1 = p_2))$, ()]], $(x \ldots)$]]

check : $(any \ldots)$ → $(\delta \ldots)$ ⊥ ⊤
check[[$(any_1 \ldots (\forall\ (x_a \ldots)\ ((\text{lst}\ (\text{lst}\ p_l \ldots) \ldots) \neq (\text{lst}\ p_r \ldots)))\ any_2 \ldots)$]] = check[[$(any_1 \ldots any_s\ any_2 \ldots)$]]
 where any_s = disunify[[$(\forall\ (x_a \ldots)\ ((\text{lst}\ (\text{lst}\ p_l \ldots) \ldots) \neq (\text{lst}\ p_r \ldots)))$]]
check[[$(any_1 \ldots \top\ any_2 \ldots)$]] = check[[$(any_1 \ldots any_2 \ldots)$]]
check[[$(any_1 \ldots \bot\ any_2 \ldots)$]] = ⊥
check[[$(\delta \ldots)$]] = $(\delta \ldots)$

param-elim : $(e \ldots)$ $(x \ldots)$ → $(e \ldots)$ ⊥
param-elim[[$((x_0 = p_0) \ldots (x = p)\ (x_1 = p_1) \ldots)$, $(x_2 \ldots x\ x_3 \ldots)$]] =
param-elim[[$((x_0 = p_0) \ldots (x_1 = p_1) \ldots)$, $(x_2 \ldots x\ x_3 \ldots)$]]
param-elim[[$((x_0 = p_0) \ldots (x_1 = x)\ \pi_2 \ldots)$, $(x_2 \ldots x\ x_3 \ldots)$]] =
param-elim[[$((x_0 = p_0) \ldots (x_1 = x_2) \ldots \pi_3 \ldots)$, $(x_2 \ldots x\ x_3 \ldots)$]]
 where $x \notin (p_0 \ldots)$, $((x_1 = x_2) \ldots \pi_3 \ldots)$ = elim-x[[x, $(x_1 = x)$, π_2, ...]]
param-elim[[⊥, $(x \ldots)$]] =
⊥
param-elim[[$(e \ldots)$, $(x \ldots)$]] =
$(e \ldots)$