Métodos Numéricos 2019 - Obligatorio 1

Bruno Figares (4391788-8), Adrián Gioda (4954044-5),
Daniel Martinez (4462694-5), Adriana Soucoff (3190794-8)

Instituto de Matemática y Estadística
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

1 Ejercicio 1

1.1 Representación de f en $\mathbb{R}^2$

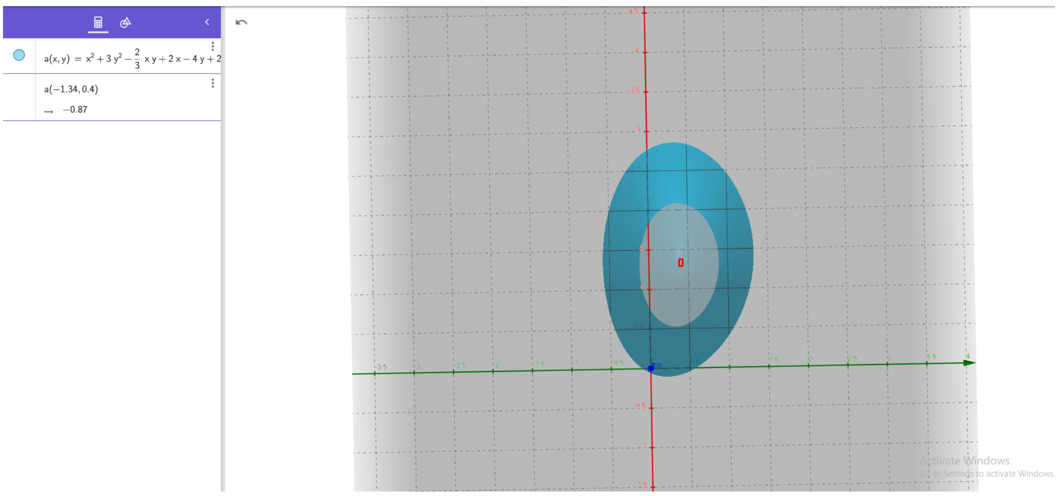

Fig. 1. isocurvas de $f(x, y)$

Se adjuntan dos imágenes 1 y 2 donde se puede ver la función $f(x, y)$. Su forma parece ser convexa con un mínimo global cerca de cero.

1.2 Hallar Q y b

$Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tienen la siguiente forma

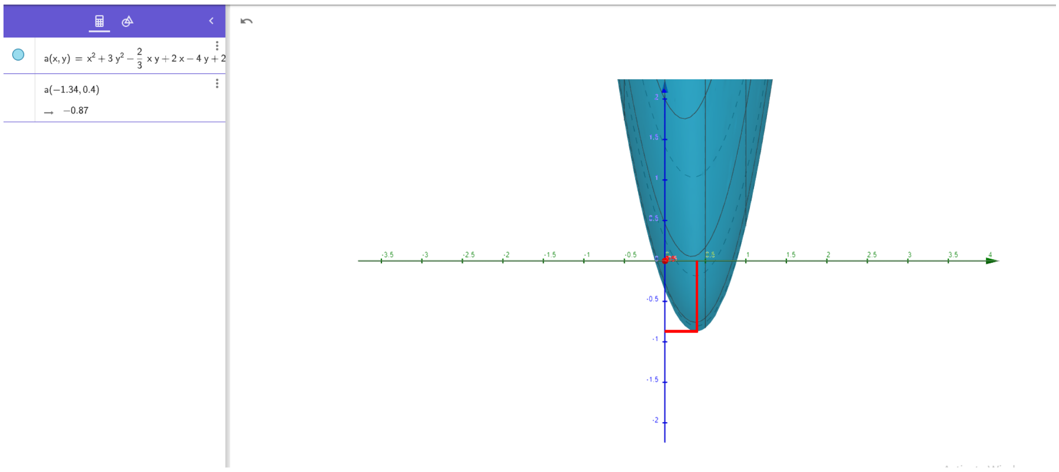

Fig. 2. corte transversal de $f(x, y)$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Sea

$$f(z) = (z^T Q z - 2b^T z) + 2e^{z_x + z_y} \tag{2}$$

$$z = (z_x, z_y)^T \in \mathbb{R}^{2\times 1}. \tag{3}$$

Desarrollando

$$f(z) = q_{11} z_x^2 + q_{22} z_y^2 + (q_{12} + q_{21}) z_x z_y - 2b_1 z_x - 2b_2 z_y + 2e^{z_x + z_y} \tag{4}$$

Tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} q_{11} = 1 \\ q_{12} + q_{21} = -\frac{2}{3} \\ q_{22} = 3 \\ b_1 = -1 \\ b_2 = 2 \end{cases} \tag{5}$$

Resolviendolo se tiene que $Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.3 Puntos críticos de f

Podemos ver derivando $\nabla f = 2(Qz - b) + 2e^{z_x + z_y} = 2 * F(z)$, dividiendo entre 2 e igualando a 0 tenemos $F = 0$

1.4 Estimación de puntos críticos

Se puede ver en las figuras 1 y 2 que aproximadamente se puede obtener el mínimo inspeccionando la gráfica. El mínimo obtenido es $f(-1.34, 0.4) = -0.87$

1.5 Estimando la solución computacionalmente

Utilizando `fsolve(@F,[1;1])` tenemos como resultado $(-1.28035, 0.38786)$

2 Newton Raphson

2.1 Descripción de Newton Raphson

El método de Newton Raphson es un método de aproximación lineal donde miramos la derivada (el jacobiano) en un punto, y buscamos el punto de corte de esta tangente con el 0

El polinomio de taylor de orden 1 en el punto $x^(k))$, con F diferenciable en $x^{(k)}$ es:

$$F(x) = F(x^{(k)}) + J_F(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + O(\left\|x - x^{(k)}\right\|^2)$$

truncando el término $O(\left\|x - x^{(k)}\right\|^2)$ y resolviendo $F(x) \approx 0$ tenemos

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}) \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{6}$$

El determinante de J_F debe ser no nulo para poder invertir la matriz. El método de Newton rhapson consiste en iterar este proceso, aproximándonos a la solución con cada paso

2.2 Forma del jacobiano del Ejercicio 1

Al igual que en la parte 1.3, empezamos por calcular la matriz jacobiana.

Recordamos que la expresion de la funcion F es:

$$F(x,y) = \left(2x - \frac{2}{3}y + 2 + 2e^{x+y}, 6y - \frac{2}{3}x - 4 + 2e^{x+y}\right)$$

Entonces, su jacobiana es:

$$\mathbb{J}_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + e^{x+y} & -\frac{1}{3} + e^{x+y} \\ -\frac{1}{3} + e^{x+y} & 3 + e^{x+y} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Se quiere probar que $\mathbb{J}_F(x,y) = Q + aa^T$, con $a(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{e^{x+y}} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ es una expresion equivalente.

Desarrollamos la expresion:

$$\mathbb{J}_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{x+y} = \begin{pmatrix} 1 + e^{x+y} & -\frac{1}{3} + e^{x+y} \\ -\frac{1}{3} + e^{x+y} & 3 + e^{x+y} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Se ve entonces que efectivamente se llega a lo mismo.

2.3 Implementación de Newton Raphson

Queda implementado en el archivo `codigo.m`

2.4 Ejecución de 10 iteraciones de Newton Raphson

Se implementa en la función `ej2_3`, el resultado es $(-1.28035, 0.38786)$

2.5 Comparación con `fsolve`

Se implementa en la función `ej2_5`, el resultado es $(1.2794 * 10^{-12}, 5.1043 * 10^{-13})$

2.6 Valor absoluto del error

Se implementa en la función `ej2_6`. Se presentan dos imágenes, en escala lineal y logarítmica en y en las figuras 3 y 4

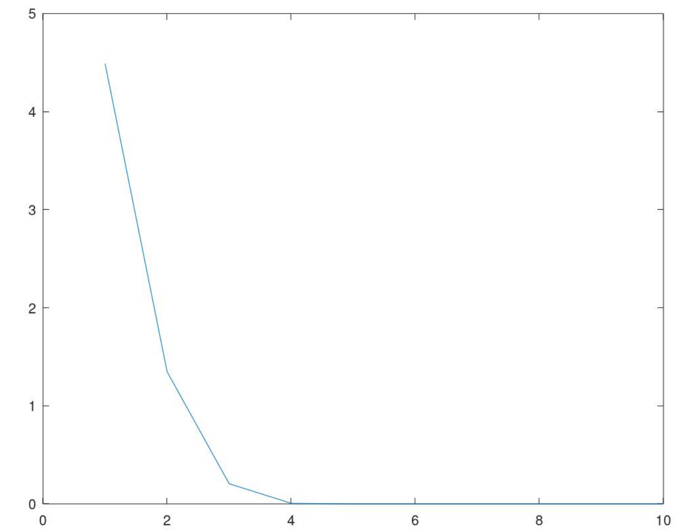

Fig. 3. gráfica lineal de $\|NR(F, iter = x) - fsolve(F)\|$

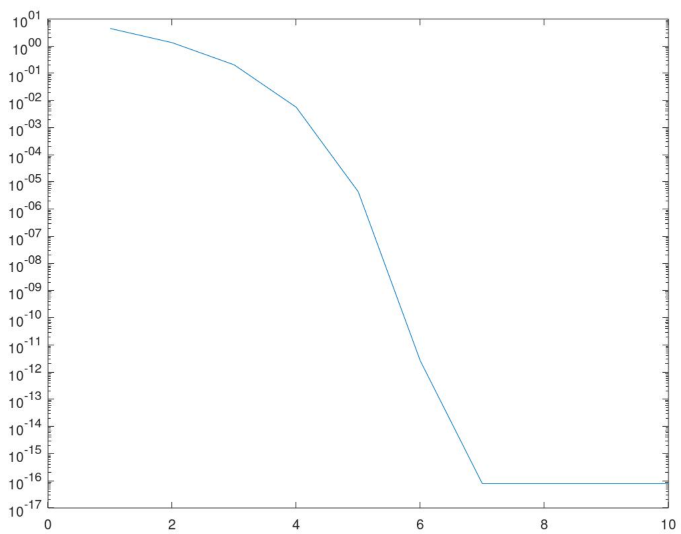

Fig. 4. gráfica logarítmica en y de $\|NR(F, iter = x) - fsolve(F)\|$

3 Cholesky

3.1 Definición

$Q \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simetrica definida positiva, es decir se cumple: $Q = Q^t$ y $X^t Q X > 0 \forall X \neq \mathbf{0}$ Entonces existe una matriz $C \in M^{n \times n}$ triangular inferior tal que Q puede ser factorizada como $Q = CC^t$

3.2 Resolución de sistemas por Cholesky

se quiere resolver el sistema $AX = b$ con $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz definida positiva factorizamos A de forma de obtener $A = CC^t \Rightarrow CC^t X = b$ se hace cambio de variable

$$C^t X = Y \tag{9}$$
$$CY = b \tag{10}$$

Se resuelve el sistema triangular (10), C triangular inferior por lo que se usa sustitución hacia adelante:

$$y_1 = \frac{b_1}{c_{11}}$$
$$y_i = \frac{1}{c_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j), i = 2, ..., n$$

luego se resuelve el sistema (9) que es triangular superior con sustitución hacia atrás:

$$y_n = \frac{b_n}{c_{nn}} y_i = \frac{1}{c_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j), i = n-1, ..., 1$$

3.3 Orden de resolución de sistemas por Cholesky

El orden de resolver los sistemas anteriores son $n\frac{n+1}{2}$ multiplicaciones, divisiones y el número de sumas y restas es n $\frac{n-1}{2}$ para resolver el sistema se usa $O(n^2)$ flops Para factorizar A como CC^t , se hace cambio de variable $L = C^t$ y $L^t = C$ de esta forma buscamos $A = L^t L$ utilizando descomposición QR se obtiene la factorización, el orden de la misma es de $\frac{1}{3}n^3$ por lo tanto el orden total es $\frac{1}{3}n^3 + 2n^2 \approx \frac{1}{3}n^3$

3.4 Órden de Newton Raphson con Cholesky

el algoritmo Newton Raphson tiene k iteraciones en cada una se resuelve el sistema lineal con Cholesky que es de orden $\frac{1}{3}n^3$ por lo tanto el orden de NR utilizand Cholesky es de $\frac{k}{3}n^3$