Métodos Numéricos 2019 - Obligatorio 2

Bruno Figares (4391788-8), Adrián Gioda (4954044-5),
Daniel Martinez (4462694-5), Adriana Soucoff (3190794-8)

Instituto de Matemática y Estadística
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

1 Mínimos Cuadrados

1.1 Transformación a PMCL

El modelo de ambas funciones tiene la forma $y = cx^{-p}$. Esta puede transformarse en una relación lineal aplicando un logaritmo a ambos lados de la expresión de esta forma, $log(y) = log(cx^{-p})$. Por propiedades de los logaritmos, la expresión se reduce a $log(y) = log(c) + (-p)log(x)$. Aplicando cambios de variable apropiados, se obtiene la relación lineal $Y = c_2 + c_1X$.

Se busca el vector C de coeficientes que minimizá $||AC - Y||_2^2$, con $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ X_m & 1 \end{pmatrix}$.
Para esto se deben resolver las ecuaciones normales $A^tAC = A^tY$.

Resolución de las ecuaciones normales: desarrollamos para el caso de g_1 es análogo para g_2 sustituyendo c por d y p por q

$Y = log(y)$, $X = log(x)$, $c_1 = log(c)$, $c_2 = -p$
siendo n el largo del vector X tenemos las ecuaciones normales

$$\begin{cases} \sum Y = n * c_1 + c_2 * \sum X \\ \sum X * Y = c_1 * \sum X + c_2 * \sum X^2 \end{cases} \tag{1}$$

Siendo

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos : $C = (A^t * A) \setminus (A^t * Y)$
Finalmente obtenemos: $c = exp(c_1)$, $p = -c_2$

Aplicación de descomposición QR: Debido a que el calculo de A^tA esta mal condicionado, se aplica la descomposición QR de A. Teniendo que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $m > n$ tiene rango completo (sus columnas son LI), por el teorema 4.3.1 de los apuntes se tiene que existen matrices $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tales que $A = QR$. Con Q ortogonal y R triangular superior de la forma

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $R_1 \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Sustituyendo A por QR, el problema de minimizacion se torna $min||QRC - Y||_2^2$. Separando a Q en dos partes $[Q_1Q_2]$ tal que $Q_1 \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $Q_2 \in \mathcal{M}_{m\times(m-n)}$ y operando, se llega al problema de minimizacion $min||R_1C - Q_1^tY||_2^2$ cuya solución proviene del sistema de ecuaciones $R_1C = Q_1^tY$, que como R_1 es triangular superior se resuelve con sustitución hacia atrás.

1.2 Resolución por Gauss-Newton

Otra manera de resolver el problema sin tener que utilizar logaritmos es a través del uso de los polinomios de taylor lineales. Para esto, para ajustar los puntos X_i, Y_i, con $i \in \{1, .., n\}$

$$F(c, p) = ||X_{c,p} - Y||_2^2$$
$$X_{c,p} = c * X_i^p \forall i \in \{1, ..n\}$$

Con este problema nuevo, asumimos que estamos cerca de una solución y linealizamos el problema a través del polinomio de taylor de orden 1, con la posibilidad de obtener una solución con un error acotado por el cuadrado de la distancia de la solución inicial k

$$F_k = ||F(k) + \Delta F(k)\Delta_{c,p} - Y + o(\Delta_{c,p}^2)||_2^2$$

Haciendo los siguientes cambios de variable obtenemos una secuencia de PMCL que podemos resolver y encontrar soluciones progresivamente mejores

$$\begin{aligned}
F_{k_i} &\equiv \|F(k_i) + \Delta F(k_i)\Delta_{c,p} - Y\|_2^2 \\
Y_{k_i} &= Y - F(k_i) \\
k_{i+1} &= k_i + \min_{\Delta_{c,p}} \|\Delta F(k_i)\Delta_{c,p} - Y_{k_i}\|_2^2
\end{aligned}$$

1.3 Comparación de los Métodos

Los métodos todos llegan a una solución similar, si bien en este caso la solución funciona bien, en otros casos puede que la transformación cambie sustancialmente la precisión del error ya que el logaritmo afecta de manera más profunda a ciertos puntos que a otros. Si los puntos de la gráfica ajustan perfectamente a una curva con los valores, podemos llegar al mismo número con ambas soluciones, pero sino pasa esto (todos los casos que realmente nos importan donde estamos encontrando una mejor aproximación) hay que comparar la fórmula de los errores de las derivadas parciales de las coordenadas de Y frente a la función de ajuste. Se utiliza una simplificación de la fórmula del error asumiendo que la función de ajuste se mantiene estática con el mejor ajuste previo para el punto para mantener el análisis simple.

$$\begin{aligned}
Err(Y_i) &= (X_i - Y_i)^2 \\
Err_{log}(Y_i) &= (log(X_i) - log(Y_i))^2
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Err}{\delta Y_i} &= 2Y_i - 2X_i \\
\frac{\delta Err_{log}}{\delta Y_i} &= 2\frac{log(Y_i) - log(X_i)}{Y_i}
\end{aligned}$$

Conforme los errores sean mayores, el PMCL simplificado va a dar soluciones que valoren menos el error puntual en proporción en el caso de los logaritmos. Por otro lado, es mucho más fácil de calcular con logaritmos. Una cosa que se podría hacer para un problema genérico del estilo es usar primero el problema simplificado con logaritmos y después usar Newton Raphson para llegar a una solución al problema inicial.

2 Ecuaciones Diferenciales

Se busca resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$(PVI): \begin{cases} y'(x) = -g_1(x)y + g_2(x) \\ y(1/2) = 0 \end{cases}$$

2.1 Resolución Analítica

Se resuelve analíticamente en primer lugar a fin de poder evaluar la solución provista por distintos métodos numéricos. En la parte 2 se vio que $g_1(x) = cx^{-2}$ y $g_2(x) = dx^{-3}$ con $c, d \in \mathbb{R}$. La ecuación diferencial es entonces:

$$y' + \frac{c}{x^2}y = \frac{d}{x^3} \tag{2}$$

Solución de la homogénea:

$$\begin{cases} y' + \frac{c}{x^2}y = 0 \\ y_h = exp(-\int cx^{-2}dx) \\ y_h = ke^{c/x} \end{cases}$$

Variación de constantes: Se escribe la función y como $y = k(x)e^{c/x}$. La idea es obtener la expresión de $k(x)$. Se deriva y: $y' = k'(x)e^{c/x} + k(x)\left(-\frac{c}{x^2}e^{c/x}\right)$ Sustituyendo en la EDO, se cancelan dos términos y se despeja $k'(x)$. Integrando la expresión resultante se obtiene $k(x)$.

$$k(x) = \int \frac{d}{x^3}e^{-c/x}dx \tag{3}$$

Aplicando integración por partes con $u = \frac{d}{x}$, $du = -\frac{d}{x^2}$, $v = e^{-c/x}$ y $dv = \frac{c}{x^2}e^{c/x}$ se llega a:

$$k(x) = \frac{1}{c}\left(\frac{d}{x}e^{-c/x} + C_1 + \frac{d}{c}\int e^{-c/x}\frac{c}{x^2}dx\right) \tag{4}$$

Aplicando integración por sustitución con la misma v y dv se tiene que:

$$k(x) = \frac{1}{c}\left(\frac{d}{x}e^{-c/x} + C_1 + \frac{d}{c}e^{-c/x} + C_2\right) = \frac{d}{c}e^{-c/x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{c}\right) + k \tag{5}$$

Finalmente se llega a la expresión de y:

$$y(x) = \frac{d}{c^2} + \frac{d}{cx} + ke^{c/x} \tag{6}$$

Usando la condición inicial $y(1/2) = 0$ se halla que $k = -\frac{d}{c}\left(\frac{1}{c} + 2\right)e^{-2c}$.

2.2 Métodos de Euler

2.3 Implementación de los Métodos de Eueler

2.4 Método de Runge-Kutta

2.5 Comparación de los Resultados

3 Interpolación

j4.1

3.1 Interpolación Lineal a Trozos

3.2 Interpolación con Splines Cúbicos

3.3 Comparación de los Resultados