Métodos Numéricos 2019 - Obligatorio 2

Bruno Figares (4391788-8), Adrián Gioda (4954044-5),
Daniel Martinez (4462694-5), Adriana Soucoff (3190794-8)

Instituto de Matemática y Estadística
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

1 Mínimos Cuadrados

1.1 Transformación a PMCL

El modelo de ambas funciones tiene la forma $y = cx^{-p}$. Esta puede transformarse en una relación lineal aplicando un logaritmo a ambos lados de la expresión de esta forma, $log(y) = log(cx^{-p})$. Por propiedades de los logaritmos, la expresión se reduce a $log(y) = log(c) + (-p)log(x)$. Aplicando cambios de variable apropiados, se obtiene la relación lineal $Y = c_2 + c_1X$.

Se busca el vector C de coeficientes que minimizá $||AC - Y||_2^2$, con $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ X_m & 1 \end{pmatrix}$.
Para esto se deben resolver las ecuaciones normales $A^tAC = A^tY$.

Resolución de las ecuaciones normales: desarrollamos para el caso de g_1 es análogo para g_2 sustituyendo c por d y p por q

$Y = log(y)$, $X = log(x)$, $c_1 = log(c)$, $c_2 = -p$
siendo n el largo del vector X tenemos las ecuaciones normales

$$\begin{cases} \sum Y = n * c_1 + c_2 * \sum X \\ \sum X * Y = c_1 * \sum X + c_2 * \sum X^2 \end{cases} \tag{1}$$

Siendo

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos : $C = (A^t * A) \setminus (A^t * Y)$
Finalmente obtenemos: $c = exp(c_1)$, $p = -c_2$

Aplicación de descomposición QR: Debido a que el calculo de A^tA esta mal condicionado, se aplica la descomposición QR de A. Teniendo que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, con $m > n$ tiene rango completo (sus columnas son LI), por el teorema 4.3.1 de los apuntes se tiene que existen matrices $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}$, $R \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tales que $A = QR$. Con Q ortogonal y R triangular superior de la forma

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $R_1 \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Sustituyendo A por QR, el problema de minimizacion se torna $min||QRC-Y||_2^2$. Separando a Q en dos partes $[Q_1Q_2]$ tal que $Q_1 \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $Q_2 \in \mathcal{M}_{m\times(m-n)}$ y operando, se llega al problema de minimizacion $min||R_1C - Q_1^tY||_2^2$ cuya solución proviene del sistema de ecuaciones $R_1C = Q_1^tY$, que como R_1 es triangular superior se resuelve con sustitución hacia atrás.

1.2 Resolución por Gauss-Newton

1.3 Comparación de los Métodos

2 Ecuaciones Diferenciales

Se busca resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$(PVI) : \begin{cases} y'(x) = -g_1(x)y + g_2(x) \\ y(1/2) = 0 \end{cases}$$

2.1 Resolución Analítica

Se resuelve analíticamente en primer lugar a fin de poder evaluar la solución provista por distintos métodos numéricos. En la parte 2 se vio que $g_1(x) = cx^{-2}$ y $g_2(x) = dx^{-3}$ con $c, d \in \mathbb{R}$. La ecuación diferencial es entonces:

$$y' + \frac{c}{x^2}y = \frac{d}{x^3} \tag{2}$$

Solución de la homogénea:

$$\begin{cases} y' + \frac{c}{x^2}y = 0 \\ y_h = exp(-\int cx^{-2}dx) \\ y_h = ke^{c/x} \end{cases}$$

Variación de constantes: Se escribe la función y como $y = k(x)e^{c/x}$. La idea es obtener la expresión de $k(x)$. Se deriva y: $y' = k'(x)e^{c/x} + k(x)\left(-\frac{c}{x^2}e^{c/x}\right)$ Sustituyendo en la EDO, se cancelan dos términos y se despeja $k'(x)$. Integrando la expresión resultante se obtiene $k(x)$.

$$k(x) = \int \frac{d}{x^3}e^{-c/x}dx \tag{3}$$

Aplicando integración por partes con $u = \frac{d}{x}$, $du = -\frac{d}{x^2}$, $v = e^{-c/x}$ y $dv = \frac{c}{x^2}e^{c/x}$ se llega a:

$$k(x) = \frac{1}{c}\left(\frac{d}{x}e^{-c/x} + C_1 + \frac{d}{c}\int e^{-c/x}\frac{c}{x^2}dx\right) \tag{4}$$

Aplicando integración por sustitución con la misma v y dv se tiene que:

$$k(x) = \frac{1}{c}\left(\frac{d}{x}e^{-c/x} + C_1 + \frac{d}{c}e^{-c/x} + C_2\right) = \frac{d}{c}e^{-c/x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{c}\right) + k \tag{5}$$

Finalmente se llega a la expresión de y:

$$y(x) = \frac{d}{c^2} + \frac{d}{cx} + ke^{c/x} \tag{6}$$

Usando la condición inicial $y(1/2) = 0$ se halla que $k = -\frac{d}{c}\left(\frac{1}{c} + 2\right)e^{-2c}$.

2.2 Métodos de Euler

2.3 Implementación de los Métodos de Eueler

2.4 Método de Runge-Kutta

2.5 Comparación de los Resultados

3 Interpolación

3.1 Interpolación Lineal a Trozos

3.2 Interpolación con Splines Cúbicos

3.3 Comparación de los Resultados