

**Bruno Coswig Fiss**  
**Kauê Soares da Silveira**

***GRASP aplicado ao problema de aterrissagem de aviões***

INF05010 – Otimização Combinatória

Professor: Marcus Rolf Peter Ritt

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

1º de julho de 2010

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Descrição do problema</b>	p. 3
1.1	Descrição formal . . . . .	p. 3
1.2	Formulação como um programa inteiro . . . . .	p. 3
1.3	Representação de um solução . . . . .	p. 4
<b>2</b>	<b>Algoritmo proposto</b>	p. 5
2.1	Idéia geral . . . . .	p. 5
2.2	GRASP . . . . .	p. 5
2.2.1	Criação de soluções . . . . .	p. 5
2.2.2	Vizinhança e busca local . . . . .	p. 6
<b>3</b>	<b>Experimentos</b>	p. 7
3.1	Configurações . . . . .	p. 7
3.2	Resultados . . . . .	p. 7
3.3	Análise . . . . .	p. 9
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 10

# 1 *Descrição do problema*

## 1.1 Descrição formal

O problema de aterrissagem de aviões consiste em definir um momento no tempo para a aterrissagem de cada avião  $i \in P$ , sendo  $P$  o conjunto de aviões. Cada avião possui os seguintes dados:

$E_i$ : Momento mais prematuro em que o avião  $i$  pode realizar pouso.

$T_i$ : Momento ideal para pouso do avião  $i$ .

$L_i$ : Momento mais tardio em que o avião  $i$  pode realizar pouso.

$g_i$ : Penalidade por unidade de tempo da diferença do pouso para o tempo ideal se o avião chegar mais cedo do que o ideal.

$h_i$ : Penalidade por unidade de tempo da diferença do pouso para o tempo ideal se o avião chegar mais tarde do que o ideal.

$S_{ij}$ : Distância de tempo requerida após o pouso do avião  $i$  para que o avião  $j$  possa pousar.

O objetivo é encontrar uma solução com somatório de todas as penalidades mais baixo possível.

## 1.2 Formulação como um programa inteiro

O seguinte programa inteiro descreve o problema acima descrito:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimiza} & \sum_{i \in P} g_i \alpha_i + h_i \beta_i \\
 \text{sujeito a} & x_i = -\alpha_i + \beta_i + T_i, \quad \forall i \in P \\
 & E_i \leq x_i \leq L_i, \quad \forall i \in P \\
 & x_j - x_i \geq S_{ij} \delta_{ij} + (E_j - L_i) \delta_{ji}, \quad \forall i, j \in P \\
 & \delta_{ij} + \delta_{ji} = 1, \quad \forall i, j \in P \\
 & x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in P \\
 & \alpha_i \geq 0, \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in P \\
 & \beta_i \geq 0, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i \in P \\
 & \delta_{ij} \in \mathbb{B}, \quad \forall i, j \in P
 \end{array}$$

A variável  $x_i$  representa o momento da aterrissagem do avião  $i$ . As variáveis  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  indicam a diferença para menos ou mais, respectivamente, do momento da aterrissagem para o momento ideal de aterrissagem do avião  $i$ .  $\delta_{ij}$  é uma variável binária que indica se o avião  $i$  aterrissa antes do avião  $j$ .

A formulação do programa inteiro foi realizada pelos autores antes da leitura de artigos relacionados com o problema, que por sua vez continham uma formulação similar. Para facilitar a compreensão, tornamos a simbologia utilizada por nós semelhante à utilizada nesses artigos [1, 2].

### 1.3 Representação de um solução

O programa inteiro que descreve o problema aqui tratado é misto, possuindo variáveis reais além de inteiras. Como o objetivo desse trabalho é aplicar uma meta-heurística a um problema inteiro, separamos a solução em duas partes, uma inteira e outra real.

A parte inteira da solução é a que contém as variáveis  $\delta_{ij}$ , que descrevem, em conjunto, a ordem de chegada dos aviões. O caminho inverso também é válido, ou seja, uma determinada ordem de chegada dos aviões descreve completamente as variáveis  $\delta_{ij}$ . Já a parte linear contém as demais variáveis.

Portanto, representaremos uma solução como uma sequência de aviões que descreve a ordem de chegada desses. Após obter a solução inteira do problema, basta resolver o programa linear restante para obter a solução completa do problema.

## 2 *Algoritmo proposto*

### 2.1 Idéia geral

Nosso algoritmo utiliza a biblioteca GLPK (GNU linear programming kit) para resolução das partes lineares do problema sendo tratado.

Primeiramente, definimos o problema inteiro utilizando os dados lidos da entrada e as funções para criação de restrições disponibilizadas pela biblioteca GLPK. Após esse passo é possível utilizar o *solver* interno do GLPK para resolver o problema inteiro, utilizando o método branch-and-cut. Essa característica foi requisitada na especificação do trabalho da disciplina, e também permite a comparação entre as soluções atingidas pelo algoritmo do GLPK e pelo método GRASP, além da comparação entre o desempenho na obtenção dessas.

Após isso, utilizamos a meta-heurística GRASP para criar soluções para a parte inteira do problema, ou seja, sequências de aviões que definem a ordem de chegada desses. Para cada solução inteira, modificamos as restrições do problema inteiro criado no primeiro passo de forma que ele respeite a ordem presente na sequência e torne-se, por consequência, linear. Cada programa linear gerado é então resolvido através do método simplex utilizando uma rotina da biblioteca GLPK.

Isso é feito para cada solução inteira gerada pelo método GRASP, tanto para as soluções geradas durante a construção gulosa aleatória quanto para as soluções geradas na busca local (soluções vizinhas da solução atual). A melhor solução encontrada é armazenada e impressa ao fim do algoritmo.

### 2.2 GRASP

Decidimos utilizar esse método pois ele cria soluções, de forma aleatória, utilizando recursos e conhecimento sobre o problema, para, por exemplo, construir um custo heurístico da adição de um elemento a uma solução parcial e assim construir soluções mais efetivamente. Isso inicialmente pareceu ser eficiente e inteligente, e nossas conclusões podem ser vistas na seção 3.3.

#### 2.2.1 Criação de soluções

A utilização de uma meta-heurística como o GRASP tem como primeira etapa a definição dos conjuntos, funções e parâmetros necessários para a definição do problema combinatório a ser resolvido. Utilizaremos os conjuntos, funções e parâmetros citados no artigo de Resende e Ribeiro [3] para formalização do nosso método.

Seguindo o artigo, os conjuntos  $E, F \subseteq 2^E$  e a função  $f : 2^E \rightarrow \mathbb{R}$  foram definidos. O conjunto  $E$  de elementos

que possivelmente fazem parte da solução é o conjunto de variáveis  $\delta_{ij}$ . O conjunto  $F$  é o conjunto de todos os conjuntos de variáveis  $\delta_{ij}$  tal que, caso as variáveis do conjunto sejam todas definidas como tendo valor 1, e as variáveis  $\delta_{ij}$  que não estiverem no conjunto forem definidas como tendo valor 0, existe uma solução para o programa linear resultante. A função de custo  $f$  mapeia um dado conjunto de variáveis  $\delta_{ij}$  para o custo da solução mínima do programa linear em que as variáveis pertencentes ao conjunto são definidas como 1 e as demais como 0.

Além disso, as meta-construções do algoritmo GRASP precisam ser instanciadas, e essas são a representação da solução e de cada elemento a ser adicionado a essa, a RCL (Restricted Candidate List), e o parâmetro  $\alpha$ , além dos parâmetros para controle do término do algoritmo, que aqui são  $iter_{max}$  e  $time_{max}$ .

A representação de uma solução será a ordem da chegada dos aviões, que por sua vez será representada por uma sequência de aviões, na qual um avião chega antes de outro se estiver mais à esquerda na sequência. Os elementos a serem adicionados, passo a passo, para a construção da solução, são os próprios aviões. Dado um parâmetro  $\alpha$ , em um determinado passo da construção da solução, nossa RCL é o conjunto de aviões que estão posicionados, na sequência ideal, a até  $\alpha$  posições da posição a ser adicionada na solução atual e que, se forem adicionados, não tornarão a solução inviável. E.g., dada a sequência ideal 1,2,6,4,5,3, o parâmetro  $\alpha = 2$  e a solução atual ser 1,4, a RCL seria  $\{6,2,5\}$  desde que a adição de qualquer um desses elementos à solução atual mantivesse-a viável.

A sequência ideal é definida inicialmente como a ordem de chegada dos aviões caso todos eles chegassem no seu tempo ideal. Se uma dada solução obtiver um custo menor do que a sequência ideal, a sequência que define a nova solução se tornará a sequência ideal.

Para efetivamente testar a sequência ideal, nossa primeira iteração utiliza  $\alpha = 0$ , ou seja, uma construção totalmente gulosa.

Após a realização de testes e do estudo da variação Reactive GRASP da meta-heurística GRASP, decidimos implementar parte das variações no nosso algoritmo. A variação implementada é simples: o parâmetro  $\alpha$  é, a cada iteração, sorteado aleatoriamente entre 0 e um novo parâmetro, chamado  $\alpha_{max}$ .

Os parâmetros  $iter_{max}$  e  $time_{max}$  definem, respectivamente, o número máximo de iterações da e o tempo máximo em segundos gastos na heurística GRASP.

### 2.2.2 Vizinhaça e busca local

A busca local pode ser feita de duas formas: com o primeiro incremento ou com o melhor incremento. Decidimos utilizar o primeiro incremento, ou seja, pesquisamos a vizinhaça de uma dada solução em busca de uma solução melhor e, quando encontramos a primeira, passamos a considerar essa nova solução encontrada como a solução atual, buscando agora uma solução melhor na vizinhaça da atual.

Resta definirmos o que é a vizinhaça de uma solução, o que é feito a seguir: uma dada solução, representada por uma sequência de aviões na qual dois aviões adjacentes foram trocados, um sendo colocado no lugar do outro, e nenhuma outra modificação ocorrendo, é vizinha da solução original, sem a troca dos aviões. A vizinhaça de uma dada solução é simplesmente o conjunto de todos os vizinhos dessa.

## 3 *Experimentos*

### 3.1 Configurações

Os testes realizados tiveram por objetivo testar a eficácia da nossa abordagem dadas diferentes sementes aleatórias e parâmetros  $\alpha_{max}$ . Testamos, é claro, esses parâmetros para cada caso de entrada.

Para repetir os testes, basta compilar o arquivo `avioes.c`, ligá-lo à biblioteca GLPK criando um executável chamado `Avioes.exe`, compilar o arquivo `experimentos.c`, e executar o arquivo resultante da ligação e montagem do objeto proveniente da compilação de `experimentos.c`. As compilações podem ser realizadas com o compilador `gcc`. A ligação e montagem dependem do sistema operacional utilizado, além da localização da biblioteca GLPK.

Os resultados serão concatenados ao conteúdo do arquivo `out.txt` no formato de uma tabela no estilo  $\text{\LaTeX}$  com o mesmo formato da tabela 3.1, porém sem o desvio para a solução ótima.

### 3.2 Resultados

Em todos os testes o limite de iterações do método foi 100 e o limite de tempo foi de 20 segundos. Vários casos passaram de 20 segundos pois o limite de tempo só é verificado ao final de cada iteração, que pode ser longa.

Tabela 3.1: Tabela de resultados dos experimentos

Caso	$\alpha_{max}$	Semente	Solução	Tempo utilizado (s)	Desvio para solução ótima (%)
airland1	1	14766	700	1	0
airland1	2	20024	700	2	0
airland1	3	19673	700	1	0
airland1	4	23915	700	2	0
airland1	5	710	700	2	0
airland2	1	22574	1.480	5	0
airland2	2	26494	1.480	9	0
airland2	3	11040	1.480	8	0
airland2	4	27382	1.480	9	0
airland2	5	11503	1.500	10	1.33
airland3	1	15751	820	18	0
airland3	2	14185	820	21	0
airland3	3	31028	820	21	0
airland3	4	20012	820	21	0
airland3	5	17962	820	21	0
airland4	1	26543	2.520	18	0
airland4	2	23571	2.520	21	0
airland4	3	21435	2.520	21	0
airland4	4	3896	2.520	21	0
airland4	5	21136	2.520	21	0
airland5	1	20362	3.100	21	0
airland5	2	19016	3.100	21	0
airland5	3	28928	3.100	21	0
airland5	4	13363	3.100	21	0
airland5	5	4087	3.100	21	0
airland6	1	27207	24.442	1	0
airland6	2	14705	24.442	1	0
airland6	3	31960	24.442	2	0
airland6	4	32355	24.442	1	0
airland6	5	15148	24.442	1	0
airland7	1	4734	1.550	12	0
airland7	2	11699	1.550	13	0
airland7	3	23048	1.550	13	0
airland7	4	30431	1.550	14	0
airland7	5	10183	1.550	14	0
airland8	1	30714	1.950	21	0
airland8	2	13072	1.950	33	0
airland8	3	16746	1.950	40	0
airland8	4	20341	1.950	21	0
airland8	5	21053	1.950	28	0



### 3.3 Análise

Como pode-se perceber, a abordagem gulosa é extremamente eficaz na resolução desse problema, sendo que a utilização de  $\alpha = 0$  na geração de uma solução gera a melhor solução ou um vizinho próximo dessa em 7 dos 8 casos de entrada testados. No caso *airland2*, a solução inicial gera, por busca local, uma solução com custo de 1500, porém com algumas iterações do método, utilizando um  $\alpha$  variável, a melhor solução, com custo de 1480, é quase sempre encontrada. A única exceção ocorre quando  $\alpha_{max}$  possui valor 5 (ou maior), pois, como *airland2* considera 15 aviões no total, a criação de soluções fica muito próxima da geração aleatória, o que mostra-se menos efetivo. Com mais iterações (200), entretanto, o resultado volta a ser 1480, visto que, com menor probabilidade de gerar uma solução boa, mais tentativas são necessárias para isso.

Pode-se concluir que o método é bastante afetado pela escolha da função que determina o custo incremental da adição de um dado elemento à solução que está sendo gerada, ou seja, a parte gulosa do algoritmo. No caso desse trabalho, a função, que determina esse custo pela posição do avião na sequência ideal, parece ter sido bem escolhida, o que gerou soluções ótimas em quase todos os casos.

Além disso, o parâmetro  $\alpha$  é vital, o que nos levou a decidir não utilizar o método GRASP padrão, mas uma variação do Reactive GRASP, que decide o valor de  $\alpha$  de forma aleatória com probabilidade uniforme para todos os  $\alpha$  entre 0 e  $\alpha_{max}$ . Essa escolha também parece ter ajudado no sucesso da abordagem.

## ***Referências Bibliográficas***

- [1] J. E. Beasley, M. Krishnamoorthy, Y. M. Sharaiha, and D. Abramson. Scheduling aircraft landings—the static case. *Transportation Science*, 34(2):180–197, 2000.
- [2] J. E. Beasley, M. Krishnamoorthy, Y. M. Sharaiha, and D. Abramson. Displacement problem and dynamically scheduling aircraft landings. *Transportation Science*, 55(1):54–64, 2004.
- [3] Mauricio G. C. Resende and Celso C. Ribeiro. Greedy randomized adaptive search procedures, 2002.